공 학 석 사 학 위 논 문

경사면 이동도립진자의 안정화를 위한 슬라이딩모드 제어기 설계

2010 년　2 월

부 경 대 학 교 대 학 원

메카트로닉스 협동과정

최 락 순

공 학 석 사 학 위 논 문

경사면 이동도립진자의 안정화를 위한 슬라이딩모드 제어기 설계

지도교수 김 상 봉

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함.

2010 년 2 월

부 경 대 학 교 대 학 원

메카트로닉스 협동과정

최 락 순

최락순의 공학석사 학위논문을 인준함.

2010년　2월

주　　심　공학박사　정 영 석 (인)

위　　원　공학박사　오 정 환 (인)

위　　원　공학박사　김 상 봉 (인)

목 차

Sliding Mode Controller Design for Stabilizing of Mobile Inverted Pendulum on the Inclined Plane

Nak Soon Choi

Dept. of Interdisciplinary Program of Mechatronics Engineering

The Graduate School, Pukyong National University

Abstract

The mobile inverted pendulum replaced by human being must keep its balancing and autonomous control, move forward, backward and turn on a flat plane and an inclined plane.

This thesis presents a sliding mode controller to stabilize the mobile inverted pendulum on a flat plane and an inclined plane which can move forward and backward and turn. It also presents development results of the mobile inverted pendulum as follows.

The mobile inverted pendulum is composed of an inverted pendulum and a chassis with two coaxial wheels.

The nonlinear dynamic modeling of the mobile inverted pendulum is derived using Newton formula. The derived nonlinear dynamic modeling of the mobile inverted pendulum is linearized.

The decoupling method is also presented to control the rotation around the z axis independently of the rotation around y axis. It transforms torques of y and z axis into the wheel torques.

Based on the linearized dynamic modeling, a sliding mode controller is presented to stabilize the mobile inverted pendulum that can move forward and backward, and turn on the flat plane and inclined plane. To design the sliding mode controller, a switching function is defined based on a sliding surface matrix and state variable vector. The sliding surface matrix is designed based on an optimal control theory to minimize the quadratic performance. A control law is designed to stabilizing a switching function using reachability conditions to the sliding surface.

A control system to implement the designed controller is developed based on TMS320F28335 microcontroller. To obtain information of the mobile inverted pendulum state variables, the following sensors are used: encoder, gyro sensor and accelerometer. The angle of the mobile inverted pendulum is measured using the gyro sensor and the accelerometer. The complementary filter is designed to compensate a gyro sensor's accumulative error and to fuse with gyro sensor and accelerometer. The mobile inverted pendulum is manufactured to experiment the proposed controller.

Finally, the simulation and experimental results are shown to prove the effectiveness of the proposed controllers.

제 1 장 서 론

1.1 연구 배경 및 동기

오늘날 전세계적으로 주된 운송수단은 석유에너지를 사용하는 자동차이다. 에너지 전문가들은 많은 석유에너지 소비로 인한 에너지 고갈에 대한 심각성을 경고하고 있으며, 또한 에너지 고갈 못지 않게 심각한 문제는 대기오염과 같은 환경오염이 사회적 문제로 대두되고 있다. 이런 사회적 배경으로 인해 세계 각국은 환경 규제 강화와 친환경 자동차에 대한 사회적 요구에 대응하여 하이브리드 자동차, 수소자동차, 전기자동차와 연료전지 자동차 등 여러가지 미래형 자동차에 대한 연구 개발되고 상용화되고 있다. 그러나 전세계 뿐만 아니라 우리나라도 자동차 보유대수가 천만대가 넘어서 도로는 이미 포화상태이다.

최근에 대중교통의 대체 이동 수단에 대한 관심이 높다. Fig. 1.1은 유럽에서 대중교통수단으로 제안되어 개발되고 있는 B2이다. 이것은 이동도립진자형의 두 개의 바퀴를 가지고 있어 차량의 접근이 제한된 도심의 좁은 거리를 빠르게 이동할 수 있다. 작은 크기와 줄어든 중량은 연료의 효율성을 향상시킬 수 있으나 개발 비용과 유지 보수 등의 문제점을 가지고 있다[2].

Fig. 1.1 B2 as Envisioned for Public Service

대중교통수단이 아닌 개인용 이동 수단을 살펴보면, Dean Kamen에 의해 발명된 Fig. 1.2와 같은 SEGWAY가 있다[3]. 이것은 플랫폼 위에 서 있는 사람을 두 개의 바퀴로 균형을 유지하고 좁은 공간에서 안정적인 주행이 가능하다. 조종 손잡이를 가지고 있어 좌우로 방향 전환이 가능하고 제자리에서 360° 회전이 가능하다. SEGWAY의 기울기를 측정하기 위해서 다수의 자이로 센서와 기울기 센서로 구성되어 있다. 전체 시스템에서는 단지 3개의 자이로 센서만 사용하고 나머지 다른 센서들은 안전예방용으로 포함되어 있다. 이러한 SEGWAY는 Fig. 1.3과 같이 많은 연구기관에서 이동 플랫폼으로 적용하여 상부의 로봇 시스템의 제어와 SEGWAY SOCCER에 대한 연구가 이루어지고 있다[4-6].

Fig. 1.2 SEGWAY

Fig. 1.3 SEGWAY Robotic Mobility Platform(RMP)

하지만 SEGWAY의 기울기 측정에 사용되는 매우 고가의 자이로 센서와 기울기 센서를 사용하므로 일반적으로 사용하기에는 큰 어려움이 있으므로 이에 신경망 제어기를 사용하여 저가의 자이로 센서의 성능을 향상시키는 것에 대한 연구가 이루어졌다[7]. 또한 자이로 센서는 시간이 지남에 따라 발생하는 누적오차로 정확한 기울기 측정에 어렵게 된다. 따라서 이러한 문제를 개선하기 위해서 자이로 센서의 누적오차 보상에 관한 연구가 절실히 요구된다.

이동도립진자의 주된 목적인 안정화에 대한 몇몇의 연구와 제어기법이 소개되었다. 1984년 K. Furuta 등은 삼중 도립진자의 안정화를 위해 컴퓨터 제어를 행하였으며, 1988년 Q. Feng 등은

극점 배치법과 최적제어기법을 비교하여 도립진자의 안정화에 대한 시뮬레이션 결과를 발표하였다[8,9]. 그러나 이 결과는 시스템의 상태가 평형점 주위의 미소 변위에서 선형화된 근사 모델에 대해서만 만족되며, 시스템의 상태가 평형점에서 벗어나면 안정화되지 못하는 단점을 가지고 있으므로, 비선형성을 고려한 제어가 요구된다. 2002년에 F. Grasser등은 JOE라는 이동도립진자를 만들었다[1]. 이것은 각 바퀴에 기어박스가 연결된 DC 모터로 구동되는 대차와 도립진자로 구성되어 있다. 도립진자 시스템의 균형을 유지하기 위하여 필요한 여러가지 센서를 기반으로 하여 선형화된 모델을 제어하게 된다. 2007년 S. Y. Seo등은 이동도립진자의 자세 제어에 대하여 기구학적으로 불안정한 도립진자 시스템의 제어이득 결정을 위하여 LQR(Linear Quadratic Regulator) 제어기를 선택하였다[10]. 이러한 선형제어들은 이론적으로 제어기의 구조가 복잡하지 않아 널리 사용된다[11-22]. 그러나 시스템에 불확실성이나 외란이 발생할 경우, 제어기가 만족할 만한 성능을 발휘하지 못할 수가 있다. 따라서 이동도립진자의 불확실성과 외란이 발생할 경우, 안정성을 가지는 강인한 제어기법이 요구된다. 이러한 요구를 만족시키는 비선형 제어기들 중 슬라이딩 모드 제어기가 제안된다. 이러한 슬라이딩 모드 제어기를 이동도립진자에 적용하면 외란이 발생하더라도 높은 강인성을 가지게 되어 우수한 제어성능을 보인다. 1998년 J. Ackermann등은 Ackermann 공식을 기반으로 한 슬라이딩모드 제어기를 설계하고 제어기 성능을 시뮬레이션 결과로만 증명하였다[23]. 2007년 M. T. Kang은 모터의 회로방정식을

이동도립진자의 역학적 운동방정식과 결부한 동력학적 모델링 식을 제안하였고, 이 모델링에 기반을 두어 Ackermann 공식을 이용한 슬라이딩 모드 제어기를 설계하고 제어기 성능을 시뮬레이션과 실험 결과로 증명하였다[29].

상기 내용에 기반하여, 본 연구에서는 이동도립진자를 개발하고 이를 정확히 제어하는데 그 목적이 있다. 이동도립진자 몸체의 기울기 측정을 위하여 상용화된 저가의 자이로 센서와 가속도 센서를 사용하고 각 센서의 주파수 특성을 분석하여 자이로 센서의 누적오차 보상 및 센서 융합을 위한 보상필터 설계법에 대하여 소개한다. 이동도립진자는 수평면뿐만 아니라 경사진 지형에서도 항상 몸체의 균형 유지를 위해 제어가 가능하여야 한다. 여기서 경사진 지형은 이동도립진자의 모델에 외란으로 존재하게 되고 이러한 외란을 충분히 제어 가능한 슬라이딩모드 제어기를 설계하여 강인성을 알아보는데 본 연구의 목적이 있는 것이다.

1.2 연구 방법 및 내용

최근에 개인 이동 수단으로 많이 이용되는 이동도립진자는 주행이나 방향 전환 시 수평면과 경사진 지형 등 다양한 환경조건에서 항상 몸체의 안정성을 확보하기 위해 자율적인 제어가 가능하여야 한다.

본 연구는 수평면 및 경사면 위에서도 전후방향 이동 및 회전 가능한 이동도립진자를 안정화하기 위한 슬라이딩모드 제어기를 제안하고, 본 연구의 내용을 다음과 같이 요약한다.

첫째, 이동도립진자의 구성에 대해 서술한다. 이동도립진자는 몸체와 동일한 축에 배치된 두 개의 구동바퀴로 구성되어 있다. 이동도립진자가 수직방향으로 안정화 되고 전후방향 이동 및 회전이 가능하게 하기 위해서 2 개의 모터가 양쪽 바퀴를 구동하게 된다.

둘째, 이동도립진자는 뉴턴 공식을 이용하여 수평면과 경사면에 대하여 각각의 비선형 모델을 고려한 모델링을 수행하고, 선형화 과정을 통하여 선형화된 동력학적 모델을 제시한다.

셋째, 상태공간 방정식으로부터 z 축 및 y 축에 대한 회전 토크들과 좌우 바퀴에 대한 입력 토크들과의 변환 관계를 구하는 decoupling 제어기법을 제시한다. 또, 이동도립진자의 모델링을 바탕으로 수평면 및 이동도립진자에 외란으로 작용하는 경사면 위에서도 전후방향 이동 및 회전 가능한 이동도립진자를 안정화시키기 위하여 강인한 제어 성능을 보이는 슬라이딩모드

제어기를 제안한다. 슬라이딩모드 제어기를 설계하기 위해서는 먼저 슬라이딩평면벡터와 상태변수벡터를 이용하여 스위칭 함수를 정의한다. 이 슬라이딩평면벡터의 설계는 최적 제어 이론에 근거하여 결정되며, 스위칭함수의 슬라이딩평면으로의 도달조건을 이용하여 스위칭함수를 영으로 하는 제어칙이 설계된다.

넷째, 설계된 제어기를 구현하기 위한 제어시스템은 TMS320F28335를 기반으로 개발한다. 또한 본 연구의 실험을 위한 이동도립진자를 제작한다. 이동도립진자의 위치 및 선속도는 모터에 부착된 엔코더를 이용하여 측정되며, 이동도립진자 몸체의 기울기는 자이로 센서와 가속도 센서를 이용하고, 자이로 센서의 누적오차 보상 및 자이로 센서와 가속도 센서와의 융합을 위한 보상필터의 설계법을 소개하고 이를 적용하여 기울기를 측정한다.

다섯째, 제어기의 유효성을 검증하기 위해 시뮬레이션과 실험 결과를 제시한다.

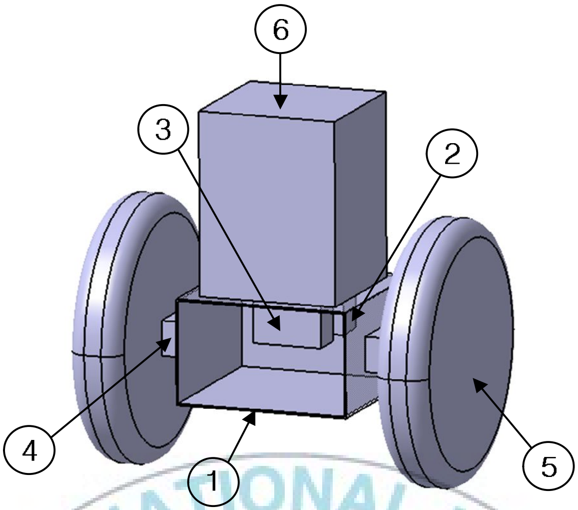
마지막으로, 본 연구의 결론 및 향후 연구에 대하여 기술한다.

제 2 장 이동도립진자 시스템의 구성 및 모델링

본 장에서는 이동도립진자의 시스템 구성을 서술하고, 또한 수평면과 경사면에서 이동도립진자의 직선주행과 제자리 회전을 위한 각각의 동력학적 모델링을 제시한다.

2.1 이동도립진자 시스템의 구성

본 연구에 사용된 이동도립진자의 구성은 Fig. 2.1과 같다. 이동도립진자는 몸체, 구동바퀴, 제어시스템과 센서들로 구성되며, 핸들은 대차에 고정되어 있다. 제어시스템, 자이로 센서, 가속도 센서가 대차의 윗면에 설치된다. 2개의 구동바퀴들이 대차의 좌우에 설치되어 DC모터에 의해 구동되며 이동도립진자의 균형유지와 주행을 하도록 한다. 각각의 모터에는 엔코더가 부착되어 몸체의 이동거리와 바퀴의 회전속도를 측정하게 된다. 이동도립진자를 제어하기 위한 제어시스템은 마이크로프로세서 DSP TMS320F28335를 사용하였다. 또한 자이로 센서와 가속도 센서를 융합하여 몸체의 기울기 및 회전각속도를 측정한다. 그리고 본 연구에 개발된 실제 이동도립진자를 Fig. 2.2에 나타낸다.



① Platform	② DSP TMS320F28335
③ Gyro sensor & Accelerometer	④ Motor & Encoder
⑤ Wheel	⑥ Chassis

Fig. 2.1 Configuration of Mobile Inverted Pendulum

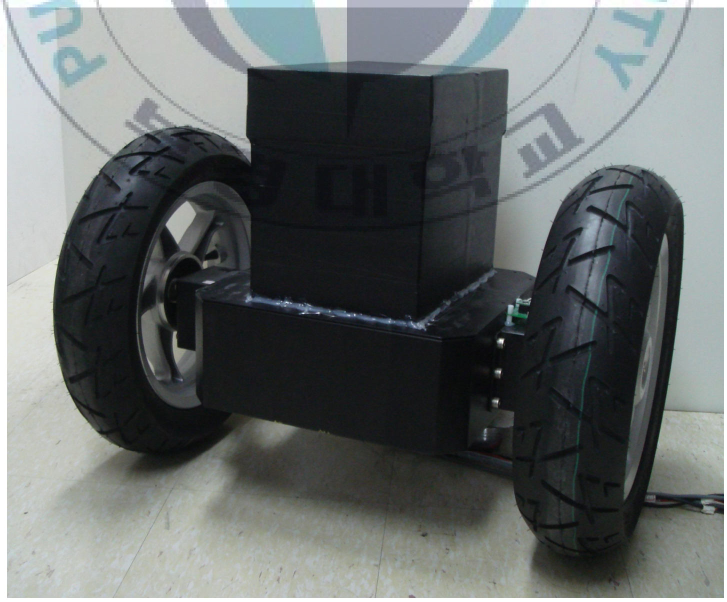


Fig. 2.2 Mobile Inverted Pendulum

2.2 이동도립진자 제어시스템의 구성

이동도립진자를 제어하기 위한 제어시스템의 구성도는 Fig. 2.3과 같다.

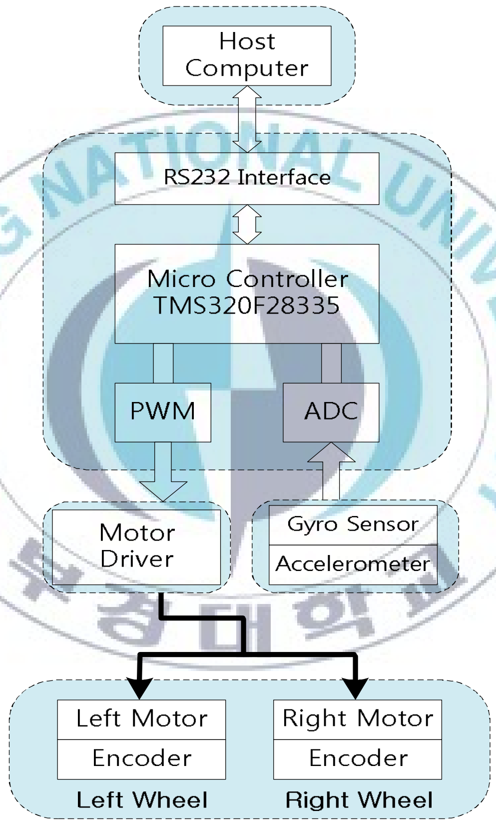


Fig. 2.3 Configuration of Control System

이 제어시스템은 호스트 컴퓨터부, 마이크로 컨트롤러부, 엑츄에이터 드라이버부, 센서부, 그리고 엑츄에이터부로 구성된다. 호스트 컴퓨터는 RS232 시리얼 통신을 이용하여 이동도립진자의

수동조작을 위한 명령 전달과 데이터수집을 하고, 마이크로 컨트롤러부는 DSP TMS320F28335를 사용하여 모터에 부착된 엔코더와 센서부의 신호를 계속적으로 입력을 받아 제어 연산을 수행한 후 PWM 제어 신호를 엑츄에이터 드라이버부에 출력한다. 엑츄에이터부는 DC모터 2개로 구성되고 바퀴를 구동한다. 센서부는 자이로 센서와 가속도 센서로 구성되어 있고, 센서 신호를 마이크로 컨트롤러에 전송하여 몸체의 기울기를 구하는데 사용된다. Fig. 2.4는 본 연구에 개발된 실제 제어시스템을 나타낸다.

