



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

工学博士 學位論文

복합 노이즈 환경에서
개선된 노이즈 제거 알고리즘



2010年 2月

釜慶大學校大學院

制御計測工學科

裴相範

工學博士 學位論文

복합 노이즈 환경에서
개선된 노이즈 제거 알고리즘

指導教授 金南虎

이 論文을 工學博士 學位論文으로 提出함.



2010年 2月

釜慶大學校大學院

制御計測工學科

裴相範

裴相範의 工學博士 學位論文을 認准함

2010年 2月 25日



主 審	工學博士	金 兌 孝 (印)
委 員	工學博士	朴 榮 碩 (印)
委 員	工學博士	黃 龍 淵 (印)
委 員	工學博士	金 萬 高 (印)
委 員	工學博士	金 南 虎 (印)

목 차

그림 목차	iii
표 목차	v
기호 및 약어	vi
Abstract	viii
제1장 서 론	1
제2장 기저함수를 이용한 신호의 변환	4
2.1 푸리에 변환	4
2.2 STFT	8
2.3 웨이블릿 변환	10
2.3.1 연속 웨이블릿 변환	11
2.3.2 이산 웨이블릿 변환	15
2.3.3 웨이블릿 분해	15
2.3.4 웨이블릿 합성	23
2.3.5 Down-sampling	26
2.3.6 Up-sampling	29
2.3.7 Haar 웨이블릿	31
제3장 기존의 노이즈 제거 알고리즘	42
3.1 OWT 알고리즘	42

3.2 SSNF 알고리즘	46
3.3 UDWT 알고리즘	49
제4장 제안된 알고리즘	52
4.1 제안된 웨이블릿 기반의 알고리즘 1	53
4.1.1 신호의 에지 검출	53
4.1.2 평활화된 히스토그램의 변곡점을 이용한 노이즈 제거	59
4.2 제안된 웨이블릿 기반의 알고리즘 2	62
4.2.1 오차함수	62
4.2.2 신호의 특성에 따른 오차함수의 분포특성	66
4.2.3 적응 임계값에 의한 노이즈 제거	69
4.3 제안된 웨이블릿 기반의 알고리즘 3	74
4.3.1 CQF 쌍	74
4.3.2 힐버트 변환쌍	75
4.3.3 All-pass 필터	76
4.3.4 웨이블릿 기저 설계	76
4.3.5 웨이블릿 쌍에 의한 노이즈 제거	80
제5장 시뮬레이션 및 결과	83
5.1 Blocks 신호에 대한 시뮬레이션 결과	85
5.2 HeaviSine 신호에 대한 시뮬레이션 결과	91
5.3 제안된 알고리즘의 특성 비교	96
제6장 결 론	100
참 고 문 헌	102

그림 목차

Fig. 2.1. Aperiodic signal	5
Fig. 2.2. Fourier transform	7
Fig. 2.3. Resolution of STFT	10
Fig. 2.4. Resolution of wavelet transform	12
Fig. 2.5. Down-sampling	19
Fig. 2.6. Vector spaces	20
Fig. 2.7. Wavelet decomposition	23
Fig. 2.8. Up-sampling	25
Fig. 2.9. Wavelet reconstruction	26
Fig. 2.10. Effect of down-sampling	28
Fig. 2.11. Effect of up-sampling	30
Fig. 2.12. Haar functions	35
Fig. 3.1. Soft-thresholding and hard-thresholding	43
Fig. 3.2. Thresholding for wavelet detail coefficients	44
Fig. 3.3. The illustration of UDWT	50
Fig. 4.1. Error function for a noisy signal	56
Fig. 4.2. The histogram of $e_{j,k}$	59
Fig. 4.3. Threshold λ applied to error function $e_{j,k}$	60
Fig. 4.4. Distribution characteristics of error function	63
Fig. 4.5. Distribution characteristics of error function for signal with edges of small amplitude	67

Fig. 4.6. Distribution characteristics of error function for signal with edges of large amplitude	68
Fig. 4.7. Application process of threshold in the proposed method	71
Fig. 4.8. Hilbert transform pair of wavelet	79
Fig. 4.9. Magnitude of wavelet in frequency domain	79
Fig. 4.10. Approximation and difference coefficients	81
Fig. 5.1. Impulse noise	84
Fig. 5.2. Denoising results for Blocks signal	87
Fig. 5.3. Denoising results for HeaviSine signal	92
Fig. 5.4. SNR of Blocks signal	97
Fig. 5.5. SNR of HeaviSine signal	97



표 목차

Table 5.1. SNR comparison of Blocks signal at SNR 9.11[dB]	85
Table 5.2. SNR comparison of HeaviSine signal at SNR 9.16[dB]	91
Table 5.3. SNR of the Blocks signal reconstructed from a mixed noise environment	98
Table 5.4. SNR of the HeaviSine signal reconstructed from a mixed noise environment	98



기호 및 약어

$\delta(\cdot)$	Kronecker delta 함수
$\psi(t)$	웨이브렛 함수
$\phi(t)$	스케일링 함수
$c_{j,k}$	웨이브렛 근사계수
$d_{j,k}$	웨이브렛 상세계수
$h(\cdot)$	저역통과 필터
$g(\cdot)$	고역통과 필터
σ	표준편차
$\eta_S(\cdot)$	soft-thresholding
$\eta_H(\cdot)$	hard-thresholding
λ	임계값
$Corr_{j,k}^p$	공간적 상관도
$F_{j,k}$	누적함수
C_i	i 차 항의 계수
u	구간상수
$e_{j,k}$	오차함수
I_l	근사데이터
m_1	오차함수의 평균
n_1	평균값 m_1 에 상응하는 정규화된 데이터 수
M_{error}	오차함수에서 에지로서 판단된 지점의 국부 최대값
M_1	에지 영역에 상응하는 웨이브렛 상세계수의 최대값
M_2	에지 영역에 상응하는 웨이브렛 상세계수의 최소값
$\mathcal{H}\{\cdot\}$	힐버트 변환
$A(z)$	all-pass 필터

$\eta_{\mathcal{H}}(\cdot)$	제안된 thresholding 함수
$\epsilon_{j,k}$	두 근사계수 사이의 차 신호
AWGN	additive white Gaussian noise
STFT	short time Fourier transform
OWT	orthogonal wavelet transform
SSNF	spatially selective noise filtration
UDWT	undecimated discrete wavelet transform
PWA1	proposed wavelet-based algorithm 1 ; 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 노이즈 제거 알고리즘
PWA2	proposed wavelet-based algorithm 2 ; 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 노이즈 제거 알고리즘
PWA3	proposed wavelet-based algorithm 3 ; half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍에 의한 노이즈 제거 알고리즘
SNR	signal-to-noise ratio
SNR_{in}	복합적인 노이즈에 의해 훼손된 신호의 SNR
SNR_{out}	복원된 신호의 SNR
CWT	continuous wavelet transform
DWT	discrete wavelet transform
QMF	quadrature mirror filter
IID	independent and identical distribution
MAD	median absolute deviation
RDWT	redundant discrete wavelet transform
ODWT	overcomplete discrete wavelet transform
SIDWT	shift-invariant discrete wavelet transform
DWFs	discrete wavelet frames
CQF	conjugate quadrature filter

Advanced Denoising Algorithms in Mixed Noise Environments

Sang-Bum Bae

Department of Control and Instrumentation Engineering

The Graduate School

Pukyong National University

Abstract

Noise, which is the main cause of degradation, takes different forms depending on its sources and types. Moreover, the AWGN and Impulse noise are representative. Therefore, a number of researches to remove noise and restore the original signal have been processed.

However, the Fourier transform can not represent the local characteristics of signal since it transforms the whole signal by using a basis function. The STFT needs to have a proper window size for signal to analyze so has limited performance in the analysis for multiscale signals.

The wavelet transform, which has been proposed to overcome limitations with the Fourier transform and STFT, has been applied to a variety of signal processing fields. In order to remove AWGN by using wavelets, Donoho and Johnstone proposed threshold-based algorithm. In the SSNF algorithm, noise was removed by using spatial correlation among wavelet coefficients in the neighboring scale. Additionally, UDWT was proposed to improve the noise removal performance of OWT. However, these existing noise removal algorithms do not have

method removing noise mixed complexly.

Therefore, in this thesis, in order to restore signal in complex noise environment, an algorithm using the inflection point of error distribution function, an algorithm using distribution characteristics based on the wavelet approximation coefficients and a noise removal algorithm by wavelet pair with half-sample delay characteristics were proposed.

In a noise removal algorithm using the inflection point of error distribution function, first inflection point was established after peak point from smoothed data for histogram of error function and this preserves the edge part of signal and removes complex noise part concurrently.

And a noise removal algorithm using distribution characteristics based on the wavelet approximation coefficients uses the average value of error function and normalized data number. According to characteristics of noisy signal the algorithm changed threshold value adaptively and separated the edge and noise parts.

In a noise removal algorithm by wavelet pair with half-sample delay characteristics, the error data was acquired from difference between two approximation coefficients representing half-sample delay characteristics. And noise part was removed by applying new threshold value into the error data.

In order to demonstrate the superiority of proposed algorithms in this paper, existing algorithms were compared by using SNR as the judgement criterion for noise removal.

제1장 서론

센서시스템을 적용하는 산업현장의 많은 측정시스템은 운용자의 안전을 고려하여 측정대상으로부터 원거리에 위치하고 있으며, 이러한 센서에 의해 획득된 신호는 유·무선의 다양한 전송경로를 통해 센서시스템 본체로 전송된다. 그러나 산업현장에서 개폐기의 스위칭 동작이나 전동기를 이용한 장비는 매우 큰 노이즈원으로 동작하고 있으며, 이동통신 단말기를 비롯한 대부분의 전기·전자 장비들 또한 노이즈원이 된다. 그리고 노이즈원으로부터 발생한 다양한 형태의 노이즈는 공중으로 방사되거나 신호선 또는 전원선을 따라 전도되어 시스템에 유입된다.

이와 같이, 시스템 외부로부터 입력되는 다양한 형태의 물리량을 전기적 신호로 변환하고, 정보신호를 보다 효율적으로 활용하기 위한 획득, 저장, 전송 등의 과정에서 시스템 내·외부적인 원인에 의해 노이즈가 발생하고 있으며, 측정된 결과에서 오류를 유발시킨다.

열화의 주된 원인이 되는 노이즈는 발생원인과 형태에 따라 다양한 종류가 있으나, AWGN(additive white Gaussian noise)과 임펄스 노이즈가 대표적이며, 이러한 노이즈의 제거는 크게 하드웨어와 소프트웨어 측면에서 이루어지고 있다. 노이즈는 먼저 하드웨어 설계 단계에서 제거되는 것이 바람직하며, 이를 위해 많은 소자들이 개발되어 적용되고 있다. 그러나 하드웨어 설계 단계에서는 노이즈에 대한 완전한 대책이 용이하지 않으며, 시스템에 따라서는 센서가 안테나의 역할을 함에 따라 센서를 통해 노이즈가 유입되거나 또는 유효신호의 주파수 대역이나 그 형태가 노이즈와 유사하여 하드웨어적으로 분리 가능하지 않을 경우가 있다. 따라서 이러한 경우를 비롯하여 대부분의 측정시스템에서는 소프트웨어적으로 필터를 구현하여 적용하고 있다[24]-[32], [44].

신호를 주파수 영역에서 해석하기 위한 푸리에 변환(Fourier transform)은 AWGN 제거를 비롯한 많은 응용분야에서 사용되었다. 그러나 푸리에 변환을 이용하여 AWGN을 제거하기 위해 설계된 저역통과 필터는 노이즈 성분을 평활화할 뿐만 아니라, 신호의 에지 성분을 흐리게 한다. 이러한 결과는 푸리에 변환이 기저함수를 사용하여 신호 전체에 대해서 변환을 수행함에 따라, 신호의 국부적인 특징을 표현할 수 없기 때문이다[1].

푸리에 변환의 한계를 극복하기 위해 제안된 STFT(short time Fourier transform)는 시간과 주파수 스케일링을 갖는 기저함수를 사용함에 따라 신호에 대한 시간과 주파수 특성을 동시에 나타내도록 하였다[2],[3]. 이러한 STFT는 신호를 시간-주파수로 이루어진 2차원 공간에서 표현하는 방법이지만, STFT가 신호해석을 위해 하나의 윈도우를 사용함에 따라 주파수의 변화에 상관없이 일정한 해상도를 갖는다. 이에 따라, 윈도우의 크기가 적을 경우에는 고주파 성분에 대한 분석이 용이해지지만, 상대적으로 저주파에 대한 분석 성능이 저하되며, 윈도우의 크기가 클 경우에는 저주파 성분에 대한 분석이 용이해지지만, 상대적으로 고주파에 대한 분석 성능이 저하된다. 그러므로 STFT는 분석하고자 하는 신호에 적합한 윈도우 크기를 결정해야 하며, 멀티스케일 신호를 분석함에 있어 한계를 나타낸다.

이와 같은 푸리에 변환과 STFT의 한계를 극복하기 위해 제안된 것이 웨이블릿 변환(wavelet transform)이며, 영상 및 음성신호에서 임펄스 노이즈 제거[4]를 비롯하여, AWGN 제거[5]-[8] 및 신호 압축[9], 특징 검출[45] 등의 신호처리 분야에서 널리 이용되고 있다[33],[38]-[40]. 뿐만 아니라, 산업현장에서 산업기기의 결함 검출[10],[11]과 online 상에서 실시간으로 지리정보 데이터를 3차원으로 표현하기 위한 분야[12], microwave를 통한 항공기의 형체 인식[13], 의료영상 개선[14],[15] 등과 같은 광범위한 분야에서 적용되고 있다[34]-[36]. 웨이블릿 변환은 STFT의 윈도우가 고정되어 있는데 반해, 고주파 신호에 대해서는 짧은 윈도우를 적용하고, 저주파 신호에 대해서는 긴 윈도우를 적용하여 멀티스케일 신호에 대한 분석에서 우수한 성능을 나타낸다.

그리고 획득된 신호로부터 AWGN을 제거하기 위해, Donoho와 Johnstone은 임계값에 기반한 알고리즘을 제안하였으며, 그 이후 임계값의 크기와 적용 방법에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다[5],[6],[37]. 그리고 인접한 scale에서의 웨이블릿 계수들 간의 공간적 상관도를 이용하여, 신호의 에지와 노이즈를 분리하는 SSNF(spatially selective noise filtration)와 모든 scale에서 동일한 수의 웨이블릿 계수를 갖는 UDWT(undecimated discrete wavelet transform)는 OWT(orthogonal wavelet transform)에서의 시각적인 특징과 노이즈 제거 성능을 향상시키기 위해 제안되었다[7]. 그리고 B -wavelet에 기반한 노이즈 제거 알고리즘은 임펄스 노이즈를 제거하기 위해 제안되었다[4].

그러나 이러한 기존의 웨이블릿 기반 노이즈 제거 알고리즘들은 특정 노이즈 성분만을 제거하기 위해 제안됨에 따라, 복합적인 노이즈 환경에서

는 큰 성능 저하를 나타낸다.

따라서 본 논문에서는 복합적으로 중첩된 노이즈를 제거하기 위해, 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘을 비롯하여, 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘과 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍에 의한 노이즈 제거 알고리즘을 제안하였다.

오차 분포함수의 변곡점을 이용한 노이즈 제거 알고리즘에서는 오차함수의 히스토그램에 대한 평활화된 데이터로부터 피크값 이후의 첫 번째 변곡점을 임계값으로 설정하여, 신호의 에지 성분을 보존함과 동시에 복합적인 노이즈 성분을 제거하도록 하였다.

웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 노이즈 제거 알고리즘에서는 오차함수의 평균값과 정규화된 데이터 수를 이용하여, noisy 신호의 특성에 따라 적응적으로 임계값이 변화하도록 함에 따라, 신호의 에지 성분과 노이즈 성분에 대한 분리 특성을 더욱 향상시켰다.

또한 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍에 의한 노이즈 제거 알고리즘에서는 두 개의 웨이브렛 쌍에 의해 얻어지는 계수가 근사적으로 half-sample delay 특성을 나타냄에 따라, 이러한 특성을 이용하여 두 근사계수 사이의 차로부터 얻어지는 데이터에 새로운 임계값을 적용하여 노이즈 성분을 제거하였다.

그리고 본 논문에서 제안된 알고리즘의 우수성을 입증하기 위해, 노이즈 제거에 대한 판단기준으로 SNR(signal-to-noise ratio)을 사용하여 기존의 알고리즘과 비교하였다.

제2장 기저함수를 이용한 신호의 변환

2.1 푸리에 변환

신호 또는 시스템에 대한 시간 함수들을 다른 독립 변수의 함수로 나타낼 경우, 이들에 대한 특성들을 더욱 확실하게 나타낼 수 있으며, 이에 따라 신호를 분석하거나 합성 또는 처리하기가 용이해진다. 따라서 이와 같이 신호 또는 시스템을 시간이 아닌 다른 독립변수로서 표현하고자 하는 많은 연구들이 오래전부터 수행되었으며, 가장 대표적인 방법이 푸리에 변환이다.

푸리에 변환은 신호 $f(t)$ 를 사인과 코사인으로 구성된 지수함수를 기저함수로 하여, 시간영역의 정보를 주파수 영역의 정보로 변환하는 방법으로, 프랑스의 수학자 Joseph Fourier에 의해 제안되었다. 이와 같은 푸리에 변환은 모든 주기적인 파동이 다른 진폭을 갖는 사인파의 성분들로 표현될 수 있다는 사실로부터 출발했으며, 현재 수학자와 공학자들에게는 아주 중요한 학문이 되었다.

주기가 T 인 임의의 시연속 주기신호 $\tilde{x}(t)$ 는 모든 t 에 대해서 다음의 식 (2.1)을 만족하며, 기본 주파수는 $\omega_0 = 2\pi/T$ 이다.

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{x}(t) \quad (2.1)$$

이때 신호 $\tilde{x}(t)$ 는 식 (2.2)와 같이 직교 함수들의 선형합으로서 표현된다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k g_k(t) \quad (2.2)$$

그리고 이러한 경우 직교함수 $g_k(t)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 다음의 조건을 만족해야만 한다.

$$\int_a^b g_m(t) g_n^*(t) dt = \begin{cases} A_m, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (2.3)$$

$$= A_m \delta(m-n)$$

여기서, $g_n^*(t)$ 는 $g_n(t)$ 의 켈레 복수수를 나타내며, $\delta(\cdot)$ 은 크로네커 델타 (Kronecker delta) 함수이다.

그리고 이를 보다 일반적인 비주기 신호로 확장할 경우, 아래의 그림 2.1 과 같이 주기 신호의 한 주기 만을 획득 한 것으로 해석되며, 이때 주기 $T \rightarrow \infty$ 로 된다.

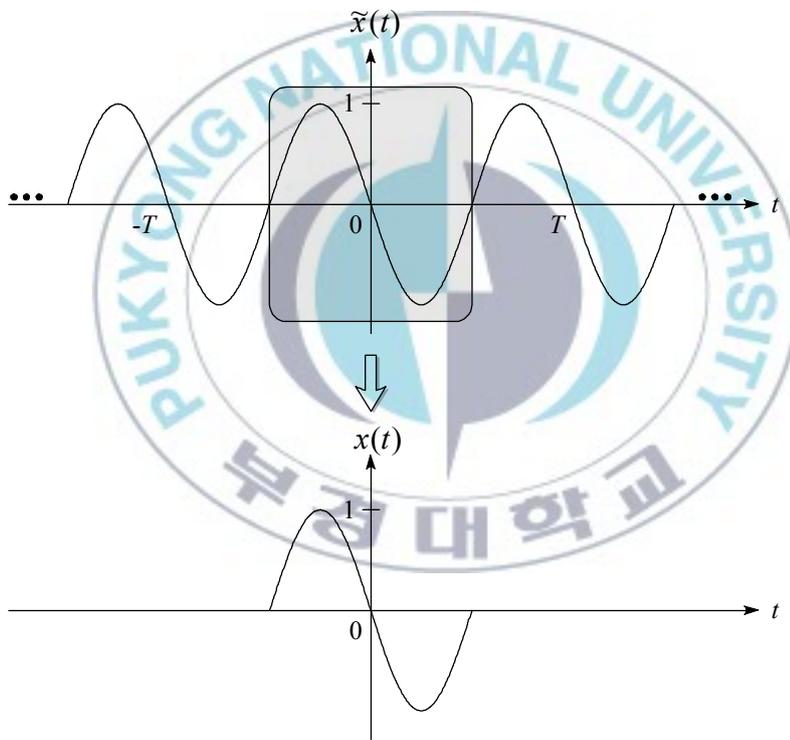


Fig. 2.1. Aperiodic signal.

그림 2.1에서 주기신호 $\tilde{x}(t)$ 는 유한구간의 신호 $x(t)$ 를 사용하여 다음의 식 (2.4)와 같이 표현된다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t+kT) \quad (2.4)$$

여기서, 주기신호 $\tilde{x}(t)$ 를 지수함수를 이용한 푸리에 급수로 나타내면 식 (2.5)와 같다.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.5)$$

푸리에 계수 c_k 는 식 (2.5)의 양변에 $e^{-jk\omega_0 t}$ 를 곱한 후, 한 주기에 대해 적분을 취할 경우, 다음의 식 (2.6)과 같다.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.6)$$

이때, $T \rightarrow \infty$ 로 취하는 것에 의해, 다음의 식 (2.7)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

또한, 식 (2.7)에서 $X(\omega)$ 는 식 (2.8)과 같다.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.8)$$

위의 두 식으로부터, 식 (2.8)을 신호 $x(t)$ 에 대한 푸리에 변환이라고 하며, 식 (2.7)을 역푸리에 변환이라고 한다. 또한 이 두 식을 모두 포함하여, 푸리에 변환쌍이라 한다.

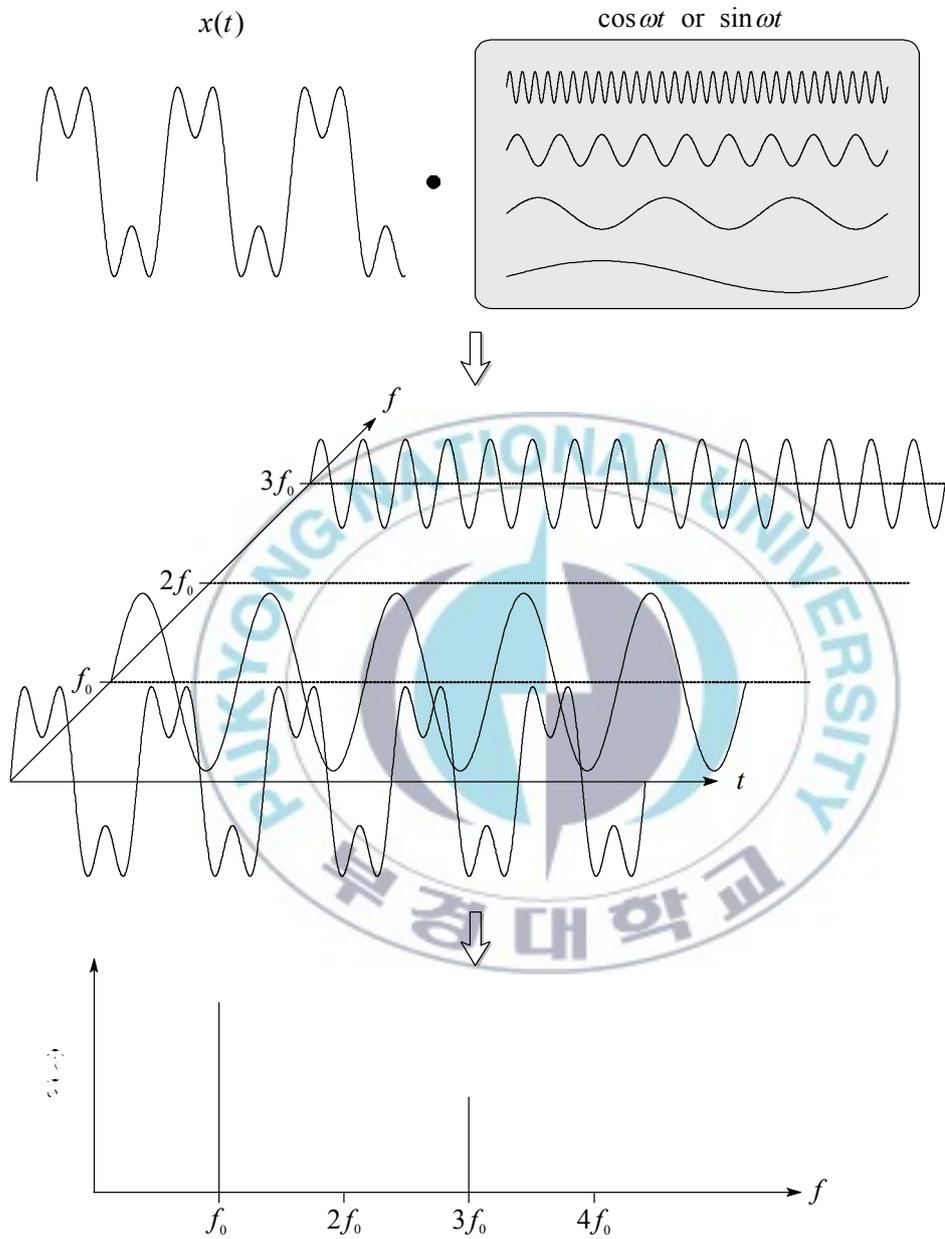


Fig. 2.2. Fourier transform.

그림 2.2는 크기가 A 이고 $f=f_0$ 인 신호와 크기가 $0.5A$ 이고 $f=3f_0$ 인 두 신호가 중첩된 신호 $x(t)$ 에 대한 푸리에 변환 과정을 나타낸 것으로, 임의의 신호 $x(t)$ 는 무한히 많은 기저함수들과의 내적을 통해, 그 결과가 주파수 영역 상에서 표현된다. 이와 같이, 푸리에 변환은 시간영역의 정보를 주파수 영역의 정보로 변환하여 주파수 성분에 대한 다양한 분석과 처리를 가능하게 하며, 또한 주파수 영역의 정보를 시간영역의 정보로 변환하여 시간정보를 복원한다.

그러나 이러한 푸리에 변환이 식 (2.8)과 그림 2.2로부터, 기저함수를 사용하여 신호 전체에 대해서 변환을 수행함에 따라 신호의 국부영역에 대한 주파수 특성을 표현할 수 없기 때문에, 에지를 포함하는 noisy 신호에 푸리에 변환을 이용하여 설계한 저역통과 필터를 적용할 경우 노이즈 성분을 평활화할 뿐만 아니라, 신호의 에지를 흐리게 한다. 즉, 신호의 에지와 같은 불연속 지점은 주파수 영역의 모든 지점에서 나타나게 됨에 따라, 고역의 주파수 성분을 제거할 경우, 에지의 불연속성을 상실하게 된다. 따라서 이와 같은 푸리에 변환은 신호에 대한 시간영역의 정보가 크게 고려되지 않아도 되는 분야에서는 우수한 성능을 나타내지만, 신호에서 특정 주파수 성분이 발생한 시간정보를 필요로 하는 분야에서는 적용될 수 없다.

2.2 STFT(short time Fourier transform)

푸리에 변환의 한계를 극복하기 위해 제안된 시간-주파수 변환으로 STFT와 Wigner-Ville 변환 등이 있다. STFT는 푸리에 변환이 주파수 스케일링만을 갖는 기저함수를 사용하는 것과는 달리, 시간 천이와 주파수 스케일링을 갖는 기저함수를 사용함에 따라, 시간과 주파수 특성을 동시에 나타낼 수 있다. 즉, STFT는 일정한 크기의 창함수를 이용하여 신호를 여러 구간으로 나누어 각 구간에서 푸리에 변환을 실행하여, 신호의 국부 영역에 대한 주파수 정보를 신호의 위치에 따라 표현하며, 식 (2.9)와 같이 표현된다[3].

$$X_W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g(t-b) e^{-j\omega t} dt \quad (2.9)$$

여기서, b 는 신호에 적용되는 창함수의 위치를 나타낸다. 따라서 위의 식 (2.9)는 위치 b 에서 신호 $x(t)$ 의 스펙트럼을 표현하게 된다. 이러한 STFT의 대표적인 예로, 창함수로서 가우스 함수를 사용한 경우를 가버(Gabor) 변환이라 하며, 아래의 식 (2.10)과 같이 표현된다.

$$G_f(b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_\alpha(t-b) e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

식 (2.10)으로부터 $g_\alpha(t)$ 는 가우스 함수로서 식 (2.11)과 같다.

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \quad (2.11)$$

위의 식들로부터, α 는 가버변환의 해상도를 결정하는 변수로서, 분석하고자 하는 신호의 고주파 성분을 분석하기 위해서는 적은 α 값을 선택하여 창의 크기를 작게 해야 하며, 저주파 성분을 분석하기 위해서는 큰 α 값을 선택하여 창을 크게 해야 한다. 즉, 가우스 창함수를 사용해, 신호를 위치 b 에서 분리한 다음, 이것에 대한 푸리에 변환을 수행하게 된다.

그러나 창함수 $g_\alpha(t)$ 의 크기가 적을 경우에는 고주파 성분을 분리함에 있어서 효과적이지만, 상대적으로 긴 주기를 갖는 저주파 신호를 분석함에 있어서는 적절하지 않다. 반대의 경우로서, 창함수 $g_\alpha(t)$ 의 크기가 클 경우에는 긴 주기를 갖는 저주파 신호를 분석함에 있어서는 효과적이지만, 짧은 주기를 갖는 고주파 신호에 대한 분석에는 적합하지 않다. 즉, STFT 또는 가버변환이 신호해석을 위해 하나의 윈도우를 사용함에 따라 주파수의 변화에 상관없이 일정한 해상도를 갖게 되므로, 신호에서 분리하고자 하는 주파수 성분에 따라 창을 적절하게 결정해야 한다. 이에 따라, STFT는 여러 다른 파장의 신호 성분들이 중첩된 멀티스케일 신호를 분석

하는 데는 한계를 나타낸다.

그림 2.3은 STFT의 해상도를 표현한 것이다.

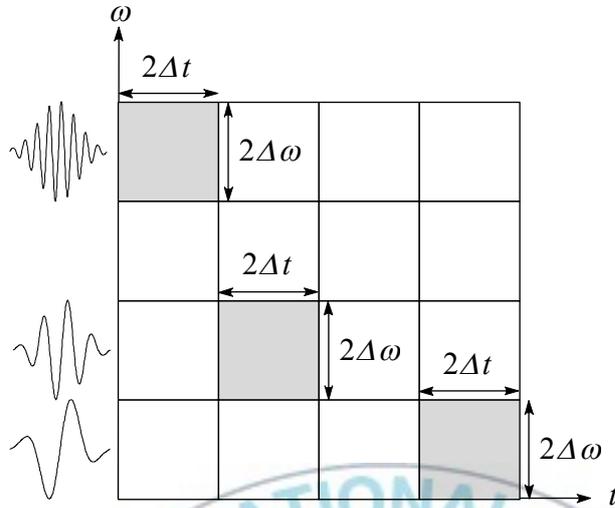


Fig. 2.3. Resolution of STFT.

2.3 웨이브렛 변환

푸리에 변환과 STFT의 한계를 극복하기 위해 제안된 웨이브렛 변환은 시간-주파수 국부성을 가짐에 따라 시간적으로 예측하기 어려운 신호를 해석함에 있어 매우 유용한 방법이다. 즉, STFT가 주파수의 변화에 상관없이 일정한 해상도를 갖게 됨에 따라 시간-주파수 간의 국부성이 상충관계를 갖는데 반해, 웨이브렛 변환은 고주파 신호에 대해서는 짧은 창함수를 사용하고, 저주파 신호에 대해서는 긴 창함수를 사용함에 따라 주파수 영역에 따른 다중해상도를 갖게 되므로, 멀티스케일 특성을 나타내는 신호에 대해서도 그 특성을 정확하게 표현하게 된다.

이러한 웨이브렛은 J. Morlet에 의해 처음으로 제시되었으며, S. Mallat에 의해 다중해상도 분석방법(multi-resolution analysis)이 제시되어 이산 웨이브렛 변환이 크게 발전하게 되는 기초를 마련하였다.

2.3.1 연속 웨이브렛 변환

어떤 실수 또는 복소수 값을 갖는 연속시간 함수 $\psi(t)$ 가 다음의 허용조건(admissibility condition)을 만족할 경우, 함수 $\psi(t)$ 를 웨이브렛이라 정의한다[23],[41]-[43].

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (2.12)$$

여기서, $\Psi(\omega)$ 는 식 (2.13)과 같이 정의되는 $\psi(t)$ 에 대한 푸리에 변환을 의미한다.

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.13)$$

식 (2.12)의 C 가 $\omega=0$ 에서 무한한 값을 갖지 않기 위해서는 $\Psi(0)=0$ 이어야 하므로, 다음의 식 (2.14)가 만족됨을 의미한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.14)$$

위의 식을 위해서, 웨이브렛은 항상 진동하며, 빠른 속도로 0에 수렴해야 한다. 또한 $\psi(t)$ 는 제곱적분 가능 또는 에너지 신호이어야 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (2.15)$$

위와 같은 조건들은 웨이브렛 변환을 위해, 웨이브렛이 만족해야만 하는 조건으로서, 이러한 조건이 만족될 경우 웨이브렛의 역변환이 존재하게 된다. 그리고 이와 같이 정의되는 웨이브렛을 mother 웨이브렛이라고 하며, 이러한 mother 웨이브렛의 이동과 확장에 의해, 식 (2.16)의 baby 웨이브렛이 얻어진다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.16)$$

여기서, a 는 scale 변수이며, b 는 translation 변수이고, $a, b \in R$ 이다. 그리고 식으로부터, scale 변수 a 가 변화함에 따라 연산을 위한 웨이블릿 창함수의 크기가 확대 또는 축소되어 scale에 따른 다중 해상도 해석을 가능하게 한다. 즉, scale 변수 $a > 1$ 일 경우, 웨이블릿 $\psi(t)$ 는 시간축을 따라 팽창하게 되어 해상도가 감소하게 되며, $0 < a < 1$ 일 경우에는 $\psi(t)$ 가 압축하게 되어 해상도가 증가하게 된다.

아래의 그림 2.4는 웨이블릿 변환의 해상도 변화를 보이고 있다.

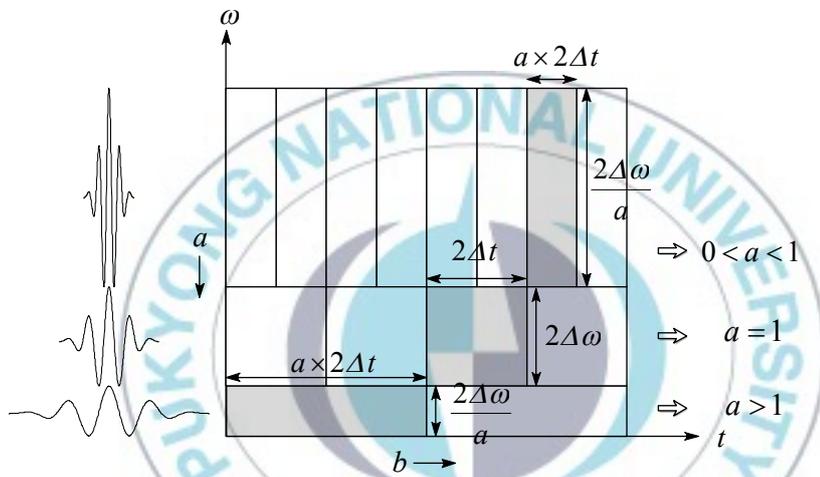


Fig. 2.4. Resolution of wavelet transform.

웨이블릿 변환은 신호의 특징들을 분석하기 위해, 신호를 시간-스케일의 영역으로 분해하는 것으로서, 그림 2.4와 같이 시간과 스케일 공간에서 변환결과를 진폭으로 표현한다. 즉, 앞서 정의된 baby 웨이블릿과 같은 웨이블릿 패밀리와 신호 사이의 컨벌루션에 의해 시간-스케일 공간의 각 지점에서 신호의 특징들을 진폭 정보로서 표현하게 되며, 예로서 짧은 지속시간을 갖는 임펄스성의 신호에 대해서는 짧은 창함수의 baby 웨이블릿에 의해 그 특징이 명확히 나타나게 되며, 긴 주기를 갖는 신호에 대해서는

긴 창함수의 baby 웨이브렛에 의해 그 특징이 나타내게 되어, 멀티스케일 특성을 갖는 신호에 대해서도 그 특징들을 우수하게 표현하게 된다.

또한 식 (2.16)의 normalizing factor $1/\sqrt{|a|}$ 는 다음의 식 (2.17)과 같이 모든 a 와 b 에 대해서, 동일한 에너지를 갖도록 한다[23].

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt \quad (2.17)$$

위의 웨이브렛에 의한 신호 $f(t) \in L^2(R)$ 의 연속 웨이브렛 변환(CWT ; continuous wavelet transform)은 다음의 식 (2.18)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} W(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

여기서, 두 신호 $h(t)$ 와 $x(t)$ 의 컨벌루션을 식 (2.19)와 같이 정의할 경우, 식 (2.18)은 식 (2.20)과 같이 다시 표현된다.

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.19)$$

$$W(a, b) = f(b) * \psi_{a,0}^*(-b) \quad (2.20)$$

즉, 위의 식 (2.20)은 $f(b)$ 와 $\psi_{a,0}^*(-b)$ 의 컨벌루션으로서 웨이브렛 변환 $W(a, b)$ 을 표현하였으며, 식 (2.20)에 대한 주파수영역 표현은 식 (2.21)과 같이 나타내어지고, 식으로부터 $F(\omega)$ 와 $\Psi(\omega)$ 는 각각 $f(t)$ 와 $\psi(t)$ 에 대한 푸리에 변환을 의미한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(b, a) e^{-j\omega b} db = \sqrt{|a|} F(\omega) \Psi^*(a\omega) \quad (2.21)$$

위의 식 (2.21)의 양변에 $\Psi(a\omega)/|a|^{3/2}$ 를 곱하고, a 에 대해 적분하는 것에 의해, 식 (2.22)를 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^{3/2}} W(a, b) \Psi(a\omega) e^{-j\omega b} db da \\ = F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{a} da \end{aligned} \quad (2.22)$$

이때, 식 (2.22)의 우변이 식 (2.23)과 같이 되므로, 식 (2.22)는 식 (2.24)와 같이 다시 정리된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{|a|} da = C \quad (2.23)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^{3/2}} W(a, b) \Psi(a\omega) e^{-j\omega b} db da \quad (2.24)$$

그리고 식 (2.24)의 양변에 대해 역푸리에 변환을 취하여, 식 (2.25)의 역웨이브렛 변환에 대한 식을 얻는다.

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a, b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (2.25)$$

2.3.2 이산 웨이브렛 변환

이전의 과정으로부터 정의된 웨이브렛을 dyadic sampling하는 것에 의해 정규직교 웨이브렛을 얻을 수 있다. 그리고 식 (2.16)에서 scale 변수 a 와 translation 변수 b 를 각각 식 (2.26)과 같이 놓을 경우, 식 (2.16)은 식 (2.27)과 같이 된다.

$$a = 2^j, \quad b = 2^j k \quad (2.26)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (2.27)$$

식 (2.27)의 정규직교 웨이브렛을 이용한 웨이브렛 변환은 식 (2.28)과 같이 표현된다.

$$W_{j,k} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^{-j}t - k) dt, \quad j, k \in Z \quad (2.28)$$

이산 웨이브렛 변환(DWT ; discrete wavelet transform)은 프랑스의 수학자 Y. Meyer에 의해 기초가 마련되었으며, S. Mallat에 의해 다중해상도 분석방법이 제시되면서 이산 웨이브렛이 크게 발전하게 되었다. 이산 웨이브렛은 노이즈 제거와 영상 압축 등과 같은 신호처리분야에서 특히 유용하게 활용되고 있으며, 이는 이산 웨이브렛이 정규 직교성을 갖는 웨이브렛에 의해 신호를 분해함에 따라, 완전 복원이 가능하기 때문이다.

2.3.3 웨이브렛 분해

제곱적분가능한 함수들의 공간 $L^2(R)$ 에서 다중해상도 분석은 선형벡터 공간 $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$ 로 되어 있으며, 다음의 특성들을 갖는다.

a. $\text{clos}_{L^2}(\cup_{j \in Z}) = L^2(R)$

- b. $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$
- c. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j-1}$
- d. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow \forall k \in Z$ 에 대해, $f(t-k) \in V_j$
- e. V_0 에 대해 기저가 되는 함수 $\phi(t)$ 가 존재한다.

위에서 $\phi(t)$ 는 scaling 함수 또는 father 웨이브렛이며, 아래의 조건들을 만족하는 함수이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (2.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt = 1 \quad (2.30)$$

$$\langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \delta(k) \quad (2.31)$$

위의 식들과 같이 scaling 함수 $\phi(t)$ 는 그 적분값이 1이며, 단위 에너지를 가지고, 정수 전이에 대해 직교한다. 그리고 앞서 언급된 $V_0 \subset V_{-1}$ 는 V_0 의 모든 벡터가 V_{-1} 에 속하는 것을 의미하므로, 만약 $\phi(t)$ 가 V_0 상에 있으면 반드시 V_{-1} 내에도 속하게 된다. 따라서 $\phi(t)$ 는 V_{-1} 에 대한 기저 $\phi(2t-k)$ 의 선형결합으로서 표현되며, 아래의 dilation equation으로 나타내어진다.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \phi(2t-k) \quad (2.32)$$

여기서, $h(k)$ 를 scaling 계수라고 하며, 하위 영역으로의 확장을 위해 사용된다. 그리고 dyadic sampling에 의해 웨이브렛을 나타내었던 것과 같이 scaling 함수를 다음의 식 (2.33)과 같이 나타낸다.

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) \quad (2.33)$$

그리고 식 (2.32)와 식 (2.33)으로부터 다음의 식 (2.34)를 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \cdot 2^{1/2} \sum_k h(k) \phi(2 \cdot 2^{-j}t - k) \\ &= 2^{-(j-1)/2} \sum_k h(k) \phi(2^{-(j-1)}t - k) \end{aligned} \quad (2.34)$$

여기서, 신호 $f(t)$ 와 scaling 함수 $\phi_{j,k}(t)$ 의 내적을 계산하면 아래의 식 (2.35)와 같다.

$$\langle \phi_{j,k}(t), f(t) \rangle = \left\langle \left\{ 2^{-(j-1)/2} \sum_k h(k) \phi(2^{-(j-1)}t - k) \right\}, f(t) \right\rangle \quad (2.35)$$

이때 $2^{-(j-1)/2} \phi(2^{-(j-1)}t - k) = \phi_{j-1,k}$ 이므로, 위의 식은 아래의 식 (2.36)과 같이 다시 정리된다.

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), f(t) \rangle &= \left\langle \left\{ \sum_k h(k) \phi_{j-1,k} \right\}, f(t) \right\rangle \\ &= \sum_k h(k) \langle \phi_{j-1,k}, f(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

그리고 $c_{j,k}$ 를 아래의 식 (2.37)과 같이 나타낼 경우, 식 (2.36)은 식 (2.38)로 된다.

$$c_{j,k} = \langle \phi_{j,k}(t), f(t) \rangle \quad (2.37)$$

$$c_{j,k} = \sum_k h(k) c_{j-1,k} \quad (2.38)$$

DWT에서 $c_{j,k}$ 를 근사계수라 하며, 식 (2.38)은 scale j 에서의 근사계수가 scale $j-1$ 에서의 계수들에 의해서 구성됨을 나타낸다.

또한 다중해상도 분석법은 신호를 다른 주파수 영역을 갖는 여러 부대역으로 분해하거나 복원하는 필터 बैं크와 같으며, 이를 위해 식 (2.32)를 아래와 같이 다시 나타낸다.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_m h(m) \phi(2t-m) \quad (2.39)$$

그리고 이것에 대한 scaling과 translation에 의해 아래의 식 (2.40)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t-k) &= 2^{-j/2} \cdot 2^{1/2} \sum_m h(m) \phi(2 \cdot (2^{-j}t-k) - m) \\ &= 2^{-(j-1)/2} \sum_m h(m) \phi(2^{-(j-1)}t - 2k - m) \end{aligned} \quad (2.40)$$

여기서, $2k+m=l$ 인 경우, $m=l-2k$ 로 되며, 이때 식 (2.40)은 아래의 식 (2.41) 및 식 (2.42)와 같이 된다.

$$2^{-j/2} \phi(2^{-j}t-k) = 2^{-(j-1)/2} \sum_l h(l-2k) \phi(2^{-(j-1)}t-l) \quad (2.41)$$

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_l h(l-2k) \phi_{j-1,l}(t) \quad (2.42)$$

식 (2.37)로부터, $c_{j,k} = \langle \phi_{j,k}(t), f(t) \rangle$ 이므로, 위의 식 (2.42)의 양변에 대해 신호 $f(t)$ 와의 내적을 구하면, 식 (2.43)과 같이 된다.

$$c_{j,k} = \sum_l h(l-2k) c_{j-1,l} \quad (2.43)$$

위의 식으로부터 $h(l-2k)$ 는 저역통과 필터로서, 아래의 그림 2.5와 같이 2배로 down-sampling이 취해진다. 즉, scale j 에서의 근사계수 $c_{j,k}$ 는 상위 scale의 근사계수 $c_{j-1,k}$ 에 저역통과 필터 $h(\cdot)$ 를 적용한 후, 2배로 down-sampling하는 것에 의해 얻어진다.

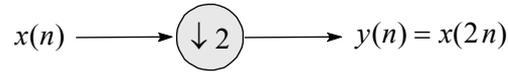


Fig. 2.5. Down-sampling.

앞서 언급된 바와 같이 scaling 함수 $\phi_{j,k}$ 는 $j = \dots, 1, 0, -1, \dots$ 에 대하여, 각각 선형벡터공간 $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$ 에 존재하게 된다. 이때 $V_j \subset V_{j-1}$ 이므로, 상위의 벡터공간 V_{j-1} 는 하위의 벡터공간 V_j 와 이것의 직교 여공간으로 이루어지게 된다. 이때 이러한 직교 여공간을 W_j 로 나타낼 경우, 다음의 관계식들이 얻어진다.

$$V_1 = V_2 \oplus W_2 \quad (2.44)$$

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 \quad (2.45)$$

$$V_0 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1 \quad (2.46)$$

따라서 위의 식 (2.46)을 일반적인 경우로 확장할 경우 다음의 식 (2.47)과 같이 되며, 이러한 직교 여공간은 웨이브렛 함수가 정의되는 영역이다. 또한 그림 2.6은 식 (2.47)과 같이 나타내어지는 공간을 표현한 것이다.

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \dots \oplus W_j \oplus V_j \\ &= \dots \oplus W_{j-1} \oplus W_j \oplus W_{j+1} \oplus \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

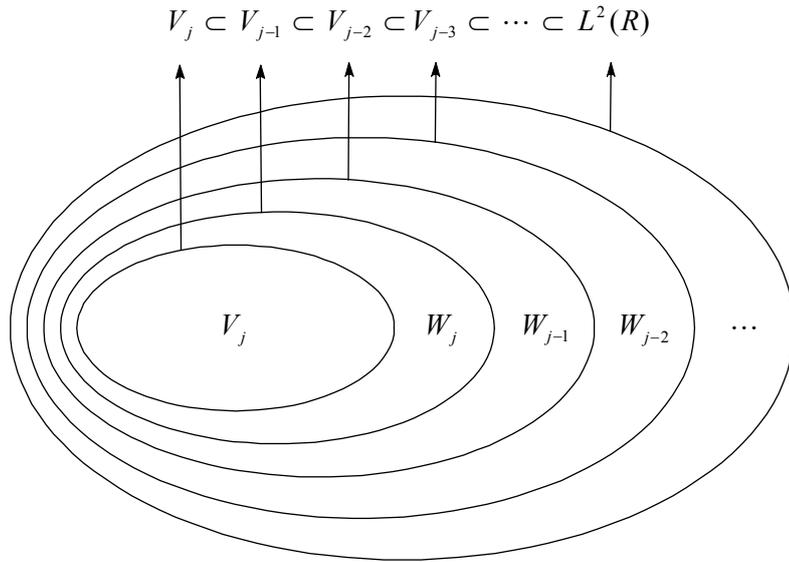


Fig. 2.6. Vector spaces.

식 (2.44)에서 식 (2.47) 및 그림 2.6으로부터, 웨이브렛 함수는 상위 scale의 scaling 함수로부터 얻을 수 있다. 즉, 공간 W_j 에 존재하는 $\psi_{j,k}(t)$ 는 W_j 가 상위 scale V_{j-1} 의 부분공간이므로, 이것의 정규직교 기저인 $\phi_{j-1,k}(t)$ 의 선형결합에 의해 나타내어진다. 그리고 scaling 함수 $\phi(t)$ 와 유사하게 웨이브렛 함수 $\psi(t)$ 를 식 (2.48)과 같이 나타낸다.

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g(k) \phi(2t-k) \quad (2.48)$$

그리고 식 (2.27)과 식 (2.48)로부터 다음의 식 (2.49)가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \cdot 2^{1/2} \sum_k g(k) \phi(2 \cdot 2^{-j}t - k) \\ &= 2^{-(j-1)/2} \sum_k g(k) \phi(2^{-(j-1)}t - k) \end{aligned} \quad (2.49)$$

여기서, 신호 $f(t)$ 와 웨이브렛 함수 $\psi_{j,k}(t)$ 의 내적을 구하면, 다음의 식 (2.50)과 같다.

$$\langle \psi_{j,k}(t), f(t) \rangle = \left\langle \left\{ 2^{-(j-1)/2} \sum_k g(k) \phi(2^{-(j-1)}t - k) \right\}, f(t) \right\rangle \quad (2.50)$$

이때, $2^{-(j-1)/2} \phi(2^{-(j-1)}t - k) = \phi_{j-1,k}$ 이므로, 식 (2.50)은 다음의 식 (2.51)과 같이 다시 정리된다.

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,k}(t), f(t) \rangle &= \left\langle \left\{ \sum_k g(k) \phi_{j-1,k} \right\}, f(t) \right\rangle \\ &= \sum_k g(k) \langle \phi_{j-1,k}, f(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.51)$$

또한, $d_{j,k}$ 를 식 (2.52)와 같이 나타낼 경우, 위의 식 (2.51)은 식 (2.53)과 같이 된다.

$$d_{j,k} = \langle \psi_{j,k}(t), f(t) \rangle \quad (2.52)$$

$$d_{j,k} = \sum_k g(k) c_{j-1,k} \quad (2.53)$$

여기서, $d_{j,k}$ 를 상세계수라 하며, scale j 에서의 상세계수가 scale $j-1$ 에서의 근사계수로부터 만들어진다. 또한 $\psi(t)$ 를 식 (2.54)와 같이 나타낼 경우, 이것에 대한 scaling과 translation에 의해 식 (2.55)가 얻어진다.

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_m g(m) \phi(2t - m) \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
2^{-j/2} \psi(2^{-j}t-k) &= 2^{-j/2} \cdot 2^{1/2} \sum_m g(m) \phi(2 \cdot (2^{-j}t-k) - m) \\
&= 2^{-(j-1)/2} \sum_m g(m) \phi(2^{-(j-1)}t - 2k - m)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

앞의 scaling 함수에서와 같이, $2k+m=l$ 인 경우, $m=l-2k$ 로 되며, 이때 식 (2.55)는 아래의 식 (2.56) 및 식 (2.57)과 같이 된다.

$$2^{-j/2} \psi(2^{-j}t-k) = 2^{-(j-1)/2} \sum_l g(l-2k) \phi(2^{-(j-1)}t-l) \tag{2.56}$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_l g(l-2k) \phi_{j-1,l}(t) \tag{2.57}$$

식 (2.52)로부터, $d_{j,k} = \langle \psi_{j,k}(t), f(t) \rangle$ 이므로, 위의 식 (2.57)의 양변에 대해 신호 $f(t)$ 와의 내적을 구하면, 식 (2.58)과 같이 된다.

$$d_{j,k} = \sum_l g(l-2k) c_{j-1,l} \tag{2.58}$$

위의 식으로부터 $g(l-2k)$ 는 고역통과 필터이며, scale j 에서의 상세계수 $d_{j,k}$ 는 상위 scale의 근사계수 $c_{j-1,k}$ 에 고역통과 필터 $g(\cdot)$ 를 적용한 후 2배로 down-sampling하는 것에 의해 얻어진다.

그림 2.7은 웨이블릿에 의한 신호의 분해과정을 나타내고 있다. 그림으로부터 근사계수는 신호에 대한 저역통과 필터링의 결과로서 얻어지며, 이때 근사계수는 down-sampling이 취해져, 상위 scale의 근사계수에 비해, 데이터의 개수가 반으로 줄어들게 된다. 또한 상세계수는 신호에 대한 고역통과 필터링의 결과로서 얻어지며, 역시 down-sampling에 의해, 데이터의 개수가 반으로 줄어들게 된다. 이때 이러한 저역통과 필터와 고역통과 필터는 상위 scale의 저역통과 필터에 대한 주파수 영역이다. 즉, 첫 번째 scale에서의 주파수 대역은 전 주파수 대역에 대한 반대역 저역통과 필터와 고역통과 필터가 되며, 두 번째 스케일에서의 특성은 첫 번째 scale에서

의 저역통과 특성에 내에서의 저역통과 필터와 고역통과 필터가 된다. 따라서 두 번째 scale에서의 상세계수는 저역특성 내에서의 고역특성 즉, 대역통과 필터링에 의한 결과로서 얻어진다.

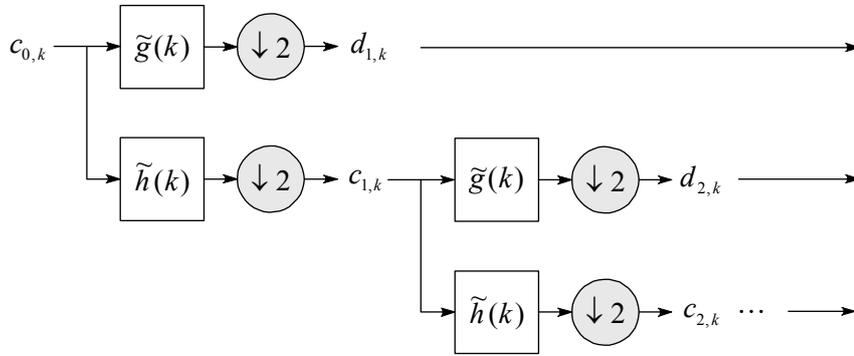


Fig. 2.7. Wavelet decomposition.

2.3.4 웨이브렛 합성

이전과정에 대한 역으로, 식 (2.44)의 예와 같이 선형벡터공간 V_j 와 이것의 직교 여공간 W_j 로부터 상위의 공간 V_{j-1} 를 복원할 수 있으며, 각 공간 V_j 와 W_j 에서의 함수 $f_\phi(t)$ 와 $f_\psi(t)$ 를 식 (2.59) 및 식 (2.60)과 같이 나타낼 경우, scale $j-1$ 에서의 함수 $f(t)$ 는 식 (2.61)과 같다.

$$f_\phi(t) = \sum \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \phi_{j,k}(t) \quad (2.59)$$

$$f_\psi(t) = \sum \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(t) \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= f_\phi(t) + f_\psi(t) \\ &= \sum \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \phi_{j,k}(t) + \sum \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

식 (2.37)과 식 (2.52)로부터, $c_{j,k} = \langle \phi_{j,k}(t), f(t) \rangle$, $d_{j,k} = \langle \psi_{j,k}(t), f(t) \rangle$ 이므로, 위의 식 (2.61)은 식 (2.62)와 같이 다시 표현된다.

$$f(t) = \sum c_{j,l} 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t-l) + \sum d_{j,l} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t-l) \quad (2.62)$$

앞서 언급된 $\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \phi(2t-k)$ 와 $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g(k) \phi(2t-k)$ 를 식 (2.62)에 적용하여 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum \sum c_{j,l} 2^{-j/2} \{2^{1/2} h(m) \phi(2(2^{-j}t-l)-m)\} \\ &\quad + \sum \sum d_{j,l} 2^{-j/2} \{2^{1/2} g(m) \phi(2(2^{-j}t-l)-m)\} \\ &= \sum \sum c_{j,l} 2^{-(j-1)/2} h(m) \phi(2^{-(j-1)}t-(2l+m)) \\ &\quad + \sum \sum d_{j,l} 2^{-(j-1)/2} g(m) \phi(2^{-(j-1)}t-(2l+m)) \end{aligned} \quad (2.63)$$

위의 식에서 $2l+m=k$ 인 경우, $m=k-2l$ 로 되며, 이에 따라 식 (2.63)은 식 (2.64)로 된다.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum \sum c_{j,l} 2^{-(j-1)/2} h(k-2l) \phi(2^{-(j-1)}t-k) \\ &\quad + \sum \sum d_{j,l} 2^{-(j-1)/2} g(k-2l) \phi(2^{-(j-1)}t-k) \end{aligned} \quad (2.64)$$

여기서, scale $j-1$ 에서 $f(t) = \sum c_{j-1,k} 2^{-(j-1)/2} \phi(2^{-(j-1)}t-k)$ 이므로, 이것으로부터 식 (2.64)를 정리하면 식 (2.65)와 같이 된다.

$$c_{j-1,k} = \sum_l c_{j,l} h(k-2l) + \sum_l d_{j,l} g(k-2l) \quad (2.65)$$

위의 식은 scale j 에서의 근사계수와 상세계수를 사용하여, scale $j-1$ 에서의 신호 복원을 과정을 나타낸다. 또한 $h(\cdot)$ 와 $g(\cdot)$ 는 각각 저역통과 필터와 고역통과 필터로서, 2에 의해 up-sampling을 수행한 후, 필터링 과정을 통해 scale $j-1$ 에서의 신호를 복원한다.

그림 2.8은 2배의 up-sampling을 보이고 있으며, 이러한 관계는 식 (2.66)과 같이 표현된다.



Fig. 2.8. Up-sampling.

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \quad (2.66)$$

또한 식 (2.61)과 식 (2.62)로부터 다음의 식 (2.67)이 얻어지며, 식 (2.44)의 $V_1 = V_2 \oplus W_2$ 이므로, $f_\phi^1(t)$ 는 식 (2.68)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} f_\phi^0(t) &= f_\phi^1(t) + f_\psi^1(t) \\ &= \sum_k c_{1,k} \phi_{1,k} + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} f_\phi^1(t) &= f_\phi^2(t) + f_\psi^2(t) \\ &= \sum_k c_{2,k} \phi_{2,k} + \sum_k d_{2,k} \psi_{2,k} \end{aligned} \quad (2.68)$$

따라서 식 (2.67)과 식 (2.68)을 연속적으로 적용하는 것에 의해, 다음의 식 (2.69)의 관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned} f_\phi^0(t) &= f_\phi^1(t) + f_\psi^1(t) = \sum_k c_{1,k} \phi_{1,k} + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k} \\ &= \sum_k c_{2,k} \phi_{2,k} + \sum_k d_{2,k} \psi_{2,k} + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k} \\ &= \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k} + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} \end{aligned} \quad (2.69)$$

또한 scale $j \rightarrow \infty$ 일 경우, 식 (2.69)는 식 (2.70)으로 된다.

$$f_{\phi}^0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.70)$$

그리고 scale $j=0$ 를 가장 높은 해상도라고 가정할 경우, scaling 함수 $\phi(t)$ 는 디랙 델타(Dirac delta) 함수로 근사화될 수 있으므로, 함수 $f(t)$ 는 $c_{0,k}$ 로 표현된다.

그림 2.9는 웨이브렛에 의한 신호의 합성과정을 나타내고 있으며, 근사계수와 상세계수의 up-sampling과 필터링의 결과로서 상위 scale의 근사계수를 복원하고 있다.

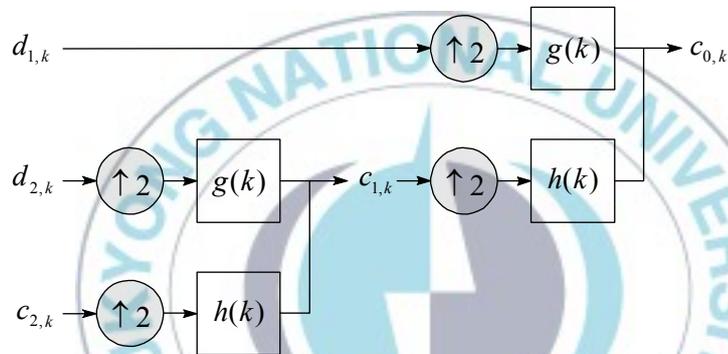


Fig. 2.9. Wavelet reconstruction.

2.3.5 Down-sampling

앞의 과정으로부터, 신호를 분해하고 복원하는 과정에서 down-sampling과 up-sampling을 수행하였으며, 이러한 과정의 결과는 다음과 같이 설명된다.

먼저, 그림 2.5와 같이 down-sampling에 의한 결과를 식 (2.71)과 같이 나타낸다.

$$y(n) = x(2n) \quad (2.71)$$

이때, 임의의 수열 $x(n)$ 을 $x(n) = \{\dots, a_3, a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots\}$ 으로 나타낼 경우, $y(n) = \{\dots, a_4, a_2, a_0, a_{-2}, a_{-4}, \dots\}$ 으로 주어진다. 그리고 이러한 $x(n)$ 과 $y(n)$ 은 z -영역에서 다음의 식 (2.72) 및 식 (2.73)으로 나타내어진다.

$$X(z) = \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots \quad (2.72)$$

$$Y(z) = \dots + a_4 z^2 + a_2 z + a_0 + a_{-2} z^{-1} + a_{-4} z^{-2} + \dots \quad (2.73)$$

여기서, $X(-z)$ 는 식 (2.74)로서 표현된다.

$$X(-z) = \dots + a_2 z^2 - a_1 z + a_0 - a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots \quad (2.74)$$

이때, $X(z)$ 와 $X(-z)$ 의 합은 식 (2.75)와 같다.

$$\begin{aligned} X(z) + X(-z) \\ = 2(\dots + a_4 z^4 + a_2 z^2 + a_0 + a_{-2} z^{-2} + a_{-4} z^{-4} + \dots) \end{aligned} \quad (2.75)$$

따라서 식 (2.73)과 식 (2.75)로부터, 다음의 식 (2.76) 및 식 (2.77)의 관계가 얻어진다.

$$X(z) + X(-z) = 2 Y(z^2) \quad (2.76)$$

$$Y(z) = \frac{X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})}{2} \quad (2.77)$$

그러므로 $y(n)$ 에 대한 이산시간 푸리에 변환(discrete time Fourier transform)은 식 (2.78)과 같다.