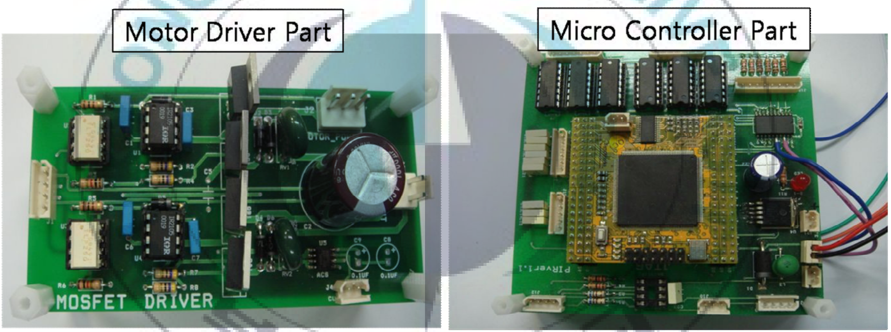


Fig. 2.4 Control system

2.3 이동도립진자의 동력학적 모델링

이 절에서는 수평면과 경사면에 대한 이동도립진자의 직선주행과 제자리 회전을 위한 동력학적 모델을 제시한다.

2.3.1 수평면 동력학적 모델링

Fig. 2.5은 수평면 위를 제자리 회전 및 직선운동하는 이동도립진자의 동력학적 모델링을 위한 좌표계로 표현한 것이다.

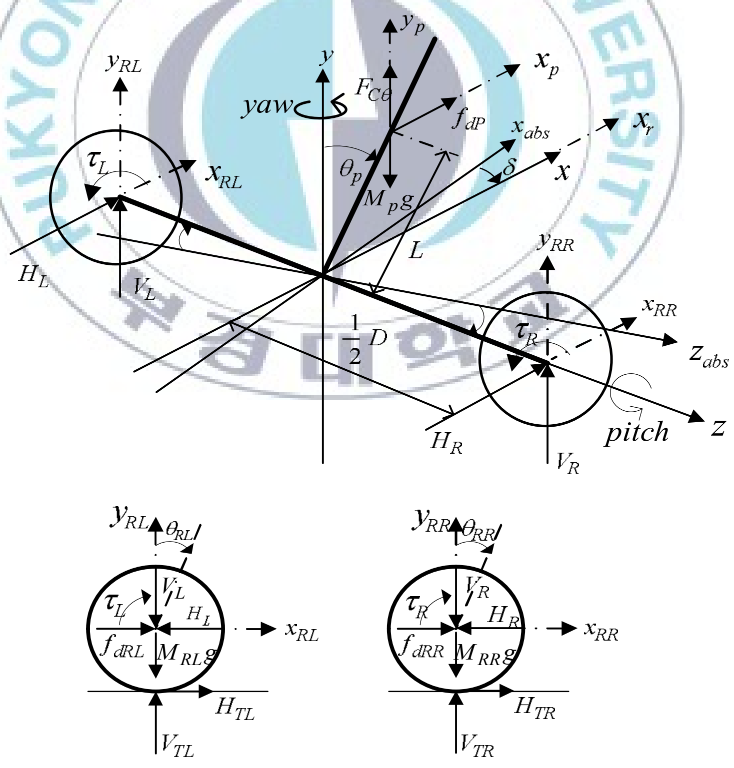


Fig. 2. 5 Free body diagram of the Mobile Inverted Pendulum

이동도립진자의 동력학적 모델링을 위해서, 다음과 같은 가정이 제시된다.

(1) 모델링의 단순화를 위해 좌우 구동바퀴는 지표면에 항상 밀착되어 있다고 가정하면 좌우 구동바퀴의 y 축 방향의 변위는 $y_{RL}=0,\ y_{RR}=0$ 이다.

(2) 미끄러짐은 없이 순수 회전한다고 가정한다.

(3) 몸체의 전진방향의 대칭축에 수직방향으로는 움직일 수 없다고 가정한다.

Table 2.1은 이동도립진자의 모델링을 위한 매개변수들을 표시한 것이다. θ_p 와 $\dot{\theta}_p$ 는 각각 z 축에 대한 회전각과 각속도를 나타내며, x_r 과 $\dot{x}_r$ 는 각각 몸체의 직선 운동 변위와 선속도를 나타내며 δ 와 $\dot{\delta}$ 는 각각 몸체의 y 축에 대한 회전각과 회전각속도를 나타낸다. 외부에서 인가되는 외란은 이동도립진자의 무게중심에서 작용하는 힘 $f_{dP}, F_{C\theta}$ 와 좌우 구동바퀴에 작용하는 힘 f_{dRL}, f_{dRL} 으로 나타낼 수 있다.

Table 2.1 Parameters Used for Mobile Inverted Pendulum

Parameter	Description
M_{RL}, M_{RR} [kg]	좌우 구동바퀴의 질량
M_p [kg]	바퀴를 제외한 몸체의 질량
R [m]	바퀴의 반지름
D [m]	바퀴와 바퀴 사이의 거리
L [m]	z 축과 몸체 무게중심 사이의 거리
g [m/s^2]	중력가속도
$x_{RL}, x_{RR} / x_{RL0}, x_{RR0}$ [m]	수평면에서 좌우 구동바퀴의 x축 방향 변위 /경사면에서의 좌우 구동바퀴의 x축 방향 변위
$\theta_{RL}, \theta_{RR} / \theta_{RL0}, \theta_{RR0}$ [rad]	수평면에서 좌우 구동바퀴의 회전각 / 경사면에서의 좌우 구동바퀴의 회전각
x_p, y_p [m]	x, y 축 방향의 몸체의 변위
α [rad]	경사면의 기울기
τ_L, τ_R [Nm]	좌우 구동바퀴의 구동토크
$H_L, H_R; V_L, V_R$ [N]	좌우 구동바퀴와 몸체 사이에 작용하는 수평 반력과 수직 반력
$H_{TL}, H_{TR}; V_{TL}, V_{TR}$ [N]	좌우 구동바퀴의 지면으로부터 작용하는 수평 반력과 수직 반력
J_{RL}, J_{RR} [kgm^2]	좌우 구동바퀴의 관성모멘트
J_p [kgm^2]	몸체의 관성모멘트
J_δ [kgm^2]	y 축에 대한 몸체의 관성모멘트
x_{abs}, y, z_{abs}	이동도립진자의 회전하기 전의 좌표계
x, y, z	이동도립진자의 회전한 후의 좌표계

1. 구동바퀴의 동력학적 모델링

좌우 구동바퀴가 지표면에 항상 밀착되어 있으므로 y_{RL}, y_{RR}에 대한 운동방정식은 필요없다. 따라서 좌우 구동바퀴의 질량이 $M_{RL} = M_{RR} = M_r$ 이라면, 수평면 x_r 방향에 대하여 좌우 구동바퀴의 힘-모멘트 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x}_{RL} M_r = H_{TL} - H_L + f_{dRL} \tag{2.1}$$

$$\ddot{\theta}_{RL} J_{RL} = \tau_L - H_{TL} R \tag{2.2}$$

$$\ddot{x}_{RR} M_r = H_{TR} - H_R + f_{dRR} \tag{2.3}$$

$$\ddot{\theta}_{RR} J_{RR} = \tau_R - H_{TR} R \tag{2.4}$$

또한, 좌우 구동바퀴가 지면에 대하여 미끄러짐 없이 회전하여 구동한다는 가정으로부터, 좌우 구동바퀴의 수평 가속도 $\ddot{x}_{RL}, \ddot{x}_{RR}$ 와 회전 가속도 $\ddot{\theta}_{RL}, \ddot{\theta}_{RR}$ 사이의 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{x}_{RL} = R\dot{\theta}_{RL} \rightarrow \frac{\ddot{x}_{RL}}{R} = \ddot{\theta}_{RL} \tag{2.5}$$

$$\dot{x}_{RR} = R\dot{\theta}_{RR} \rightarrow \frac{\ddot{x}_{RR}}{R} = \ddot{\theta}_{RR} \tag{2.6}$$

이동도립진자가 직선 운동한다고 하면, $x_{RL} = x_{RR} = x_r$ 이다.

$J_{RL} = J_{RR} = J_R$ 로 가정하고 식 (2.5)를 식 (2.2), 식 (2.6)을 식 (2.4)에 대입하면 지면으로부터 작용하는 수평 반력 H_{TL}, H_{TR} 은 다음과 같이 기술된다.

$$H_{TL} = \frac{\tau_L}{R} - \frac{J_{RL}}{R}\ddot{\theta}_{RL} = \frac{\tau_L}{R} - \frac{J_{RL}}{R^2}\ddot{x}_{RL} = \frac{\tau_L}{R} - \frac{J_R}{R^2}\ddot{x}_r \tag{2.7}$$

$$H_{TR} = \frac{\tau_R}{R} - \frac{J_{RR}}{R}\ddot{\theta}_{RR} = \frac{\tau_R}{R} - \frac{J_{RR}}{R^2}\ddot{x}_{RR} = \frac{\tau_R}{R} - \frac{J_R}{R^2}\ddot{x}_r \tag{2.8}$$

좌우 구동바퀴에 대한 식 (2.1)과 식 (2.3)을 합하면, 다음과 같이 주어진다.

$$(\ddot{x}_{RL} + \ddot{x}_{RR})M_r = H_{TL} + H_{TR} - (H_L + H_R) + f_{dRL} + f_{dRR} \tag{2.9}$$

식 (2.7)과 식 (2.8)을 식 (2.9)에 대입하여 수평 가속도 $\ddot{x}_r$ 와 모터 구동 토크 τ_L, τ_R 사이의 관계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\left(2M_r + \frac{2J_R}{R^2}\right)\ddot{x}_r = \frac{\tau_L + \tau_R}{R} - \left(H_L + H_R\right) + f_{dRL} + f_{dRR} \tag{2.10}$$

식 (2.10)에는 여전히 미지의 수평 반력 H_L, H_R 이 존재한다.

2. 몸체의 동력학적 모델링

이동도립진자가 수평면에서 직선주행 운동하여 몸체의 z 방향으로 운동이 없다고 가정하면, 몸체의 질량 중심에서의 x축과 y축에 대한 힘 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x}_p M_p = (H_R + H_L) + f_{dP} \tag{2.11}$$

$$\ddot{y}_p M_p = V_R + V_L - M_p g + F_{C\theta} \tag{2.12}$$

몸체의 질량 중심에 대한 모멘트 방정식은 식 (2.13)과 같다.

$$\ddot{\theta}_p J_p = (V_R + V_L) L \sin\theta_p - (H_R + H_L) L \cos\theta_p - (\tau_L + \tau_R) \tag{2.13}$$

몸체의 질량 중심에 대한 수평 속도 $\dot{x}_p$ 와 바퀴 회전 중심 수평 속도 $\dot{x}_r$ 에 대한 관계는 다음과 같다.

$$\dot{x}_p = \dot{\theta}_p L \cos\theta_p + \frac{\dot{x}_{RL} + \dot{x}_{RR}}{2} = \dot{\theta}_p L \cos\theta_p + \dot{x}_r \tag{2.14}$$

식 (2.14)를 미분하면, 몸체의 질량 중심에 대한 수평 가속도와 바퀴 회전 중심 수평 가속도 $\ddot{x}_p$ 와 $\ddot{x}_r$ 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\ddot{x}_p = \ddot{\theta}_p L\cos\theta_p - L\sin\theta_p \cdot \dot{\theta}_p{}^2 + \ddot{x}_r \qquad (2.15)$$

몸체의 질량 중심에 대한 수직 속도 $\dot{y}_p$는 다음과 같다.

$$\dot{y}_p = -\dot{\theta}_p L\sin\theta_p \qquad (2.16)$$

식 (2.16)을 미분하면, 수직 가속도 $\ddot{y}_p$ 는 다음 식과 같이 유도된다.

$$\ddot{y}_p = -\ddot{\theta}_p L\sin\theta_p - L\cos\theta_p \cdot \dot{\theta}_p{}^2 \qquad (2.17)$$

식 (2.11)에 식 (2.15)을 대입하면, 다음과 같이 기술된다.

$$H_R + H_L = M_p L\cos\theta_p \cdot \ddot{\theta}_p - M_p L\sin\theta_p \cdot \dot{\theta}_p{}^2 + M_p \ddot{x}_r - f_{dP} \qquad (2.18)$$

식 (2.12)에 식 (2.17)를 대입하면, 다음과 같이 주어진다.

$$V_R + V_L = -M_p L\sin\theta_p \cdot \ddot{\theta}_p - M_p L\cos\theta_p \cdot \dot{\theta}_p{}^2 + M_p g - F_{C\theta} \qquad (2.19)$$

식 (2.18)과 식 (2.19)를 식 (2.13)에 대입하면, 다음과 같이 정리된다.

$$
\begin{aligned}
(J_p + M_p L^2)\ddot{\theta}_p = &-M_p L\cos\theta_p \ddot{x}_r + M_p gL\sin\theta_p \\
&-(\tau_L + \tau_R) - F_{C\theta} L\sin\theta_p + f_{dP} L\cos\theta_p
\end{aligned}
\qquad (2.20)
$$

식 (2.18)을 식 (2.10)에 대입하면, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
(2M_r + M_p + \frac{2J_R}{R^2})\ddot{x}_r = &-M_p L\cos\theta_p \cdot \ddot{\theta}_p + \frac{\tau_L + \tau_R}{R} \\
&+ M_p L\sin\theta_p \cdot \dot{\theta}_p^{\ 2} + f_{dRL} + f_{dRR}
\end{aligned}
\qquad (2.21)
$$

θ_p가 0° 근처에서 매우 작게 움직인다면, 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$
\theta_p \approx 0,\ \sin\theta_p \approx \theta_p,\ \cos\theta_p \approx 1,\ (\dot{\theta}_p)^2 \approx 0
$$

식 (2.20)과 식 (2.20)에 몸체의 단면을 원이라고 가정한 몸체의 관성 모멘트 $J_p = \frac{1}{3}M_p L^2$ 과 바퀴의 관성 모멘트 $J_R = \frac{1}{2}M_r R^2$ 을 대입하면, 다음과 같은 선형화된 방정식을 구할 수 있다.

$$\ddot{x}_r = \frac{-3M_p g}{12M_r + M_p}\theta_p + \frac{4L+3R}{(12M_r+M_p)RL}(\tau_L+\tau_R) \tag{2.22}$$

$$\ddot{\theta}_p = \frac{3g(3M_r+M_p)}{L(12M_r+M_p)}\theta_p + \frac{-3(3M_rR+M_pR+M_pL)}{M_pL^2(12M_r+M_pR)}(\tau_L+\tau_R) \tag{2.23}$$

외란 f_{dRL}, f_{dRR}, f_{dP} 와 $F_{C\theta}$ 가 없다고 가정하고 이동도립진자가 수평면에서 제자리 운동한다고 하면, 몸체의 y 축에 대한 모멘트는 다음과 같다.

$$\ddot{\delta} J_\delta = (H_L - H_R)\frac{D}{2} \tag{2.24}$$

식 (2.24)에 식 (2.1)과 식 (2.3), 관성모멘트 $J_\delta = \frac{1}{12}M_pD^2$ 를 대입하여 구하면, 다음과 같이 정리된다.

$$\ddot{\delta} = \frac{6}{(M_p+9M_r)RD}(\tau_L-\tau_R) \tag{2.25}$$

이동도립진자의 수평면의 동력학적 방정식들인 식 (2.22), 식 (2.23)와 식 (2.25)으로부터 시스템의 상태공간 방정식을 행렬 형태로 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & -B_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

여기서 $A_{23}, A_{43}, B_{21}, B_{22}, B_{41}, B_{42}, B_{61}$ 과 B_{62} 는 이동도립진자의 파라미터로 정의된다. (부록 A.1 증명 참조)

$$A_{23} = g\left(1 - \frac{4}{3}L\frac{M_p}{X}\right)$$

$$A_{43} = \frac{gM_p}{X}$$

$$B_{21} = B_{22} = \left(\frac{4LY}{3X} - \frac{1}{M_p L}\right)$$

$$B_{41} = B_{42} = -\frac{Y}{X}$$

$$B_{61} = B_{62} = \frac{6}{(9M_r + M_p)RD}$$

$$X = \frac{1}{3}\frac{M_p(M_p + 12M_r)L}{M_p + 3M_r}$$

$$Y = \frac{M_p}{(M_p + 3M_r)R} + \frac{1}{L}$$

2.3.2 경사면 동력학적 모델링

Fig. 2.6은 경사면 위를 직선 운동하는 이동도립진자의 동력학적 모델링을 위하여 좌우 구동바퀴를 좌표계로 표현한 것이다.

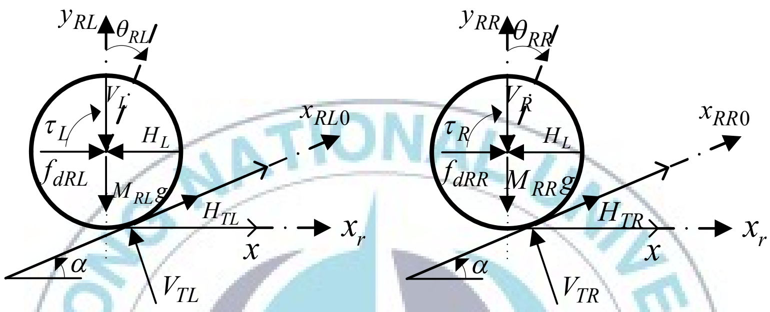


Fig. 2.6 Free body diagram of the Wheel

1. 구동바퀴의 동력학적 모델링

좌우 구동바퀴는 경사면에 항상 밀착되어 있고, 미끄럼 없이 순수 구동한다고 가정한다. 좌우 구동바퀴의 질량 $M_{RL} = M_{RR} = M_r$ 으로 일정하다고 하면, 경사면에 나란한 방향에 대한 좌우 구동바퀴의 힘-모멘트 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{RL0} M_r = & -\cos\alpha H_L + \cos\alpha f_{dRL} - \sin\alpha V_L \\ & -\sin\alpha M_r g + H_{TL} \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\ddot{\theta}_{RL0} J_{RL} = \tau_L - H_{TL} R \tag{2.28}$$

$$\ddot{x}_{RR0}M_r = -\cos\alpha H_R + \cos\alpha f_{dRR} - \sin\alpha V_R - \sin\alpha M_r g + H_{TR} \tag{2.29}$$

$$\ddot{\theta}_{RR0}J_{RR} = \tau_R - H_{TR}R \tag{2.30}$$

앞의 식 (2.10)을 구하는 동일한 유도과정을 적용해서 식 (2.31)을 다음과 같이 구한다.

$$(2M_r + \frac{2J_R}{R^2})\ddot{x}_{r0} = -\cos\alpha(H_L + H_R) + \cos\alpha(f_{dRL} + f_{dRR}) - \sin\alpha(V_L + V_R) - 2M_r g\sin\alpha + \frac{\tau_L + \tau_R}{R} \tag{2.31}$$

2. 몸체의 동력학적 모델링

이동도립진자가 경사면에서 직선 주행하여 몸체의 z 방향의 운동이 없다고 가정한다. 바퀴 회전 중심의 수평 가속도 $\ddot{x}_r$ 와 경사면 가속도 $\ddot{x}_{r0}$ 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\ddot{x}_r = \cos\alpha \cdot \ddot{x}_{r0} \tag{2.32}$$

이동도립진자가 직선 운동한다고 하면 $x_{RL0} = x_{RR0} = x_{r0}$ 이다.