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} \{X(e^{j\omega/2}) + X(-e^{j\omega/2})\} \\
&= \frac{1}{2} \{X(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega/2-\pi)})\} \\
&= \frac{1}{2} \{X(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega-2\pi)/2})\}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

여기서, $X(e^{j\omega})$ 가 2π 간격으로 주기적이므로, $X(e^{j\omega/2})$ 와 $X(e^{j(\omega-2\pi)/2})$ 은 모두 그 주기가 4π 가 된다. 다음의 그림 2.10은 down-sampling의 효과를 나타내고 있다. 그림으로부터, $X(e^{j\omega})$ 는 $X(e^{j\omega/M})$ 를 얻기 위해, M 에 의해서 확장되며, 여기서 $M=2$ 이다.

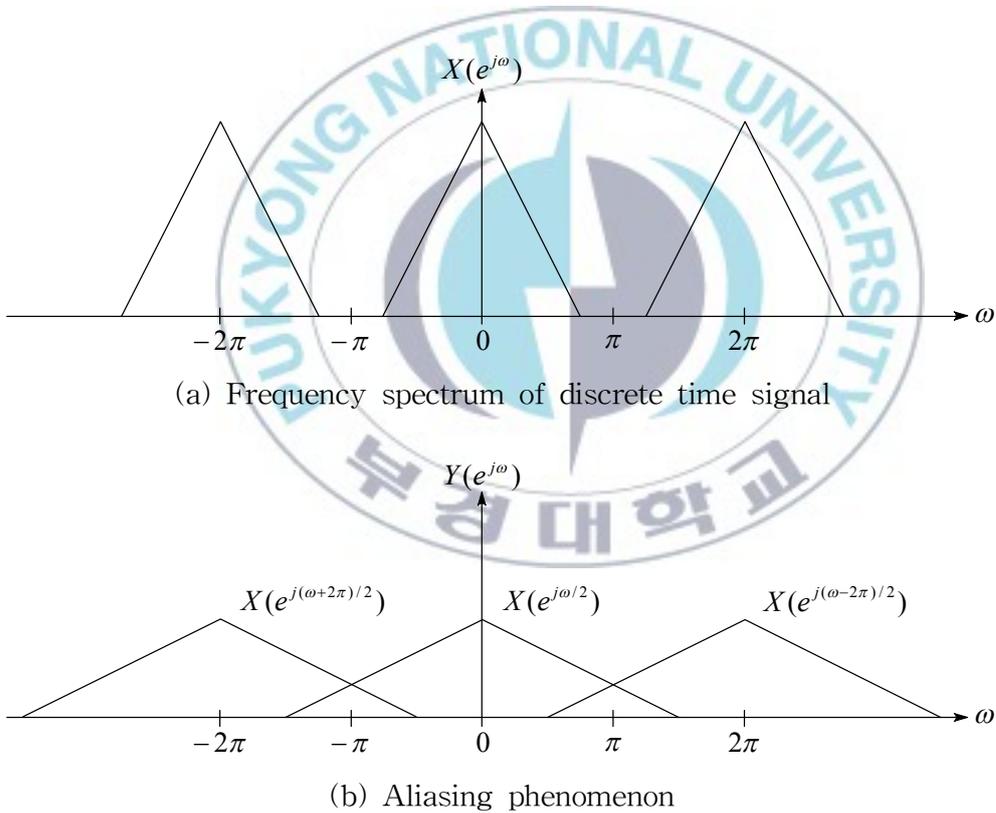


Fig. 2.10. Effect of down-sampling.

그리고 $X(e^{j\omega/2})$ 이 2π 만큼 전이된 $X(e^{j(\omega-2\pi)/2})$ 이 $X(e^{j\omega/2})$ 에 추가된다. 이에 따라 4π 주기의 $X(e^{j\omega/2})$ 와 $X(e^{j(\omega-2\pi)/2})$ 의 합은 2π 로서 나타나게 된다. 이와 같이 신호 $x(n)$ 이 down-sampling 될 경우, $X(e^{j\omega/2})$ 은 $X(e^{j(\omega-2\pi)/2})$ 에 의해 중첩되며, aliasing을 유발시키고, 이때 신호는 원래의 상태로 복원될 수 없다. 그러나 만약, 스펙트럼 $X(e^{j\omega})$ 가 $\pi/2 \leq |\omega| \leq \pi$ 에 대해서 그 값이 0일 경우, 중첩에 의한 aliasing은 발생하지 않으며, 신호 $x(n)$ 은 복원가능하다.

2.3.6 Up-sampling

Up-sampling은 그림 2.8 및 식 (2.66)에서 나타내었으며, 이것은 신호의 각 sample 사이에 zero(0)를 삽입하는 것에 의해 얻어진다. 즉, 신호 $x(n) = \{\dots, a_3, a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots\}$ 으로 나타낼 경우, 2배의 up-sampling은 $y(n) = \{\dots, a_2, 0, a_1, 0, a_0, 0, a_{-1}, 0, a_{-2}, 0, \dots\}$ 와 같이 된다. 그리고 이러한 $x(n)$ 과 $y(n)$ 은 z -영역에서 다음의 식 (2.79) 및 식 (2.80)으로 나타내어진다.

$$X(z) = \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots \quad (2.79)$$

$$Y(z) = \dots + a_2 z^4 + a_1 z^2 + a_0 + a_{-1} z^{-2} + a_{-2} z^{-4} + \dots \quad (2.80)$$

위의 두 식 및 식 (2.66)으로부터 식 (2.81)의 관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=\text{even}} x(n/2) z^{-n} \\ &= \sum_n x(n) z^{-2n} \\ &= X(z^2) \end{aligned} \quad (2.81)$$

따라서 식 (2.81)에 대한 이산시간 푸리에 변환은 식 (2.82)와 같다.

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}) \quad (2.82)$$

그림 2.11은 up-sampling의 효과를 나타내고 있으며, $X(e^{j\omega})$ 가 2π 의 주기성을 가지므로, $Y(e^{j\omega})$ 는 ω 에 대해 π 의 주기성을 갖게 된다.

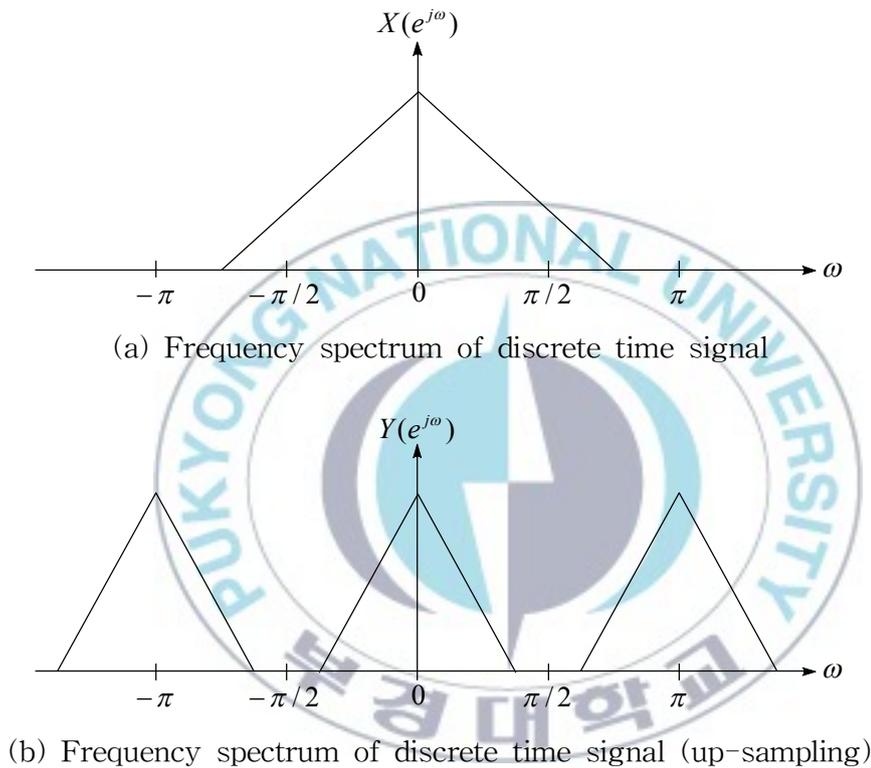


Fig. 2.11. Effect of up-sampling.

2.3.7 Haar 웨이브렛

Haar 웨이브렛 기저에서는 식 (2.83)과 같은 직사각형 펄스 형태의 함수를 scaling 함수로서 정의하였다[23].

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.83)$$

어떤 정수 j 에 대해서, 다음의 식 (2.84)는 구간 $2^j l \leq t < 2^j(l+1)$ 에서 함수 $f(t)$ 의 평균값이다.

$$c_{j,l} = \frac{1}{2^j} \int_{2^j l}^{2^j(l+1)} f(t) dt \quad (2.84)$$

그리고 $\phi(t)$ 에 대해서 다음의 식 (2.85)를 이용하는 것에 의해, 식 (2.86)이 얻어진다.

$$\phi(2^{-j}t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2^j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.85)$$

$$f_j(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{j,l} \phi(2^{-j}t - l) \quad (2.86)$$

위 식으로부터 $f_j(t)$ 는 V_j 상에서 함수 $f(t)$ 의 직교사영을 의미하며, 이러한 함수는 2^j 에 의한 $\phi(t)$ 의 팽창과 2^j 에 대한 정수배 전이의 선형결합으로서 얻어진다.

함수에 대한 전이와 팽창을 통해, 부공간 V_j 에 대한 기저함수를 얻는 것과 같이, detail 함수 $g_j(t)$ 가 존재하는 부공간에 대한 기저함수 역시 함수의 전이와 팽창을 통해 얻는다. 식 (2.87)의 관계로부터 각 부공간에 대한

함수의 관계는 식 (2.88)과 같다.

$$W_j = V_{j-1} \ominus V_j \quad (2.87)$$

$$g_0(t) = f_{-1}(t) - f_0(t) \quad (2.88)$$

그리고 식 (2.89)와 같이 하위레벨의 기저함수는 상위레벨 기저함수의 팽창과 전이를 통해 표현된다.

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) \quad (2.89)$$

따라서 시간구간 $0 \leq t < 1$ 상에서 함수 $f_{-1}(t)$ 는 식 (2.90)과 같이 나타내어지며, $c_{-1,0}$ 과 $c_{-1,1}$ 은 식 (2.84)에서 적절한 j 값을 선택하는 것에 의해 얻어지고, 각각 구간 $0 \leq t < 1/2$ 및 $1/2 \leq t < 1$ 에서 $f(t)$ 의 평균값을 나타낸다.

$$f_{-1}(t) = c_{-1,0} \phi(2t) + c_{-1,1} \phi(2t-1) \quad (2.90)$$

또한 동일한 구간 $0 \leq t < 1$ 에서 $l=0$ 이므로 $f_0(t)$ 는 식 (2.85)와 식 (2.86)으로부터 식 (2.91)과 같이 된다.

$$f_0(t) = c_{0,0} \phi(t) \quad (2.91)$$

그리고 식 (2.84)로부터 $c_{0,l}$ 및 $c_{-1,2l}$, $c_{-1,2l+1}$ 은 각각 아래의 식들과 같이 얻어진다.

$$c_{0,l} = \frac{1}{2^0} \int_{2^0 l}^{2^0(l+1)} f(t) dt = \int_l^{l+1} f(t) dt \quad (2.92)$$

$$c_{-1,2l} = \frac{1}{2^{-1}} \int_{2^{-1}(2l)}^{2^{-1}(2l+1)} f(t) dt = 2 \int_l^{l+1/2} f(t) dt \quad (2.93)$$

$$c_{-1,2l+1} = \frac{1}{2^{-1}} \int_{2^{-1}(2l+1)}^{2^{-1}(2l+2)} f(t) dt = 2 \int_{l+1/2}^{l+1} f(t) dt \quad (2.94)$$

따라서 위의 식들로부터 아래의 식 (2.95)의 관계를 얻는다.

$$c_{0,l} = \frac{1}{2} (c_{-1,2l} + c_{-1,2l+1}) \quad (2.95)$$

또한, 식 (2.95)에서 $l=0$ 인 경우, 식 (2.96)과 같이 된다.

$$c_{0,0} = \frac{1}{2} (c_{-1,0} + c_{-1,1}) \quad (2.96)$$

그러므로 식 (2.88)에서 식 (2.91) 및 식 (2.96)으로부터 다음의 식 (2.97)을 얻는다.

$$\begin{aligned} g_0(t) &= c_{-1,0} \phi(2t) + c_{-1,1} \phi(2t-1) - c_{0,0} \phi(t) \\ &= c_{-1,0} \phi(2t) + c_{-1,1} \phi(2t-1) - \frac{1}{2} c_{-1,0} \phi(t) - \frac{1}{2} c_{-1,1} \phi(t) \\ &= c_{-1,0} \phi(2t) + c_{-1,1} \phi(2t-1) - \frac{1}{2} c_{-1,0} \phi(2t) - \frac{1}{2} c_{-1,0} \phi(2t-1) \\ &\quad - \frac{1}{2} c_{-1,1} \phi(2t) - \frac{1}{2} c_{-1,1} \phi(2t-1) \\ &= \frac{1}{2} c_{-1,0} \phi(2t) - \frac{1}{2} c_{-1,0} \phi(2t-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} c_{-1,1} \phi(2t-1) - \frac{1}{2} c_{-1,1} \phi(2t) \end{aligned} \quad (2.97)$$

그리고 위의 식은 다음과 같이 다시 표현된다.

$$\begin{aligned}
 g_0(t) &= \frac{1}{2}\phi(2t)(c_{-1,0} - c_{-1,1}) - \frac{1}{2}\phi(2t-1)(c_{-1,0} - c_{-1,1}) \\
 &= \frac{1}{2}(c_{-1,0} - c_{-1,1})(\phi(2t) - \phi(2t-1))
 \end{aligned}
 \tag{2.98}$$

구간 $0 \leq t < 1$ 에 대해서, $g_0(t)$ 를 식 (2.99)와 같이 나타낼 경우, 각 항은 식 (2.100) 및 식 (2.101)과 같다.

$$g_0(t) = d_{0,0} \psi(t) \tag{2.99}$$

$$d_{0,0} = \frac{1}{2}(c_{-1,0} - c_{-1,1}) \tag{2.100}$$

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1) \tag{2.101}$$

이때 식 (2.101)은 Haar 웨이브렛으로서, 식 (2.102)와 같이 정의된다.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
 \tag{2.102}$$

여기서, $g_0(t)$ 는 Haar 웨이브렛의 정수 전이에 의한 선형 결합으로서 아래의 식과 같이 표현된다.

$$g_0(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{0,l} \psi(t-l) \tag{2.103}$$

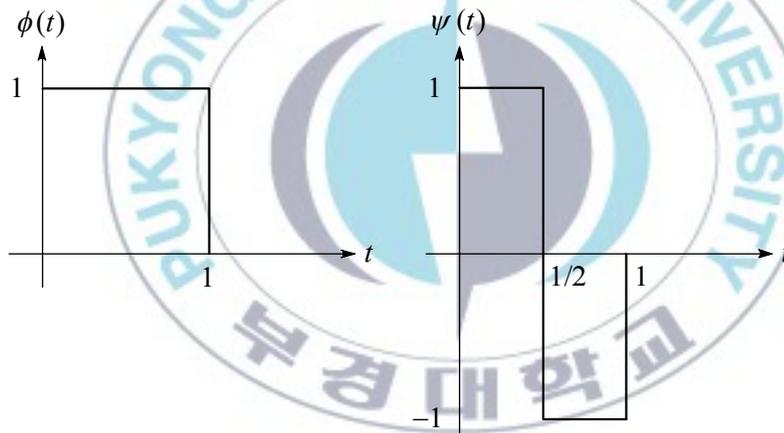
$$d_{0,l} = \frac{1}{2}(c_{-1,2l} - c_{-1,2l+1}) \quad (2.104)$$

위의 식 (2.103) 및 식 (2.104)는 어떤 정수 j 에 대한 일반적인 경우로서 다음의 식들과 같이 다시 표현된다.

$$g_j(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{j,l} \psi(2^{-j}t - l) \quad (2.105)$$

$$d_{j,l} = \frac{1}{2}(c_{j-1,2l} - c_{j-1,2l+1}) \quad (2.106)$$

다음의 그림 2.12는 식 (2.83)과 식 (2.102)에서 제시된 Haar 웨이브렛 기저를 나타내고 있다.



(a) Scaling function

(b) Wavelet

Fig. 2.12. Haar functions.

앞의 식 (2.95)의 일반화된 식은 식 (2.107)과 같이 표현되며, 이는 식 (2.84)에서와 같이 어떠한 한 레벨에서 주어진 구간 상에서의 평균값으로 표현되는 근사계수는 이 보다 상위 레벨에서의 두 구간 상수의 평균값으로

부터 얻어짐을 나타낸다.

$$c_{j,k} = \frac{1}{2}(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+1}) \quad (2.107)$$

식으로부터, j 는 scale 레벨을 나타내며, k 는 샘플 위치를 나타낸다. 여기서, 식 (2.108)의 임펄스 응답을 갖는 디지털 필터에 수열 $c_{j-1,k}$ 이 통과할 경우, 이것의 출력 $y_{j-1,k}$ 는 식 (2.109)와 같이 표현된다.

$$\tilde{h}(k) = \frac{1}{2}(\delta(k) + \delta(k+1)) \quad (2.108)$$

$$y_{j-1,k} = \frac{1}{2}(c_{j-1,k} + c_{j-1,k+1}) \quad (2.109)$$

따라서 위의 식 (2.107)의 $c_{j,k}$ 와 식 (2.109)의 $y_{j-1,k}$ 의 관계는 식 (2.110)과 같다.

$$c_{j,k} = y_{j-1,2k} \quad (2.110)$$

식 (2.110)은 $c_{j,k}$ 가 임펄스 응답 $\tilde{h}(k)$ 의 디지털 필터를 통해 $c_{j-1,k}$ 를 처리하는 것에 의해 얻어짐을 의미하며, 이때 출력 샘플은 2배로 down-sampling된다.

위의 과정과 동일한 처리를 위해, 식 (2.106)의 상세계수를 아래의 식 (2.111)과 같이 다시 표현할 경우, 식 (2.112)의 임펄스 응답을 갖는 디지털 필터에 수열 $c_{j-1,k}$ 이 통과할 때, 이것의 출력 $y_{j-1,k}$ 은 식 (2.113)과 같이 표현된다.

$$d_{j,k} = \frac{1}{2}(c_{j-1,2k} - c_{j-1,2k+1}) \quad (2.111)$$

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{2}(\delta(k) - \delta(k+1)) \quad (2.112)$$

$$y_{j-1,k} = \frac{1}{2}(c_{j-1,k} - c_{j-1,k+1}) \quad (2.113)$$

그러므로 식 (2.111)의 $d_{j,k}$ 와 식 (2.113)의 $y_{j-1,k}$ 의 관계는 식 (2.114)와 같다.

$$d_{j,k} = y_{j-1,2k} \quad (2.114)$$

따라서 식 (2.114)는 $d_{j,k}$ 가 임펄스 응답 $\tilde{g}(k)$ 의 디지털 필터를 통해 $c_{j-1,k}$ 를 처리하는 것에 의해 얻어짐을 의미하며, 이때 출력 샘플은 2배로 down-sampling된다.

그리고 식 (2.108)과 식 (2.112)로 표현되는 디지털 필터 $\tilde{h}(k)$ 와 $\tilde{g}(k)$ 에 대한 주파수 응답은 다음의 식들과 같다.

$$\tilde{H}(\omega) = e^{j\omega/2} \cos(\omega/2) \quad (2.115)$$

$$\tilde{G}(\omega) = -je^{j\omega/2} \sin(\omega/2) \quad (2.116)$$

또한 위의 두 식으로부터 아래의 식들을 얻는다.

$$|\tilde{H}(\omega)|^2 + |\tilde{H}(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (2.117)$$

$$|\tilde{G}(\omega)|^2 + |\tilde{G}(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (2.118)$$

$$|\tilde{H}(\omega)|^2 + |\tilde{G}(\omega)|^2 = 1 \quad (2.119)$$

그리고 이러한 $\tilde{H}(\omega)$ 와 $\tilde{G}(\omega)$ 의 임펄스 응답이 실수값을 갖기 위해서는 다음의 조건들이 만족되어야 한다.

$$|\tilde{H}(\pi+\omega)| = |\tilde{H}(\pi-\omega)| \quad (2.120)$$

$$|\tilde{G}(\pi+\omega)| = |\tilde{G}(\pi-\omega)| \quad (2.121)$$

식 (2.120)과 식 (2.121)을 각각 식 (2.117)과 식 (2.118)에 적용할 경우 아래의 식 (2.122)와 식 (2.123)이 얻어지며, 여기서 ω 를 $\pi/2-\omega$ 로 대체할 경우 두 식은 각각 식 (2.124)와 식 (2.125)로 되고, 이러한 두 식을 만족하는 필터를 QMF(quadrature mirror filter)라 한다.

$$|\tilde{H}(\omega)|^2 + |\tilde{H}(\pi-\omega)|^2 = 1 \quad (2.122)$$

$$|\tilde{G}(\omega)|^2 + |\tilde{G}(\pi-\omega)|^2 = 1 \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{H}(\pi/2-\omega)|^2 + |\tilde{H}(\pi-\pi/2+\omega)|^2 \\ = |\tilde{H}(\pi/2-\omega)|^2 + |\tilde{H}(\pi/2+\omega)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{G}(\pi/2-\omega)|^2 + |\tilde{G}(\pi-\pi/2+\omega)|^2 \\ = |\tilde{G}(\pi/2-\omega)|^2 + |\tilde{G}(\pi/2+\omega)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.125)$$

신호의 합성과정은 식 (2.107)과 식 (2.111)을 연립하여 정리하는 것에 의해 아래의 두 식을 얻는다.

$$c_{j-1, 2k} = c_{j, k} + d_{j, k} \quad (2.126)$$

$$c_{j-1, 2k+1} = c_{j, k} - d_{j, k} \quad (2.127)$$

여기서, 디지털 필터 $h(k)$ 와 $g(k)$ 를 다음 식과 같이 나타낸다.

$$h(k) = \delta(k) + \delta(k-1) \quad (2.128)$$

$$g(k) = \delta(k) - \delta(k-1) \quad (2.129)$$

식 (2.66)에서, 2배의 up-sampling에 대한 표현법을 근사계수와 상세계수에 적용하여 다음의 두 식을 얻는다.

$$\xi_k = \begin{cases} c_{j, k/2}, & k \text{ even} \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases} \quad (2.130)$$

$$\zeta_k = \begin{cases} d_{j, k/2}, & k \text{ even} \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases} \quad (2.131)$$

그리고 입력 ξ_k 에 대한 디지털 필터 $h(k)$ 의 출력은 식 (2.132)와 같다.

$$\alpha_k = \xi_k + \xi_{k-1} \quad (2.132)$$

한편, 2배의 up-sampling이 non-zero 계수들 사이에 zero를 삽입하는 것에 의해 이루어지므로, 출력 α_k 에서 k 가 even일 경우에는 ξ_k 의 non-zero 계수가 출력으로 되며, k 가 odd일 경우에는 1에 의해 쉬프트된 ξ_{k-1} 의 non-zero 계수가 출력으로 되어, 식 (2.132)는 다음의 식 (2.133)과 같이 다시 표현된다.

$$\alpha_k = \begin{cases} c_{j, k/2}, & k \text{ even} \\ c_{j, (k-1)/2}, & k \text{ odd} \end{cases} \quad (2.133)$$

식 (2.133)으로부터, $c_{j, k/2}$ 가 even에서, $c_{j, (k-1)/2}$ 가 odd에서 각각 출력으로 선택되므로, α_k 는 동일한 $c_{j, k/2}$ 의 계수값을 연속해서 두 번 반복하여 출력하게 된다. 즉, $k=0$ 일 경우, $\alpha_0 = c_{j, 0/2} = c_{j, 0}$ 가 되며, $k=1$ 일 경우, $\alpha_1 = c_{j, (1-1)/2} = c_{j, 0}$ 로 되어, 동일한 계수값이 연속해서 출력된다.

동일한 과정에 의해, 입력 ζ_k 에 대한 디지털 필터 $g(k)$ 의 출력은 식 (2.134)와 같이 표현된다.

$$\beta_k = \zeta_k - \zeta_{k-1} \quad (2.134)$$

이전의 과정과 동일하게 출력 β_k 에서 k 가 even일 경우에는 ζ_k 의 non-zero 계수가 출력으로 되며, k 가 odd일 경우에는 1에 의해 쉬프트된 ζ_{k-1} 의 non-zero 계수가 출력으로 되어, 식 (2.134)는 다음의 식 (2.135)와 같이 다시 표현된다.

$$\beta_k = \begin{cases} d_{j, k/2}, & k \text{ even} \\ -d_{j, (k-1)/2}, & k \text{ odd} \end{cases} \quad (2.135)$$

위의 식으로부터, 출력 β_k 는 α_k 와 달리, 동일한 $d_{j, k/2}$ 의 계수값을 연속해서 두 번 반복하여 출력하게 되지만, odd의 계수값에 대한 부호가 even 계수값에 대한 부호와 반대가 된다.

또한 식 (2.133)과 식 (2.135)로부터 얻어진 출력 α_k 와 β_k 의 합은 식 (2.136)과 같다.

$$\alpha_k + \beta_k = \begin{cases} c_{j, k/2} + d_{j, k/2}, & k \text{ even} \\ c_{j, (k-1)/2} - d_{j, (k-1)/2}, & k \text{ odd} \end{cases} \quad (2.136)$$

따라서 식 (2.126)과 식 (2.127) 및 식 (2.136)으로부터 다음 식과 같은 관계가 유도된다.

$$c_{j-1,k} = \alpha_k + \beta_k \quad (2.137)$$

위의 식으로부터, 상위레벨의 근사계수 $c_{j-1,k}$ 는 한 단계 아래 레벨의 근사계수와 상세계수를 각각 up-sampling 한 후, 이것을 디지털 필터 $h(k)$ 와 $g(k)$ 를 통해 처리하는 것에 의해 얻어진다.

그리고 위의 과정으로부터, 신호를 분해하고 합성하는 과정에서 사용된 각각의 디지털 필터 $\tilde{h}(k)$ 와 $\tilde{g}(k)$, $h(k)$, $g(k)$ 는 식 (2.108) 및 식 (2.112), 식 (2.128), 식 (2.129)로부터, 아래의 관계와 같이 정리된다.

$$h(k) = 2\tilde{h}(-k) \quad (2.138)$$

$$g(k) = 2\tilde{g}(-k) \quad (2.139)$$



제3장 기존의 노이즈 제거 알고리즘

3.1 OWT(orthogonal wavelet transform) 알고리즘

웨이브렛 변환은 신호로부터 노이즈를 제거하기 위한 매우 효과적인 방법이며, 이에 Donoho와 Johnstone은 임계값에 기초한 노이즈 제거 알고리즘을 제안하였다. 이러한 노이즈 제거는 신호 $x(k)$ 가 측정되어질 경우, 이로부터 원신호 $s(k)$ 을 복원하는 문제로서, $x(k)$ 와 $s(k)$ 의 관계는 다음의 식 (3.1)과 같이 표현된다[16],[17].

$$x(k) = s(k) + \sigma w(k) \quad (3.1)$$

여기서, $k = 0, 1, \dots, N-1$ 이며, $s(k)$ 는 노이즈가 중첩되지 않은 원신호이고, $w(k)$ 는 IID(independent and identical distribution) $N(0,1)$ 인 AWGN을 나타낸다. 그리고 σ 는 표준편차를 의미하며, $x(k)$ 는 노이즈가 중첩된 noisy 신호를 의미한다.

그리고 만약 웨이브렛 기저가 orthogonal 할 경우, AWGN은 같은 크기의 AWGN으로 남게 되며, 모든 scale에서 완전하게 상관성을 갖지 않는다. 따라서 식 (3.1)에 대한 웨이브렛 변환은 다음의 식 (3.2)와 같이 표현된다.

$$W_x(k) = W_s(k) + \sigma W_w(k) \quad (3.2)$$

여기서, $W_s(k)$ 및 $W_w(k)$, $W_x(k)$ 는 각각 원신호와 AWGN, 그리고 noisy 신호에 대한 웨이브렛 변환을 의미한다. 측정된 신호 $x(k)$ 로부터 원신호 $s(k)$ 를 복원하기 위해서는 $W_x(k)$ 로부터 노이즈 성분만을 제거해야만 하며, 이때 노이즈의 레벨은 미지의 값이 된다.

Donoho와 Johnstone은 임계값 λ 에 의해 노이즈를 제거하기 위한 알고리즘을 제시하였으며, shrinkage 함수의 두 가지 형태는 식 (3.3) 및 식 (3.4)와 같다.

$$\eta_S(d_{j,k}) = \text{sgn}(d_{j,k})(|d_{j,k}| - \lambda)_+ \quad (3.3)$$

$$\eta_H(d_{j,k}) = \begin{cases} d_{j,k}, & \text{if } |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.4)$$

식 (3.3)으로부터 $(\cdot)_+$ 는 $(x)_+ = \max\{x, 0\}$ 의 연산을 의미하며, 식 (3.3)을 soft-thresholding이라 하고, 식 (3.4)를 hard-thresholding이라 한다. 또한 위의 식들로부터 식 (3.3)의 soft-thresholding은 "kill or shrink"에, 식 (3.4)의 hard-thresholding은 "kill or keep"에 상응하는 결과를 나타낸다. 즉, soft-thresholding은 웨이블릿 상세계수 $d_{j,k}$ 의 크기가 임계값 λ 보다 클 경우에는 $d_{j,k}$ 와 λ 사이의 차 값을 출력하며, 반대의 경우로 $d_{j,k}$ 의 크기가 λ 보다 작을 경우에는 zero(0)를 출력하게 된다. 이와는 달리, hard-thresholding은 웨이블릿 상세계수 $d_{j,k}$ 의 크기가 임계값 λ 보다 클 경우에는 $d_{j,k}$ 를 그대로 보존하여 출력하며, 그렇지 않은 경우에는 zero(0)를 출력하게 된다.

아래의 그림 3.1은 식 (3.3) 및 식 (3.4)로 표현된 soft-thresholding과 hard-thresholding을 나타내고 있으며, 그림 3.2는 그 예를 보이고 있다.

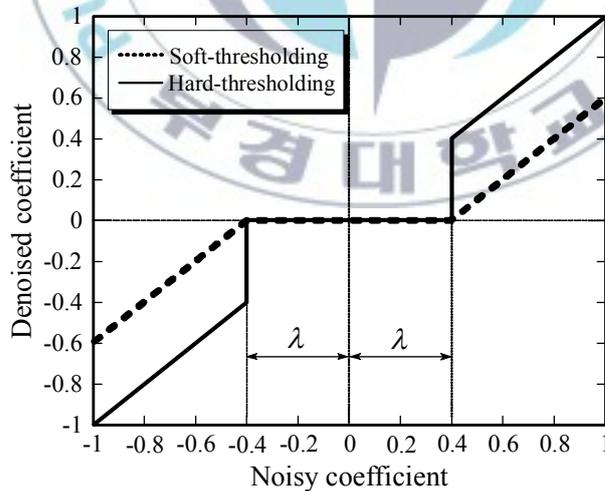
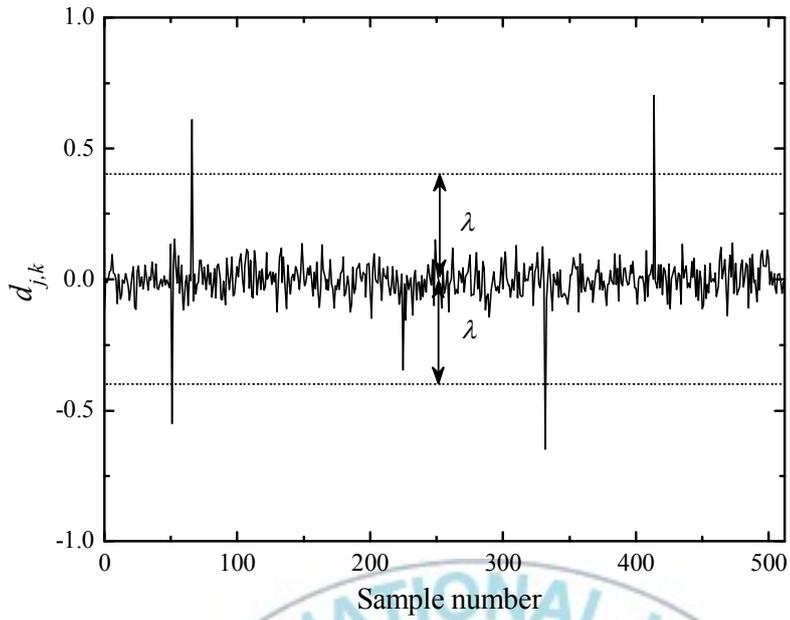
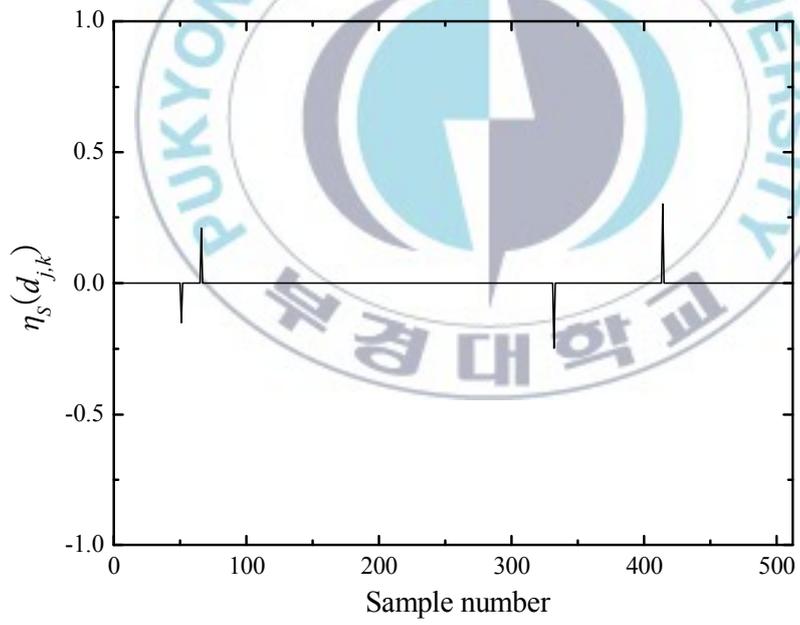


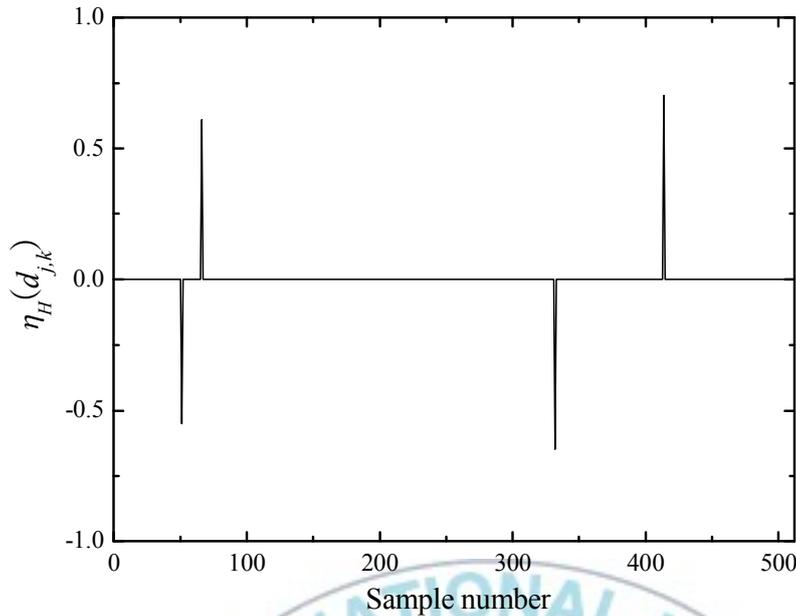
Fig. 3.1. Soft-thresholding(dashed line) and hard-thresholding(solid line).



(a) Wavelet detail coefficients



(b) Soft-thresholding



(c) Hard-thresholding

Fig. 3.2. Thresholding for wavelet detail coefficients.

이와 같은 임계값에 기반한 알고리즘은 신호에서 중요한 정보를 갖는 에지 성분이 웨이블릿 상세계수에서 큰 값을 나타냄에 따라, 이러한 큰 값들을 어떠한 임계값을 기준으로 하여, 노이즈와 분리한 후 제거하는 것이다.

AWGN과 신호에서 중요정보를 나타내는 에지 성분을 분리하기 위한 판단기준으로 사용되는 임계값으로서, Donoho와 Johnstone은 식 (3.5)와 같은 *VisuShrink* universal threshold를 제안하였다.

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(N)} \quad (3.5)$$

여기서, $\sigma = MAD/0.6745$ 이며, MAD 는 finest scale의 계수로부터 추정된 median absolute deviation을 의미하고, N 은 noisy 신호의 길이를 나타낸다. 이와 같이, 노이즈에 대한 분산의 정도는 주로 노이즈 계수들을 포함하고 있는 첫 번째 scale에서 추정된다.

그리고 OWT에 의한 노이즈 제거 알고리즘에서는 shrinkage 함수로서 soft-thresholding을 적용하였으며, 이때 식 (3.5)에서 제시된 임계값을 적용하였다. 또한 이러한 임계값 기반의 노이즈 제거 알고리즘은 기본적으로 다음의 단계에 따라 수행된다.

- Step 1. 웨이블릿 계수를 얻기 위해, noisy 신호에 대한 웨이블릿 변환을 수행한다.
- Step 2. 각 scale에서 임계값 λ 를 사용하여, shrinkage 함수를 적용한다.
- Step 3. 노이즈가 제거된 추정된 신호를 얻기 위해, 원래 영역으로의 역 웨이블릿 변환을 수행한다.

3.2 SSNF(spatially selective noise filtration) 알고리즘

웨이블릿 변환을 통한 각 scale에서의 데이터는 만약 scale이 상위 scale 일 경우에는 신호에 포함된 대부분의 성분들이 웨이블릿 계수에서 나타나게 된다. 그러나 scale이 하위 scale로 진행될수록 신호의 에지와 같이 중요한 변화 성분은 웨이블릿 계수에서 그 특성이 보존되지만, 그렇지 않은 경우에는 그 성분들에 대한 특성들이 급격히 감소하게 된다. 즉, 에지는 많은 scale에서 신호의 최대치를 갖게 되므로, 인접 scale에서 얻어진 웨이블릿 계수의 공간적 상관도는 신호에서 에지 성분을 분리하기 위한 판단기준으로서 사용될 수 있다[7],[18].

SSNF 알고리즘은 노이즈로부터 중요한 에지 성분을 분리하여 노이즈 성분을 제거하기 위해, 인접한 scale에서 얻어진 웨이블릿 계수 사이의 곱을 사용한다. Xu 등은 많은 웨이블릿 scale에서 날카로운 에지 성분은 큰 크기로서 존재하고, 노이즈는 scale이 진행됨에 따라 급격히 감소한다는 사실에 기반하여, 에지를 비롯한 신호의 중요한 특징들에 대한 정보를 검출하기 위해 여러 인접 scale에서 웨이블릿 계수에 대한 공간적 상관도를 식 (3.6)의 $Corr_{j,k}^p$ 로서 정의하였다.

$$Corr_{j,k}^p = \prod_{i=0}^{p-1} d_{j+i,k} \quad (3.6)$$

여기서, j 는 scale 변수를 의미하며, k 는 진이변수를 나타내고, $k = 1, 2, \dots, N$ 이다. 그리고 p 는 인접 scale 사이의 곱에 사용되는 scale의 총수를 나타내며, Xu 등은 $p = 2$ 를 적용하였다.

따라서 SSNF 알고리즘은 먼저, 두 인접 scale의 웨이브렛 계수로부터 $Corr_{j,k}^2$ 를 계산한 후, $PCorr_j$ 와 Pd_j 를 각각 식 (3.7) 및 식 (3.8)로 정의하여, 두 식에 의해 $Corr_{j,k}^2$ 의 power를 식 (3.9)와 같이 새롭게 정의한다.

$$PCorr_j = \sum_k (Corr_{j,k}^2)^2 \quad (3.7)$$

$$Pd_j = \sum_k (d_{j,k})^2 \quad (3.8)$$

$$New\ Corr_{j,k}^2 = Corr_{j,k}^2 \sqrt{Pd_j / PCorr_j} \quad (3.9)$$

이때 만약, 식 (3.10)의 조건을 만족할 경우, 그 지점을 예지로서 판단하며, 새로운 계수 $\tilde{d}_{j,k}$ 에 $d_{j,k}$ 를 복사하고, $d_{j,k}$ 와 $Corr_{j,k}^2$ 를 0으로 reset한다. 그러나 그렇지 않은 경우에는 $d_{j,k}$ 가 노이즈에 대한 웨이브렛 계수라고 가정하고 $d_{j,k}$ 와 $Corr_{j,k}^2$ 를 그대로 보존한다.

$$|New\ Corr_{j,k}^2| \geq |d_{j,k}| \quad (3.10)$$

위의 과정들은 j 번째 웨이브렛 scale에서, $d_{j,k}$ 가 어떤 기준 노이즈 파워와 거의 유사할 때까지 반복해서 수행하게 된다. 그리고 이러한 과정으로부터 계속적으로 얻어지는 $\tilde{d}_{j,k}$ 를 사용하여 신호를 복원하게 된다.

그러나 fine scale에서 노이즈는 어떤 날카로운 에지를 제외하고 웨이브

렛 계수의 대부분의 지점에서 나타난다. 따라서 만약 식 (3.10)의 결과로부터 에지와 노이즈를 분리할 경우, 많은 노이즈 성분들이 에지로서 선택된다. 따라서 Pan 등은 새로운 변수 γ_j 를 사용하여 식 (3.11)의 조건을 만족할 경우, 그 지점을 에지로서 판단하도록 하였다.

$$|New\ Corr_{j,k}^2| \geq \gamma_j |d_{j,k}| \quad (3.11)$$

위의 식으로부터, $\gamma_j \geq 1$ 인 실수이며, Pan 등에 의해 제안된 알고리즘에서는 $\gamma_j = [1.15, 1.06, 1, 1, \dots, 1]$ 을 적용하였다. 그리고 Xu 등의 알고리즘에서는 기준 노이즈 파워를 제시하고 있지 않음에 따라 Pan 등은 다음의 식 (3.12)와 같은 조건을 제시하여, 이러한 조건이 만족될 때까지 식 (3.7)에서 식 (3.11)까지의 과정을 반복 수행하도록 하였다.

$$Pd_j - th_j(N-K)\sigma_j^2 \leq 0.05 Pd_j \quad (3.12)$$

위 식으로부터 $th_j = [1.1 \sim 1.2, 1.2 \sim 1.4, 1.4 \sim 1.6, 1.6 \sim 1.8, \dots, 1.6 \sim 1.8]$ 이며, K 는 신호의 에지로서 판단된 데이터의 수를 나타낸다. 그리고 σ_j 는 scale j 에서의 표준편차를 나타낸다.

그리고 식 (3.12)는 다시 식 (3.13)과 같이 표현된다.

$$\frac{Pd_j N}{N-K} \leq \frac{th_j \sigma_j^2 N}{0.95} = (1.05 \times th_j) \sigma_j^2 N \quad (3.13)$$

여기서, 좌변의 항은 남아있는 웨이브렛 상세 계수들로부터 추정된 노이즈 파워이며, 우변의 항은 노이즈 분산으로부터 추정된 노이즈 파워이다.

3.3 UDWT(undecimated discrete wavelet transform) 알고리즘

OWT는 신호의 분해과정에서 down-sampling을 수행함에 따라 전이변형이 발생하고, 이러한 결과로 임계값 기반의 노이즈 제거과정에서 Gibbs 현상과 같은 시각적으로 부드럽지 못한 형태를 나타내게 된다. 이러한 현상을 제거하기 위해 UDWT를 적용할 수 있으며, 이러한 UDWT는 RDWT(redundant discrete wavelet transform), ODWT(overcomplete discrete wavelet transform), SIDWT(shift-invariant discrete wavelet transform), 그리고 DWFs(discrete wavelet frames) 등의 이름으로도 알려져 있다[19].

UDWT는 본질적으로 DWT의 undecimated version으로 현재 신호처리 응용분야의 여러 부분에서 적용되고 있다. UDWT를 이용한 노이즈 제거 알고리즘에서는 down-sampling과 up-sampling의 과정이 수행되지 않으며, 이를 대신하여 분해와 합성과정에서 사용되는 필터를 변화시킨다. 즉, 각 필터는 분해와 합성과정의 각 단계에서 변화하게 되며, 이러한 변화는 non-zero 필터 계수들 사이에 zero(0)을 삽입하는 것에 의해 이루어진다.

그림 3.3은 UDWT의 분해와 합성과정을 보이고 있다. 그림으로부터 웨이브렛 분해와 합성과정에서 적용된 필터는 각기 상이하며, 이때 필터 $h_j(k)$ 는 필터 $h_0(k)$ 의 각 계수들 사이에 (2^j-1) 개의 zero(0)를 위치시키는 것에 의해 구성된다. 그리고 각각의 필터 $g_j(k)$, $\tilde{h}_j(k)$, $\tilde{g}_j(k)$ 역시 동일한 방법에 의해서 구성되며, 웨이브렛 필터의 up-sampling 또는 zero padding에 대하여 $h_j(k)$ 와 $h_{j-1}(k)$ 사이의 관계는 식 (3.14)와 같이 표현되고, 다른 필터들도 동일한 과정을 따른다.

$$h_j(k) = h_{j-1}(k) \uparrow 2 = \begin{cases} h_{j-1}(k/2), & k \text{ even} \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases} \quad (3.14)$$

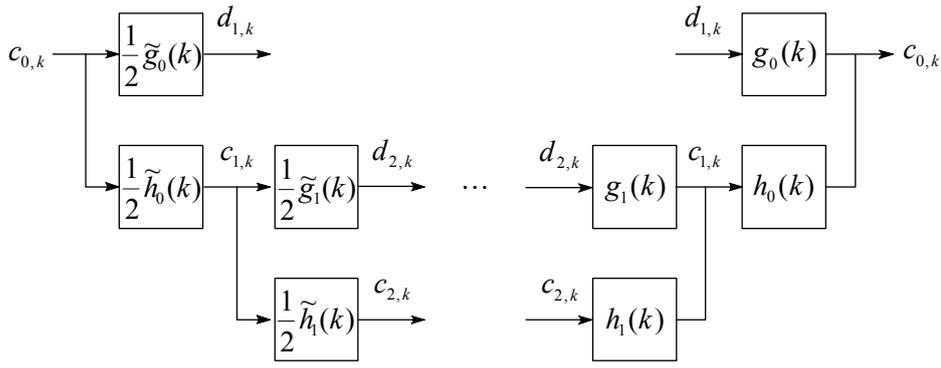


Fig. 3.3. The illustration of UDWT.

그리고 식 (2.43)과 식 (2.58)을 얻는 과정과 유사하게, UDWT에 의한 scale j 에서의 웨이브렛 근사계수와 상세계수는 식 (3.15) 및 식 (3.16)으로부터 얻어진다.

$$c_{j,k} = \sum_l h_{j-1}(l-k) c_{j-1,l} \quad (3.15)$$

$$d_{j,k} = \sum_l g_{j-1}(l-k) c_{j-1,l} \quad (3.16)$$

또한 UDWT 영역에서의 웨이브렛 계수로부터 원신호를 복원하기 위한 합성과정은 식 (3.17)과 같다.

$$c_{j-1,k} = \sum_l c_{j,l} h_{j-1}(k-l) + \sum_l d_{j,l} g_{j-1}(k-l) \quad (3.17)$$

그리고 AWGN $w(k)$ 가 필터 $g_0(k)$ 의 입력으로 될 경우, 이때 scale 1에서의 분산은 식 (3.18)과 같이 구해진다[7].

$$\sigma_1^2 = \text{Var}(d_{1,k}) = \|g_0(k)\|^2 \cdot \text{Var}(w(k)) = \sigma^2 \|g_0(k)\|^2 \quad (3.18)$$

여기서, $\|\cdot\|$ 는 norm을 의미하며, 식 (3.18)을 그림 3.3에서 표현된 UDWT의 피라미드 분해구조에 적용시킬 경우, 아래의 식 (3.19)가 얻어진다.

$$\sigma_j^2 = \sigma^2 \left\| \frac{1}{2} \tilde{h}_0(k) * \frac{1}{2} \tilde{h}_1(k) * \dots * \frac{1}{2} \tilde{h}_{j-2}(k) * \frac{1}{2} \tilde{g}_{j-1}(k) \right\|^2 \quad (3.19)$$

여기서, $*$ 은 선형 컨벌루션을 의미한다. Pan 등은 UDWT를 이용한 노이즈 제거 알고리즘에서, shrinkage 함수로서 식 (3.4)의 hard-thresholding을 적용하였으며, 그 처리과정은 OWT에서 제시된 임계값 기반의 노이즈 제거 알고리즘과 동일하다. 그리고 AWGN에 대해서, 표준편차가 σ , 2σ , 3σ 일 경우 데이터의 68.26%, 95.44%, 99.74%를 포함하므로, 식 (3.20)의 임계값 λ_j 를 결정함에 있어서, μ 를 3~4 사이의 값으로 선택하였다.

$$\lambda_j = \mu \sigma_j \quad (3.20)$$



제4장 제안된 알고리즘

노이즈는 종류에 따라 발생 주기와 형태, 인접 지점에서 발생한 노이즈와의 상관성, 주파수 대역 등 그 특징들이 각기 상이하며, 이와 같은 노이즈들에서 가장 대표적인 것이 AWGN과 임펄스 노이즈이다.

한편, 기존의 노이즈 제거 알고리즘들은 각기 다른 형태의 노이즈들에 대해서만 노이즈 제거 성능을 나타내도록 알고리즘이 정립되어져 있다. 즉, 기존의 웨이블릿 기반의 노이즈 제거 알고리즘들에서 OWT 알고리즘을 비롯하여 SSNF 알고리즘, UDWT 알고리즘 등은 noisy 신호로부터 AWGN을 효과적으로 제거하여 신호를 복원하도록 제안되었다. 그리고 *B-wavelet*을 비롯한 몇몇 알고리즘들은 임펄스 노이즈를 제거하기 위해 제안되었다. 따라서 이와 같은 기존의 웨이블릿 기반 알고리즘들은 단일 알고리즘에 의해 각기 다른 형태의 노이즈를 제거할 수 없으며, 이에 복합적인 노이즈 환경에서 사용되기 위해서는 각기 다른 형태의 노이즈 제거 알고리즘을 다중적으로 적용해야만 한다.

이에 따라, 본 논문에서는 복합적인 노이즈 환경에서 적용되기 위한 새로운 형태의 웨이블릿 기반 알고리즘들을 제안하였으며, 신호의 에지 성분과 임펄스 노이즈 및 AWGN을 정확하게 분리하여 노이즈 성분만을 제거하도록 하였다. 그리고 본 논문에서 제안한 알고리즘에는 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘, 웨이블릿 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘, half-sample delay 특성을 갖는 웨이블릿 쌍을 이용한 알고리즘이 있다.

4.1 제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘 1

웨이브렛 분해와 합성과정으로부터, 각 scale에서 표현되는 웨이브렛 계수는 신호와 노이즈에 대한 다양한 정보를 포함하고 있다. 그리고 동일한 scale j 와 위치 k 에서 근사계수와 상세계수는 신호의 동일 위치에 대한 정보를 나타낸다. 그러므로 제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘 1(PWA1 ; proposed wavelet-based algorithm 1)에서는 웨이브렛 상세계수에서 노이즈를 제거하기 위해 근사계수로부터 얻어지는 오차 분포함수의 변곡점을 이용한다.

4.1.1 신호의 에지 검출

복합적인 노이즈에 의해 훼손된 noisy 신호는 다음의 식 (4.1)과 같이 표현된다.

$$x(k) = s(k) + \sigma w(k) + i(k) \quad (4.1)$$

여기서, $s(k)$ 는 노이즈가 중첩되지 않은 원신호이며, $w(k)$ 는 IID $N(0, 1)$ 인 AWGN을 나타내고 σ 는 표준편차를 의미한다. 그리고 $i(k)$ 는 각기 다른 크기와 부호, 지속시간을 갖고 불규칙적으로 원신호에 중첩되는 임펄스 노이즈를 나타내며, $x(k)$ 는 복합적인 노이즈가 중첩된 noisy 신호를 의미한다.

신호의 특징으로부터, 임펄스 노이즈는 임의의 지점에서 큰 신호의 변화를 나타내지만, 긴 지속시간을 갖지 않고, 곧 이전의 값으로 복귀하는 불연속 점이다. 그리고 AWGN은 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다. 그러나 신호의 에지 성분은 웨이브렛 상세계수에서 큰 값을 나타내며, 에지를 경계로 하여 웨이브렛 근사계수의 크기 변화가 급격히 발생하고, 긴 지속시간을 갖는다. 따라서 노이즈와 구분되는 에지의 이러한 특징들은 신호의 에지 성분을 검출하기 위해 사용되며, 복합적인 노이즈 환경에서 획득된 신호로부터 노이즈의 레벨을 효과적으로 감소시킨다.

각 scale j 에서, 근사계수 $c_{j,k}$ 에 대한 누적함수는 식 (4.2)와 같이 표현된다.

$$F_{j,k} = F_{j,k-1} + c_{j,k} \quad (4.2)$$

여기서, $k = 1, 2, \dots, N$ 이며, $F_{j,k} = 0 (\forall k \leq 0)$ 이다. 그리고 noisy 신호로부터 에지 성분을 분리·검출하기 위해, 먼저 임의의 지점 k 에서 $F_{j,k}$ 의 인접 데이터를 사용하여, 식 (4.3)과 같이 표현되는 이차 함수로부터 근사 데이터 \tilde{I}_l 을 계산한다.

$$\tilde{I}_l = C_2 l^2 + C_1 l + C_0 \quad (4.3)$$

여기서, C_i 는 i 차 항의 계수이며, 각 계수들은 구간 $k-u \leq l \leq k+u$ 에서 각 지점 $F_{j,k-u}, F_{j,k}, F_{j,k+u}$ 를 만족하도록 결정되고, u 는 구간상수이다. 이때 에지 지점은 신호의 급격한 변화로 인해, 누적함수와 근사 데이터 사이에서 큰 차이를 나타내게 되며, 에지를 제외한 지점에서는 누적함수와 근사 데이터가 유사한 값을 갖게 된다. 이에 따라 식 (4.4)의 오차함수 $\tilde{e}_{j,k}$ 를 이용하여 noisy 신호로부터 에지 성분을 분리한다.

$$\tilde{e}_{j,k} = \sum_{l=k-u}^{k+u} |F_{j,l} - \tilde{I}_l| \quad (4.4)$$

즉, 어떠한 지점 k 에서의 오차 $\tilde{e}_{j,k}$ 는 구간 $[k-u, k+u]$ 에서 추정된 근사 데이터 \tilde{I}_l 와 $F_{j,l}$ 에 대한 오차의 합이다.

여기서, 오차함수 $\tilde{e}_{j,k}$ 의 크기가 국부적으로 최대가 되는 지점을 에지로서 판단한다. 그러나 coarse scale에서의 웨이블릿 근사계수는 fine scale의 웨이블릿 근사계수와 비교하여 상대적으로 저주파 대역에 존재하게 된다. 즉, scale이 증가함에 따라, 신호의 에지 지점에 대한 웨이블릿 근사계수의 변화가 완만하게 되며, 이것은 누적함수 $F_{j,k}$ 의 변화가 완만함을 의미하게

된다. 따라서 coarse scale에서 누적함수와 근사 데이터 사이의 오차함수 $\tilde{e}_{j,k}$ 는 신호의 모든 구간에서 크기가 급속히 감소하게 되므로, coarse scale에서 누적함수 $F_{j,k}$ 으로부터 신호의 에지 지점을 검출하기 위해, 식 (4.5)와 같이 표현되는 근사 데이터 \hat{I}_l 을 구한 후, 이로부터 식 (4.6)의 오차함수 $\hat{e}_{j,k}$ 를 계산한다.

$$\hat{I}_l = C_1 l + C_0 \quad (4.5)$$

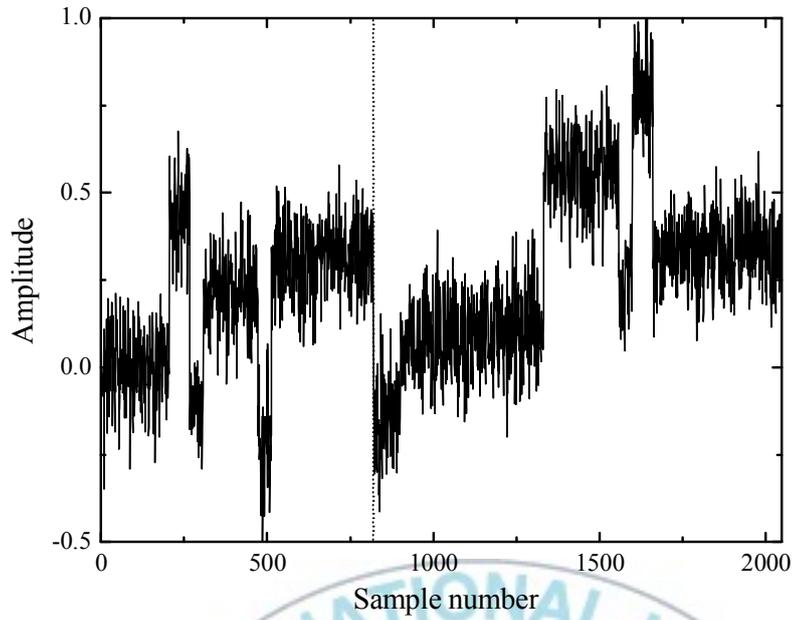
$$\hat{e}_{j,k} = \sum_{l=k-u}^{k+u} |F_{j,l} - \hat{I}_l| \quad (4.6)$$

식 (4.5)로부터, 각 계수들은 구간 $k-u \leq l \leq k+u$ 에서 두 지점 $F_{j,k-u}$, $F_{j,k+u}$ 를 만족하도록 결정되고, 이때 \hat{I}_l 는 일차함수이다.

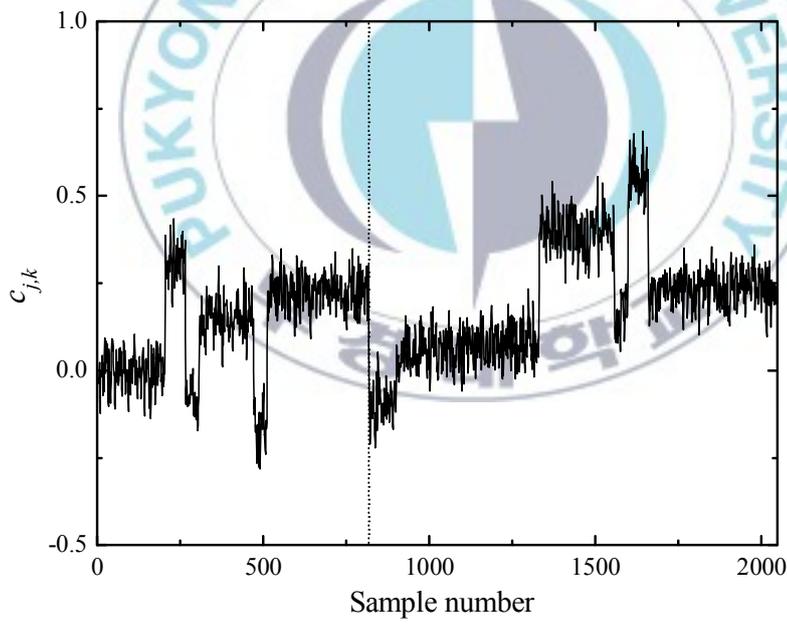
따라서 fine scale과 coarse scale의 모든 영역에서, 웨이브렛 근사계수의 누적함수 $F_{j,k}$ 로부터 신호의 에지 지점과 노이즈 성분을 분리하기 위해, 오차함수 $\tilde{e}_{j,k}$ 와 $\hat{e}_{j,k}$ 의 적으로서 표현되는 식 (4.7)의 오차함수 $e_{j,k}$ 를 사용한다.

$$e_{j,k} = \tilde{e}_{j,k} \cdot \hat{e}_{j,k} \quad (4.7)$$

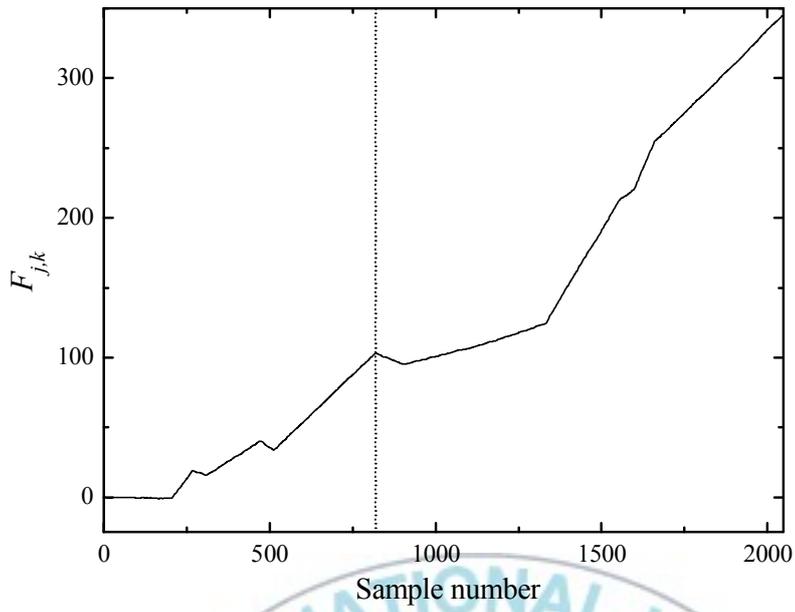
그림 4.1은 noisy 신호로부터 위의 과정에서 언급한 각 함수들을 얻는 과정을 보이고 있다. 그림으로부터 (a)는 noisy 신호로서, peak-to-peak가 1인 Blocks 신호에 평균 $\mu=0$, 표준편차 $\sigma=0.1$ 인 AWGN이 중첩되었다. 그리고 (b)는 Haar 웨이브렛을 통해 얻어진 근사계수이며, (c)는 식 (4.2)를 통해 얻어지는 누적함수 $F_{j,k}$ 이다. 또한 그림 (d)는 이차 근사 데이터 \tilde{I}_l 와 $F_{j,l}$ 에 대한 오차의 합으로서 표현되는 오차함수 $\tilde{e}_{j,k}$ 이며, (e)는 일차 근사 데이터 \hat{I}_l 와 $F_{j,l}$ 에 대한 오차의 합으로서 표현되는 오차함수 $\hat{e}_{j,k}$ 이다. 그리고 그림 (f)는 식 (4.7)로서 표현되는 오차함수 $e_{j,k}$ 이다.