경사면에서 몸체의 질량 중심 $\left(x_p, y_p\right)$ 에 대한 힘-모멘트 방정식들은 수평면에서의 힘-모멘트 방정식과 같다. 식 (2.15)와

식 (2.32)을 이용해서 식 (2.11)에 대입하면, 수평 반력은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} H_R + H_L = M_p \ddot{\theta}_p L \cos\theta_p - M_p L \cdot \dot{\theta}_p{}^2 \sin\theta_p \\ + M_p \ddot{x}_{r0} \cos\alpha - f_{dP} \end{aligned} \tag{2.33}$$

몸체의 수직 가속도와 경사면 가속도는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\ddot{y}_p = -\ddot{\theta}_p L \sin\theta_p - L\cos\theta_p \cdot \dot{\theta}_p{}^2 + \sin\alpha \cdot \ddot{x}_{r0} \tag{2.34}$$

식 (2.34)를 식 (2.12)에 대입하면, 다음과 같이 수직 반력에 대해 기술된다.

$$\begin{aligned} V_R + V_L = M_p \ddot{x}_{r0} \sin\alpha - M_p L \sin\theta_p \ddot{\theta}_p - M_p L \cdot \dot{\theta}_p{}^2 \cos\theta_p \\ + M_p g - F_{C\theta} \end{aligned} \tag{2.35}$$

식 (2.33)와 식 (2.35)을 식 (2.31)에 대입하여 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (2M_r + M_p + \frac{2J_R}{R^2})\ddot{x}_{r0} = -M_p L \cos(\theta_p + \alpha)\ddot{\theta}_p + \frac{\tau_L + \tau_R}{R} \\ -(2M_r + M_p) g \sin\alpha + M_p L \sin(\theta_p + \alpha)\dot{\theta}_p{}^2 \\ +(f_{dP} + f_{dRL} + f_{dRR})\cos\alpha + F_{C\theta} \sin\alpha \end{aligned} \tag{2.36}$$

몸체에 대한 모멘트 방정식은 다음과 같이 나타난다.

$$\ddot{\theta}_p J_p = (V_R + V_L) L \sin\theta_p - (H_R + H_L) L \cos\theta_p - (\tau_L + \tau_R) \quad (2.37)$$

앞에서 구해진 수평 반력, 수직 반력에 대한 식 (2.33), (2.35)을 식 (2.37)에 대입하면, 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(J_p + M_p L^2)\ddot{\theta}_p = & -M_p L \cos(\theta_p + \alpha)\ddot{x}_{r0} + M_p g L \sin\theta_p \\ & -(\tau_L + \tau_R) - F_{C\theta} L \sin\theta_p + f_{dP} L \cos\theta_p\end{aligned} \quad (2.38)$$

θ_p, α 가 충분히 작게 움직이는 각이라면, 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\theta_p + \alpha \approx 0,\ \sin\theta_p \approx \theta_p,\ \sin\alpha \approx \alpha,$$
$$\cos(\theta_p + \alpha) \approx 1,\ \sin(\theta_p + \alpha) \approx \theta_p + \alpha,\ (\dot{\theta}_p)^2 \approx 0$$

외란 f_{dRL}, f_{dRR}, f_{dP} 와 $F_{C\theta}$ 가 없다고 가정하고, 식 (2.36)과 식 (2.38)에 선형화 과정을 거치고 몸체의 단면을 원이라고 가정한 몸체의 관성 모멘트 $J_p = \frac{1}{3} M_p L^2$ 와 바퀴의 관성 모멘트 $J_R = \frac{1}{2} M_r R^2$ 를 대입하면, 다음과 같은 방정식을 구할 수 있다.

$$\ddot{x}_{r0} = \frac{-3M_p g}{12M_r + M_p}\theta_p + \frac{4L+3R}{(12M_r + M_p)RL}(\tau_L + \tau_R) + \frac{-4g(2M_r + M_p)}{12M_r + M_p}\alpha \tag{2.39}$$

$$\ddot{\theta}_p = \frac{3g(3M_r + M_p)}{L(12M_r + M_p)}\theta_p + \frac{3g(2M_r + M_p)}{L(12M_r + M_p)}\alpha + \frac{-3(3M_r R + M_p R + M_p L)}{M_p L^2 (12M_r + M_p R)}(\tau_L + \tau_R) \tag{2.40}$$

이동도립진자의 경사면에 대한 동력학적 운동방정식 들인 식 (2.25), 식 (2.39)와 식 (2.40)으로부터 시스템의 상태공간 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & -B_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

여기서 D_2와 D_4는 경사면에 따른 외란 파라미터로 정의된다.

$$D_2 = \frac{-4g(2M_r + M_p)}{12M_r + M_p}\alpha, \quad D_4 = \frac{3g(2M_r + M_p)}{L(12M_r + M_p)}\alpha$$

제 3 장 이동도립진자의 센서와 보상필터

본 장에서는 이동도립진자의 몸체 기울기와 회전각속도를 자이로 센서와 가속도 센서를 사용하여 측정하는 방법에 대하여 설명한다. 기울기 측정을 위하여 단독으로 자이로 센서를 사용할 경우, 시간이 지날수록 자이로 센서는 누적오차가 발생하여 정확한 기울기 측정이 어렵다. 또, 가속도 센서는 진동이나 외부의 충격에 민감하게 반응하기 때문에 기울기를 측정하는데 어려움이 많다. 따라서 서로 다른 센서의 신호를 융합하는데 사용되는 보상필터를 설계하고, 이 보상필터를 이용하여 자이로 센서와 가속도 센서를 융합하여 실질적인 몸체의 기울기와 회전각속도의 측정을 가능하게 한다.

3.1 자이로 센서의 특징

자이로 센서는 회전하는 물체의 초당 각속도(angular velocity)를 측정하는 센서로서 코리올리의 효과를 이용하여 물체의 외부적인 회전 속도를 감지하여 물체의 각속도로 나타낸다. 이러한 각속도 데이터를 마이크로프로세서를 통하여 적분 연산한 후 원하는 기울기 각을 얻을 수 있다. 그러나

유한한 시간 단위로 적분 연산을 하기 때문에 적분 오차가 발생하고 시간이 지남에 따라 자이로 센서의 오차 누적으로 한쪽 방향으로 기울어지게 된다. 이런 누적오차로 자이로 센서의 초기 기준값(gyro bias)이 변하는 현상을 드리프트(drift)라고 한다. 본 연구에 사용된 자이로 센서는 Fig. 3.1의 NT-Gyro300으로 InvenSense 사의 IDG-300을 이용한 모듈로서 하나의 칩에 X, Y의 2축이 포함되어 있고 최대 $\pm 500^{\circ}/\mathrm{sec}$ 의 범위까지 측정 가능하다. Low-pass filter 회로를 내장하고 있어서 넓은 주파수 영역을 통한 특정 잡음을 제거할 수 있고 아날로그 전압으로 자이로 값을 출력한다.

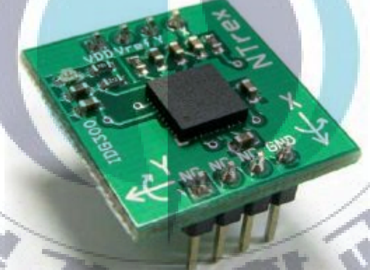


Fig. 3.1 Gyro Sensor

Table 3.1 Gyro Sensor's Specifications

특 성	범 위
공급전압	$DC\ \ +3.0 \sim +3.3\ V$
최대 반응 범위	$\pm 500^{\circ}/\mathrm{sec}$
민감도	$2.0mV/^{\circ}/\mathrm{sec}$
동작온도	$0 \sim +70^{\circ}\mathrm{C}$

3.1.1 자이로 센서 누적오차

Fig. 3.2는 엔코더에 진자를 연결하고 진자의 끝단에 자이로 센서를 고정하여 자유운동시켰을 때 자이로 센서와 엔코더의 출력값을 측정한 결과를 보여준다. 출력 그래프를 보면 자이로 센서의 출력값은 엔코더의 출력값과 비교해서 대체로 유사한 파형을 나타내고 있으나, 약 13초가 경과한 후 진자가 정지하였을 때 엔코더는 초기 정지상태와 동일하게 0[*rad*] 을 나타내는 반면, 자이로 센서는 누적된 오차로 0.13[*rad*] 정도 드리프트가 발생하였음을 알 수 있다. 따라서 자이로 센서를 단독으로 사용하여 초기에는 이동도립진자의 제어가 가능하지만, 시간이 지날수록 드리프트로 인해 제어가 어렵게 되는 것을 알 수 있다.

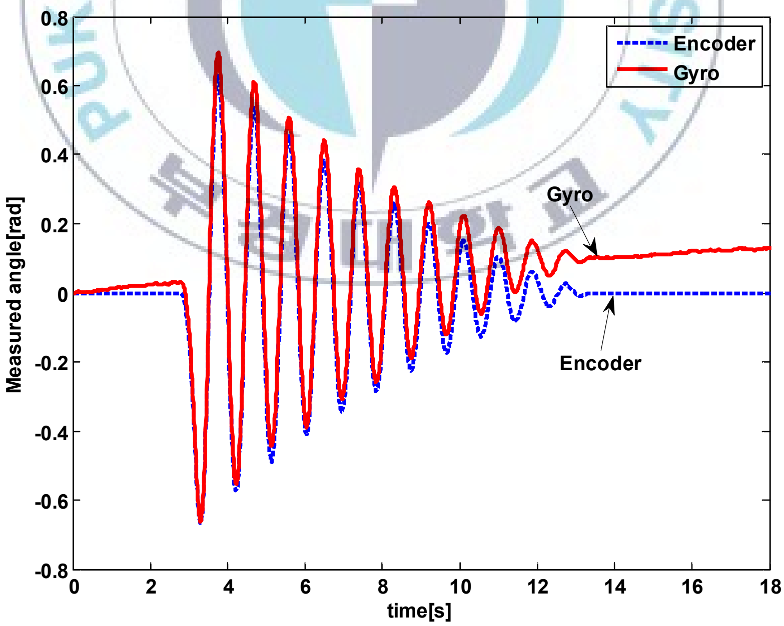


Fig. 3.2 Gyro Sensor's Accumulation Error

3.2 가속도 센서의 특징

가속도계(accelerometer)는 어떤 운동체의 가속도를 측정하는 기구로서 진자를 운동체에 매달아 두면 가속도의 영향을 받아 진자가 흔들리는 양상을 나타낸다. 진자의 운동 시 진자의 주기가 짧으면 운동체의 가속도는 크게 나타나고 진자의 주기가 길면 가속도는 적게 나타난다. 가속도의 단위는 중력가속도 g $[9.8m/\sec^2]$로 표시한다.

가속도 센서는 진동이나 충격 등의 외력에 민감하게 반응하기 때문에 실질적인 기울기를 획득하기에는 다소 어려운 점이 많다. 하지만 정적 가속도는 지구의 중력에 대해서 항상 일정한 수치를 나타내기 때문에 가속도 센서로 절대적인 기울기 값을 측정할 수 있는 장점이 있다.

이동도립진자의 기울기를 측정하기 위해서 단일칩 상에서 3축 가속도를 측정할 수 있는 가속도센서(MMA7260Q, Freescale. Co.)를 사용하였다. 이 센서는 가속도에 따른 콘덴서 용량 변화형 가속도 센서로서 C-V컨버터, 1차 Low-pass filter, 온도보상회로를 내장하고 있으며, 1.5g에서 6g까지 4단계로 센서 감도의 조절이 가능하다. 또한 저전압, 저전력으로 동작하며, 슬립모드로 동작할 때는 3 μA 의 소비전류특성을 가지므로 저전력 동작이 중요시되는 다양한 센서 응용분야에 활용이 가능하다.

3축 가속도 센서에서 측정되는 가속도의 좌표계는 Fig. 3.3과 같다. Fig. 3.3에서 각 축의 출력단의 신호는 측정 방향을 나타낸다. 즉 좌우방향 X축, 전후방향 Y축, 상하 방향이 Z축에 해당한다. 예를 들면 가속도 센서를 Fig. 3.3과 같이 놓고 윗면에서 관찰할 경우 좌측 방향으로 힘이 인가되면 X축의 센서는 양의 값을 출력하고, 우측방향으로 힘이 인가되면 음의 값을 출력한다. 이동도립진자의 동작 시 움직임이나 상태에 따라 해당되는 축의 신호를 출력하게 된다.

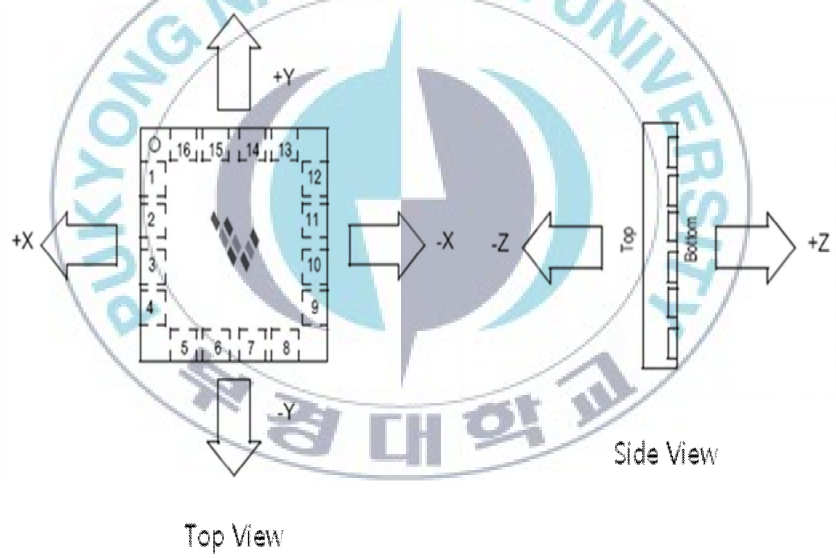


Fig. 3.3 Accelerometer’s Output with respect to Acceleration’s Direction

3.2.1 가속도 센서의 각도변환 알고리즘

Fig. 3.4를 보면 검은색 실선으로 표시된 것이 항상 지구 중심방향으로 중력이 작용하는 고정좌표계이고 점선이 가속도

센서 입장에서의 Z축과 Y축이다. 가속도 센서는 가속도를 검출하므로 만약 가속도 센서가 기울지 않았다면 가속도 센서의 Z축 방향에서만 중력 가속도가 검출된다. 그러다가 Fig. 3.4처럼 기울이면 Y축에 작용되는 중력 가속도 성분은 점점 커질 것이고, Z축에 작용되는 중력가속도 성분은 점점 작아지게 된다. 이를 삼각함수의 역함수를 이용하여 간단히 적용해 각도변환 알고리즘으로 이용한 것이다.

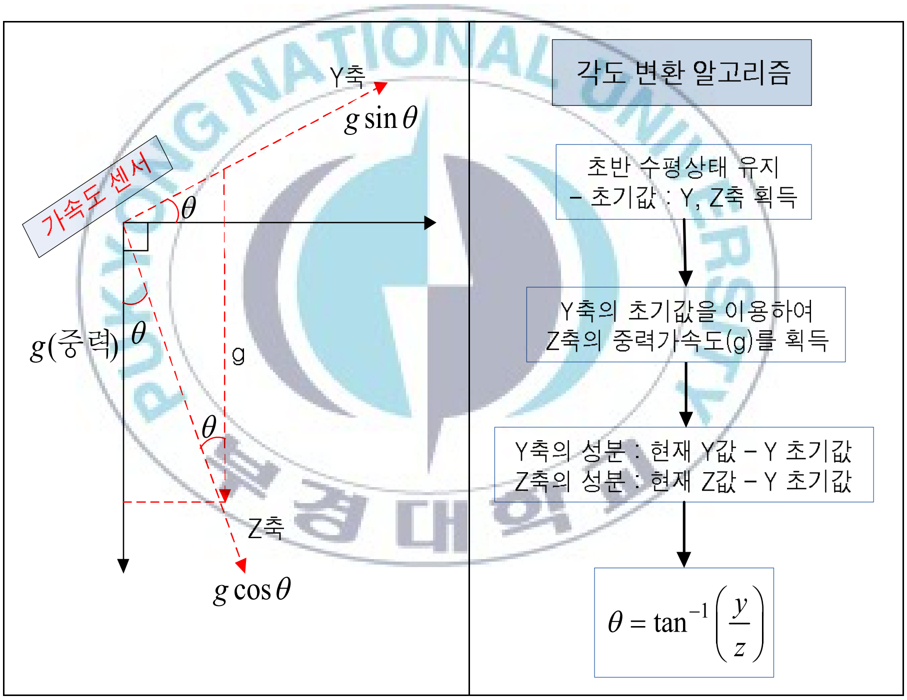


Fig. 3.4 Angle Conversion Algorithm of Accelerometer

가속도 센서의 기울기 각 θ는 다음과 같이 표현된다.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right) \tag{3.1}$$

여기서 y, z는 가속도 센서의 Y, Z축의 출력값이다.

Fig. 3.5는 Fig. 3.2와 동일한 조건에서 가속도 센서의 출력값을 측정한 결과이다. 가속도 센서의 엔코더의 각에 비해 기울기 각이 매우 작아 정확한 기울기 각의 측정이 어려운 것을 알 수 있다. 하지만 자이로 센서와 달리 진자의 운동이 끝난 후 정지 시에도 드리프트는 보이지 않아서 자이로 센서와 융합하여 보정용 센서로 사용할 수 있다.