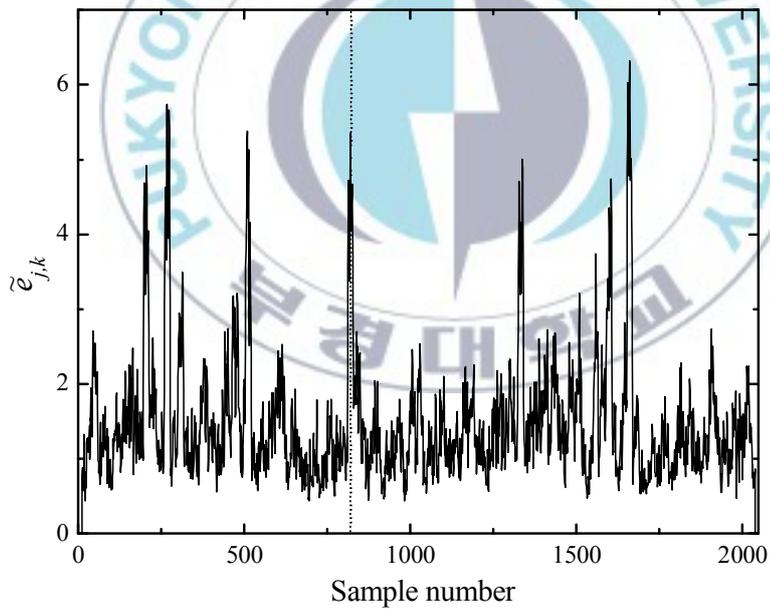
(a) Noisy signal



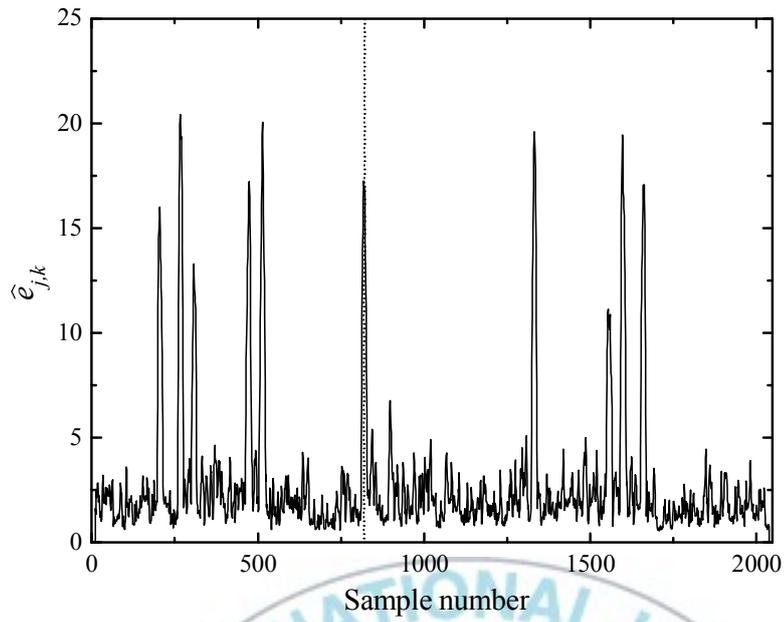
(b) Approximation coefficients $c_{j,k}$



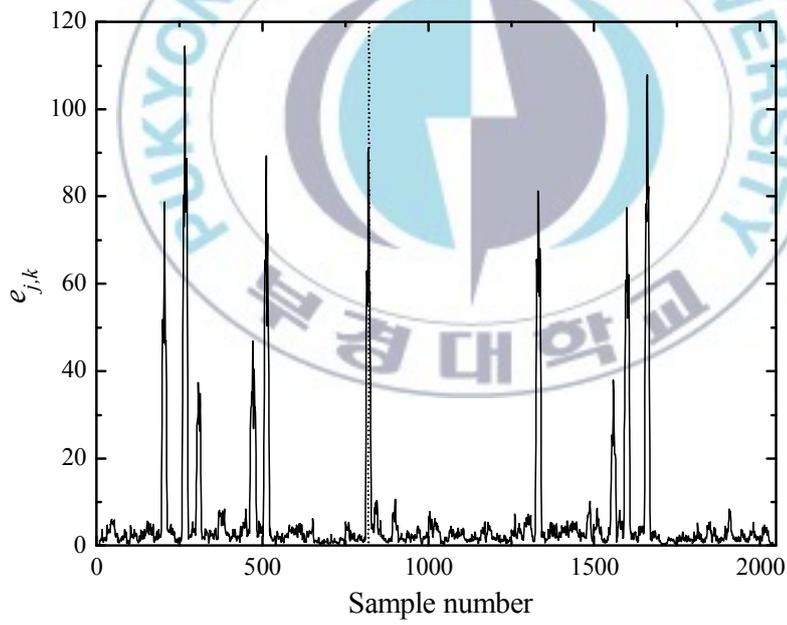
(c) Accumulation function $F_{j,k}$



(d) Error function $\tilde{e}_{j,k}$



(e) Error function $\hat{e}_{j,k}$



(f) Error function $e_{j,k}$

Fig. 4.1. Error function for a noisy signal.

4.1.2 평활화된 히스토그램의 변곡점을 이용한 노이즈 제거

그림 4.1(f)의 결과로부터, 노이즈를 제거하기 위해 $e_{j,k}$ 에 적용되는 λ 는 넓은 범위에서 선택된다. 일반적으로 신호에서 완만한 변화를 나타내는 부분은 오차함수 $e_{j,k}$ 의 크기가 노이즈의 영향을 받으므로, $e_{j,k}$ 의 크기가 작고 발생빈도가 많다. 그러나 에지 지점은 전체 신호에서 발생빈도가 적으며, 오차함수 $e_{j,k}$ 의 크기가 에지 지점에서 불연속적으로 변화된 신호의 크기에 영향을 받는다. 따라서 그림 4.2와 같은 오차함수 $e_{j,k}$ 에 대한 히스토그램은 임계값 λ 를 결정하기 위해 사용된다.

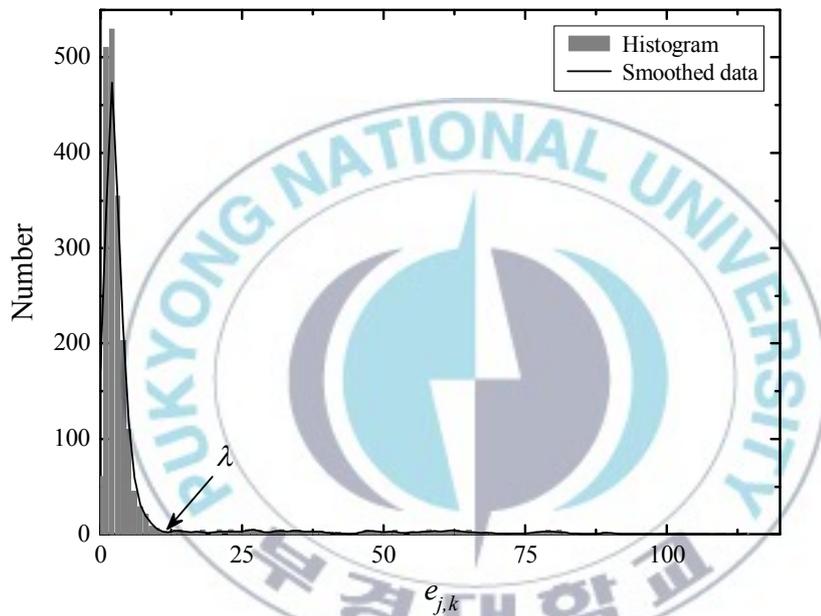


Fig. 4.2. The histogram of $e_{j,k}$.

위의 그림 4.2로부터, 오차함수 $e_{j,k}$ 는 대부분 노이즈에 의해서 발생된 누적함수와 근사데이터 사이의 오차에 의해서 얻어지므로, 히스토그램의 좌측에 편중되어 나타나게 된다. 그러나 그림 4.1(f)에서 에지의 영향으로 인해 발생한 오차는 불연속적으로 급격하게 큰 값을 나타내며, 그 데이터의 수가 적으므로, 그림 4.2에서 불연속 구간에서는 데이터가 존재하지 않

게 되며, 에지에 의한 오차레벨에서 다시 그 값이 나타나게 된다. 즉, 히스토그램은 좌측의 낮은 구간에서 많은 발생빈도를 나타내며, 우측으로 갈수록 그 값이 급격히 감소하게 된다. 그리고 데이터가 존재하지 않거나 그 발생빈도가 극히 적은 dead zone이 존재하게 되며, 그 이후 에지에 의한 오차함수에 의해 발생빈도가 다소 증가하게 된다. 따라서 이러한 오차함수 $e_{j,k}$ 의 히스토그램을 분석하는 것에 의해 noisy 신호로부터 노이즈와 신호의 에지 성분은 분리된다. 이를 위해, 본 논문에서는 그림 4.2에서 실선으로 나타낸 바와 같이 히스토그램에 대한 평활화된 데이터로부터, 피크값 이후의 첫 번째 변곡점을 임계값 λ 로 설정하였다.

그림 4.3은 그림 4.1(f)에 그림 4.2의 평활화된 히스토그램 데이터로부터 얻어진 임계값 λ 를 설정한 예를 보이고 있다. 그리고 그림 4.3에서 임계값 λ 를 초과하는 지점의 데이터 개수는 실제 에지 지점의 한 point에 대해서, 과다하게 많은 지점들이 검출된다. 따라서 이러한 지점을 모두 에지로 인식하여 데이터를 복구할 경우, 많은 노이즈가 그대로 보존되게 된다.

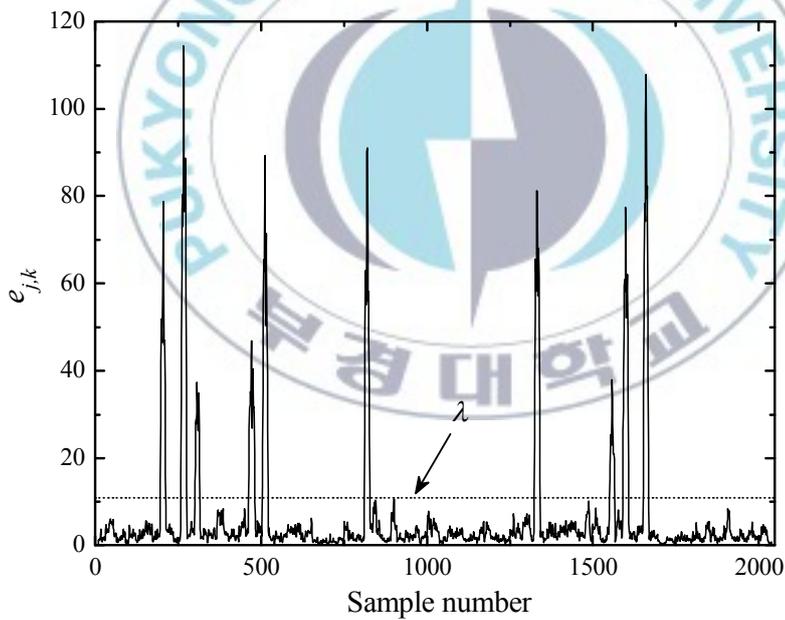


Fig. 4.3. Threshold λ applied to error function $e_{j,k}$.

그러므로 에지로서 판단되는 지점의 데이터군으로부터 피크값을 갖는 한 point를 기준으로 2^j+1 개의 웨이브렛 상세계수만을 에지로서 보존하고, 그 외의 데이터는 0으로 reset한다.

즉, 근사계수를 누적하는 것에 의해 얻어진 누적함수로부터 오차함수를 구하며, 이러한 오차함수에서 임계값 λ 를 초과하는 에지 한 point에 대해서, 스케일 j 에 따라 2^j+1 개의 데이터를 보존하게 된다. 이때, 계수의 보존과 제거는 동일한 scale j 와 위치 k 에서 근사계수와 상세계수가 신호의 동일 위치에 대한 정보를 나타내므로, 웨이브렛 상세계수에서 이루어진다. 그리고 각 웨이브렛 scale에서 처리된 웨이브렛 상세계수와 근사계수를 이용하여 노이즈를 제거한 후 신호를 복원하게 된다.



4.2 제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘 2

앞의 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘인 PWA1은 누적함수로부터 계산된 오차함수에서 노이즈와 에지를 분리하기 위해, 평활화된 히스토그램의 변곡점을 임계값으로서 선택하였다.

그러나 제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘 2(PWA2 ; proposed wavelet-based algorithm 2)에서는 임계값을 설정하기 위한 부분에서, 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용하며, 이러한 과정을 통해 신호의 에지 성분과 노이즈 성분을 분리한다.

4.2.1 오차함수

각 scale j 에서, 근사계수 $c_{j,k}$ 에 대한 누적함수는 앞의 식 (4.2)와 같이 표현하였다. 그리고 임의의 지점 k 에서 $F_{j,k}$ 의 인접 데이터를 사용하여 식 (4.5)와 같이 표현되는 일차 함수로부터 근사 데이터 \hat{I}_l 을 계산한다. 그리고 noisy 신호로부터 에지성분을 분리하기 위해, 식 (4.8)과 같이 정의되는 오차함수 $e_{j,k}^*$ 를 사용하며, 위치 k 를 중심으로 하는 구간 $[k-u, k+u]$ 의 각 지점에서 누적함수와 일차함수 사이에서 계산된 차의 최대값으로 정의한다.

$$e_{j,k}^* = \max |F_{j,l} - \hat{I}_l|, \quad k-u \leq l \leq k+u \quad (4.8)$$

위의 식으로부터 u 는 오차함수를 얻기 위한 구간 상수이다.

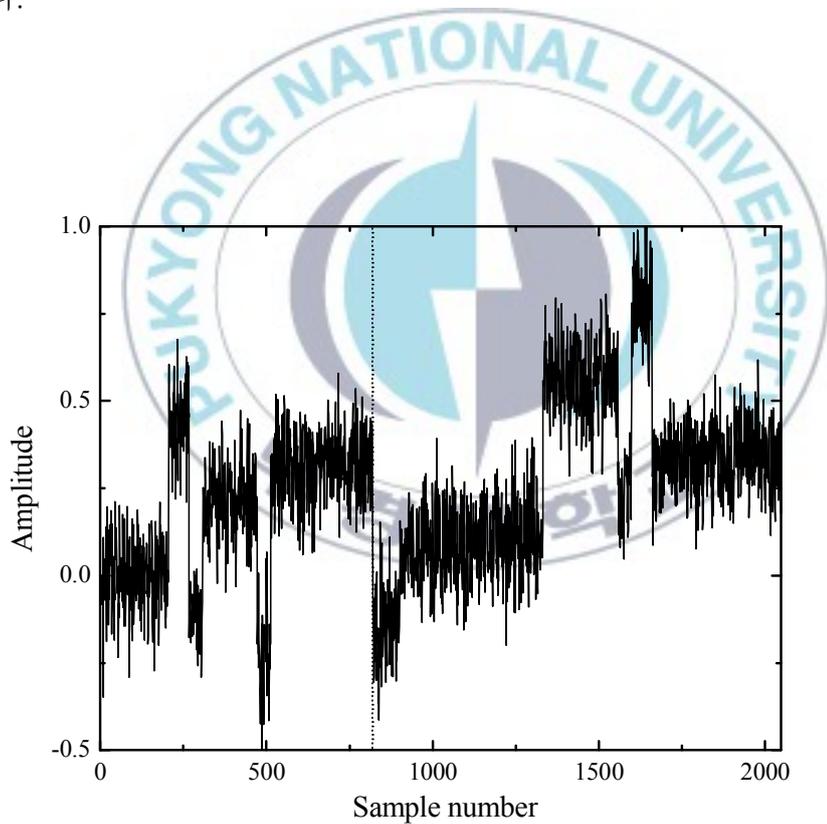
그림 4.4는 noisy 신호로부터 오차함수 $e_{j,k}^*$ 를 얻기 위한 과정과 이것의 분포특성을 보이고 있다.

이러한 그림 4.4는 그림 4.1과 동일한 조건에서 이루어졌으며, 그림 4.4(a)는 noisy 신호로서, peak-to-peak가 1인 Blocks 신호에 평균 $\mu=0$, 표준편차 $\sigma=0.1$ 인 AWGN이 중첩되었다. 그리고 그림 4.4(b)는 Haar 웨

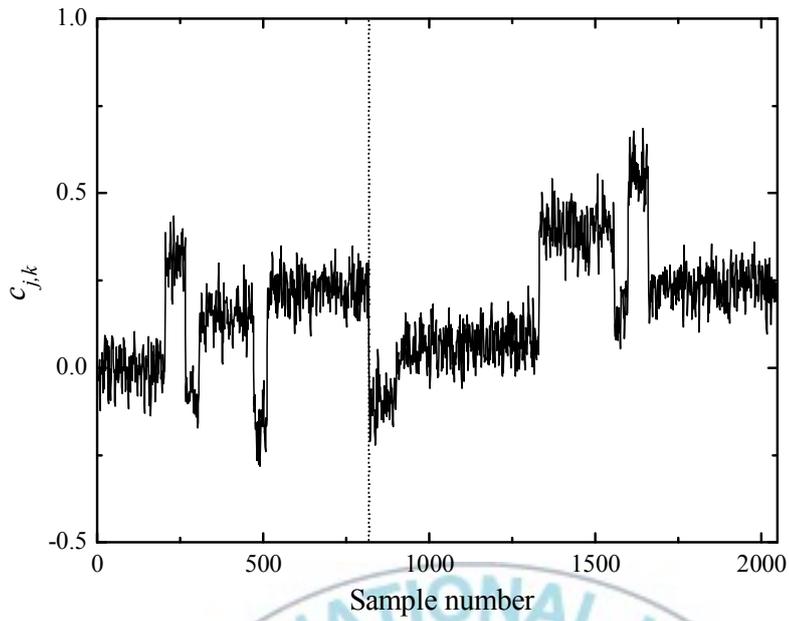
이브렛을 통해 얻어진 근사계수이며, 그림 4.4(c)는 식 (4.2)를 통해 얻어지는 누적함수 $F_{j,k}$ 이다. 또한 그림 4.4(d)는 일차 근사 데이터 \hat{I}_l 와 $F_{j,l}$ 에 대한 오차의 최대값으로서 표현되는 오차함수 $e_{j,k}^*$ 이다. 그리고 그림 4.4(e)는 이러한 오차함수의 분포특성을 보이고 있다.

그림으로부터, 점선으로 표현된 신호의 에지 지점에서는 근사계수의 크기가 급격히 변화하고, 에지를 경계로 하여 나누어지는 두 영역에서의 크기변화는 많은 샘플을 통해서 서서히 변화한다.

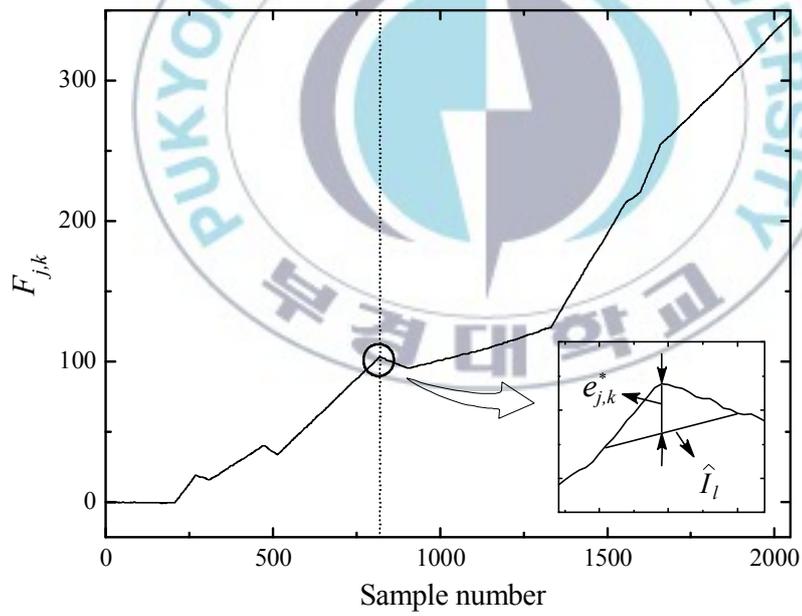
따라서 신호의 에지 지점은 그림 4.4(c)의 누적함수에서 큰 기울기의 변화를 나타내고, 누적함수와 일차함수 사이에서 큰 오차를 보이며, 에지를 제외한 지점에서는 적은 오차를 나타낸다. 이때 오차함수에 대한 분포 데이터를 나타내는 그림 4.4(e)를 이용하여 에지를 판단하기 위한 임계값을 설정한다.



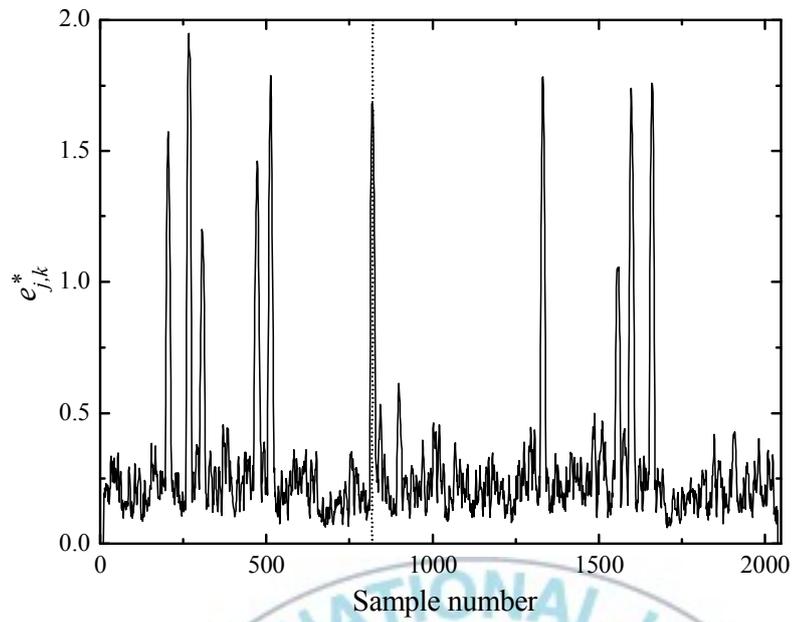
(a) Noisy signal



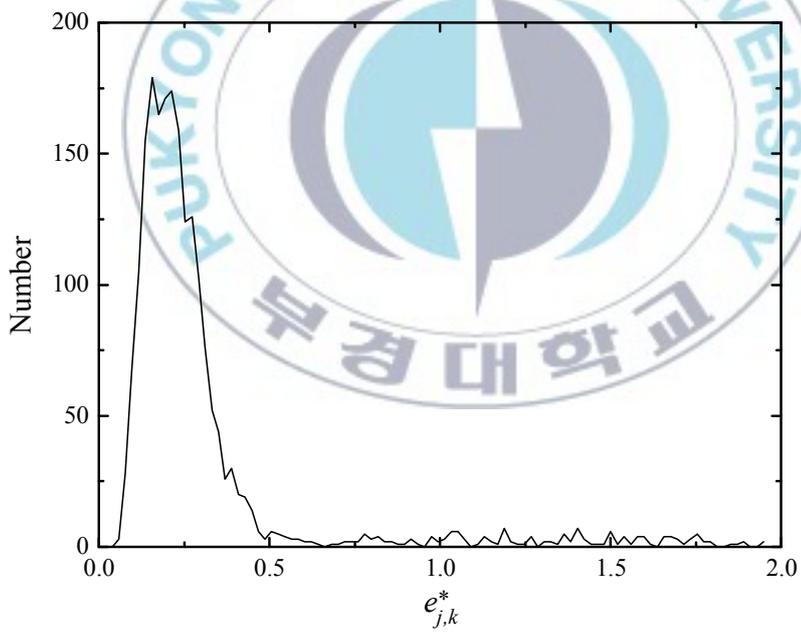
(b) Approximation coefficients $c_{j,k}$



(c) Accumulation function $F_{j,k}$



(d) Error function $e_{j,k}^*$



(e) Distribution characteristics

Fig. 4.4. Distribution characteristics of error function.

4.2.2 신호의 특성에 따른 오차함수의 분포특성

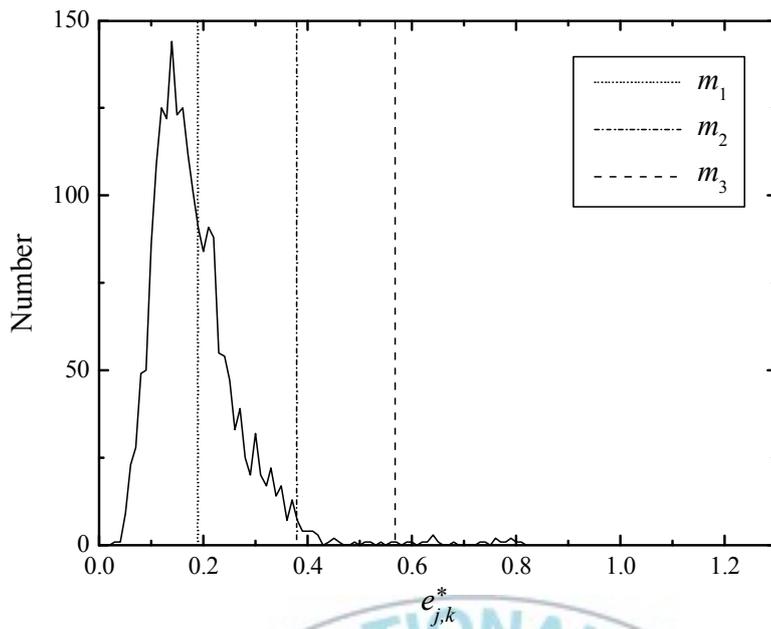
일반적으로 큰 오차를 나타내는 데이터의 수는 상대적으로 적으므로, 우측으로 감소하는 특성을 나타낸다. 이것은 앞의 그림 4.2와 그림 4.4(e)로부터 확인된다. 따라서 이러한 특징을 이용하여 임계값을 설정하기 위해, 다음의 그림 4.5와 그림 4.6에서 제시된 신호 형태와 노이즈의 크기에 따른 오차함수의 분포특성을 살펴본다.

그림 4.5(a)는 작은 크기의 에지를 포함하는 신호에 작은 표준편차의 AWGN이 중첩된 경우의 분포특성이다. 그리고 그림 4.5(b)는 역시 작은 크기의 에지를 포함하는 동일한 신호에 큰 표준편차의 AWGN이 중첩된 경우의 분포특성을 보이고 있다.

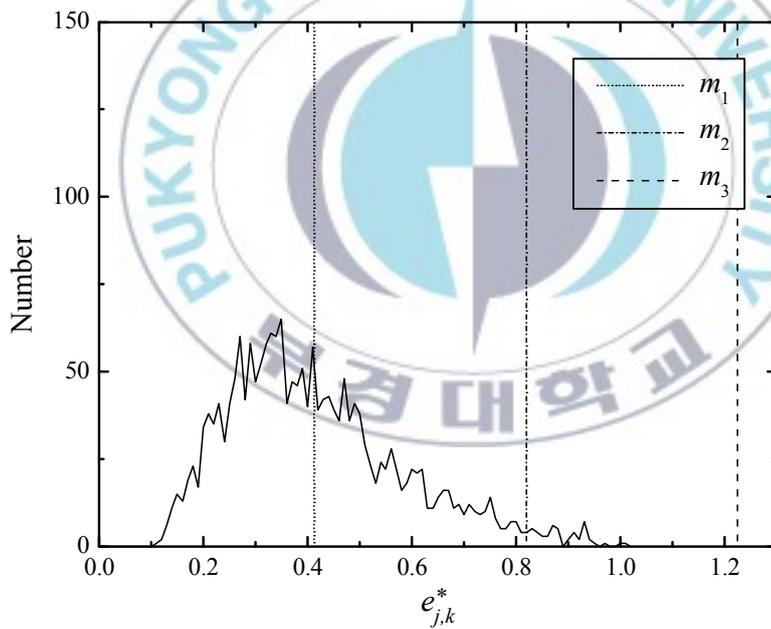
또한 그림 4.6(a)는 큰 크기의 에지를 포함하는 신호에 작은 표준편차의 AWGN이 중첩된 경우이고, 그림 4.6(b)는 큰 크기의 에지를 포함하는 그림 4.6(a)와 동일한 신호에 큰 표준편차의 AWGN이 중첩된 경우에 대한 오차함수의 분포특성을 보이고 있다.

그림으로부터, 각 scale에서 오차함수의 평균을 m_1 으로 정의하며, m_2 와 m_3 는 각각 $m_2 = 2m_1$, $m_3 = 3m_1$ 으로 정의한다. 이때, 상대적으로 작은 크기의 표준편차를 갖는 AWGN이 중첩된 경우에는 평균값 m_1 이하에 많은 수의 데이터가 존재하며, 큰 표준편차의 AWGN이 중첩될 경우에는 데이터 분포가 점차 우측으로 이동하게 된다.

따라서 일정한 임계값은 다양한 형태의 신호에서, 상대적으로 큰 노이즈 성분을 에지로서 판단하거나, 작은 에지를 노이즈로서 판단하게 한다. 그러므로 이러한 경우를 피하기 위해 임계값이 오차함수의 분포특성에 따라 적응적으로 변화하도록 파라메타를 추가한다.

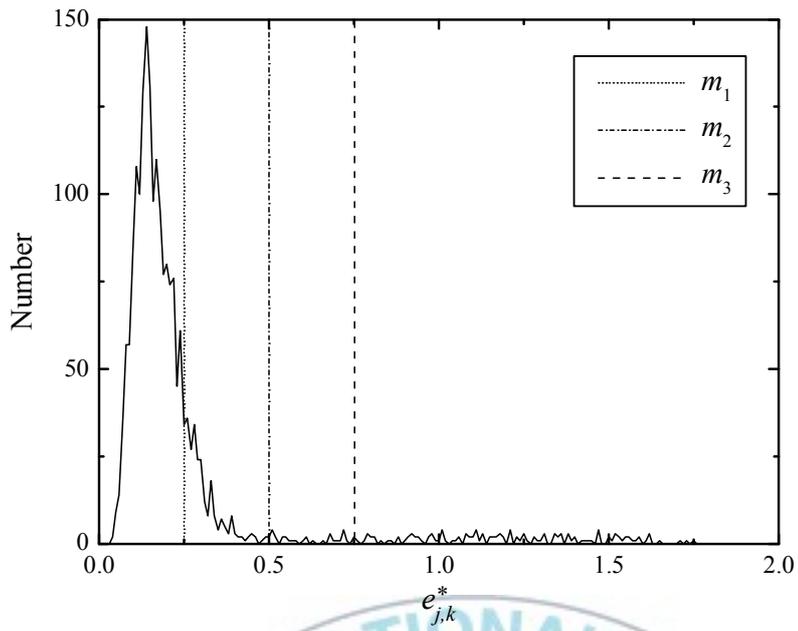


(a) The case AWGN with small standard deviation overlaps

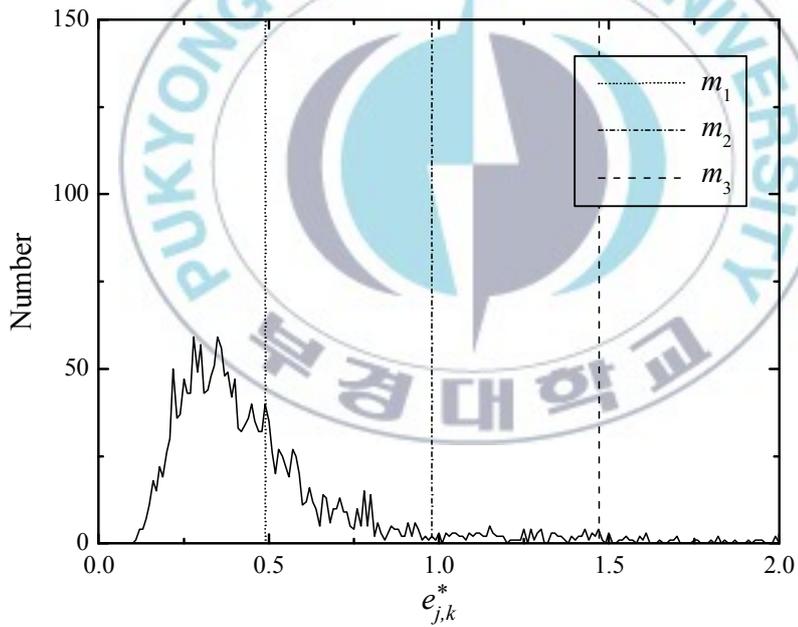


(b) The case AWGN with large standard deviation overlaps

Fig. 4.5. Distribution characteristics of error function for signal with edges of small amplitude.



(a) The case AWGN with small standard deviation overlaps



(b) The case AWGN with large standard deviation overlaps

Fig. 4.6. Distribution characteristics of error function for signal with edges of large amplitude.

4.2.3 적응 임계값에 의한 노이즈 제거

평균값 m_1 이하의 데이터 수를 전체 데이터 수로 나눈 정규화된 데이터 수를 n_1 이라 하고, m_2 및 m_3 에 상응하는 정규화된 데이터 수를 각각 n_2 , n_3 라 할 때, 식 (4.9)는 각 scale에서 오차함수에 임계값을 설정하기 위해 사용된다.

$$\lambda_{error} = m_2 \cdot n_3^2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (4.9)$$

그림 4.5(b)의 경우는 작은 크기의 에지를 포함하는 신호에 상대적으로 큰 표준편차의 AWGN이 중첩된 경우이므로 노이즈가 신호의 대부분에서 지배적이다. 이때 식 (4.9)를 적용할 경우, $1 < (n_2/n_1) < 2$ 이며, $n_3^2 \approx 1$ 이므로 임계값은 증가하게 되어, 대부분의 노이즈 성분을 제거하게 된다. 그러나 그림 4.6(a)의 경우는 큰 크기의 에지를 포함하는 신호에 상대적으로 작은 표준편차의 AWGN이 중첩된 경우이므로 오차함수에서 노이즈의 영향은 에지와 비교하여 상대적으로 명확하게 구분가능하게 된다. 이때 식 (4.9)를 적용할 경우, $(n_2/n_1) \approx 1$ 이며, $n_3^2 < 1$ 이므로 임계값은 감소하게 되어, 다양한 크기의 에지들에서 큰 크기의 에지뿐만 아니라, 작은 크기의 에지 신호 역시 노이즈로부터 분리된다.

그리고 오차함수에 적용되는 임계값 λ_{error} 에 의해 에지로서 판단된 지점은 각 scale에서, 웨이브렛 상세계수의 동일한 지점에서 식 (4.10)과 같은 임계값을 적용한다.

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{error} \cdot (M_1 / M_{error}), & \text{if rising edge} \\ \lambda_{error} \cdot (M_2 / M_{error}), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.10)$$

여기서, M_{error} 은 각 scale의 오차함수에서 에지로서 판단된 지점의 국부 최대값이다. 그리고 M_1 은 이러한 에지 영역에 상응하는 웨이브렛 상세계

수의 최대값이며, M_2 는 최소값을 의미한다. 따라서 오차함수에서 에지로서 판단된 지점에 상응하는 웨이브렛 상세계수의 부호가 (+)일 경우에는 (+)의 임계값을 적용하며, (-)일 경우에는 (-)의 임계값을 설정한다. 또한 전체 신호의 모양과 노이즈 레벨에 따라 적응적으로 변환하는 오차함수의 임계값 λ_{error} 뿐만 아니라, 웨이브렛 상세계수에 적용되는 임계값 λ 는 각 에지 지점에 대하여 또 한번 국부적으로 그 레벨이 변화한다. 즉, 전체 신호에 대해서 적응적으로 오차함수의 임계값이 설정된 경우, 오차함수에서 이러한 임계값을 초과하는 웨이브렛 상세계수의 크기는 다양하다. 다양한 크기의 에지를 갖는 신호에서, 어떤 임의 지점의 에지는 큰 크기의 에지 신호를 가지며, 또 다른 임의 지점의 에지는 상대적으로 작은 크기의 에지 신호를 갖는다. 따라서 오차함수에서 에지로서 판단된 지점에 상응하는 웨이브렛 상세계수의 크기가 클 경우에는 M_i/M_{error} 를 통해 상대적으로 큰 임계값을 설정하게 되고, 오차함수에서 에지로서 판단된 지점에 상응하는 웨이브렛 상세계수의 크기가 작을 경우에는 M_i/M_{error} 를 통해 상대적으로 작은 임계값을 설정하게 된다.

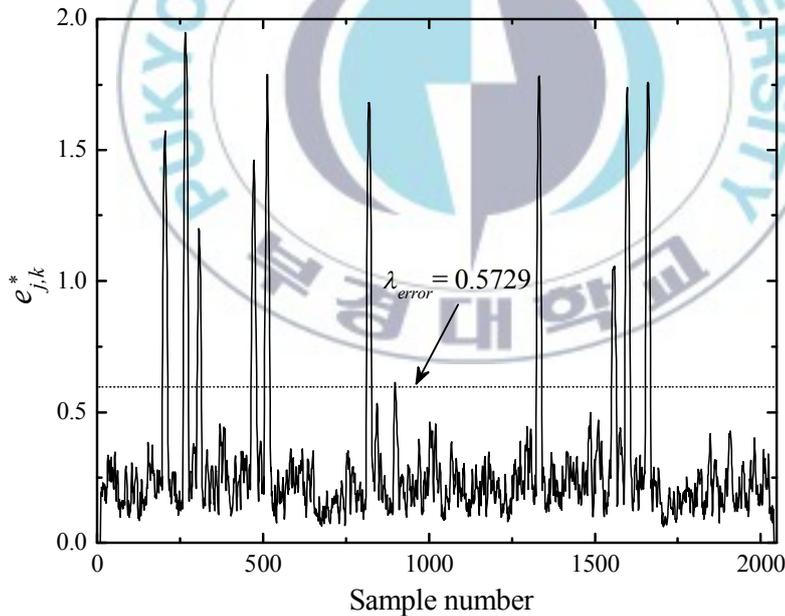
위의 알고리즘은 앞 절에서 제시된 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘에서, 오차함수에서 임계값 λ 를 초과하는 에지 한 point에 대해서, 스케일 j 에 따라 2^j+1 개의 데이터를 보존하는 것과 비교하여 간결하고 좀 더 우수한 결과를 나타낸다. 즉, 오차함수에서 에지로서 판단된 데이터군은 실제 에지 지점보다 넓은 구간을 포함하고 있다. 그러나 이러한 데이터군에 상응하는 웨이브렛 상세계수에서 에지는 그 데이터 수가 적으며, 그 외의 구간은 노이즈에 의해 영향을 받고, 그 크기가 작다. 따라서 이러한 데이터군에 상응하는 웨이브렛 상세계수를 2^j+1 개만큼 보존하는 대신, M_i/M_{error} 의 임계값을 설정하여 조건을 만족하는 데이터만을 에지로서 판단하고, M_i/M_{error} 보다 적은 크기를 갖는 데이터는 노이즈로서 판단하게 된다. 또한 위의 식 (4.10)에서, 상승과 하강에지에 대한 판단은 구간 $[F_{j,k-u}, F_{j,k}]$ 와 $[F_{j,k}, F_{j,k+u}]$ 에서의 기울기 변화로부터 얻어진다.

최종적으로, 각 scale에서 M_{error} 에 상응하는 지점을 포함하고, 임계값 λ 이상인 연속되는 웨이브렛 상세계수는 보존하며, 그 외의 모든 계수는

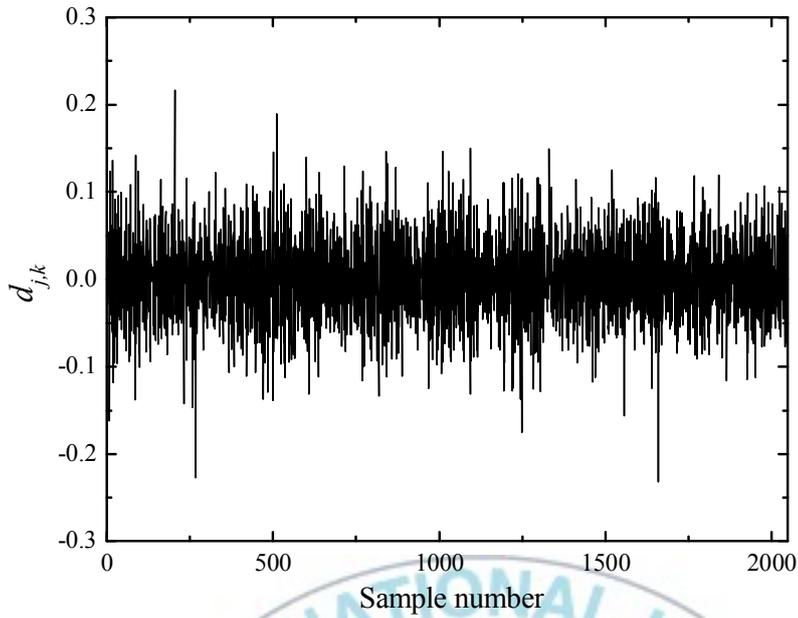
zero로 reset한 후, 역 웨이브렛 변환을 수행하여 신호를 복원한다.

그림 4.7은 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘의 임계값 적용과정을 보이고 있다. 그림 4.7(a)는 오차함수 $e_{j,k}^*$ 에 적용된 임계값 λ_{error} 를 보이고 있으며, 오차함수 $e_{j,k}^*$ 의 평균값 $m_1 = 0.3016$ 이고, $m_2 = 0.6032$ 이다. 또한 평균값 m_1 이하의 데이터 수를 전체 데이터 수로 나눈 정규화된 데이터 수 $n_1 = 0.8550$ 이며, m_2 및 m_3 에 상응하는 정규화된 데이터 수는 각각 $n_2 = 0.9229$, $n_3 = 0.9380$ 이다. 따라서 식 (4.9)를 통해 계산된 오차함수에 적용되는 임계값 $\lambda_{error} = 0.5729$ 이다. 그림 4.7(a)에서 확인되는 바와 같이, 이러한 임계값 λ_{error} 를 초과하는 데이터군은 총 11지점이다.

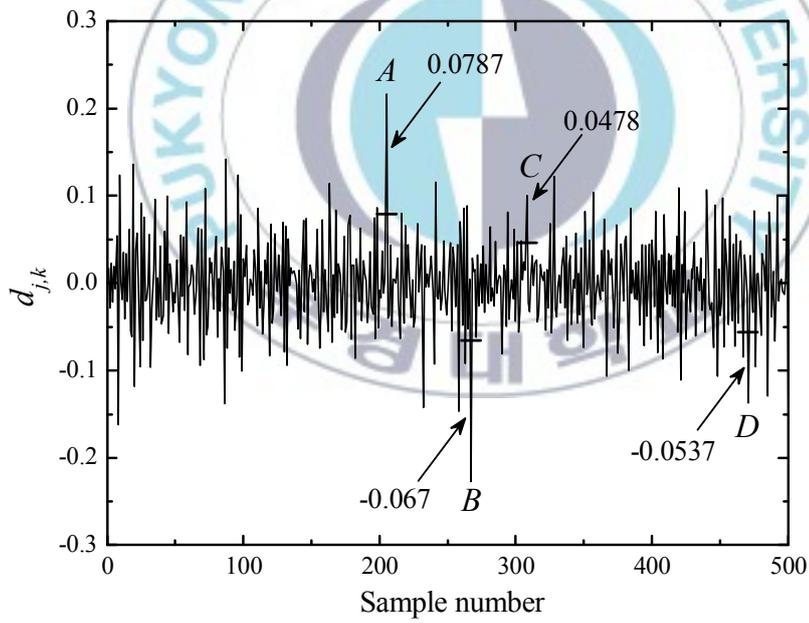
그리고 그림 4.7(b)는 그림 4.4(b)의 웨이브렛 근사계수 $c_{j,k}$ 에 상응하는 웨이브렛 상세계수 $d_{j,k}$ 를 보이고 있으며, 그림 4.7(c)는 웨이브렛 상세계수 $d_{j,k}$ 의 구간 [1, 500]까지를 확대한 그림이다.



(a) Threshold λ_{error} applied to error function $e_{j,k}^*$



(b) Detail coefficients $d_{j,k}$



(c) Detail coefficients $d_{j,k}$ with expanded range

Fig. 4.7. Application process of threshold in the proposed method.

이러한 구간에서 임계값 λ_{error} 를 초과하는 데이터군은 총 4부분이며, 각각의 데이터 군에 상응하는 상세계수 $d_{j,k}$ 의 국부 최대값 M_1 및 최소값 M_2 를 A, B, C, D 로 나타내었다. 그리고 이러한 각각의 최대 및 최소값에 적용되는 임계값 λ 는 식 (4.10)을 통해 계산되며, 각각 0.0787, -0.067, 0.0478, -0.0537의 값이다.

이와 같이 본 논문에서 제안된 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 노이즈 제거 알고리즘은 각각의 데이터군에 대해 각기 다른 임계값 λ 를 적용함에 따라, 노이즈로 판단될 수 있는 작은 에지 성분의 웨이브렛 상세계수를 보존하여 복원하며, 상대적으로 큰 노이즈 성분을 분리하여 제거한다.



4.3 제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘 3

웨이브렛은 기저함수를 설계하거나 기존의 함수를 선택하는 것에 의해, 여러 응용분야에 대해 다양한 함수가 적용된다. 이에 몇몇 저자들은 신호 해석과 처리를 위해 두 개의 웨이브렛 쌍을 적용하는 방법에 대해 논했으며, Selesnick은 힐버트 변환쌍을 형성하는 웨이브렛 기저의 설계 방법을 제시하였다[20]-[22].

제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘 3(PWA3 ; proposed wavelet-based algorithm 3)에서는 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍으로부터 얻어지는 두 근사계수에 대한 차 값을 이용하여 노이즈 성분을 제거하였다.

4.3.1 CQF(conjugate quadrature filter) 쌍

필터 $h^\alpha(k)$ 와 $g^\alpha(k)$ 가 CQF 쌍이 되도록 다음의 식 (4.11) 및 식 (4.12)와 같이 정의한다[20],[22].

$$\sum_k h^\alpha(k) h^\alpha(k+2l) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$g^\alpha(k) = (-1)^k h^\alpha(L-k) \quad (4.12)$$

여기서, L 은 홀수의 정수이며, 자기상관함수의 형태는 식 (4.13)과 같다. 그리고 필터 $h^\beta(k)$ 와 $g^\beta(k)$ 는 동일한 방법에 의한 또 다른 CQF 쌍이고, 이때 $\chi^\alpha(k)$ 와 $\chi^\beta(k)$ 가 식 (4.14)를 만족할 경우, CQF 조건이 만족된다.

$$\chi^\alpha(k) = \sum_l h^\alpha(l) h^\alpha(l-k) \quad (4.13)$$

$$\chi^\alpha(2k) = \chi^\beta(2k) = \delta(k) \quad (4.14)$$

4.3.2 힐버트 변환쌍

Dilation equation으로부터 설계되어진 $\psi^\alpha(t)$ 와 $\psi^\beta(t)$ 가 식 (4.15)를 만족할 경우, 두 웨이브렛 기저는 힐버트 변환 관계에 있으며, 이러한 관계를 유도하기 위해 식 (4.16)을 가정한다[22].

$$\Psi^\beta(\omega) = \begin{cases} -j\Psi^\alpha(\omega), & \omega > 0 \\ j\Psi^\alpha(\omega), & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$H^\beta(\omega) = H^\alpha(\omega) e^{-j\theta(\omega)} \quad (4.16)$$

CQF 조건을 만족하는 각각의 필터와 scaling, 웨이브렛 함수로부터 다음의 식 (4.17)이 얻어지며, 이러한 식 (4.15)와 식 (4.17)로부터 식 (4.18)의 조건이 정의된다.

$$\Psi^\beta(\omega) = \Psi^\alpha(\omega) e^{j[\theta(\omega/2 - \pi) - \sum_{i=2}^{\infty} \theta(\omega/2^i)]} \quad (4.17)$$

$$\theta(\omega/2 - \pi) - \sum_{i=2}^{\infty} \theta(\omega/2^i) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

위의 식 (4.18)은 $\theta(\omega) = \omega/2$ 를 선택하는 것에 의해 만족된다. 따라서 $H^\alpha(\omega)$ 와 $H^\beta(\omega)$ 가 식 (4.19)를 만족하는 저역통과 CQF 필터라면, 상응하는 웨이브렛은 식 (4.20)과 같이 힐버트 변환쌍을 형성한다.

$$H^\beta(\omega) = H^\alpha(\omega) e^{-j\frac{\omega}{2}}, \quad \text{for } |\omega| < \pi \quad (4.19)$$

$$\psi^\beta(t) = \mathcal{H}\{\psi^\alpha(t)\} \quad (4.20)$$

여기서 $\mathcal{H}\{\cdot\}$ 는 힐버트 변환을 의미한다. 그리고 등가적으로 디지털 필터 $h^\beta(k)$ 는 식 (4.21)과 같이 $h^\alpha(k)$ 가 half-sample 지연된 것이다.

$$h^\beta(k) = h^\alpha(k-1/2) \quad (4.21)$$

4.3.3 All-pass 필터

힐버트 변환 관계를 형성하기 위해, all-pass 필터의 설계 과정을 포함하며, 다음의 식 (4.22)는 τ -sample의 지연을 갖는 all-pass 필터이다[20].

$$A(z) = \frac{z^{-N} D(1/z)}{D(z)} \quad (4.22)$$

여기서, N 은 all-pass 필터의 차수를 나타내며, $D(z)$ 는 식 (4.23)과 같다.

$$D(z) = 1 + \sum_{k=1}^N d(k) z^{-k} \quad (4.23)$$

식 (4.23)의 계수 벡터 $d(k)$ 는 다음의 식 (4.24)와 같으며, 이때 $(\cdot)_k$ 는 rising factorial을 나타낸다.

$$d(k) = (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\tau-N)_k}{(\tau+1)_k} \quad (4.24)$$

4.3.4 웨이브렛 기저 설계

힐버트 변환쌍을 형성하는 두 개의 웨이브렛 기저를 생성하기 위해 orthogonal 접근법을 사용할 경우, 두 개의 저역통과 scaling 필터가 전달 함수의 형태에서 다음의 식 (4.25)와 같이 τ -sample의 지연을 갖는 all-pass 필터를 포함하도록 설계한다[20].

$$H^\beta(z) = H^\alpha(z) \frac{z^{-N} D(1/z)}{D(z)} \quad (4.25)$$

식 (4.25)로부터, $H^\beta(z)$ 는 $H^\alpha(z)$ 와 all-pass 필터로 구성되어 있음을 확인할 수 있으며, 이에 따라 다음의 조건들은 만족된다.

$$|H^\alpha(z)| = |H^\beta(z)| \quad \text{and} \quad |G^\alpha(z)| = |G^\beta(z)| \quad (4.26)$$

또한 식 (4.25)를 얻기 위해 전달함수를 다음의 두 식과 같이 나타낸다.

$$H^\alpha(z) = F(z) D(z) \quad (4.27)$$

$$H^\beta(z) = F(z) z^{-N} D(1/z) \quad (4.28)$$

식 (4.27) 및 식 (4.28)은 다시 식 (4.29) 및 식 (4.30)과 같이 표현되며, 이때 $d(k)$ 는 half-sample 지연을 갖도록 선택한다.

$$h^\alpha(k) = f(k) * d(k) \quad (4.29)$$

$$h^\beta(k) = f(k) * d(N-k) \quad (4.30)$$

식 (4.27)과 식 (4.28)에 vanishing moment K 를 포함시키도록 할 경우, 다음의 식들과 같다.

$$F(z) = Q(z) (1+z^{-1})^K \quad (4.31)$$

$$H^\alpha(z) = Q(z) (1+z^{-1})^K D(z) \quad (4.32)$$

$$H^\beta(z) = Q(z) (1+z^{-1})^K z^{-N} D(1/z) \quad (4.33)$$

식 (4.13)의 전달함수 형태는 다음의 식 (4.34)와 같으며, $X^\beta(z)$ 는 동일한 방법에 의해 나타내어지고, 이때 $X^\alpha(z)$ 또는 $X^\beta(z)$ 로부터 동일하게 식 (4.35)가 유도된다.

$$X^\alpha(z) = H^\alpha(z) H^\alpha(1/z) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= X^\alpha(z) = X^\beta(z) \\ &= Q(z) Q(1/z) (z+2+z^{-1})^K D(z) D(1/z) \end{aligned} \quad (4.35)$$

위의 식 (4.35)에서, $(z+2+z^{-1})^K D(z) D(1/z)$ 는 앞의 과정들로부터 파라메타 K 와 N 을 사용하여 얻어진다. 그리고 $R(z)$ 를 식 (4.36)과 같이 두었을 경우, $r(k) = r(-k)$ 이고 $X(z)$ 가 half-band의 조건을 만족하는 최소 길이의 $r(k)$ 를 구한 뒤, $h^\alpha(k)$ 와 $h^\beta(k)$ 가 CQF의 조건을 만족하도록 최소차수의 $Q(z)$ 를 spectral factorization을 통해 구한다.

$$R(z) = Q(z) Q(1/z) \quad (4.36)$$

그림 4.8은 $K=2$, $N=5$ 로 설정하여 설계된 두 개의 웨이브렛 기저를 보이고 있으며, 그림 4.9는 웨이브렛 기저의 힐버트 변환 특성을 확인하기 위해, $|\Psi^\alpha(\omega) + j\Psi^\beta(\omega)|$ 의 크기를 나타낸 것이다. 그림으로부터, 본 논문에서 설계된 웨이브렛 기저는 $\omega < 0$ 에 대해서 zero에 접근하고 있다.

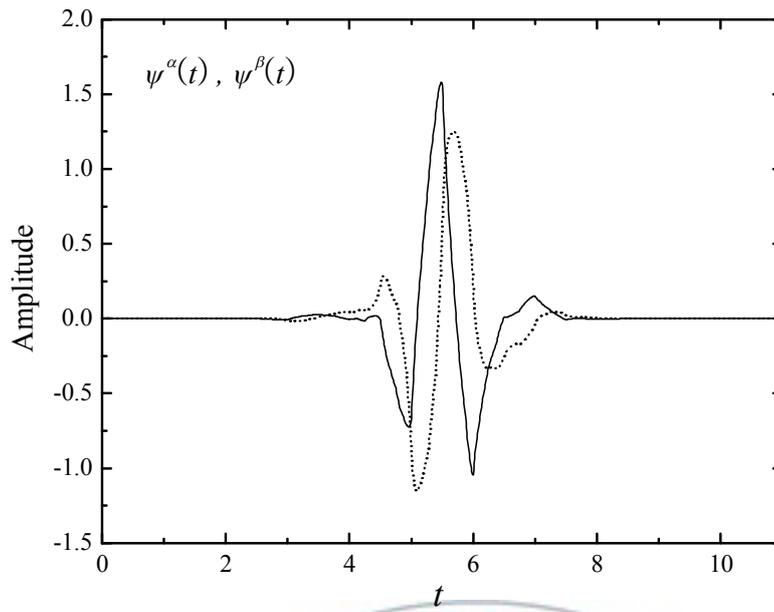


Fig. 4.8. Hilbert transform pair of wavelet.

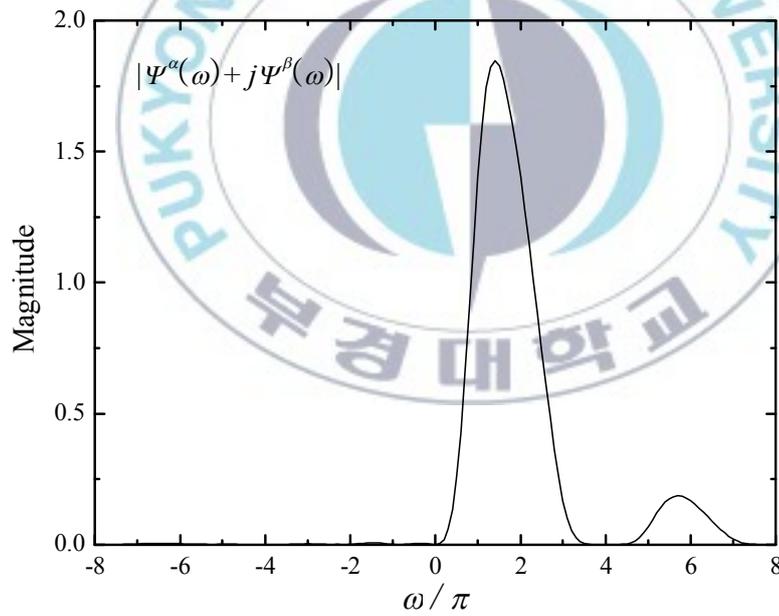


Fig. 4.9. Magnitude of wavelet in frequency domain.

4.3.5 웨이브렛 쌍에 의한 노이즈 제거

앞서 언급된 바와 같이, 에지는 웨이브렛 근사계수의 임의 지점에서 계수값의 큰 변화를 나타내며 긴 지속시간을 유지한다. 그리고 AWGN은 연속적으로 불규칙한 변화를 나타내며, 임펄스 노이즈는 임의 지점에서 계수값의 큰 변화를 나타내지만 곧 이전의 상태로 복귀한다. 한편, 힐버트 변환 쌍을 형성하는 두 개의 웨이브렛 기저는 근사적으로 half-sample delay 특성을 가지므로, 이러한 특성을 이용하여 복합적인 노이즈 환경에서 신호의 에지 성분과 임펄스 노이즈 및 AWGN을 분리한다.

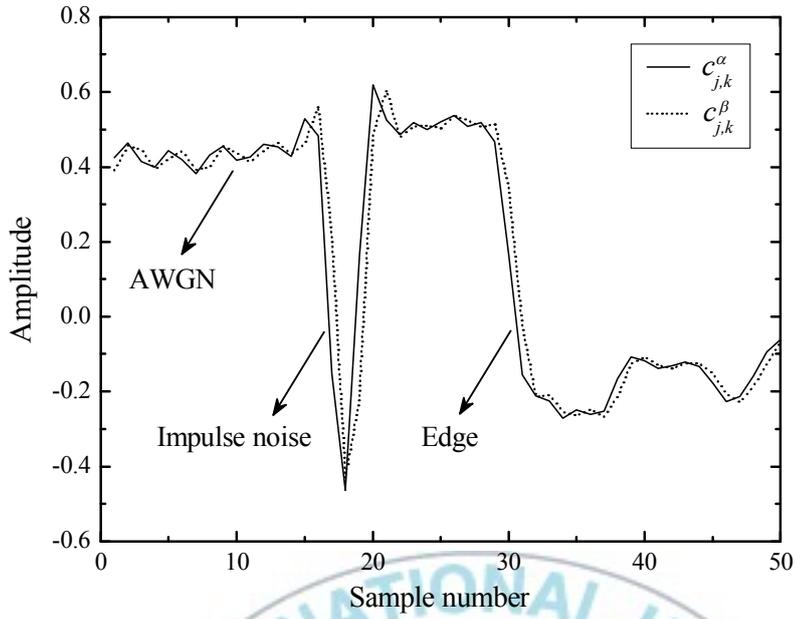
그림 4.10은 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍을 이용한 알고리즘이 신호의 어떠한 특성을 이용하여 노이즈 성분과 에지 성분을 분리하는지를 보이고 있다. 그림 4.10(a)는 힐버트 변환쌍을 형성하는 두 개의 기저 벡터를 통해 얻어진 두 개의 근사계수 $c_{j,k}^{\alpha}$ 와 $c_{j,k}^{\beta}$ 를 보이고 있다. 그림으로부터, AWGN 영역과 임펄스 노이즈 영역, 그리고 에지 영역의 특징이 상이하게 나타나고 있다.

AWGN과 임펄스 노이즈는 임의 지점에서, 두 개의 근사계수 값의 크기가 서로 교번되고 있으며, 임펄스 노이즈는 AWGN에 비해 그 크기가 크다. 이에 비해, 신호의 에지 영역은 에지가 종료되는 지점까지 하나의 근사계수가 다른 하나의 근사계수 보다 항상 큰 값을 나타낸다.

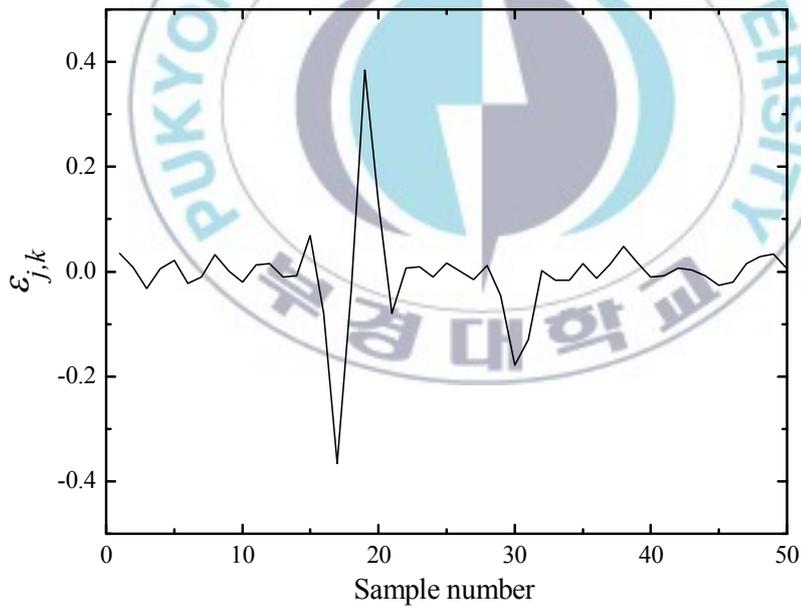
그림 4.10(b)는 이러한 신호의 특징들을 분리하기 위해, 두 근사계수의 차를 나타낸 것이며, 아래의 식 (4.37)을 통해 얻어진다.

$$\epsilon_{j,k} = c_{j,k}^{\alpha} - c_{j,k}^{\beta} \quad (4.37)$$

그림 4.10(b)에서 보이고 있는 두 근사계수에 대한 차신호 $\epsilon_{j,k}$ 로부터, 임펄스 노이즈와 AWGN은 양과 음의 방향에 대해 거의 동등한 크기의 진폭 변화를 나타내고 있으며, 특히 임펄스 노이즈는 급격한 진폭변화를 보이고 있다. 그러나 이에 반해, 신호의 에지 성분은 차신호에서 양 또는 음의 한 방향으로만 진폭변화를 보이고 있다. 따라서 noisy 신호로부터 노이즈를 제거하기 위해, 먼저 식 (4.37)로서 표현되는 근사계수에 대한 차신호 $\epsilon_{j,k}$ 에 $2\sigma \sim 3\sigma$ 사이의 임계값을 적용한다.