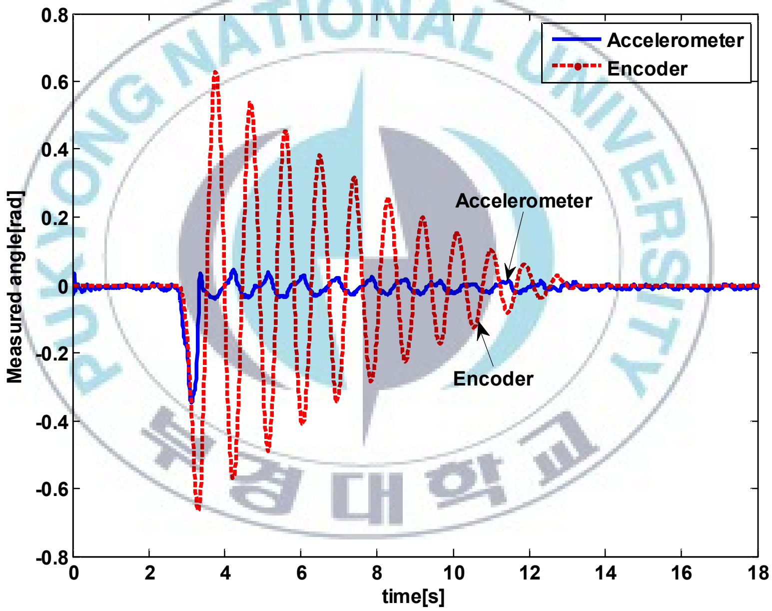


Fig. 3.5 Characteristics of Accelerometer

3.3 보상필터 설계

Fig. 3.6은 본 연구에서 고려한 보상필터의 블록선도이다. 가속도 센서의 기울기 각도 θ_a 정보와 자이로 센서의 각속도 $\dot{\theta}_G$ 출력의 적분값을 이용하여 원하는 최종 출력인 기울기 각도 θ_C 를 구하는데 사용한다. 또한, 각 입력과 출력에 대한 전달함수를 구해보면, 저역통과 필터와 고역통과 필터가 결합된 보상필터로 구성된 것을 알 수 있다.

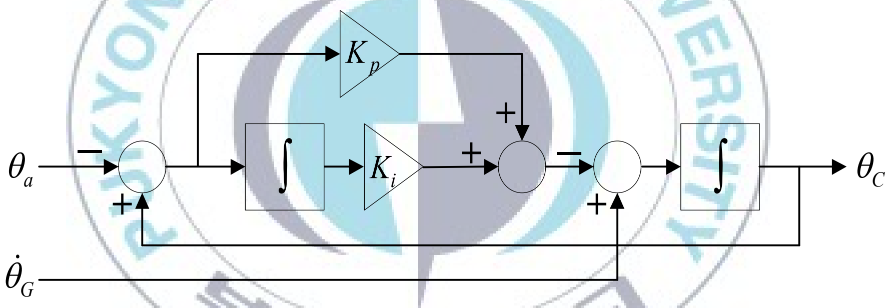


Fig. 3.6 Block Diagram of Complementary Filter

Fig. 3.6의 블록선도를 구해보면, 다음 식 (3.2)와 식 (3.3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\theta_c(s) &= \frac{1}{s}\left[\dot{\theta}_G(s) - \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)\left(\theta_c(s) - \theta_a(s)\right)\right] \\ &= \frac{s^2}{s^2 + K_p s + K_i}\frac{\dot{\theta}_G(s)}{s} + \frac{K_p s + K_i}{s^2 + K_p s + K_i}\theta_a(s)\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\theta_c(s) = T_1(s)\theta_G(s) + T_2(s)\theta_a(s) \tag{3.3}$$

$$T_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + K_p s + K_i},\ T_2(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + K_p s + K_i}$$

$T_1(s)$ 는 고역통과 필터에 대한 전달함수로서 자이로 센서의 적분 후에 고역통과 필터를 설계해서 드리프트의 발생을 막고, 저역통과 필터인 $T_2(s)$ 는 가속도 센서의 노이즈 제거를 위해 설계했다. 두 전달함수 사이에는 식 (3.4)를 만족한다.

$$T_1(s) + T_2(s) = I \tag{3.4}$$

3.4 각 센서의 주파수 응답 특성

보상필터의 설계변수 K_p, K_i 를 구하기 위해 실험을 통하여 얻은 각 센서의 주파수 응답으로부터 차단주파수를 결정한다.

3.4.1 각 센서의 주파수 응답

Fig. 3.7은 자이로 센서의 주파수 응답 그래프이며, 고주파영역에서 평탄한 이득곡선의 구간을 보인다. Fig. 3.8은 가속도 센서의 주파수 응답 그래프이며, 상대적으로 자이로 센서의 주파수 응답과는 달리 저주파영역에서 평탄한 이득곡선을 보이는 것을 알 수 있다.

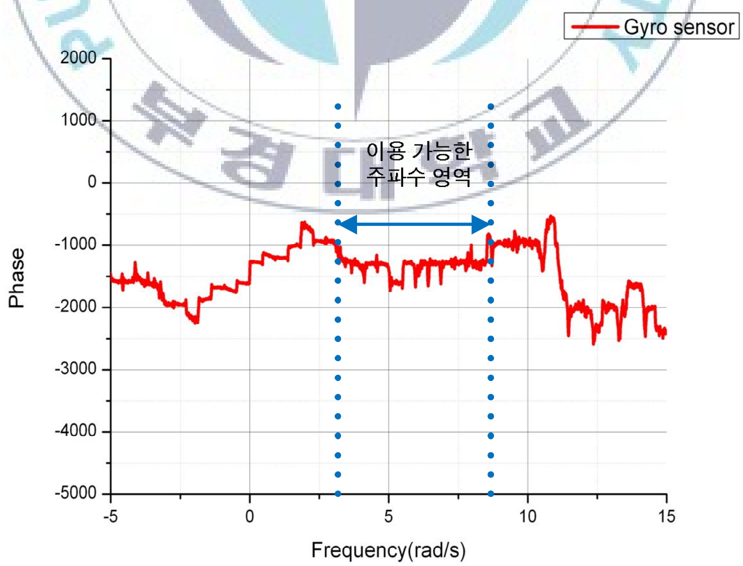


Fig. 3.7 Frequency Characteristics of Gyro Sensor

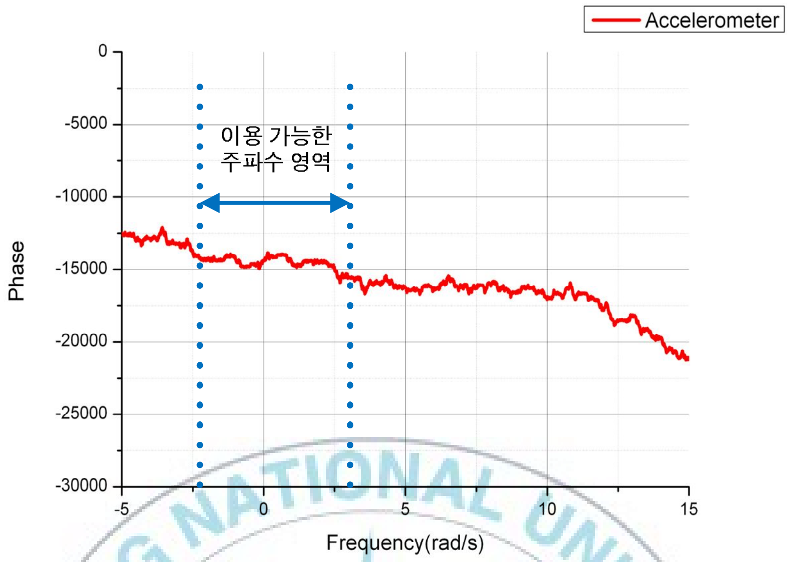
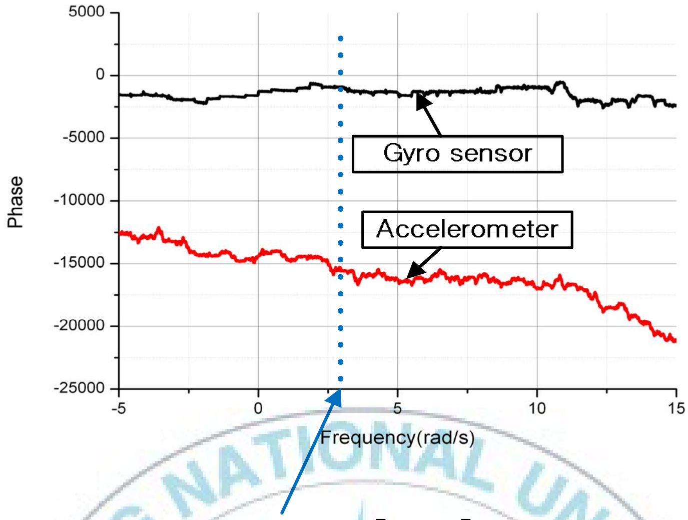


Fig. 3.8 Frequency Characteristics of Accelerometer

Fig. 3.9는 자이로 센서와 가속도 센서의 주파수 응답 그래프이다. 약 $3.2 rad/s$ 의 주파수 지점에서 자이로 센서의 고주파영역과 가속도 센서의 저주파영역이 구분되는 것을 알 수 있다. 즉, 이 부분이 보상필터의 설계변수를 결정하는 데 필요한 차단주파수 ω 로 사용된다.



$cut-off\ frequency : 3.2[rad/s]$

Fig. 3.9 Cut-off Frequency of Sensors

3.4.2 보상필터 설계변수

식 (3.2)와 같은 2차 시스템 전달함수의 분모는 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$ 과 같은 표준형으로 표현된다. 여기서 ω_n 은 시스템의 고유주파수로, 필터의 경우 차단주파수 ω 로 볼 수 있다. 식 (3.3)의 저역통과 필터와 고역통과 필터의 식 $T_1(s)$, $T_2(s)$ 와 비교하면, 다음과 같은 식 (3.5)을 얻을 수 있다.

$$K_p = 2\zeta\omega, \quad K_i = \omega^2 \tag{3.5}$$

본 연구에서 감쇠율은 $\zeta = 0.4$ 로 하고, 앞 절에서 구한 차단주파수는 $\omega = 3.2[rad/s]$ 으로 선택한다. 이 경우 $K_p = 2.4$, $K_i = 10.5$ 이며, 이를 보상필터 게인으로 이용하게 된다.

3.5 보상필터 성능 실험

Fig. 3.10은 엔코더에 진자를 연결하고 진자의 끝단에 자이로 센서와 가속도 센서를 고정하여 모터를 구동시켜 좌우 반복운동을 시켰을 때 보상필터를 적용한 센서의 출력값과 엔코더의 출력값을 측정한 결과를 보여준다. 실선은 보상필터를 적용한 센서의 기울기 각이고 점선은 엔코더의 기울기 각으로서 실험 시작 약 1초 후부터 보상필터의 기울기 각도는 엔코더의 기울기 각도와 오차없이 거의 동일한 각을 보이고 시간이 지나도 자이로 센서의 드리프트현상 또한 발생하지 않는 것을 알 수 있다. 이 실험 결과로부터 이동도립진자 몸체의 정확한 기울기 각을 측정할 수 있게 되었다.

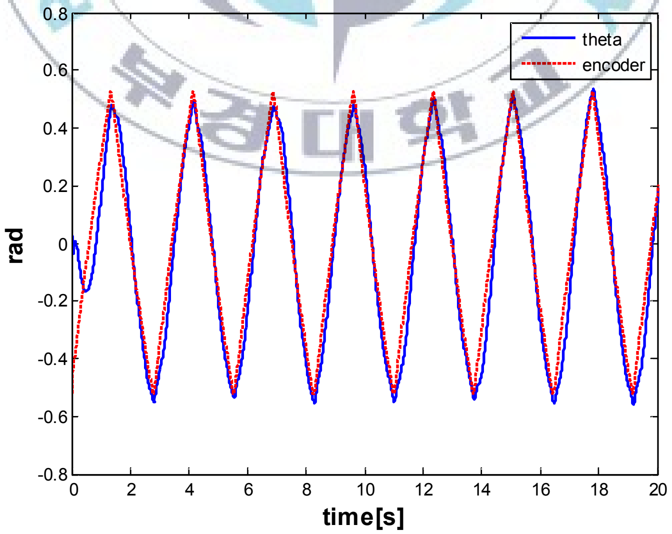


Fig. 3.10 Comparison of Encoder and Angle measured by Complementary Filter

제 4 장 제어기 설계

본 장에서는 decoupling 제어 기법에 대해 설명하고, 수평면과 경사면에 대한 슬라이딩모드 제어기를 설계하기 위하여 최적제어 기반에 의한 슬라이딩평면 설계법과 슬라이딩평면으로의 도달조건을 이용한 제어칙 설계법을 제시한다.

4.1 Decoupling 제어기법

본 절에서는 앞 장에서 유도된 상태공간 방정식으로부터 z 축 및 y 축에 대한 회전 토크들과 좌우 바퀴에 대한 입력 토크들과의 변환 관계를 구하는 decoupling 제어 기법을 제시한다.

4.1.1 Decoupling 제어기법 적용

1. 수평면에 대한 decoupling 기법 적용

수평면 동력학적 모델의 상태공간 방정식 (2.26)을 단순화하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & B_4 \\ 0 & 0 \\ B_6 & -B_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

여기서

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = B_{22} = B_2,\ B_{41} = B_{42} = B_4,\ B_{61} = -B_{62} = B_6$$

식 (4.1)을 보면 모터의 입력토크 τ_L, τ_R은 서로 coupling되어 z축과 y축을 중심으로 하는 회전에 대하여 독립적으로 제어가 되지 않으므로 시스템은 안정성을 상실하게 된다.

Grasser는 이러한 문제를 해결하기 위하여 Fig. 4.1과 같이 z축에 대한 회전 토크 τ_θ 및 y축에 대한 회전 토크 τ_δ로부터 좌우 바퀴에 대한 입력 토크 τ_L, τ_R로 변환하는 decoupling 제어 기법을 제안하였다[1].

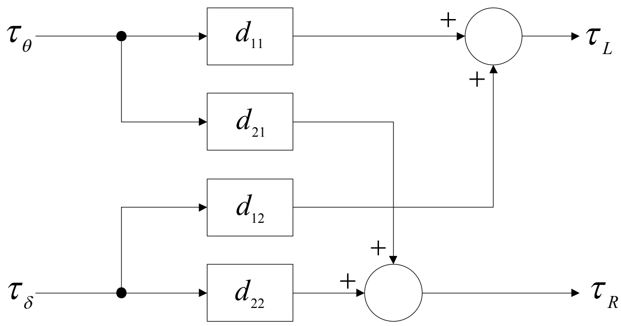


Fig. 4.1 Decoupling control method

Fig. 4.1로부터 다음과 같은 식이 성립함을 볼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{d} \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

식 (4.1)에서 모터 입력토크의 coupling을 해결하기 위해, 식 (4.1)을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{(t)} = \mathbf{Ax(t)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_a & 0 \\ 0 & 0 \\ B_b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

식 (4.2)를 식 (4.1)에 대입한 식을 식 (4.3)과 비교하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & B_4 \\ 0 & 0 \\ B_6 & -B_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_a & 0 \\ 0 & 0 \\ B_b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

식 (4.4)로부터 식 (4.2)의 행렬 **d** 를 결정하기 위해서 $d_{11} = 0.5,\ d_{12} = d_{21}$ 으로 선택하면, 나머지 요소들도 $d_{12} = 0.5,\ d_{21} = 0.5,\ d_{22} = -0.5$ 로 선택된다.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

식 (4.5)를 식 (4.4)에 대입하면 $B_a = B_2,\ B_b = B_4,\ B_c = B_6$ 을 만족한다. (부록 A.2 증명 참조)

이 식과 식 (4.4), 식 (4.5)로부터 이동도립진자의 상태 공간 방정식은 다음 식 (4.6)과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \\ \hline \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \hline \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ B_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_4 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & B_6 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \hline \tau_\delta \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

식 (4.6)은 $z(pitch)$ 축과 $z(yaw)$ 축에 대하여 식 (4.7)인 직선운동에 대한 식과 식 (4.8)인 제자리 운동에 대한 식들로 각각 분해되며 즉 독립적인 입력토크 τ_θ, τ_δ 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ 0 \\ B_4 \end{bmatrix} [\tau_\theta] \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_6 \end{bmatrix} [\tau_\delta] \tag{4.8}$$

식 (4.6)은 이동도립진자의 상태방정식이며 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.9}$$

여기서

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix}$$

2. 경사면에 대한 decoupling 기법 적용

이동도립진자의 경사면에서의 동력학적 운동방정식 (2.41)과 식 (4.6)에서, 수평면에서와 동일하게 decoupling 기법을 적용하면, 상태방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \ddot{x}_r \\ \dot{\theta}_p \\ \ddot{\theta}_p \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \\ D_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

식 (4.10)로부터 다음과 같이 이동도립진자의 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{D} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{D}}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}_1 \tag{4.11}$$

여기서

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & D_2 & 0 & D_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$\mathbf{u}_1$ 은 입력섭동 $\tilde{\mathbf{D}}$ 가 존재하는 경우의 시스템 입력이고, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{D}} \tag{4.12}$$

식 (4.11)에서 외란 **D**는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}} \tag{4.13}$$

행렬 **B**는 정방행렬이 아니기 때문에, 행렬 **B**의 유사역행렬 형태로 식 (4.14)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}} &= (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{D} \\ &= \frac{1}{B_2^2 + B_4^2}\begin{bmatrix} \dfrac{g(2M_r + M_p)}{12M_r + M_p}\alpha(-4B_2 + \dfrac{3B_4}{L}) \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2 슬라이딩 모드 제어기 설계

이 절에서는 decoupling 상태방정식에 근거를 두어 수평면과 경사면에 대한 슬라이딩모드 제어기를 설계하기 위하여 최적제어이론을 이용한 슬라이딩평면 설계 내용과 슬라이딩평면 도달조건을 이용한 제어칙 설계에 대한 내용을 제시한다.

4.2.1 수평면에서의 LQR을 이용한 슬라이딩평면 설계

슬라이딩 모드 제어 법칙을 유도하기 위하여 앞장의 모델링에서 유도된 선형시스템을 고려한다.