(a) Two approximation coefficients



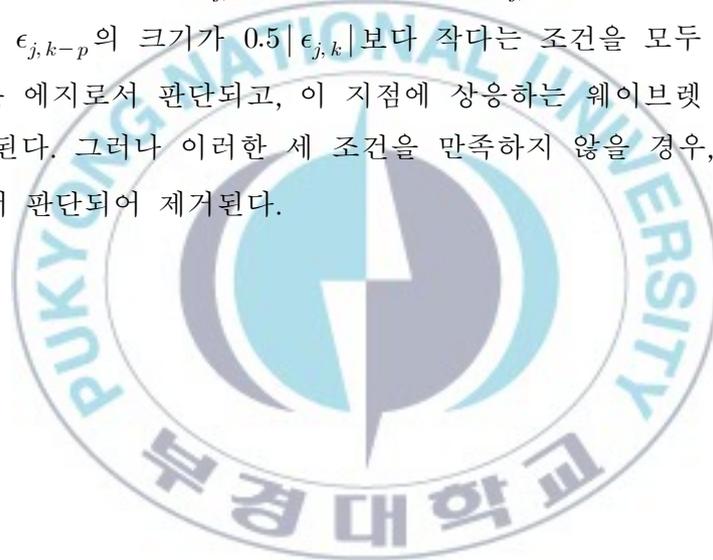
(b) Difference coefficients

Fig. 4.10. Approximation and difference coefficients.

그리고 식 (4.38)과 같이 임계값을 초과하는 차신호 $\epsilon_{j,k}$ 와 이 지점으로 부터 음과 양의 방향으로 기울기의 부호변화가 발생하는 지점의 차신호 $\epsilon_{j,k-m}$ 및 $\epsilon_{j,k+p}$ 의 관계를 이용하여, 각 스케일의 웨이블릿 상세계수 $d_{j,k}$ 에서 복합적인 노이즈 성분을 제거한다.

$$\eta_{\mathcal{H}}(d_{j,k}) = \begin{cases} d_{j,k}, & \begin{array}{l} |\epsilon_{j,k}| \geq \lambda \quad \text{and} \\ |\epsilon_{j,k-m}| < 0.5 |\epsilon_{j,k}| \quad \text{and} \\ |\epsilon_{j,k+p}| < 0.5 |\epsilon_{j,k}| \end{array} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.38)$$

즉, 차신호에서 임의 지점 k 의 값이 임계값 λ 를 초과할 경우, 이 지점으로부터 $k-m$ 에 위치한 계수 $\epsilon_{j,k-m}$ 의 크기가 $0.5|\epsilon_{j,k}|$ 보다 작으며, $k-p$ 에 위치한 계수 $\epsilon_{j,k-p}$ 의 크기가 $0.5|\epsilon_{j,k}|$ 보다 작다는 조건을 모두 만족할 경우, 이 지점은 에지로서 판단되고, 이 지점에 상응하는 웨이블릿 상세계수 $d_{j,k}$ 는 보존된다. 그러나 이러한 세 조건을 만족하지 않을 경우, 이 지점은 노이즈로서 판단되어 제거된다.



제5장 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 복합적으로 중첩된 노이즈를 제거하여 신호를 복원하기 위해, 웨이브렛 계수 누적을 이용한 노이즈 제거 알고리즘과 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍에 의한 노이즈 제거 알고리즘을 제안하였다. 또한 웨이브렛 계수 누적을 이용한 노이즈 제거 알고리즘은 다시 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘과 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘으로 나누어진다.

오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘인 PWA1은 복합적인 노이즈 성분을 제거시키고, 신호의 에지 성분을 보존하기 위해, 오차함수의 히스토그램에 대한 평활화된 데이터로부터 피크값 이후의 첫 번째 변곡점을 임계값으로 설정하였다.

또한 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘인 PWA2는 평균값과 정규화된 데이터 수를 이용하여 noisy 신호의 특성에 따라 적층적으로 임계값이 변화하도록 함에 따라, 신호의 에지 성분과 노이즈 성분에 대한 분리 특성을 더욱 향상시켰다.

그리고 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍을 이용한 알고리즘인 PWA3는 두 개의 웨이브렛 쌍에 의해 얻어지는 계수가 근사적으로 half-sample delay 특성을 나타냄에 따라, 이러한 특성을 이용하여, 신호의 에지 성분을 보존함과 동시에 임펄스 노이즈 및 AWGN을 제거하도록 하였다.

제안된 알고리즘의 필터링 성능을 확인하기 위해, 테스트 신호로서 peak-to-peak가 1인 Blocks 신호와 HeaviSine 신호를 사용하였으며, 신호의 길이는 2048[sample]이다. 그리고 0[dB]~20[dB]의 AWGN에 훼손된 신호에 각기 다른 크기와 부호를 갖는 임펄스 노이즈를 중첩하여 시뮬레이션하였으며, 본 논문에서 제안된 웨이브렛 기반의 알고리즘에서는 Haar 필터를 적용하였다. 또한, scale level j 는 3-level까지 적용하였으며, 웨이브렛 계수 누적을 이용한 노이즈 제거 알고리즘들에서 구간상수 $u=10$ 을 적용하였고, 노이즈 제거 성능에 대한 판단 기준으로 SNR을 적용하여, 기존의 알고리즘과 비교하였다.

그림 5.1은 시뮬레이션을 위해, 테스트 신호에 중첩된 임펄스 노이즈로서, 각기 다른 지속시간 및 크기, 부호를 갖는다.

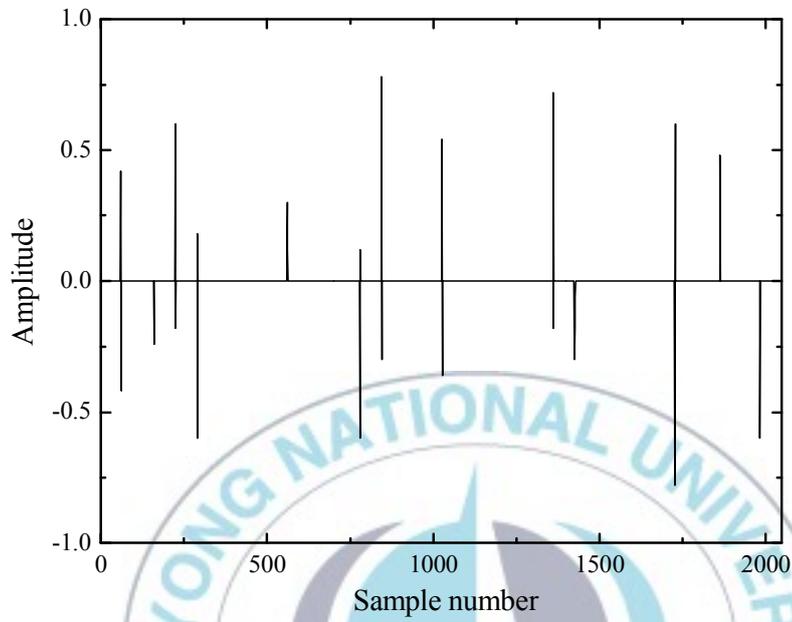


Fig. 5.1. Impulse noise.

5.1 Blocks 신호에 대한 시뮬레이션 결과

그림 5.2는 Blocks 신호에 대한 시뮬레이션 결과로서, 그림 5.2(a)는 원신호이며, 그림 5.2(b)는 SNR 10[dB]의 AWGN과 그림 5.1의 임펄스 노이즈가 복합적으로 중첩된 noisy 신호로서 이때 SNR은 9.11[dB]이다.

그리고 그림 5.2(c)는 기존의 OWT 알고리즘에 의한 복원 결과이며, 그림 5.2(d)는 SSNF 알고리즘에 의한 복원 결과이고, 그림 5.2(e)는 UDWT 알고리즘에 의한 복원 결과이다. 그림으로부터, OWT 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 16.19[dB]이며, SSNF 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 16.51[dB]이고, UDWT 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 15.74[dB]이다.

한편, 그림 5.2(f)는 본 논문에서 제안한 PWA1 알고리즘에 의한 복원 결과이며, 그림 5.2(g)는 PWA2 알고리즘에 의한 복원 결과이고, 그림 5.2(h)는 PWA3 알고리즘에 의한 복원 결과이다. 그림으로부터, PWA1 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 19.49[dB]이며, PWA2 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 19.71[dB]이고, PWA3 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 17.94[dB]이다.

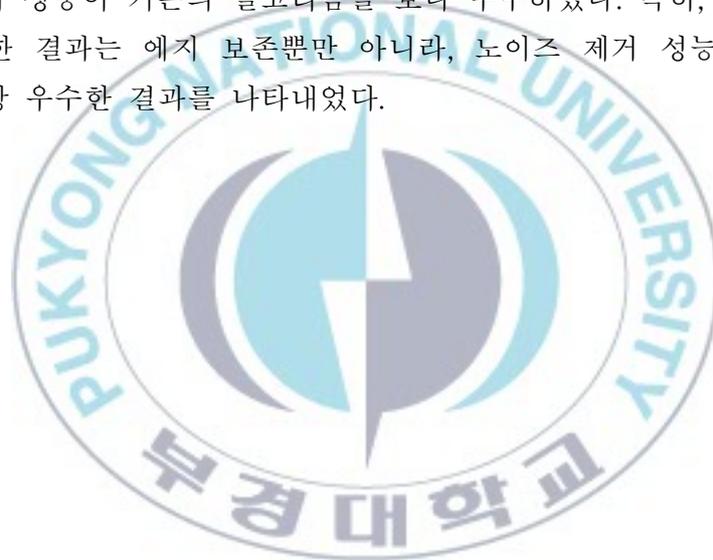
표 5.1은 복합적인 노이즈에 의해 훼손된 noisy 신호의 SNR이 9.11[dB] 일 경우에 시뮬레이션된 Blocks 신호의 SNR을 비교한 것으로서, SNR_{in} 은 복합적인 노이즈에 의해 훼손된 신호의 SNR이며, SNR_{out} 은 각각의 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR을 나타내고, (·)는 AWGN이 원신호에 중첩되었을 경우의 SNR을 나타낸다.

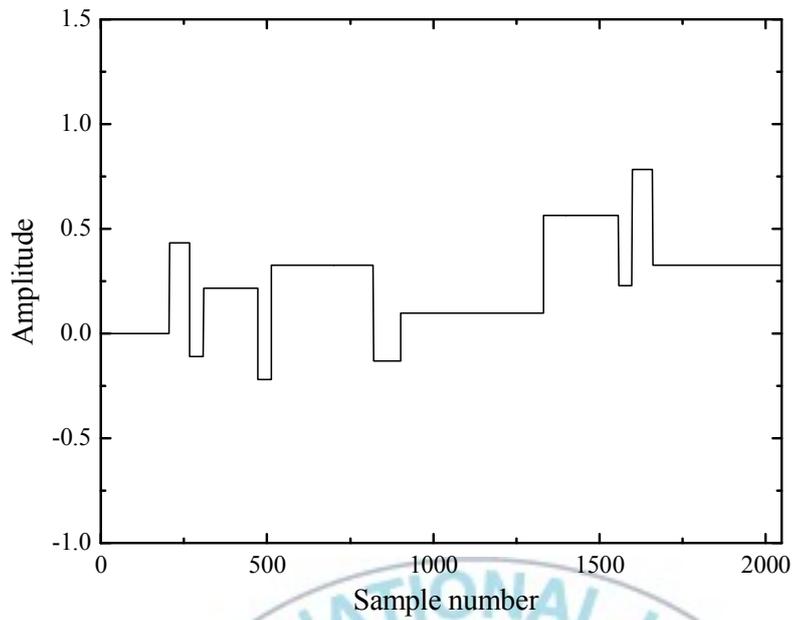
Table 5.1. SNR comparison of Blocks signal at SNR 9.11[dB]

SNR_{in} [dB]	SNR_{out} [dB]					
	OWT	SSNF	UDWT	PWA1	PWA2	PWA3
9.11(10)	16.19	16.51	15.74	19.49	19.71	17.94

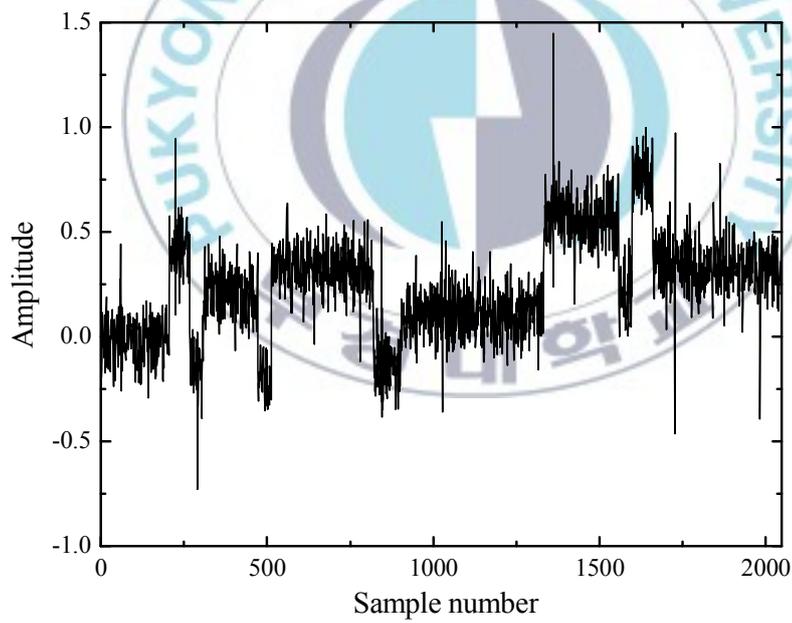
그리고 그림 5.2의 결과로부터, OWT 알고리즘은 subsampling에 의해 시각적으로 부드럽지 못한 결과를 보이고 있으며, SSNF 알고리즘은 두 scale 사이의 공간적 상관도를 이용하여 노이즈를 제거함에 따라 에지 성분에 대한 보존 성능은 우수하지만 여전히 많은 임펄스 노이즈와 AWGN이 존재한다. 또한 UDWT 알고리즘은 모든 스케일에서 동일한 수의 웨이블릿 계수를 유지하면서 노이즈를 제거함에 따라 AWGN에 대한 노이즈 제거 성능은 우수하지만, AWGN에 대해서만 노이즈 제거 성능을 나타내도록 설계됨에 따라, 모든 임펄스 노이즈 성분이 제거되지 않고 에지로서 판단되고 있으며, 이러한 결과로서 복합적인 노이즈 환경에서는 OWT 및 SSNF 알고리즘 보다 노이즈 제거 성능이 저하하였다.

그러나 본 논문에서 제안된 알고리즘인 PWA1, PWA2, PWA3는 단일 알고리즘에 의해서도 신호의 에지 성분에 대한 보존 성능과 임펄스 노이즈 및 AWGN 제거 성능이 기존의 알고리즘들 보다 우수하였다. 특히, PWA2 알고리즘에 의한 결과는 에지 보존뿐만 아니라, 노이즈 제거 성능에서도 전체적으로 가장 우수한 결과를 나타내었다.

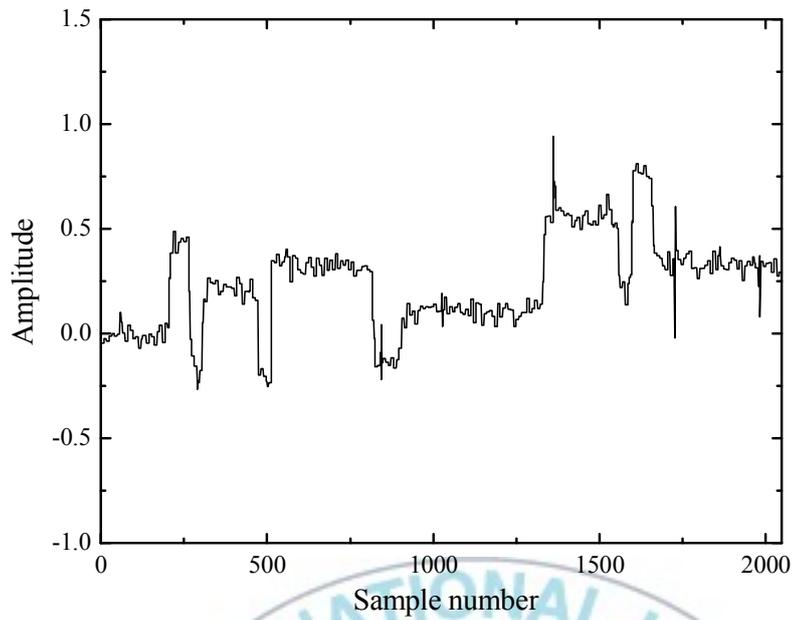




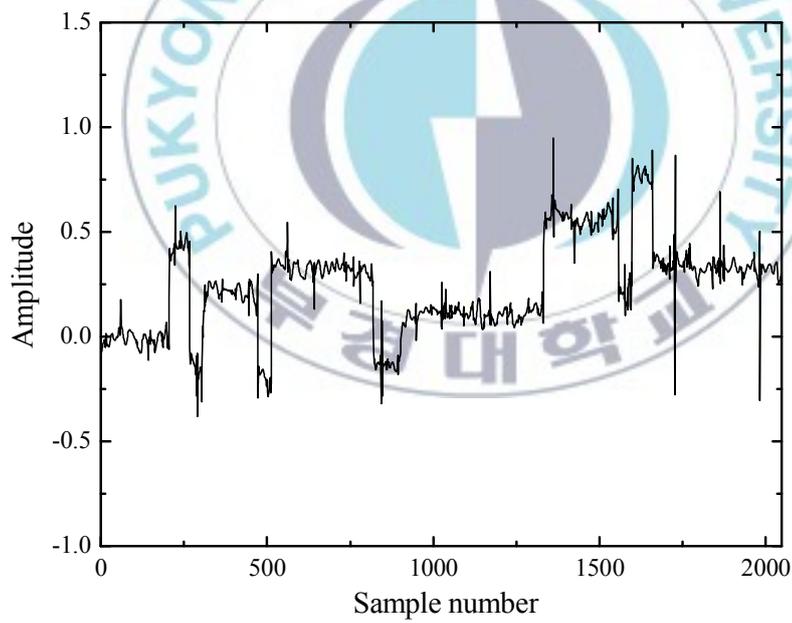
(a) True Blocks



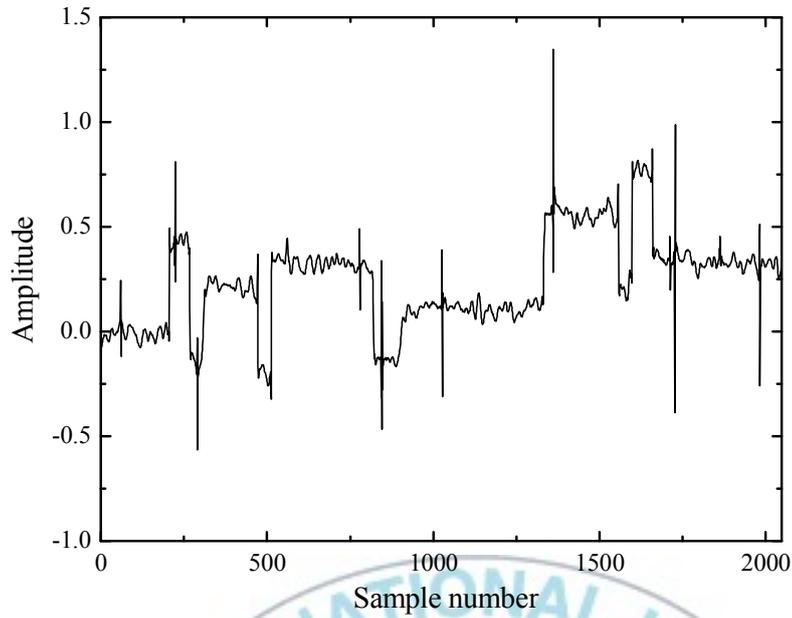
(b) Noisy Blocks (SNR = 9.11[dB])



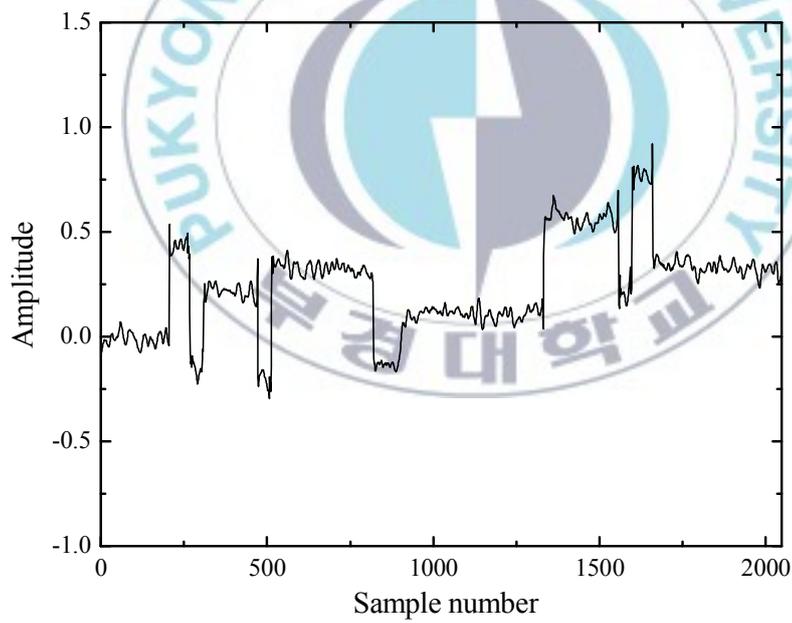
(c) Denoising result by OWT algorithm (SNR = 16.19[dB])



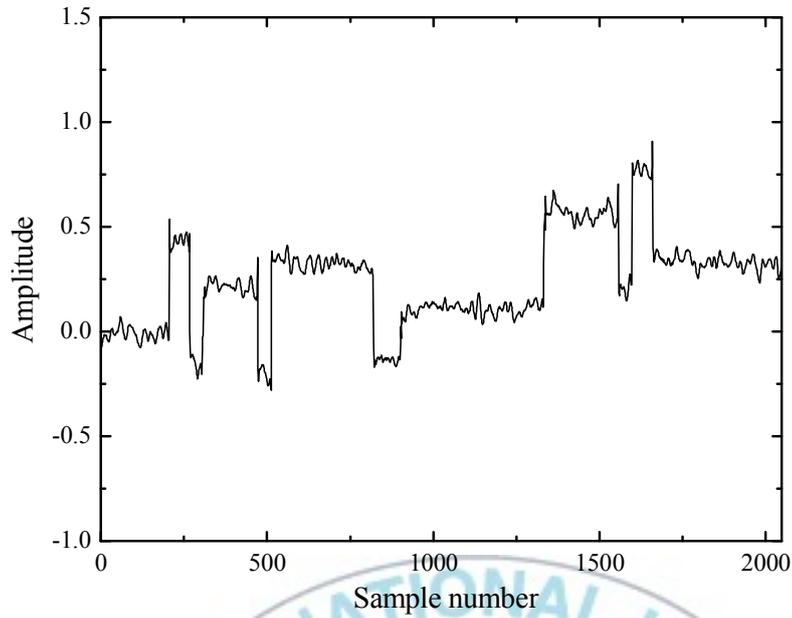
(d) Denoising result by SSNF algorithm (SNR = 16.51[dB])



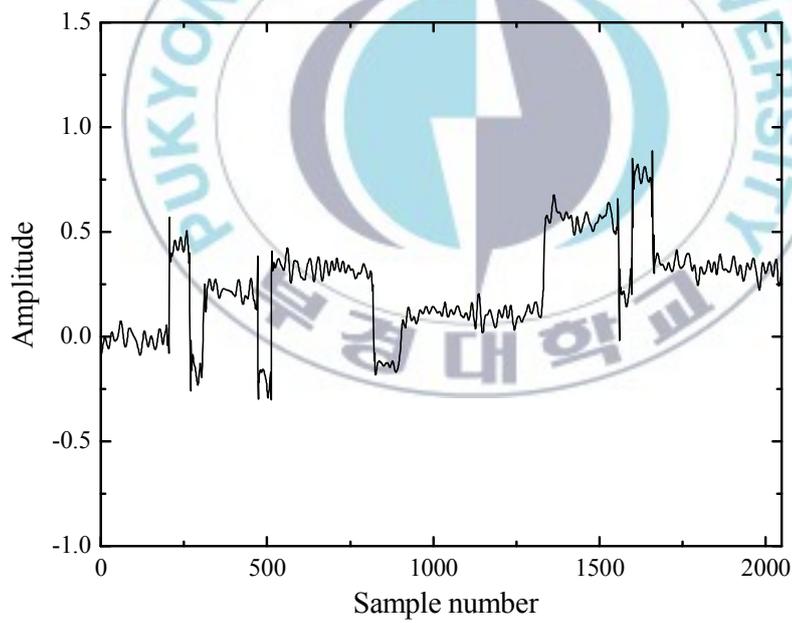
(e) Denoising result by UDWT algorithm (SNR = 15.74[dB])



(f) Denoising result by PWA1 algorithm (SNR = 19.49[dB])



(g) Denoising result by PWA2 algorithm (SNR = 19.71[dB])



(h) Denoising result by PWA3 algorithm (SNR = 17.94[dB])

Fig. 5.2. Denoising results for Blocks signal.

5.2 HeaviSine 신호에 대한 시뮬레이션 결과

그림 5.3은 HeaviSine 신호에 대한 시뮬레이션 결과로서, 그림 5.3(a)는 원신호이며, 그림 5.3(b)는 SNR 10[dB]의 AWGN과 그림 5.1의 임펄스 노이즈가 복합적으로 중첩된 noisy 신호로서 이때 SNR은 9.16[dB]이다.

그리고 그림 5.3(c)는 OWT 알고리즘에 의한 복원 결과이며, 그림 5.3(d)는 SSNF 알고리즘에 의한 복원 결과이고, 그림 5.3(e)는 UDWT 알고리즘에 의한 복원 결과이다. 그림으로부터, OWT 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 17.24[dB]이며, SSNF 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 15.78[dB]이고, UDWT 알고리즘에 의해 복원된 신호의 SNR은 16.21[dB]이다.

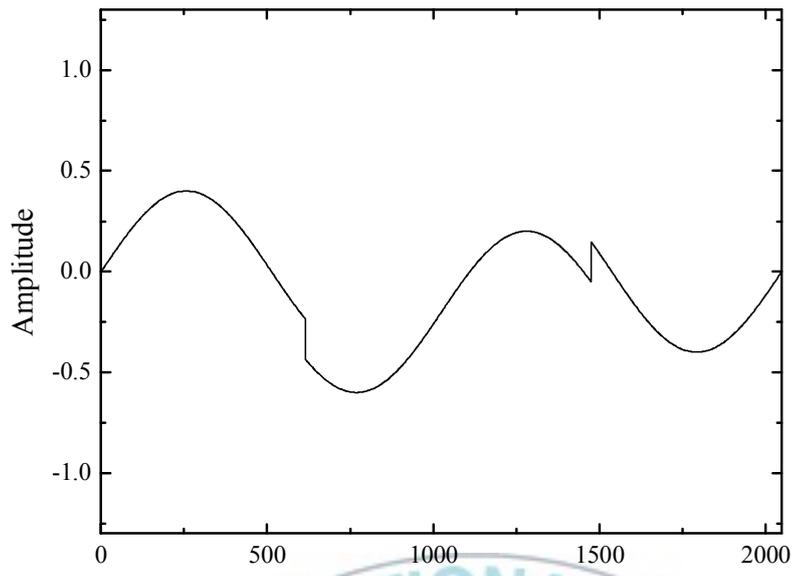
한편 그림 5.3(f)에서 그림 5.3(h)는 복합적으로 중첩된 노이즈 성분을 제거하여 신호를 복원하기 위해, 본 논문에서 제안된 알고리즘에 의한 결과들이다. 그림 5.3(f)는 PWA1 알고리즘에 의해 복원된 신호로서 19.83[dB]의 SNR을 나타내었으며, 그림 5.3(g)는 PWA2 알고리즘에 의한 결과로서 19.86[dB]의 SNR을 나타내었고, 그림 5.3(h)는 PWA3 알고리즘에 의한 결과로서 18.56[dB]의 SNR을 나타내었다.

표 5.2는 복합적인 노이즈에 의해 훼손된 noisy 신호의 SNR이 9.16[dB]일 경우에 시뮬레이션된 HeaviSine 신호의 SNR을 비교한 것이다.

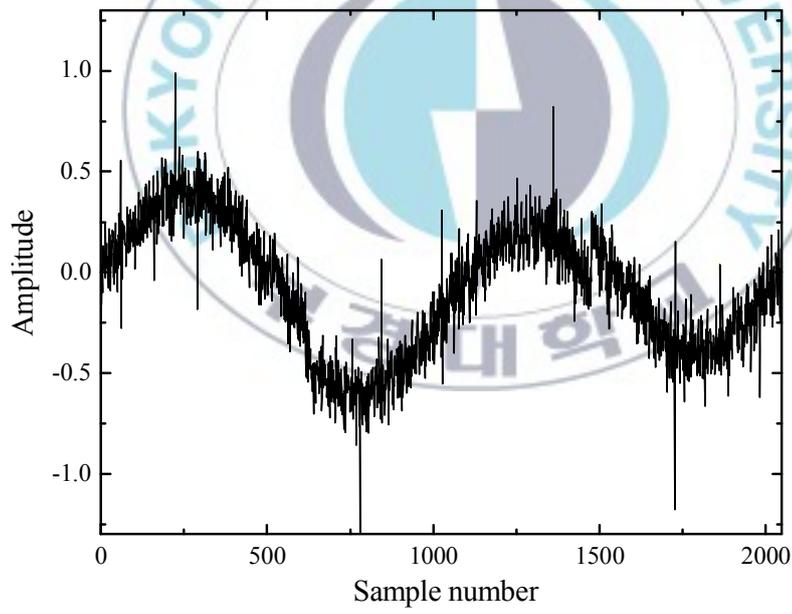
그리고 그림 5.3의 결과로부터, 기존의 알고리즘들은 Blocks 신호에 대한 시뮬레이션 결과와 유사하게 많은 노이즈 성분들이 제거되지 않았으나, 본 논문에서 제안된 알고리즘들은 HeaviSine 신호에 대해서도 기존의 알고리즘들 보다 우수한 에지 보존 성능과 복합적인 노이즈 제거 성능을 나타내었으며, 특히 PWA2 알고리즘이 가장 우수한 결과를 나타내었다.