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax}(\mathbf{t}) + \mathbf{Bu}(\mathbf{t}) \tag{4.15}$$

여기서 $\mathbf{x} \in \Re^n$ 과 $\mathbf{u} \in \Re^m$ 은 각각 시스템의 상태변수벡터와 입력벡터이며, $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$ 와 $\mathbf{B} \in \Re^{n \times m}$ 은 각각 시스템행렬과 입력행렬이며, 행렬 $\mathbf{B}$ 의 계수(rank)는 m 이고 앞 절의 상태방정식으로부터 $n = 6,\ m = 2$ 이다. 이 시스템은 가제어라고 가정한다.

스위칭 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \mathbf{Sx}(\mathbf{t}) \in \Re^{2 \times 1} \tag{4.16}$$

슬라이딩 평면 행렬은 $\mathbf{s}(\mathbf{t}) = 0$ 에서 $\mathbf{x}$ 의 영공간과 같이 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^6 : \mathbf{Sx} = 0 \right\} \in \Re^{2 \times 6} \tag{4.17}$$

좌표변환을 위해 직교행렬 $\mathbf{T_r} \in \Re^{6 \times 6}$ 에 의하여 다음과 같이 변환행렬을 정의한다.

$$\mathbf{z(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{z_1(t)} \\ \mathbf{z_2(t)} \end{bmatrix} = \mathbf{T_r x(t)} \in \Re^{6\times1} \tag{4.18}$$

여기서 $\mathbf{z_1(t)} \in \Re^{4\times1}$ 과 $\mathbf{z_2(t)} \in \Re^{2\times1}$ 이다.

식 (4.18)의 변환행렬을 통하여 식 (4.15)과 식 (4.16)는 다음과 같은 표준형으로 나타낸다.

$$\mathbf{\dot{z}(t)} = \mathbf{\bar{A}z} + \mathbf{\bar{B}u} \tag{4.19}$$

$$\mathbf{s(t)} = \mathbf{\bar{S}z} \tag{4.20}$$

여기서

$$\begin{gathered} \mathbf{\bar{A}} = \mathbf{T_r A T_r^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\bar{A}_{11}} & \mathbf{\bar{A}_{12}} \\ \mathbf{\bar{A}_{21}} & \mathbf{\bar{A}_{22}} \end{bmatrix} \in \Re^{6\times6},\ \mathbf{\bar{B}} = \mathbf{T_r B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\bar{B}_2} \end{bmatrix} \in \Re^{6\times2} \\ \mathbf{\bar{A}_{11}} \in \Re^{4\times4},\ \mathbf{\bar{A}_{12}} \in \Re^{4\times2},\ \mathbf{\bar{A}_{21}} \in \Re^{2\times4},\ \mathbf{\bar{A}_{11}} \in \Re^{2\times2},\ \mathbf{\bar{B}_2} \in \Re^{2\times2} \end{gathered} \tag{4.21}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{\bar{S}} = \mathbf{S T_r^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\bar{S}_1} & \mathbf{\bar{S}_2} \end{bmatrix} \in \Re^{2\times6} \\ \mathbf{\bar{S}_1} \in \Re^{2\times4},\ \mathbf{\bar{S}_2} \in \Re^{2\times2} \end{gathered} \tag{4.22}$$

식 (4.19)와 식 (4.20)을 전개하여 표현하면 다음 식들로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} \mathbf{\dot{z}_1(t)} = \mathbf{\bar{A}_{11} z_1(t)} + \mathbf{\bar{A}_{12} z_2(t)} \\ \mathbf{\dot{z}_2(t)} = \mathbf{\bar{A}_{21} z_1(t)} + \mathbf{\bar{A}_{22} z_2(t)} + \mathbf{\bar{B}_2 u(t)} \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\mathbf{s(t)} = \bar{\mathbf{S}}_1\mathbf{z}_1\mathbf{(t)} + \bar{\mathbf{S}}_2\mathbf{z}_2\mathbf{(t)} \tag{4.24}$$

Utkin과 Young은 평가 함수의 최소화에 의해 슬라이딩 평면을 설계하는 슬라이딩 모드 제어기법을 제안하였다[28].

성능 지수의 최소화를 위해 평가함수를 다음과 같이 선정한다.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_s}^{\infty} \mathbf{x(t)}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x(t)}dt \tag{4.25}$$

여기서 $\mathbf{Q}$ 는 대칭 양한정 행렬(symmetric and positive definite matrix)이고 t_s 는 슬라이딩 모드 시작 시간이다.

시스템을 정규 형태로 변환했을 때 행렬 $\mathbf{Q}$ 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T_r Q T_r^T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{11} & \bar{\mathbf{Q}}_{12} \\ \bar{\mathbf{Q}}_{12}^{\mathbf{T}} & \bar{\mathbf{Q}}_{22} \end{bmatrix} \in \Re^{6\times 6} \tag{4.26}$$

여기서 $\bar{\mathbf{Q}}_{21} = \bar{\mathbf{Q}}_{12}^{\mathbf{T}} \in \Re^{2\times 4}$, $\bar{\mathbf{Q}}_{11} \in \Re^{4\times 4}$ 과 $\bar{\mathbf{Q}}_{22} \in \Re^{2\times 2}$ 이다.

식 (4.25)의 정규 형태로 나타내어진 시스템의 평가함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_s}^{\infty} \mathbf{z}_1^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{Q}}_{11}\mathbf{z}_1 + 2\mathbf{z}_1^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{Q}}_{12}\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{Q}}_{22}\mathbf{z}_2 \; dt \tag{4.27}$$

여기서 $\mathbf{z_1}$ 은 이상적인 슬라이딩 모드 거동을 나타내고, 효과적인 제어입력은 $\mathbf{z_2}$ 의 함수로 표현된다. 즉, $\mathbf{z_2}$ 의 관점에서 평가 함수를 최소화하는 것이 문제가 된다. 이것을 풀기 위해 식 (4.27)의 $2\mathbf{z_1^T}\mathbf{\bar{Q}_{12}}\mathbf{z_2}+\mathbf{z_2^T}\mathbf{\bar{Q}_{22}}\mathbf{z_2}$ 의 두 항을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}&2\mathbf{z_1^T}\mathbf{\bar{Q}_{12}}\mathbf{z_2}+\mathbf{z_2^T}\mathbf{\bar{Q}_{22}}\mathbf{z_2}\\&=(\mathbf{z_2}+\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\mathbf{z_1})^{\mathbf{T}}\mathbf{\bar{Q}_{22}}(\mathbf{z_2}+\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\mathbf{z_1})-\mathbf{z_1^T}\mathbf{\bar{Q}_{21}^T}\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\mathbf{z_1}\end{aligned}$$

식 (4.27)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}J=\frac{1}{2}\int_{t_s}^{\infty}&\mathbf{z_1^T}\left(\mathbf{\bar{Q}_{11}}-\mathbf{\bar{Q}_{12}}\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\right)\mathbf{z_1}\\&+\left(\mathbf{z_2}+\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\mathbf{z_1}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{\bar{Q}_{22}}\left(\mathbf{z_2}+\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\mathbf{z_1}\right)dt\end{aligned}\tag{4.28}$$

식 (4.28)을 다시 정리하면, 다음 식으로 나타내어진다.

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_s}^{\infty}\mathbf{z_1^T}\mathbf{\hat{Q}}\mathbf{z_1}+\mathbf{v^T}\mathbf{\bar{Q}_{22}}\mathbf{v}dt\tag{4.29}$$

여기서 $\mathbf{\hat{Q}}$ 와 $\mathbf{v}$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\mathbf{\hat{Q}}=\mathbf{\bar{Q}_{11}}-\mathbf{\bar{Q}_{12}}\mathbf{\bar{Q}_{22}^{-1}}\mathbf{\bar{Q}_{21}}\in\Re^{4\times4}\tag{4.30}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{z_2} + \bar{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Q}}_{21}\mathbf{z_1} \in \Re^{2\times 1} \tag{4.31}$$

본래의 상태방정식 식 (4.23)의 첫 번째 식을 식 (4.31)을 사용하여 $\mathbf{z_2}$를 제거한 변형된 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{z}}_1(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}_1(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{v}(\mathbf{t}) \tag{4.32}$$

여기서 $\bar{\mathbf{Q}}_{22} > \mathbf{0}$ 이고 역행렬이 존재하고 $\hat{\mathbf{A}}$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\hat{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{Q}}_{21} \in R^{4\times 4} \tag{4.33}$$

$\mathbf{P}$ 는 양한정 행렬로 Riccati 방정식의 유일 해를 구함으로써 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1\bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_{12}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1 + \hat{\mathbf{Q}} = 0 \tag{4.34}$$

식 (4.29)를 최소화하는 최적 $\mathbf{v}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{v} = -\bar{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_{12}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{z}_1 \tag{4.35}$$

이것을 식 (4.31)에 대입하면, 평가함수를 최소로 하는 최적의 $\mathbf{z}_1$과 $\mathbf{z}_2$의 관계를 얻어 낼 수 있다.

$$\mathbf{z_2} = -\bar{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}_{12}^{T}\mathbf{P_1} + \bar{\mathbf{Q}}_{21})\mathbf{z_1} \in \Re^{2\times1} \tag{4.36}$$

슬라이딩 평면을 $\mathbf{s} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix}\mathbf{z} = \mathbf{0}$이라 선정 하였을 때, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\mathbf{z_2} = -\bar{\mathbf{S}}_2^{-1}\bar{\mathbf{S}}_1\mathbf{z_1(t)} \tag{4.37}$$

$\bar{\mathbf{S}}_1$, $\bar{\mathbf{S}}_2$는 식 (4.36)와 식 (4.37)에서 $\bar{\mathbf{S}}_2 = \mathbf{I}$인 경우, 다음과 같이 선정할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}(\bar{\mathbf{A}}_{12}^{T}\mathbf{P_1} + \bar{\mathbf{Q}}_{21}) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

한편, 식 (4.22)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{T}_r^{-T} = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{T}_r \tag{4.39}$$

4.2.2 경사면에서의 LQR을 이용한 슬라이딩평면 설계

앞장의 경사면 모델링에서 유도된 외란을 포함하는 시스템을 고려한다.

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) + \mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}_1(\mathbf{t}) \tag{4.40}$$

여기서 $\mathbf{x} \in \Re^n$ 와 $\mathbf{u} \in \Re^m$ 는 각각 시스템의 상태변수벡터와 입력벡터이다. $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \Re^{n \times m}$ 그리고 $\mathbf{D} \in \Re^n$ 는 각각 시스템행렬, 입력행렬과 외란행렬이며, 행렬 $\mathbf{B}$ 의 계수(rank)는 m 이고 앞 절의 상태방정식 (4.10)으로부터 $n = 6,\ m = 2$ 이다. 이 시스템은 가제어라고 가정한다.

스위칭 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \mathbf{S}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \Re^{2 \times 1} \tag{4.41}$$

슬라이딩 평면 행렬은 $\mathbf{s}(\mathbf{t}) = 0$ 에서 $\mathbf{x}$ 의 영공간과 같이 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^6 : \mathbf{S}\mathbf{x} = 0 \right\} \in \Re^{2 \times 6} \tag{4.42}$$

좌표변환을 위해 직교행렬 $\mathbf{T_r} \in \Re^{6 \times 6}$ 에 의하여 다음과 같이 변환행렬을 정의한다.

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(\mathbf{t}) \\ \mathbf{z}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix} = \mathbf{T_r}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \Re^{6 \times 1} \tag{4.43}$$

여기서 $\mathbf{z}_1(\mathbf{t}) \in \Re^{4 \times 1}$ 과 $\mathbf{z}_2(\mathbf{t}) \in \Re^{2 \times 1}$ 이다.

식 (4.43)의 변환행렬을 통하여 식 (4.40)과 식 (4.41)은 다음과 같은 표준형으로 나타낸다.

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{D}} \tag{4.44}$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{S}}\mathbf{z} \tag{4.45}$$

여기서

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T_r A T_r^T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \in \Re^{6\times 6},\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T_r B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \in \Re^{6\times 2} \\ &\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{T_r D} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \bar{\mathbf{D}}_2 \end{bmatrix} \in \Re^{6\times 1},\ \bar{\mathbf{D}}_1 \in \Re^{4\times 1},\ \bar{\mathbf{D}}_2 \in \Re^{2\times 1} \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S T_r^T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{bmatrix} \in \Re^{2\times 6} \tag{4.47}$$

식 (4.44)와 식 (4.45)을 전개하여 표현하면 다음 식들로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{z}_1(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{z}_2(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{D}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{z}_1(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{z}_2(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{D}}_2 \end{cases} \tag{4.48}$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{S}}_1\mathbf{z}_1(\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{S}}_2\mathbf{z}_2(\mathbf{t}) \tag{4.49}$$

경사면에서의 슬라이딩평면 설계는 앞의 절 식 (4.25)부터 식 (4.39)까지와 동일한 과정을 통하여 구하며, 슬라이딩면은 식 (4.39)와 같다.

4.2.3 슬라이딩 모드 제어기 설계

1. 수평면에서의 제어기 설계

제어 법칙을 유도하기 위해서, 설계된 슬라이딩 평면에 다음과 같은 슬라이딩 모드 도달 조건을 만족시켜야 한다.

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} < 0 \tag{4.50}$$

$\dot{\mathbf{s}}$는 도달 조건을 만족하기 위하여 다음과 같이 선정된다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\varepsilon\,\mathrm{sgn}(\mathbf{s}) \tag{4.51}$$

여기서, $\varepsilon > 0$이다.

식 (4.16)를 시간에 대하여 미분한 후에 식 (4.15)을 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{S}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \tag{4.52}$$

식 (4.51)와 식 (4.52)로부터 식 (4.53)를 구할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{SAx} + \mathbf{SBu} = -\varepsilon\,\mathrm{sgn}(\mathbf{s}) \tag{4.53}$$

따라서 슬라이딩 모드 제어 입력을 식 (4.54)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{SB}\right)^{-1}\left(\mathbf{SAx} + \varepsilon\,\mathrm{sgn}(\mathbf{s})\right) \tag{4.54}$$

2. 경사면에서의 제어기 설계

수평면과 동일하게 설계된 슬라이딩 평면에 다음과 같은 슬라이딩 모드 도달 조건을 만족시켜야 한다.

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} < 0 \tag{4.55}$$

$\dot{\mathbf{s}}$는 도달 조건을 만족하기 위하여 다음과 같이 선정된다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\varepsilon\,\mathrm{sgn}(\mathbf{s}) \tag{4.56}$$

여기서, $\varepsilon > 0$ 이다.

식 (4.41)을 시간에 대하여 미분한 후에 식 (4.40)을 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{S}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{D}) = \mathbf{S}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}_1) \tag{4.57}$$

식 (4.56)와 식 (4.57)으로부터 식 (4.58)를 구할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{SAx} + \mathbf{SBu} + \mathbf{SD} = \mathbf{SAx} + \mathbf{SBu_1} = -\varepsilon \,\mathrm{sgn}(\mathbf{s}) \tag{4.58}$$

따라서 슬라이딩 모드 제어 입력을 식 (4.59)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{SB}\right)^{-1}\left(\mathbf{SAx} + \mathbf{SD} + \varepsilon \,\mathrm{sgn}(\mathbf{s})\right) \tag{4.59}$$

한편, 식 (4.58)로부터 $\mathbf{u_1}$은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{u_1} = -\left(\mathbf{SB}\right)^{-1}\left(\mathbf{SAx} + \varepsilon \,\mathrm{sgn}(\mathbf{s})\right) \tag{4.60}$$

식 (4.12)와 식 (4.14)와 식 (4.60)으로부터 입력 $\mathbf{u}$는 다음 식으로도 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u_1} - \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{u_1} - \left(\mathbf{B^T B}\right)^{-1}\mathbf{B^T D} \\ &= -\left(\mathbf{SB}\right)^{-1}\left(\mathbf{SAx} + \varepsilon \,\mathrm{sgn}(\mathbf{s})\right) - \left(\mathbf{B^T B}\right)^{-1}\mathbf{B^T D} \end{aligned} \tag{4.61}$$

제 5 장 시뮬레이션 및 실험 결과

본 장에서는 제안된 모델링과 제어기의 유효성을 입증하기 위해 시뮬레이션과 실험으로 확인한다. 수평면과 경사면의 두 가지 경우에 대하여 시뮬레이션과 실험을 수행한 결과를 제시한다.

Table 5.1은 본 연구의 시뮬레이션에 사용된 매개변수의 수치값을 나타낸다.

Table 5.1 The Numeric Value of Parameters for Simulation

Parameter	Value	Unit
M_r	10.7	$[kg]$
M_p	26	$[kg]$
R	0.235	$[m]$
D	0.566	$[m]$
L	0.14	$[m]$

5.1 수평면 시뮬레이션 및 실험 결과

먼저, 기울기가 $\alpha = 0\ rad$ 인 수평면에서의 이동도립진자를 안정화시키기 위한 슬라이딩 모드 제어기에 대한 시뮬레이션과 실험 결과는 Figs. 5.1~5.11과 같이 나타난다. 시뮬레이션과 실험의 초기 조건으로 이동도립진자의 이동거리 x_r 은 $-0.1m$,

이동도립진자의 기울기 각 θ_p 는 $0.01rad$ 그리고 이동도립진자 몸체의 회전각 δ 는 $0.1rad$ 인 상태에서 시뮬레이션과 실험 결과를 확인한다. 실험에서 이동도립진자의 기울기 각은 보상필터를 적용한 자이로 센서와 가속도 센서값을 통하여 파악하게 된다.

Fig. 5.1과 Fig. 5.2는 이동도립진자의 기울기 각 θ_p 에 대한 시뮬레이션과 실험 결과이다. 시뮬레이션 결과는 약 3초 이내에 안정화 상태인 0으로 수렴함을 보여준다. 약 10초 후에 $0.05rad$ 크기의 외란이 주어졌을 경우에도 약 4초 후에 안정화되는 것을 보인다. 실험결과는 $\pm0.01rad$ 이내로 시뮬레이션 결과를 따라 유계되고 10초 후 외란이 주어졌을 경우에도 약 4초 후에 $\pm0.01rad$ 이내로 시뮬레이션 결과를 따라 유계된다는 것을 보여준다. Fig. 5.3과 Fig. 5.4는 이동도립진자의 기울기를 안정화시키는 제어 입력 τ_θ 에 대한 시뮬레이션과 실험을 비교한 결과이다. 시뮬레이션 결과는 약 3초 후에 도달조건(reaching condition)을 만족하고 10초에 외란이 주어졌을 경우에도 제어 입력이 안정화되는 것을 보인다. 실험 결과는 $\pm40Nm$ 이내에서 시뮬레이션 결과를 따라 유계되고 외란이 주어졌을 경우에도 시뮬레이션 결과를 따라 $\pm40Nm$ 이내에서 유계된다는 것을 보여준다. Fig. 5.5와 Fig. 5.6은 이동도립진자의 몸체가 y 축을 중심으로 회전한 경우에 안정화시키는 제어 입력 τ_δ 을 나타낸 것으로 약 3초 후에 도달조건을 만족하는 것이 보인다.

10초에서의 τ_δ 의 시뮬레이션 결과는 외란에 대한 영향이 없는 것으로 보여지지만 10초 후의 실험 결과는 외란에 대한 미소한 영향이 있음을 알 수 있다. Figs. 5.7~5.10은 슬라이딩 평면 s_1과 s_2 에 대한 시뮬레이션과 실험 결과들이다. s_1 과 s_2 는 약 2초 후에 도달조건(reaching condition)을 만족하는 것을 보인다. s_1과 s_2는 τ_θ와 τ_δ와 비슷한 경향을 보여준다. Fig. 5.11과 Fig. 5.12는 이동도립진자의 슬라이딩 평면들 s_1 과 s_2 와의 관계를 보여주는 것으로 각각 시뮬레이션과 실험 결과를 나타낸 것이다. s_1 과 s_2 의 시뮬레이션 결과는 모두 출발점에서 시작하여 슬라이딩 평면으로 도달함을 보여주며 실험 결과도 시뮬레이션 결과를 따라 슬라이딩 평면에서 유계됨을 보여준다.

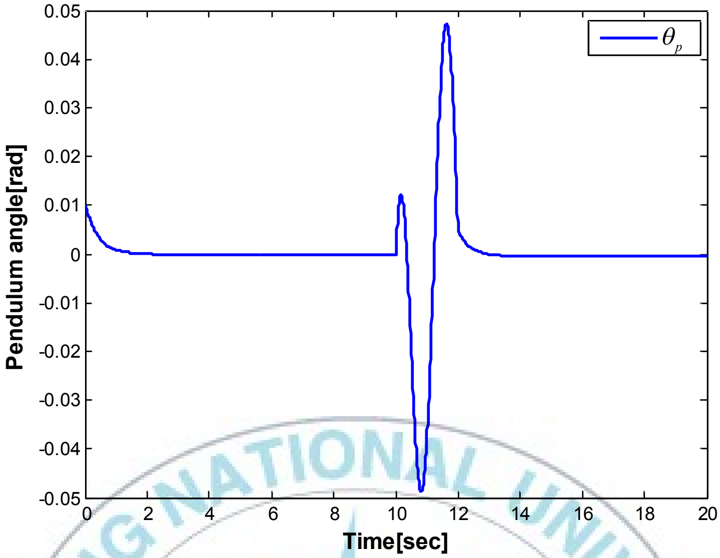


Fig. 5.1 Pendulum angle θ_p in simulation result

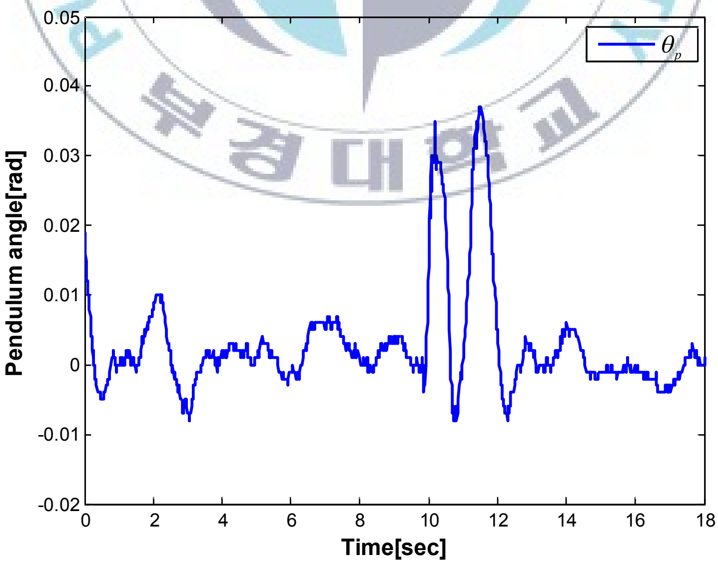


Fig. 5.2 Pendulum angle θ_p in experimental result

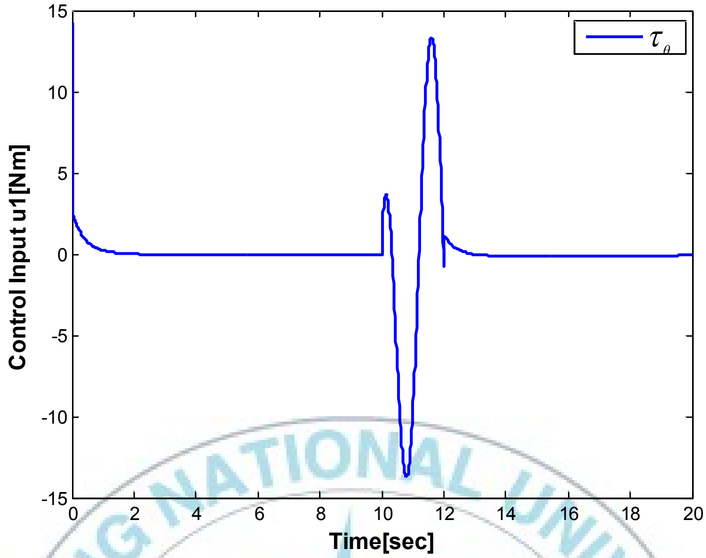


Fig. 5.3 Control input τ_θ in simulation result

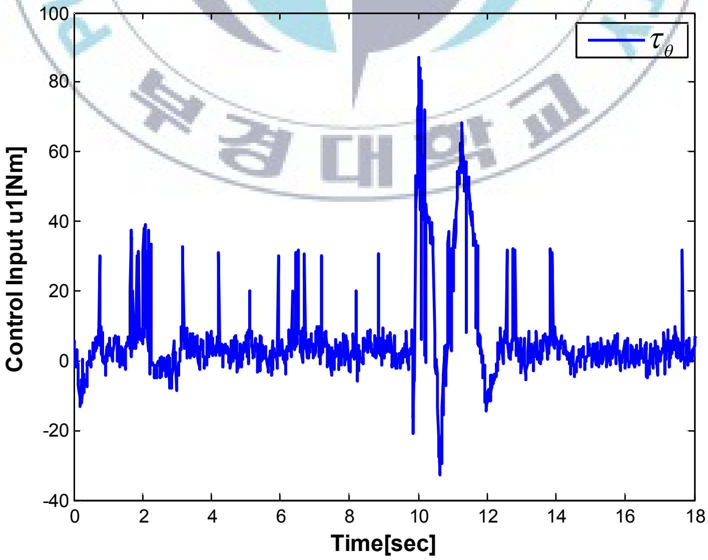


Fig. 5.4 Control input τ_θ in experimental result

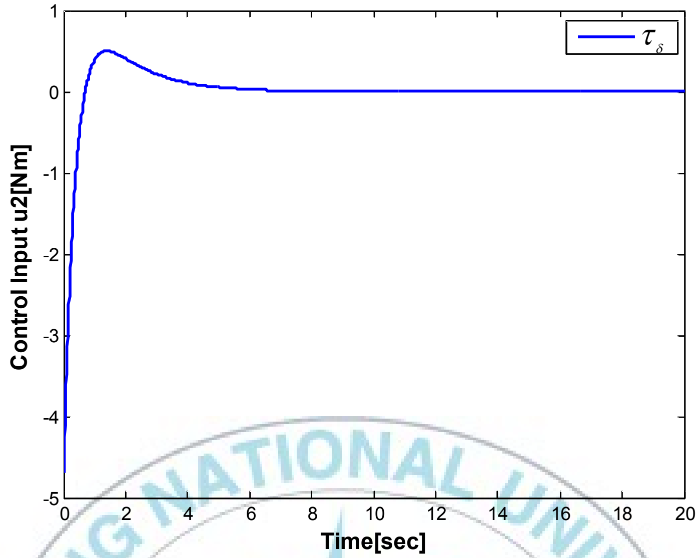


Fig. 5.5 Control input τ_δ in simulation result

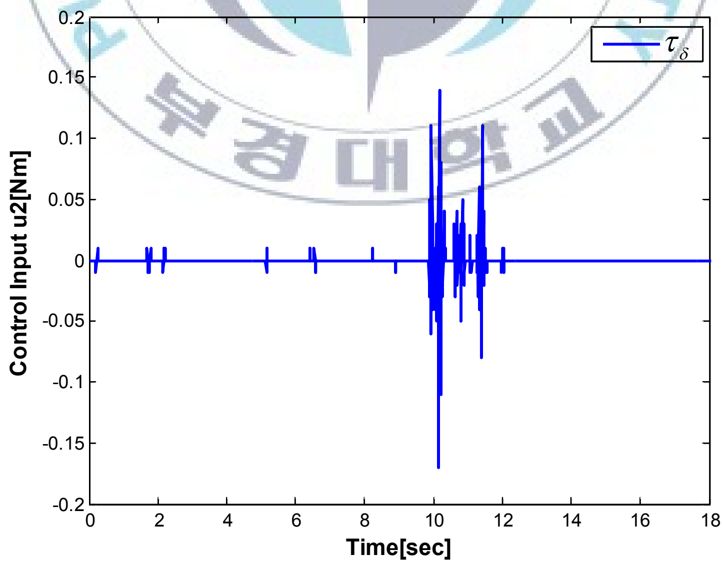


Fig. 5.6 Control input τ_δ in experimental result

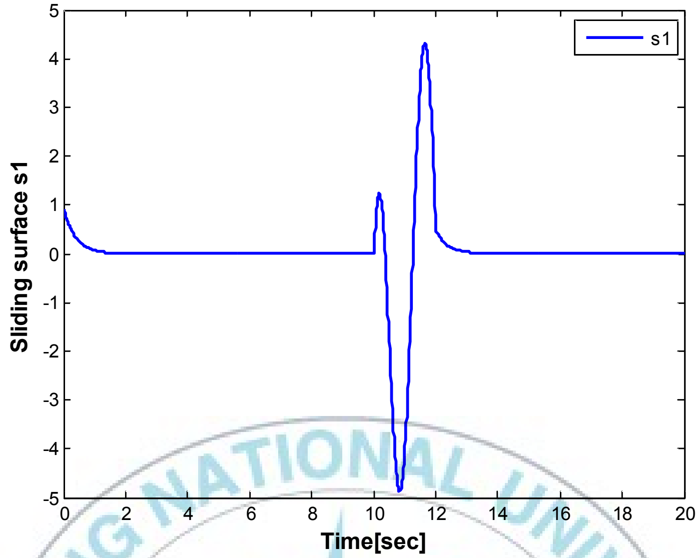


Fig. 5.7 Sliding surface s1 in simulation result

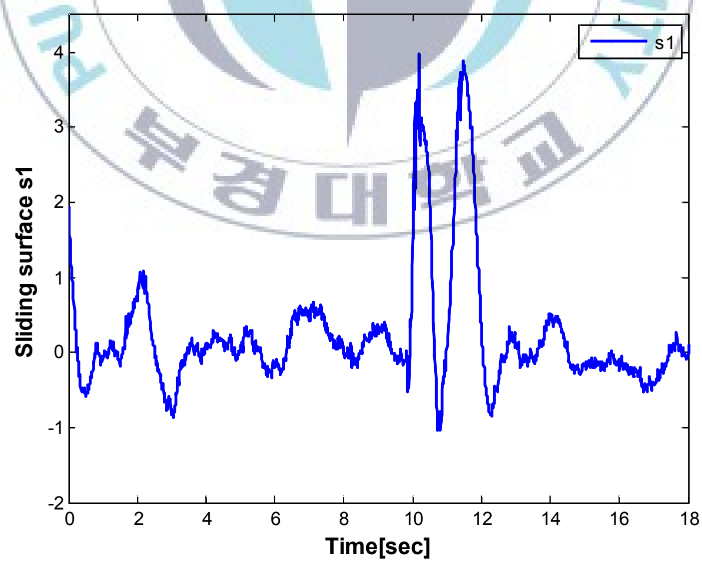


Fig. 5.8 Sliding surface s1 in experimental result

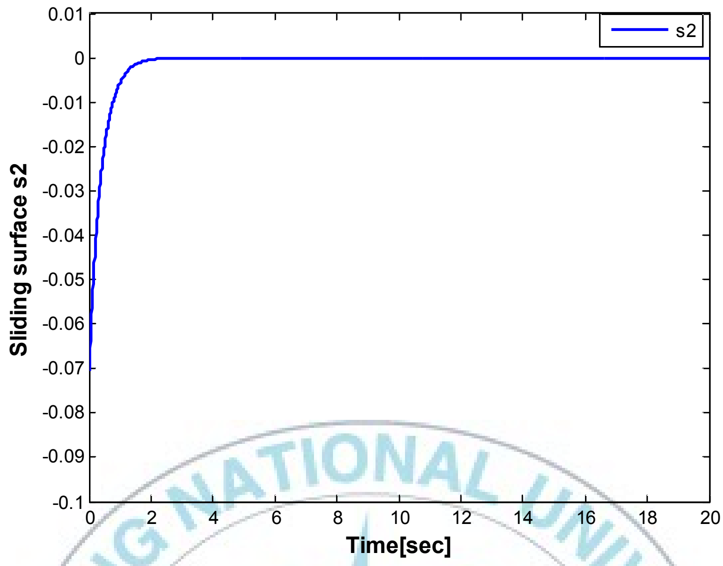


Fig. 5.9 Sliding surface s2 in simulation result

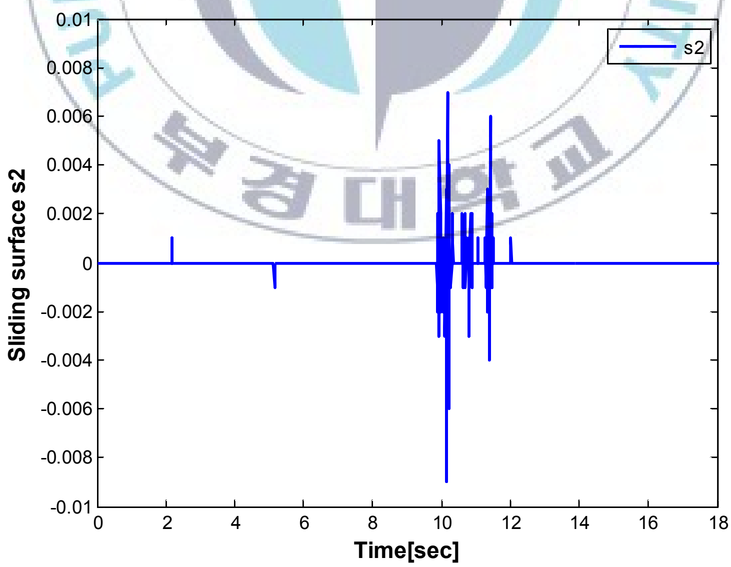


Fig. 5.10 Sliding surface s2 in experimental result

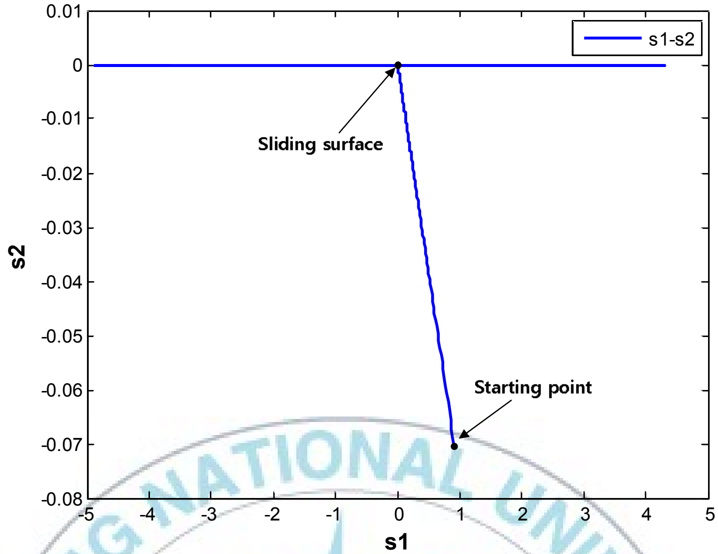


Fig. 5.11 Sliding surface s1-s2 in simulation result

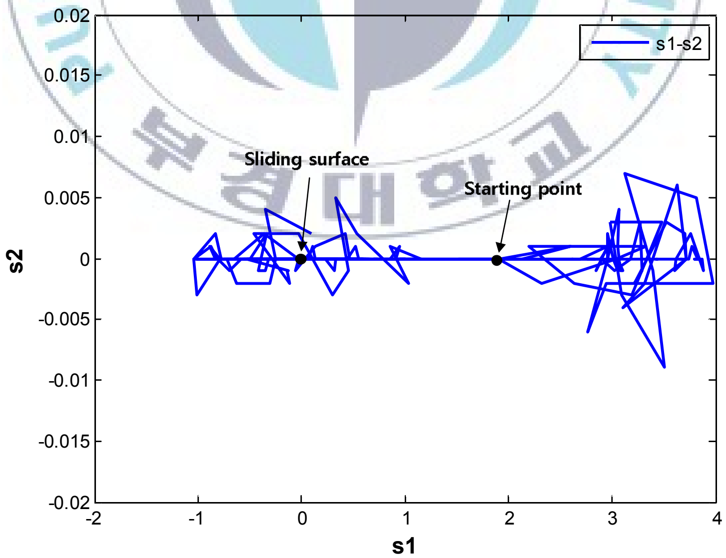


Fig. 5.12 Sliding surface s1-s2 in experimental result

5.2 경사면 시뮬레이션 및 실험 결과

경사면에서의 이동도립진자의 시뮬레이션은 외란이 발생할 경우에 제안한 제어기의 성능을 확인하기 위한 것이다. 경사면은 $\alpha = 0.052 rad$, 즉, 약 3° 의 경사면 기울기로, 이동도립진자를 안정화시키기 위한 슬라이딩 모드 제어기에 대한 시뮬레이션과 실험 결과는 Figs. 5.13~5.24와 같이 나타난다. 시뮬레이션과 실험의 초기 조건은 수평면과 동일한 조건으로 수행하였다.

Fig. 5.13과 Fig. 5.14는 각각 이동도립진자의 기울기 각 θ_p 의 시뮬레이션과 실험 결과를 비교 검토한 것으로 수평면에서와 다른 점은 경사면이 존재할 경우 이동도립진자를 안정화시키는 각은 수평면에서처럼 0이 아니라는 점이다. 경사면 α에 따라 안정화되는 이동도립진자의 기울기 각 θ_p도 달라진다. 즉, 시뮬레이션 결과 경사면의 기울기 각 $\alpha = 0.052 rad$ 인 경우 이동도립진자의 기울기 각은 Fig. 5.13과 같이 약 $0.16 rad$ 에 수렴하여 안정화되는 것을 보여준다. 또한, 실험 결과인 Fig. 5.14에서도 약 40초 후에 기울기 각은 약 $0.165 \pm 0.005 rad$ 에서 유계됨을 보여준다. Fig. 5.15와 Fig. 5.16은 이동도립진자의 제어 입력 τ_θ 의 시뮬레이션과 실험 결과들이다. 시뮬레이션 결과는 수평면에서와 달리 안정화 상태인 약 40초 후에 제어 입력 토크는 0이 아니라 약 $55 Nm$ 를 나타내고 있다. 이것은

경사면에서 이동도립진자가 균형을 유지하기 위해서는 특정한 각도를 유지하기 위해서 특정한 구동 토크가 필요하다는 것을 보여준다. Fig. 5.16의 실험 결과는 Fig. 5.14의 이동도립진자의 기울기 각 $0.165 \pm 0.005 rad$ 을 유지하기 위하여 약 $65 \pm 5 Nm$ 의 구동 토크가 필요하다는 것을 보여준다. 시뮬레이션과 비교하여 구동토크가 차이남을 보여주는데 시뮬레이션에서는 고려하지 않은 실제 지면의 마찰력 때문에 실험 결과에서 구동토크가 약간 더 크게 나타나는 것을 보여준다. Fig. 5.17와 Fig. 5.18은 이동도립진자의 몸체가 y 축을 중심으로 회전한 경우에 안정화시키는 제어 입력 τ_δ 의 시뮬레이션과 실험 결과를 나타낸 것이다. 시뮬레이션과 실험 결과 모두 약 5초 후에 도달조건을 만족하는 것이 보인다. Figs. 5.19~5.22는 슬라이딩 평면에 대한 시뮬레이션과 실험 결과이다. s_1 과 s_2 의 시뮬레이션 결과 약 5초 후에 도달조건을 만족하는 것이 보인다. s_1 의 실험 결과 약 5초 후부터 점차 0으로 수렴해가며 약 40초 후에는 0 ± 0.3 이내에서 유계됨을 보여주며 s_2 의 실험 결과는 약 5초 후에는 0으로 계속 유지됨을 보여준다. Fig. 5.23과 Fig. 5.24는 이동도립진자의 슬라이딩 평면 s_1 과 s_2 와의 관계를 보여주며 각각 시뮬레이션과 실험 결과이다. s_1 과 s_2 의 시뮬레이션 결과는 출발점에서 모두 슬라이딩 평면으로 도달함을 보여주며 실험결과도 슬라이딩 평면 근처에서 유계됨을 보여준다.

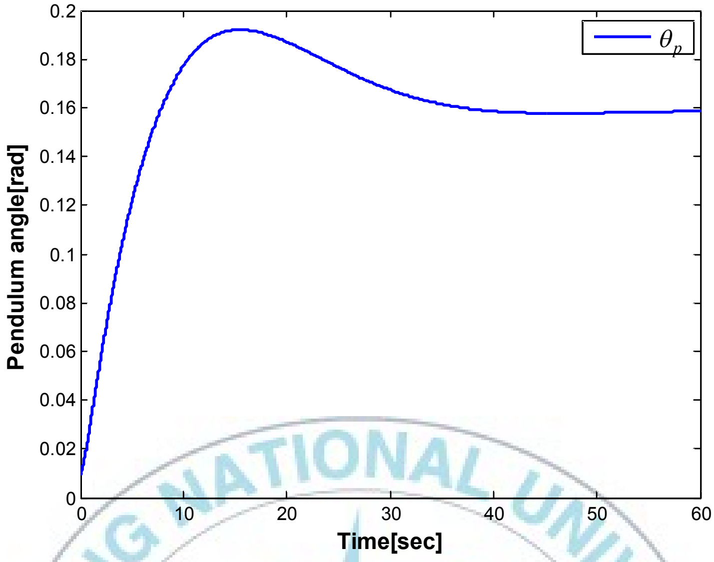


Fig. 5.13 Pendulum angle θ_p in simulation result

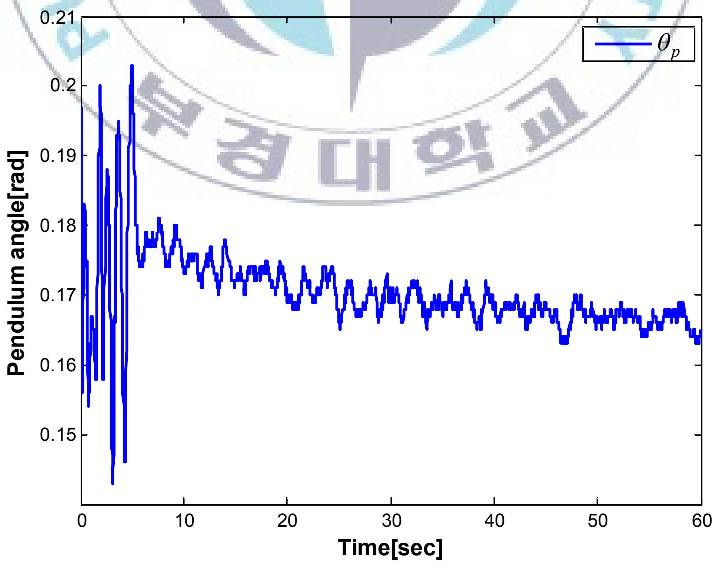


Fig. 5.14 Pendulum angle θ_p in experimental result

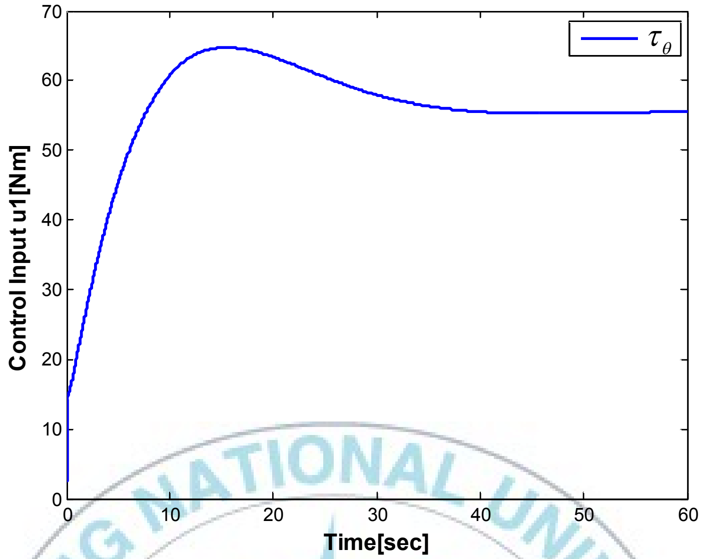


Fig. 5.15 Control input τ_θ in simulation result

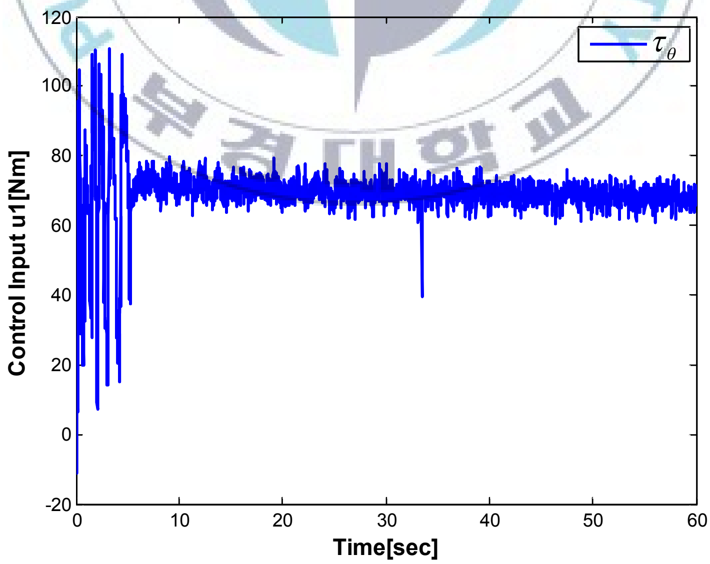


Fig. 5.16 Control input τ_θ in experimental result

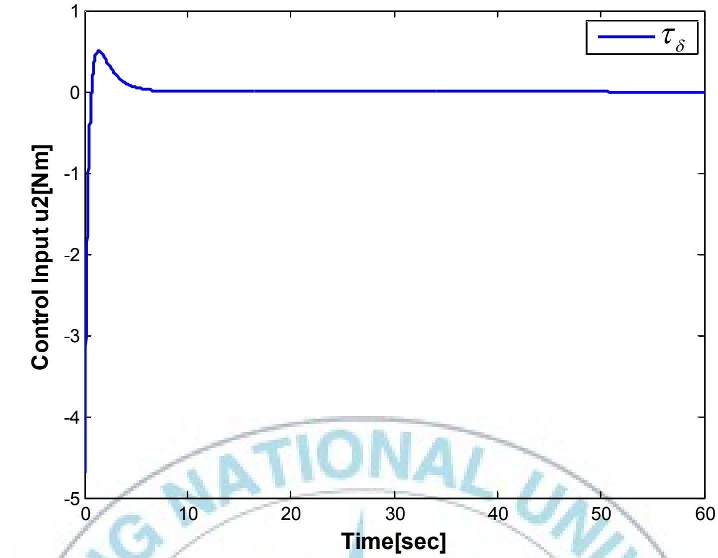


Fig. 5.17 Control input τ_δ in simulation result

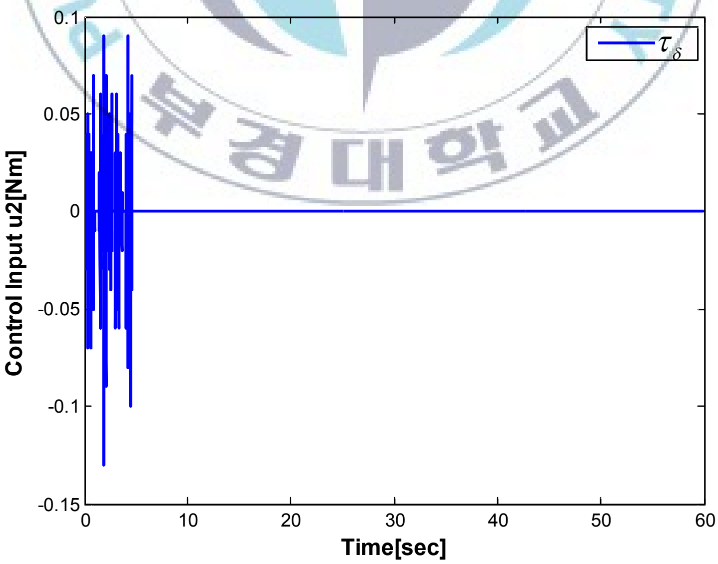


Fig. 5.18 Control input τ_δ in experimental result

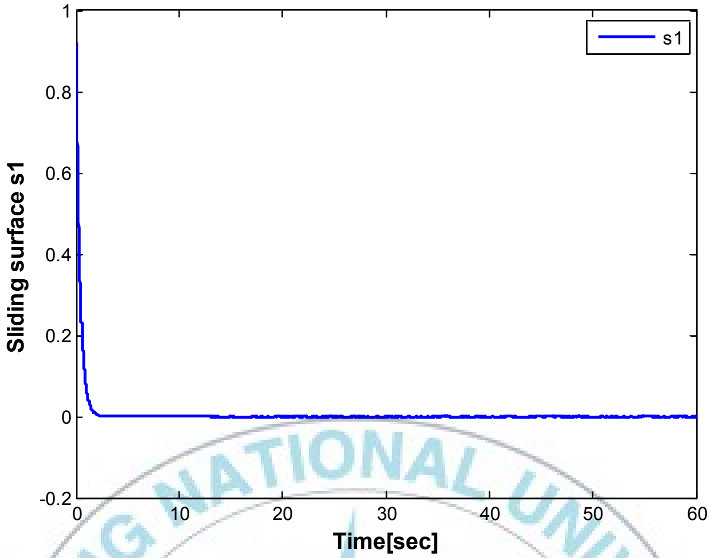


Fig. 5.19 Sliding surface s1 in simulation result

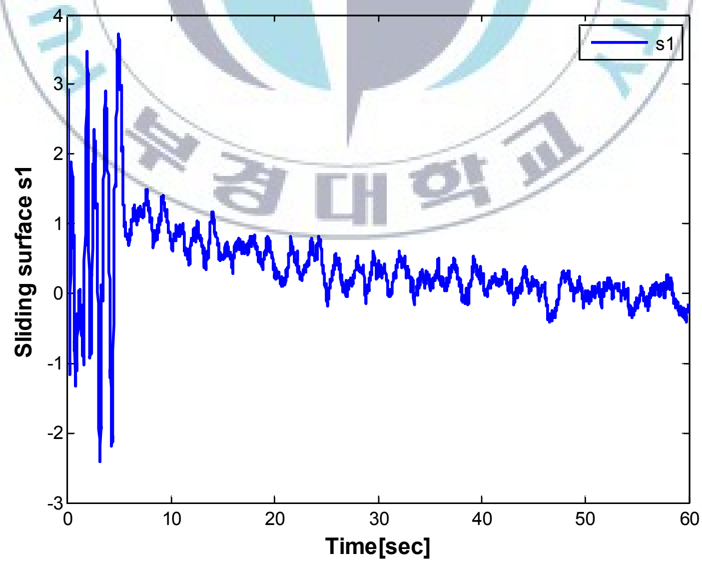


Fig. 5.20 Sliding surface s1 in experimental result

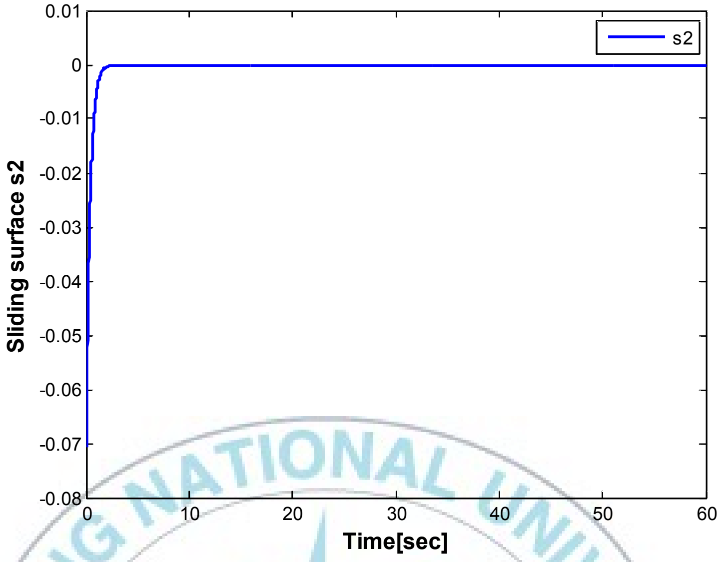


Fig. 5.21 Sliding surface s2 in simulation result

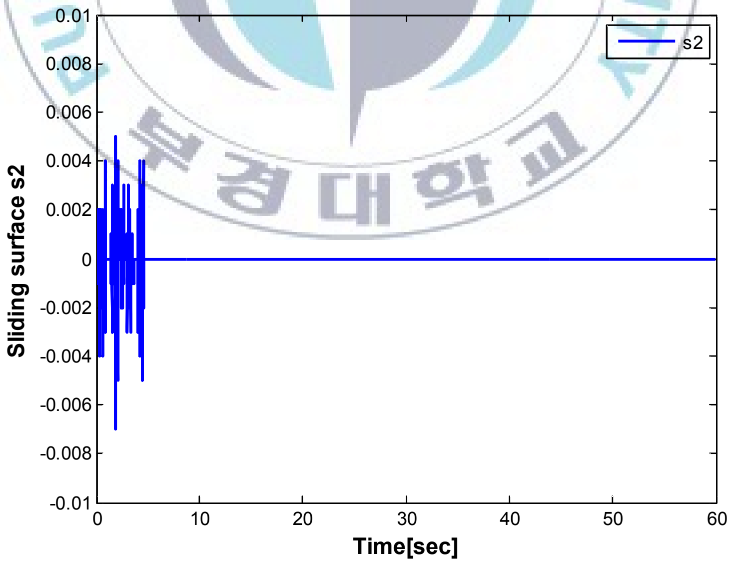


Fig. 5.22 Sliding surface s2 in experimental result

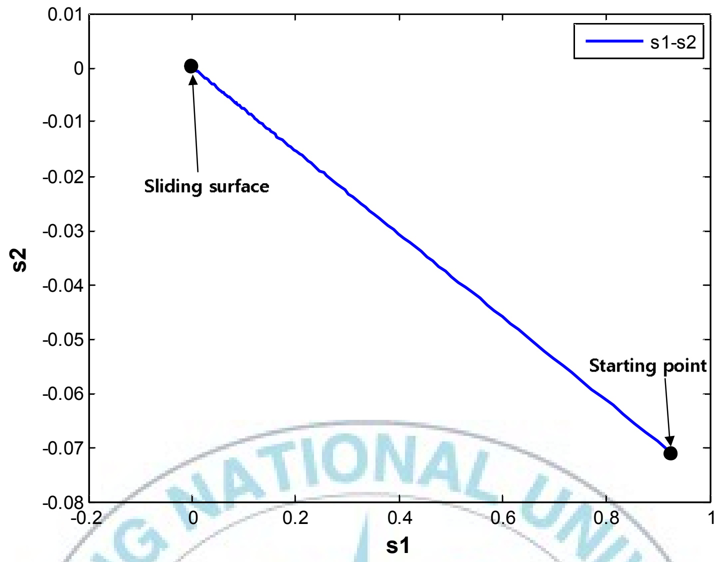


Fig. 5.23 Sliding surface s1-s2 in simulation result

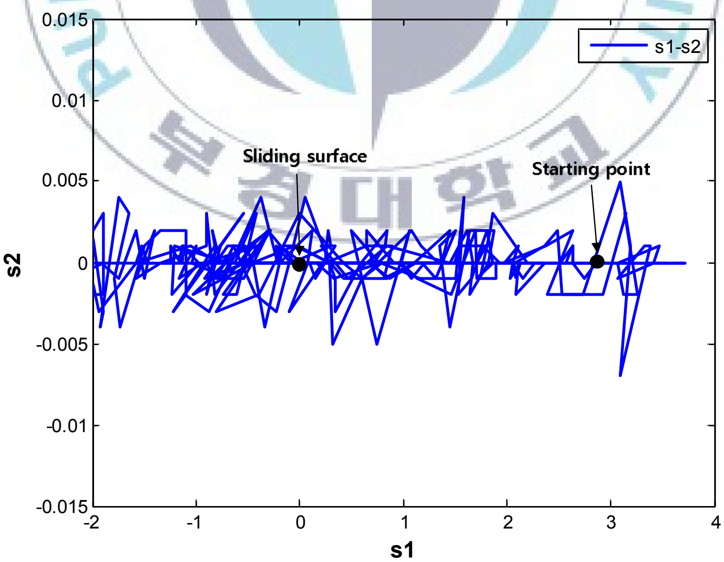


Fig. 5.24 Sliding surface s1-s2 in experimental result

제 6 장 결 론

본 연구에서는 수평면 및 경사면 위에서도 전후방향 이동 및 제자리에서 회전 가능한 이동도립진자를 모델링 및 제어기 설계법을 제안하고, 이동도립진자의 개발 결과를 제시하였다. 본 연구의 결론을 요약하면 다음과 같다.

◈ 이동도립진자는 수평면과 경사면에 대하여 각각의 비선형 모델을 고려한 모델링을 수행하고, 선형화 과정을 통하여 상태공간 방정식 형태의 선형화된 동력학적 모델을 제시하였다.

◈ 상태공간 방정식으로부터 z 축 및 y 축에 대한 회전 토크들과 좌우 바퀴에 대한 입력 토크들과의 변환 관계를 구하는 decoupling 제어기법을 제시하였다.

◈ 제시된 이동도립진자의 동력학적 모델링을 바탕으로 수평면 및 이동도립진자에 외란으로 작용하는 경사면 위에서도 전후방향 이동 및 회전 가능한 이동도립진자를 안정화시키기 위하여 강인한 제어 성능을 보이는 슬라이딩모드 제어기를 제시하였다. 슬라이딩모드 제어기를 설계하기 위해서 먼저 슬라이딩평면벡터와 상태변수벡터를 이용하여 스위칭 함수를 정의하고 이 슬라이딩평면벡터의 설계는 최적 제어 이론에 근거하여

결정된다. 스위칭함수의 슬라이딩평면으로의 도달조건을 이용하여 스위칭함수를 영으로 하는 제어칙을 유도하였다.

◈ 제안된 제어기를 구현하기 위한 제어시스템은 DSP TMS320F28335를 기반으로 개발하였고, 또한 본 연구의 실험을 위한 이동도립진자를 제작하였다. 이동도립진자 몸체의 기울기를 측정하기 위하여 자이로 센서와 가속도 센서를 이용하고, 자이로 센서의 누적오차 보상 및 자이로 센서와 가속도 센서와의 융합을 위한 보상필터의 설계법을 제시하였다.

◈ 또한 시뮬레이션과 실험을 통하여 제안된 제어기의 유효성을 검증하였다. 특히 수평면과 경사면에서의 이동도립진자의 기울기 각은 시뮬레이션 결과를 따라 수평면에서의 실험결과가 $\pm 0.01 rad$ 이내로 유계되었고 $0.052 rad$ 의 경사면에서의 실험결과가 $0.165 rad$ 에서 유계됨을 보여주었다.

본 연구에서 제안된 보상필터는 이동도립진자 뿐만 아니라, 이동 로봇, 항공기 등 기울기 측정이 필요한 다양한 분야에서 유용하게 활용될 것으로 기대된다. 개발된 이동도립진자는 개인 이동 수단으로서의 역할과 더불어 기타 여러 다양한 연구분야의 로봇 플랫폼으로 활용될 것으로 판단된다.

추후 연구 과제로서는 이동도립진자가 자율 주행을 할 수 있는 제어기 설계 및 경로 추적 제어기를 적용하여 추적선(tracking line)으로 주행 가능한 작업을 수행할 수 있을 것이다.

REFERENCES

[1] F. Grasser, A. D. Arrigo, S. Colombi and A. C. Rufer, "JOE: A Mobile, Inverted Pendulum", IEEE Trans. Indus. Elec., Vol. 49, No. 1, pp. 107-114, 2002

[2] M. Baloh and M. Parent, "Modeling and Model Verification of an Intelligent Self-Balancing Two-Wheeled Vehicle for an Autonomous Urban Transportation System", The Conference on Computational Intelligence, Robotics, and Autonomous Systems, pp. 1-7, 2003

[3] http://www.segway.com

[4] C. Ye and J. Borenstein, "Obstacle Avoidance for the Segway Robotic Mobility Platform", American Nuclear Society 10th International Conference on Robotics and Remote Systems for Hazardous Environments, pp. 1-8, 2004

[5] B. Browning, P. E. Rybski, J. Searock and M. M.

Veloso, "Development of a Soccer-Playing Dynamically-Balancing Mobile Robot", Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 1752-17557, 2004

[6] R. O. Ambrose, R. T. Savely, S. M. Goza, P. Strawser, M. A. Diftler, I. Spain and N. Radford, "Mobile Manipulation using NASA's Robonaut", Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 2104-2109, 2004

[7] S. Jung and S. S. Kim, "Control Experiment of a Wheel-Driven Mobile Inverted Pendulum Using Neural Network", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 16, No. 2, pp. 297-303, 2008

[8] K. Furuta, T. Ochiai and N. Ono, "Attitude control of a triple inverted pendulum", International Journal of Control, Vol. 39, No. 6, pp. 1351-1366, 1984

[9] Q. Feng and K. Yamafuji, "Design and Simulation of Control Systems of an Inverted Pendulum",

Roboutica, Vol. 6, pp. 235-241, 1987

[10] S. Y. Seo, S. H. Kim, S. H. Lee, S. H. Han and H. S. Kim, "Simulation of Attitude Control of a Wheeled Inverted Pendulum", International Conference on Control, Automation and Systems, pp. 2264-2269, 2007

[11] S. W. Nawawi, M. N. Ahmad and J. H. S. Osman, "Real-Time Control of a Two-Wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot", International Journal of Computer, Informaion, and Sytems Science, and Engineering, Vol. 2, No. 1, pp. 70-76, 2008

[12] R. J. Wai and L. J. Chang, "Adaptive Stabilizing and Tracking Control for a Nonlinear Inverted-Pendulum System via Sliding-Mode Technique", IEEE Trans. Indus. Elec., Vol. 53, No. 2, 2006

[13] R. N. Gasimov, A. Karamancioglu and A. Yazici, "A Nonlinear Programming Approach for the Sliding Mode Control Design", Applied Mathematical Modeling, Vol. 29, pp. 1135-1148, 2005

[14] C. Edwards, “A Practical Method for the Design of Sliding Mode Controllers Using Linear Matrix Inequalities”, Automatica, Vol. 40, pp. 1761-1769, 2004

[15] J. H. Wu, D. L. Pu and H. Ding, “Adaptive Robust Motion Control of SISO Nonlinear Systems with Implementation on Linear Motors”, Mechatronics, 2007

[16] C. Bonivento, L. Marconi and R. Zanasi, “Output Regulation of Nonlinear System by Sliding Mode”, Automatica, Vol. 37, pp. 535-542, 2001

[17] J. J. E. Slotine, J. K. Hedrick and E. A. Misawa, “On Sliding Observer for Nonlinear System”, Journal of Dynamics System, Measurement and Control, Vol. 109, pp. 245-252, 1987

[18] R. Sreedhar, B. Fernandez and J. Y. Masawa, “Robust Fault Detection in Nonlinear System Using Sliding Mode Observer”, Proceedings of IEEE Conference on Control and Applications, Vol. 2, pp. 715-721, 1993

[19] Y. Yao and M. Tomizuka, “Adaptive and Robust Control of Robot Manipulators: Theory and Comparative Experiment”, Proceedings IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1290-1295, 1994

[20] Y. Huang and J. Han, “Analysis and Design for Nonlinear Continuous Extended State Observer”, Chinese Science Bulletin, pp. 1373-1379, 2000

[21] Z. Gao, S. Hu and F. Jiang, “A Novel Motion Control Design Approach Based on Active Disturbance Projection”, Proceedings the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 5, pp. 4877-4882, 2001

[22] Z. Gao, Y. Huang and J. Han, “An Alternative Paradigm for Control System Design”, Proceedings the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, Vol. 5, pp. 4578-4585, 2001

[23] J. Ackermann and V. Utkin, “Sliding Mode Control Design Based on Ackermann’s Formula”, IEEE Trans. Auto. Con., Vol. 43, No. 2, 234-237, 1998

[24] G. A. Medrano-Cerda, “Robust Computer Control of an Inverted Pendulum”, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 19, No. 3, pp. 58-67, 1999

[25] S. K. Hong, “Fuzzy logic based closed-loop strapdown attitude system for unmanned aerial vehicle (UAV)”, Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 107, No. 2, pp. 109-118, 2003

[26] G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini, “Feedback Control of Dynamic Systems”, London: Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2002

[27] V. I. Utkin, “Sliding-modes in Control Optimization”, Springer-Verlag, 1992

[28] C. Edwards and S. K. Spurgeon, “Sliding Mode Control: Theory and Applications”, Taylor & Francis, Mar. 1998

[29] M. T. Kang, “Control for Mobile Inverted Pendulum using Sliding Mode Technique”, Master Thesis, The Graduate School of Pukyong National University, Feb. 2007

Publications and Conferences

Conferences

[1] Nak Soon Choi, Seo Kwang Kim, Gun You Lee, Hak Kyeong Kim and Sang Bong Kim, "Sliding Mode Controller Design for Rejecting Disturbance of Mobile Inverted Pendulum", Proceedings of the 11th Conference on Science and Technology International Symposium on Mechanical Engineering, pp. 169-174, Oct. 2009

[2] Nak Soon Choi, Gyeong Mok Lee, Hak Kyeong Kim and Sang Bong Kim, "Optimal Sliding Mode Tracking Controller Design for Mobile Inverted Pendulum", Proceeding of 2009 International Symposium on Advanced Engineering, pp. 205-208, 2009

[3] Nak Soon Choi, Hak Kyeong Kim and Sang Bong Kim, "Sliding Mode Control for Stabilizing Mobile Inverted Pendulum and Its Application", Proceedings of 2008 International Symposium on Advanced Mechanical and Power Engineering, pp. 226-231, Oct. 2008

[4] Jeong Woo Park, Nak Soon Choi, Nguyen Thanh Phuong, Tan Tien Nguyen and Sang Bong Kim, “Motion Control of Animal Type Hybrid Quadruped Robot”, International Symposium on Mechatronics and Automatic Control, Vietnam, Oct. 2007

Publications

[1] Nak Soon Choi, Ming Tao Kang, Hak Kyeong Kim, Sang Yong Park and Sang Bong Kim, “Application to Stabilizing Control of Nonlinear Mobile Inverted Pendulum Using Sliding Mode Technique”, 한국해양공학회지 제23권 2호, pp. 1-7, 2009

[2] Sang Bong Kim, Tan Tung Phan, Nak Soon Choi and Hak Kyeong Kim, “Adaptive Tracking Controller Design for Welding Mobile Manipulator with Unknown Parameters”, 한국해양공학회지 제23권 2호, pp. 8-17, 2009

부 록

부록 A 증명

부록 A.1 - 제2장 2절 식 (2.26) 증명

식 (2.26)의 파라미터들은 다음과 같이 구해진다.

$$
\begin{aligned}
A_{23} &= g\left(1-\frac{4}{3}L\frac{M_p}{X}\right) = g-\frac{4g(M_p+3M_r)}{M_p+12M_r} \\
&= -\frac{3M_pg}{12M_r+M_p}
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{43} &= \frac{gM_p}{X} = gM_p\frac{3(M_p+3M_r)}{M_p^2L+12M_rM_pL} \\
&= \frac{3g(3M_r+M_p)}{L(12M_r+M_p)}
\end{aligned}
\tag{A2}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{21} = B_{22} &= \left(\frac{4LY}{3X}-\frac{1}{M_pL}\right) \\
&= \frac{4L}{3}\cdot\frac{M_pL+M_pR+3M_rR)}{(M_p+3M_r)RL}\cdot\frac{3(M_p+3M_r)}{(M_p^2L+12M_pM_rL)}-\frac{1}{M_pL} \\
&= \frac{4L+3R}{(12M_r+M_p)RL}
\end{aligned}
\tag{A3}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{41} = B_{42} &= -\frac{Y}{X} \\
&= -\frac{3(M_p + 3M_r)}{M_p^2 L + 12 M_r M_p L} \cdot \frac{M_p L + 3M_p R + 3M_r R}{(M_p + 3M_r)RL} \qquad \text{(A4)} \\
&= \frac{-3(3M_r R + M_p R + M_p L)}{M_p L^2 (12 M_r + M_p R)}
\end{aligned}
$$

◀

부록 A.2 - 제4장 1절 식 (4.4) 증명

식 (A5)과 식 (A6)는 다음과 같다.

$$
\begin{bmatrix} \tau_L \\ \tau_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{d} \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\delta \end{bmatrix} \qquad \text{(A5)}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & B_4 \\ 0 & 0 \\ B_6 & -B_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_a & 0 \\ 0 & 0 \\ B_b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix} \qquad \text{(A6)}
$$

식 (A6)의 좌변으로부터, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_2(d_{11}+d_{21}) & B_2(d_{12}+d_{22}) \\ 0 & 0 \\ B_4(d_{11}+d_{21}) & B_4(d_{12}+d_{22}) \\ 0 & 0 \\ B_6(d_{11}-d_{21}) & B_6(d_{12}-d_{22}) \end{bmatrix} \qquad \text{(A7)}
$$

식 (A6)로부터 식 (A5)의 행렬 **d** 를 결정하기 위해서 $d_{11}=0.5$ 이고 $d_{12}=d_{21}$ 으로 선택하면, 나머지 요소들도 $d_{12}=0.5,\ d_{21}=0.5,\ d_{22}=-0.5$ 로 선택된다. 따라서 $d_{12}=-d_{22}$ 과 같음을 알 수 있다.

식 (A7)에 $d_{12}=d_{21}$ 과 $d_{12}=-d_{22}$ 를 대입하면, 식 (A8)와 같이 나타내어 진다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2B_2 d_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 2B_4 d_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2B_6 d_{12} \end{bmatrix} \tag{A8}$$

따라서, 식 (A8)와 식 (A6)의 우변이 같으므로 다음과 같은 식 (A9)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} B_a &= 2B_2 d_{11} = B_2 \\ B_b &= 2B_4 d_{11} = B_4 \\ B_c &= 2B_6 d_{11} = B_6 \end{aligned} \tag{A9}$$

◀

감사의 글

부족한 제자를 학문의 길로 이끌어주시고 항상 조언과 충고를 아끼지 않으시며, 지도해 주신 김상봉 교수님께 진심으로 머리 숙여 감사의 말씀을 드립니다. 논문 심사과정에서 따끔한 질책과 격려를 아끼지 않으셨던 정영석교수님과 오정환교수님께도 감사 드립니다. 미비한 논문을 마다하지 않고 상세히 검토하여 조언해주신 김학경 교수님께도 감사 드립니다. 항상 따뜻한 마음과 사랑으로 자식처럼 생각해주시고 아껴주신 사모님께도 감사 드립니다.

CIMEC Lab.의 선배님이신 전봉환 선배님, 김성민 선배님, 김진호 선배님, 서진호 선배님, 감병오 선배님, 이근유 선배님, 여태경 선배님, 박성재 선배님, 김석열 선배님, 신승목 선배님, 이원기 선배님, 김성욱 선배님, 전양배 선배님, 김영규 선배님, 김상찬 선배님, 박바다 선배님, 마성진 선배님, 이희숙 선배님, 윤석민 선배님께 지면으로나마 감사 드립니다. 그리고 CIMEC Lab.에 몸 담고 있으면서 항상 도움을 주었던 선, 후배님들께 감사 드립니다. 학위과정을 마치고 돌아가신 외국인 유학생인 Lam 님, Dung 님, Duy 님, Kang 님, Phuong 님에게도 감사 드립니다.

논문에 쓰는 데 필요한 노력과 많은 조언을 해준 임재성 선배님 감사 드립니다. 대학원 생활을 하면서 함께 고생하고 많은 노력을 한 Hung, 직장 생활과 더불어 학위 논문 쓴다고 같이 고생하신 신종훈 형님, 동기로써 많은 어려움을 같이한

김대원님과 이도경님, 항상 웃음주던 정준호 후배님께 감사 드립니다. 학업과 연구를 병행하며 수고가 많은 박철한 후배님, 이경목 후배님, 김대환 후배님, Thinh 후배님, 김서광 후배님, 박유미 후배님, 최하연 후배님과 이제 막 시작하는 연구실 막내들 한상진 후배님, 정우영 후배님, 배민지 후배님에게도 감사 드립니다.

항상 힘들 때 곁에서 많은 이야기를 나눈 평생 지기 친구들인 사랑하는 베스트 프렌즈, 김정규, 김영훈, 홍동욱, 이동민, 김도경, 최성욱, 김진규에게 늘 고맙다는 말을 전하고 싶습니다. 그리고 언급하지 못한 저의 친구들에게도 감사 드립니다.

끝으로 오늘이 있기까지 노심초사 걱정하시며 뒷바라지 해주신 사랑하는 아버지, 어머니의 은혜에 감사 드리며, 내가 공부하는 동안 많은 힘이 되어준 동생 지영이에게도 감사 드리고 항상 옆에서 밝은 미소 지으며 힘이 되어준 사랑하는 지민이에게 감사의 마음을 전합니다.

“모든 분들이 행복하시길 기원합니다”.