Table 5.2. SNR comparison of HeaviSine signal at SNR 9.16[dB]

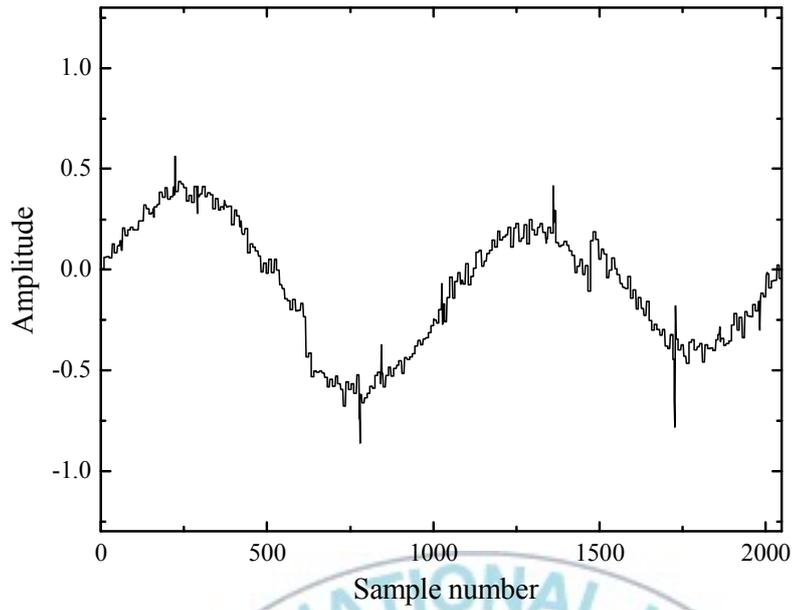
SNR _{in} [dB]	SNR _{out} [dB]					
	OWT	SSNF	UDWT	PWA1	PWA2	PWA3
9.16(10)	17.24	15.78	16.21	19.83	19.86	18.56



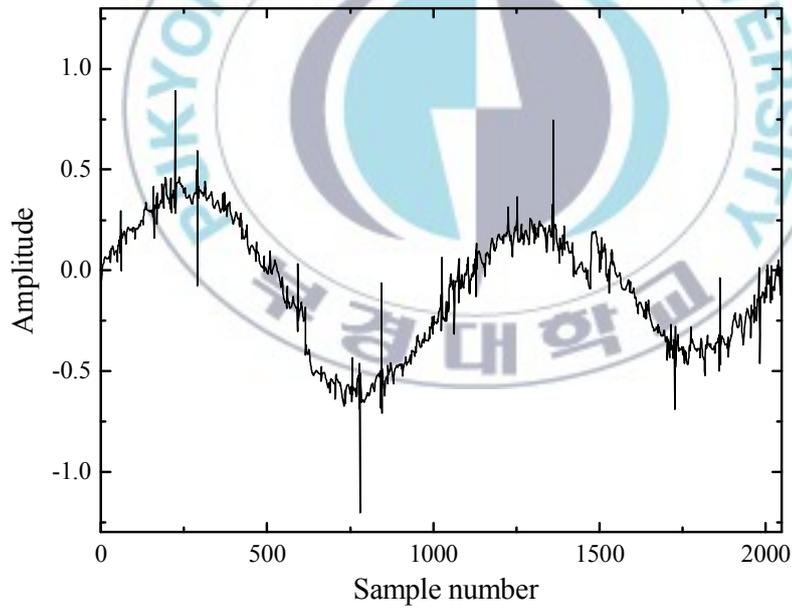
(a) True HeaviSine



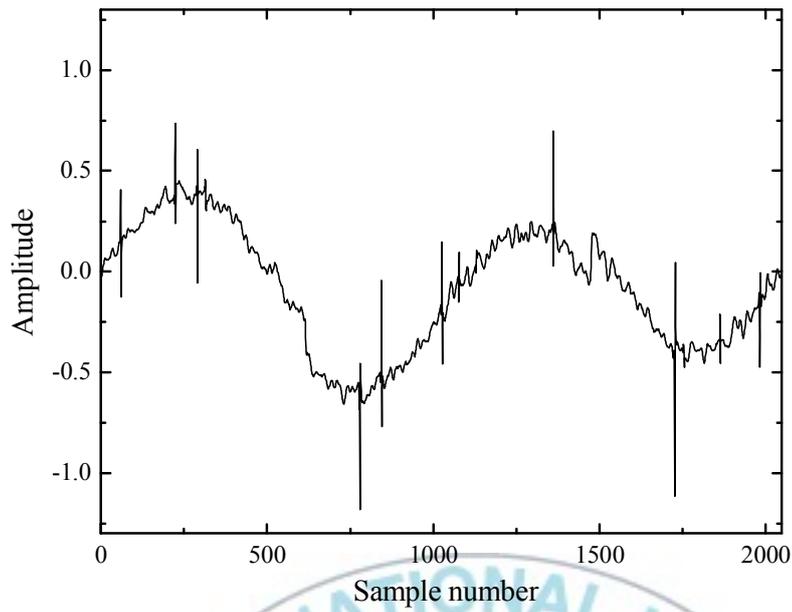
(b) Noisy HeaviSine (SNR = 9.16[dB])



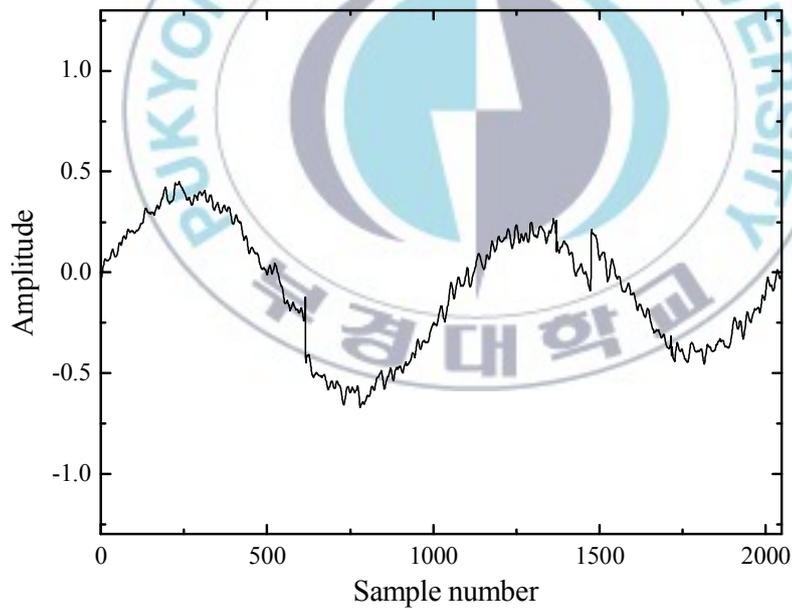
(c) Denoising result by OWT algorithm (SNR = 17.24[dB])



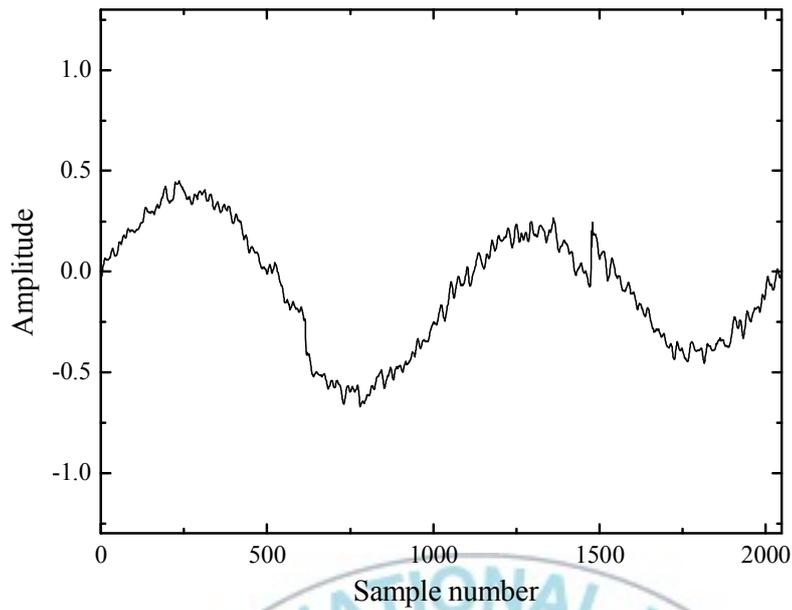
(d) Denoising result by SSNF algorithm (SNR = 15.78[dB])



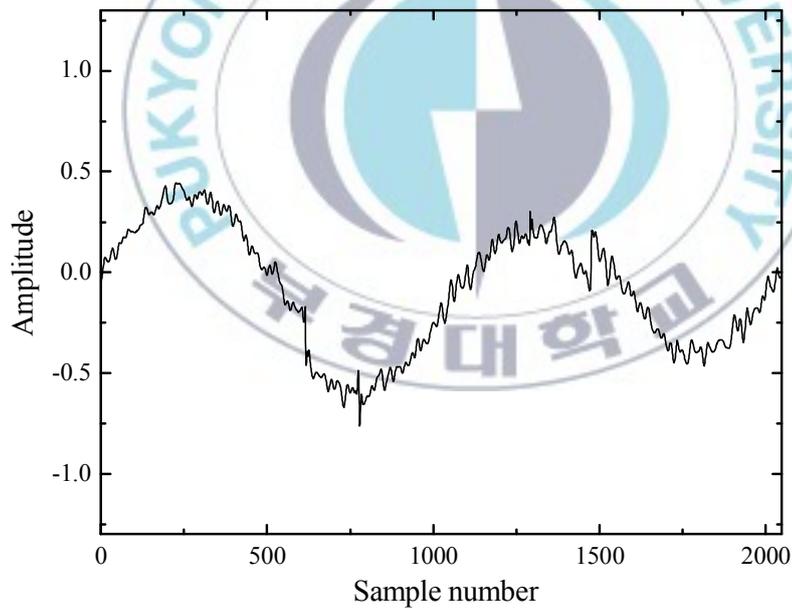
(e) Denoising result by UDWT algorithm (SNR = 16.21[dB])



(f) Denoising result by PWA1 algorithm (SNR = 19.83[dB])



(g) Denoising result by PWA2 algorithm (SNR = 19.86[dB])



(h) Denoising result by PWA3 algorithm (SNR = 18.56[dB])

Fig. 5.3. Denoising results for HeaviSine signal.

5.3 제안된 알고리즘의 특성 비교

그림 5.4와 그림 5.5는 각각의 알고리즘들에 의해 복원된 신호에 대한 SNR을 비교한 것으로서, 이때 그림 5.1의 임펄스 노이즈와 SNR 0[dB]에서 20[dB]까지의 AWGN이 복합적으로 중첩되었다.

먼저, 그림 5.4는 Blocks 신호에 대한 시뮬레이션 결과로서, 기존의 웨이브렛 기반 알고리즘인 OWT, SSNF, UDWT 알고리즘과 본 논문에서 제안된 웨이브렛 기반 알고리즘인 PWA1, PWA2, PWA3 알고리즘의 결과를 비교한 것이다. 그림으로부터, 기존의 알고리즘은 임펄스 노이즈에 비해 AWGN이 큰 영향을 나타내는 낮은 SNR 영역에서는 UDWT 알고리즘에 의한 결과가 상대적으로 높은 SNR을 나타내었으며, AWGN에 비해 임펄스 노이즈의 크기가 큰 높은 SNR 영역에서는 SSNF 및 OWT가 좀 더 향상된 결과를 보이고 있다. 이러한 결과는 낮은 SNR 영역에서는 AWGN의 크기가 임펄스 노이즈의 크기와 유사하거나 큰 경우로서, 이때 임펄스 노이즈는 AWGN으로서 간주되므로, UDWT가 좀 더 향상된 결과를 보이지만, 높은 SNR 영역에서는 임펄스 노이즈가 AWGN 보다 큰 값을 나타내어 명확하게 분리되고, 예지로서 판단됨에 따라 UDWT의 성능은 급격히 저하하게 된다. 그리고 SNR 10[dB]의 AWGN과 임펄스 노이즈가 복합적으로 중첩된 9.11[dB]의 노이즈 환경에서, OWT의 SNR_{out} 은 16.19[dB]이며, SSNF의 SNR_{out} 은 16.51[dB], UDWT의 SNR_{out} 은 15.74[dB]를 나타내어, 각각 7.08[dB], 7.41[dB], 6.63[dB] 개선되었다.

한편, 본 논문에서 제안된 웨이브렛 기반의 세 알고리즘은 모두 신호의 예지 성분과 복합적인 노이즈 성분을 명확하게 분리하여 제거함에 따라, 동일한 노이즈 환경에서 PWA1의 SNR_{out} 은 19.49[dB], PWA2의 SNR_{out} 은 19.71[dB], PWA3의 SNR_{out} 은 17.94[dB]를 나타내어, 각각 10.38[dB], 10.60[dB], 8.83[dB] 개선되었다. 이와 같이, 본 논문에서 제안된 알고리즘은 모든 SNR 영역에서 기존의 알고리즘들 보다 우수한 SNR 특성을 나타내었으며, 특히 PWA2는 오차함수의 분포특성을 이용하여 임계값이 국부영역에서 적응적으로 변화함에 따라, 가장 우수한 성능을 나타내었다.

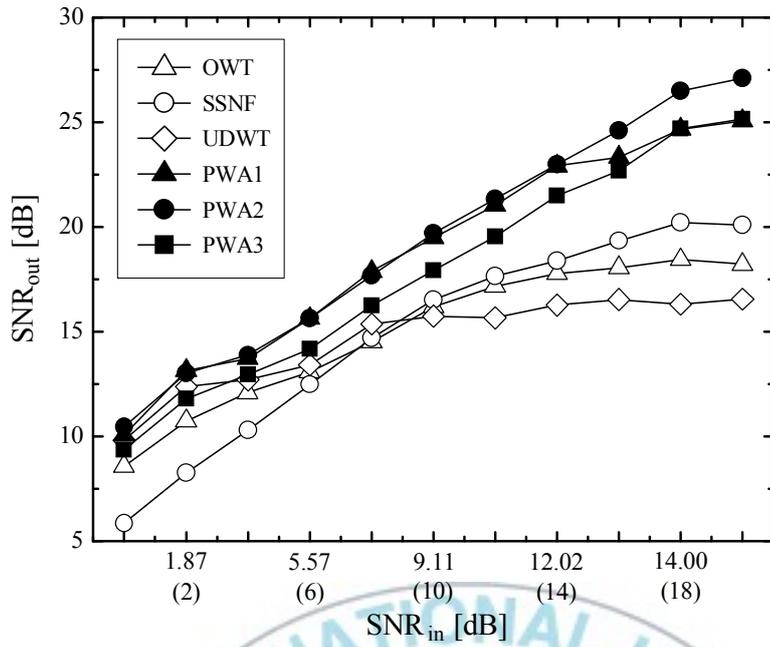


Fig. 5.4. SNR of Blocks signal.

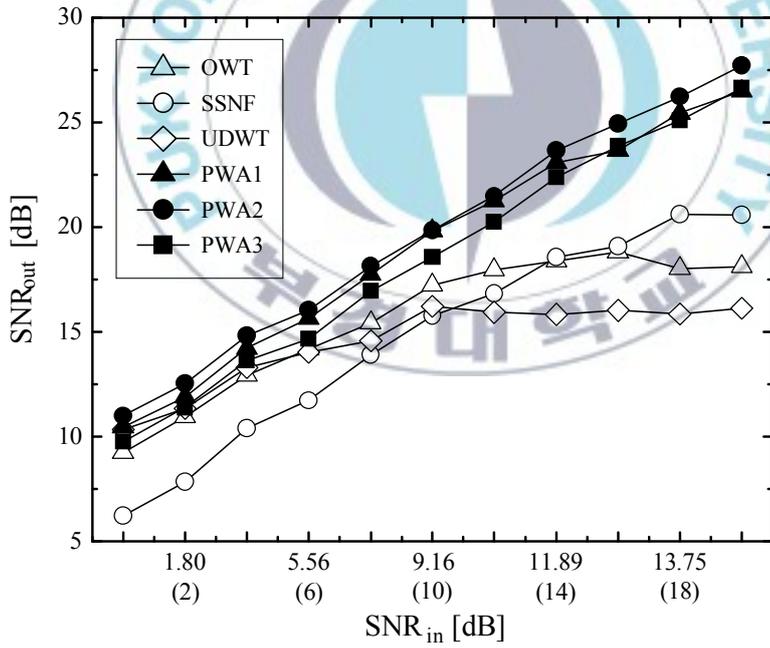


Fig. 5.5. SNR of HeaviSine signal.

Table 5.3. SNR of the Blocks signal reconstructed from a mixed noise environment

SNR _{in} [dB]	SNR _{out} [dB]					
	OWT	SSNF	UDWT	PWA1	PWA2	PWA3
-0.03(0)	8.57	5.85	9.81	10.05	10.46	9.37
1.87(2)	10.74	8.28	12.36	13.14	13.02	11.80
3.82(4)	12.10	10.31	12.70	13.73	13.88	12.95
5.57(6)	13.07	12.48	13.42	15.63	15.64	14.18
7.47(8)	14.50	14.71	15.37	17.88	17.69	16.25
9.11(10)	16.19	16.51	15.74	19.49	19.71	17.94
10.56(12)	17.18	17.64	15.66	21.04	21.33	19.55
12.02(14)	17.77	18.40	16.27	22.91	23.00	21.49
13.23(16)	18.05	19.34	16.53	23.33	24.60	22.69
14.00(18)	18.43	20.20	16.31	24.66	26.49	24.68
14.87(20)	18.22	20.10	16.54	25.06	27.11	25.16

Table 5.4. SNR of the HeaviSine signal reconstructed from a mixed noise environment

SNR _{in} [dB]	SNR _{out} [dB]					
	OWT	SSNF	UDWT	PWA1	PWA2	PWA3
-0.05(0)	9.25	6.22	10.35	10.47	11.00	9.77
1.80(2)	10.93	7.85	11.34	11.90	12.54	11.39
3.78(4)	12.92	10.40	13.30	14.22	14.82	13.64
5.56(6)	14.17	11.73	14.03	15.64	16.04	14.68
7.27(8)	15.44	13.91	14.58	17.73	18.15	16.96
9.16(10)	17.24	15.78	16.21	19.83	19.86	18.56
10.59(12)	17.97	16.83	15.94	21.25	21.48	20.23
11.89(14)	18.37	18.55	15.84	23.09	23.65	22.37
13.02(16)	18.80	19.08	16.03	23.65	24.92	23.88
13.75(18)	18.03	20.60	15.85	25.44	26.23	25.08
14.53(20)	18.12	20.57	16.13	26.47	27.72	26.64

그림 5.5는 HeaviSine 신호에 대한 시뮬레이션 결과이다. 그림의 결과로부터, SNR 10[dB]의 AWGN과 임펄스 노이즈가 복합적으로 중첩된 9.16 [dB]의 노이즈 환경에서, OWT의 SNR_{out} 은 17.24[dB]이며, SSNF의 SNR_{out} 은 15.78[dB], UDWT의 SNR_{out} 은 16.21[dB]를 나타내어, 각각 8.08[dB], 6.62[dB], 7.05[dB] 개선되었다. 한편, 본 논문에서 제안된 웨이브렛 기반의 세 알고리즘에서, PWA1의 SNR_{out} 은 19.83[dB], PWA2의 SNR_{out} 은 19.86 [dB], PWA3의 SNR_{out} 은 18.56[dB]를 나타내어, 각각 10.68[dB], 10.70[dB], 9.40[dB] 개선되었다. 이와 같이, 본 논문에서 제안된 웨이브렛 기반의 세 알고리즘은 Blocks 신호와 유사하게, 모두 신호의 에지 성분과 복합적인 노이즈 성분을 명확하게 분리하여 제거함에 따라, 모든 SNR 영역에서 기존의 알고리즘들 보다 우수한 SNR 특성을 나타내었으며, 특히 PWA2가 모든 SNR 영역에서 가장 우수한 노이즈 제거 성능을 나타내었다.

그리고 표 5.3과 표 5.4는 그림 5.4와 그림 5.5의 결과를 수치로서 나타낸 것이다.

이러한 결과들로부터 제안된 알고리즘들 중에서, PWA1은 AWGN과 임펄스 노이즈에 대한 제거 성능이 우수한 반면, SNR 개선 특성은 PWA2와 PWA3 사이이다. 그리고 PWA2는 우수한 SNR 특성과 에지 보존 성능을 나타내는 반면, 알고리즘의 복잡성이 상대적으로 크다. 또한 PWA3는 임펄스 노이즈에 대한 제거 성능은 가장 우수하지만, 상대적으로 많은 AWGN을 에지로서 판단함에 따라 제안된 알고리즘들 중에서 가장 낮은 SNR 개선 특성을 나타내었다.

이와 같이, 본 논문에서 제안된 알고리즘들은 Blocks 신호와 HeaviSine 신호에 대한 모든 경우에 대해서, 신호의 에지 성분과 복합적인 노이즈 성분을 명확하게 분리하여 제거함에 따라, 기존의 알고리즘들 보다 우수한 SNR 특성을 나타내었으며, 특히 PWA2가 가장 우수한 노이즈 제거 성능을 나타내었다.

제6장 결 론

본 논문에서는 복잡한 노이즈 환경에서 신호를 복원하기 위해, 웨이브렛 기반의 개선된 노이즈 제거 알고리즘을 제안하였으며, 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘인 PWA1과 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘인 PWA2, 그리고 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍을 이용한 알고리즘인 PWA3가 있다.

먼저, 오차 분포함수의 변곡점을 이용한 알고리즘은 복잡한 노이즈 성분을 제거시키고, 신호의 에지 성분을 보존하기 위해, 오차함수의 히스토그램에 대한 평활화된 데이터로부터 피크값 이후의 첫 번째 변곡점을 임계값으로 설정하였다.

또한 웨이브렛 근사계수 기반의 분포특성을 이용한 알고리즘은 평균값과 정규화된 데이터 수를 이용하여 noisy 신호의 특성에 따라 적응적으로 임계값이 변화하도록 함에 따라, 신호의 에지 성분과 노이즈 성분에 대한 분리 특성을 더욱 향상시켰다.

그리고 half-sample delay 특성을 갖는 웨이브렛 쌍을 이용한 알고리즘은 두 개의 웨이브렛 쌍에 의해 얻어지는 계수가 근사적으로 half-sample delay 특성을 나타냄에 따라, 이러한 특성을 이용하여, 신호의 에지 성분과 임펄스 노이즈 및 AWGN을 제거하도록 하였다.

본 논문에서 제안된 이러한 알고리즘의 필터링 성능을 확인하기 위해, 테스트 신호로서 2048 [sample]의 peak-to-peak가 1인 Blocks 신호와 HeaviSine 신호를 사용하였으며, 0[dB]~20[dB]의 AWGN에 훼손된 신호에 각기 다른 크기와 부호, 지속시간을 갖는 임펄스 노이즈를 중첩하여 시뮬레이션 하였다. 이러한 결과들 중에서 SNR 10[dB]의 AWGN이 중첩된 경우, Blocks 신호에서는 OWT, SSNF, UDWT 알고리즘에 의해 각각 7.08 [dB], 7.41[dB], 6.63[dB] 개선되었으나, 본 논문에서 제안된 PWA1, PWA2, PWA3 알고리즘에 의해서는 각각 10.38[dB], 10.60[dB], 8.83[dB] 개선되었다. 그리고 HeaviSine 신호에 대한 시뮬레이션 결과에서는 OWT, SSNF, UDWT 알고리즘에 의해 각각 8.08[dB], 6.62[dB], 7.05[dB] 개선되었으나, 본 논문에서 제안된 PWA1, PWA2, PWA3 알고리즘에 의해서는 각각 10.68

[dB], 10.70[dB], 9.40[dB] 개선되었다.

시뮬레이션 결과로부터, 기존의 OWT 알고리즘은 subsampling에 의해 시각적으로 부드럽지 못한 결과를 보이고 있으며, SSNF 알고리즘은 두 scale 사이의 공간적 상관도를 이용하여 AWGN과 신호의 에지 성분을 분리하여 제거함에 따라, 에지 성분에 대한 보존 성능은 우수하지만 복합적인 노이즈 환경에서는 여전히 많은 임펄스 노이즈와 AWGN이 에지로서 판단되어 보존되고 있다. 또한 UDWT 알고리즘은 OWT와 SSNF 알고리즘보다 우수한 AWGN 제거 성능을 나타내지만, 모든 임펄스 노이즈 성분이 제거되지 않고 에지로서 판단됨에 따라, 복합적인 노이즈 환경에서는 기존의 알고리즘들에서 가장 큰 성능 저하를 나타내었다.

그러나 본 논문에서 제안된 알고리즘은 복합적인 노이즈 환경에서, 에지 보존뿐만 아니라, AWGN 및 임펄스 노이즈 제거 성능에서도 기존의 모든 알고리즘 보다 우수한 결과를 나타내었다. 본 논문의 알고리즘들에서, PWA1은 AWGN과 임펄스 노이즈에 대한 제거 성능이 우수한 반면, SNR 개선 특성은 PWA2와 PWA3 사이이다. 그리고 PWA2는 우수한 SNR 특성과 에지 보존 성능을 나타내는 반면, 알고리즘의 복잡성이 상대적으로 크다. 또한 PWA3는 임펄스 노이즈에 대한 제거 성능은 가장 우수하지만, 상대적으로 많은 AWGN을 에지로서 판단함에 따라 제안된 알고리즘들 중에서 가장 낮은 SNR 개선 특성을 나타내었다.

즉, 본 논문에서 제안된 알고리즘들은 SNR 특성 및 알고리즘의 복잡성, 그리고 신호의 에지 성분에 대한 보존과 AWGN 및 임펄스 노이즈에 대한 제거 성능과 같은 각기 다른 영역에서 상대적으로 우수한 특성을 나타내고 있으므로, 프로세서의 성능과 노이즈 제거 및 에지 보존의 측면 등을 고려하여 알고리즘을 선택적으로 적용할 수 있다.

이와 같이, 본 논문에서 제안된 웨이브렛 기반의 새로운 노이즈 제거 알고리즘들이 에지 보존뿐만 아니라 복합적인 노이즈 제거 측면에서 기존의 알고리즘들 보다 우수한 특성을 나타냄에 따라, 센서시스템을 비롯한 많은 산업현장과 신호처리의 여러 응용분야에서 다양한 형태의 노이즈를 제거하여 신호를 복원하기 위해 유용하게 적용될 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] P. Premaratne and I. Burnett, "Role of wavelet transforms in image restoration", Proceedings of IEEE TENCON 2004, pp. 243-246, 2004.
- [2] D. Gabor, "Theory of communications", J. IEE, vol. 93, no. 26, pp. 429-457, Nov. 1946.
- [3] L. Durak and O. Arikan, "Short-time Fourier transform: two fundamental properties and an optimal implementation", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 5, pp. 1231-1242, May 2003.
- [4] P. L. Ainsleigh and C. K. Chui, "A B -wavelet-based noise-reduction algorithm", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, no. 5, pp. 1279-1284, May 1996.
- [5] D. L. Donoho, "De-noising by soft-thresholding", IEEE Transactions on Information Theory, vol. 41, no. 3, pp. 613-627, May 1995.
- [6] D. L. Donogh and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", Journal of the American Statistical Association, vol. 90, no. 432, pp. 1200-1224, Dec. 1995.
- [7] Q. Pan, L. Zhang, G. Dai, and H. Zhang, "Two denoising methods by wavelet transform", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 12, pp. 3401-3406, Dec. 1999.
- [8] J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright, and E. P. Simoncelli, "Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain", IEEE Transactions on Image Processing, vol. 12, no. 11, pp. 1338-1351, Nov. 2003.
- [9] P. Kewu and J. C. Kieffer, "Embedded image compression based on wavelet pixel classification and sorting", IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 8, pp. 1011-1017, Aug. 2004.
- [10] L. Eren and M. J. Devaney, "Bearing damage detection via wavelet

- packet decomposition of the stator current", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 53, no. 2, pp. 431-436, Apr. 2004.
- [11] I. P. Tsoumas, G. Georgoulas, E. D. Mitronikas, and A. N. Safacas, "Asynchronous machine rotor fault diagnosis technique using complex wavelet", IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 23, no. 2, pp. 444-459, June 2008.
- [12] K. Hayat, W. Puech, and G. Gesquiere, "Scalable 3-D terrain visualization through reversible JPEG2000-based blind data hiding", IEEE Transactions on Multimedia, vol. 10, no. 7, pp. 1261-1276, Nov. 2008.
- [13] G. Pan, J. Y. Lin, and G. Cheng, "Wavelet based deconvolution algorithm for time-domain near-field ISAR imaging", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 55, no. 7, pp. 2013-2021, July, 2007.
- [14] O. V. Michailovich and A. Tannenbaum, "Despeckling of medical ultrasound images", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, vol. 53, no. 1, pp. 64-78, Jan. 2006.
- [15] Z. Li, C. P. Jansen, S. Marsch, M. Unser, and P. R. Hunziker, "Four-dimensional wavelet compression of arbitrarily sized echocardiographic data", IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 21, no. 9, pp. 1179-1187, Sept. 2002.
- [16] P. Carre and C. Fernandez-Maloigne, "Undecimated wavelet shrinkage estimate of the 1D and 2D spectra", Proceedings of the Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. on IEEE International Conference, vol. 4, pp. 2310-2313, 2000.
- [17] P. Carre, H. Leman, C. Fernandez-Maloigne, and C. Marque, "Denoising of the uterine EHG by an undecimated wavelet transform", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 45,

- no. 9, pp. 1104–1113, Sept. 1998.
- [18] Y. Xu, J. B. Weaver, D. M. Healy, and J. Lu, "Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, no. 6, pp. 747–758, Nov. 1994.
- [19] J. E. Fowler, "The redundant discrete wavelet transform and additive noise", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 9, pp. 629–632, Sept. 2005.
- [20] I. W. Selesnick, "The design of approximate hilbert transform pairs of wavelet bases", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 5, pp. 1144–1152, May 2002.
- [21] W. T. Freeman and E. H. Adelson, "The design and use of steerable filters", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, no. 9, pp. 891–906, Sept. 1991.
- [22] I. W. Selesnick, "Hilbert transform pairs of wavelet bases", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 8, no. 6, pp. 170–173, Jun 2001.
- [23] R. M. Rao and A. S. Bopardikar, *Wavelet transforms: Introduction to theory and applications*, Addison-Wesley, 1998.
- [24] G. R. Arce and J. L. Paredes, "Recursive weighted median filters admitting negative weights and their optimization", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 3, pp. 768–779, Mar. 2000.
- [25] M. Barni, F. Buti, F. Bartolini, and V. Cappellini, "A quasi-Euclidean norm to speed up vector median filtering", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 10, pp. 1704–1709, Oct. 2000.
- [26] S. Perreault and P. Hebert, "Median filtering in constant time", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 9, pp. 2389–2394, Sept. 2007.
- [27] P. S. Windyga, "Fast impulsive noise removal", *IEEE Transactions*

- on Image Processing, vol. 10, no. 1, pp. 173-179, Jan. 2001.
- [28] K. K. Shyu and C. Y. Chang, "Modified FIR filter with phase compensation technique to feedforward active noise controller design", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 47, no. 2, pp. 444-453, Apr. 2000.
- [29] T. Tanaka, "A direct design of oversampled perfect reconstruction FIR filter banks", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 8, pp. 3011-3022, Aug. 2006.
- [30] A. P. Liavas and P. A. Regalia, "Acoustic echo cancellation: do IIR models offer better modeling capabilities than their FIR counterparts?", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 46, no. 9, pp. 2499-2504, Sept. 1998.
- [31] P. A. Naylor, O. Tanrikulu, and A. G. Constantinides, "Subband adaptive filtering for acoustic echo control using allpass polyphase IIR filterbanks", IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 6, no. 2, pp. 143-155, Mar. 1998.
- [32] M. T. Hanna, "Multiple signal extraction by multiple interference attenuation in the presence of random noise in seismic array data", IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 7, pp. 1683-1694, July 2003.
- [33] Y. Shao and C. H. Chang, "A generalized time-frequency subtraction method for robust speech enhancement based on wavelet filter banks modeling of human auditory system", IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Part B, vol. 37, no. 4, pp. 877-889, Aug. 2007.
- [34] L. Coppola, Qian Liu, S. Buso, D. Boroyevich, and A. Bell, "Wavelet transform as an alternative to the short-time Fourier transform for the study of conducted noise in power electronics", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 55, no. 2, pp. 880-887, Feb. 2008.

- [35] H. Rabbani, M. Vafadust, P. Abolmaesumi, and S. Gazor, "Speckle noise reduction of medical ultrasound images in complex wavelet domain using mixture priors", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 55, no. 9, pp. 2152-2160, Sept. 2008.
- [36] P. Scheunders, "Wavelet thresholding of multivalued images", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 475-483, Apr. 2004.
- [37] X. P. Zhang and M. D. Desai, "Adaptive denoising based on SURE risk", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 10, pp. 265-267, Oct. 1998.
- [38] S. G. Chang, B. Yu, and M. Vetterli, "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 9, pp. 1532-1546, Sept. 2000.
- [39] M. Malfait and D. Roose, "Wavelet-based image denoising using a markov random field *a priori* model", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, no. 4, pp. 549-565, Apr. 1997.
- [40] M. Bahoura and J. Rouat, "Wavelet speech enhancement based on the Teager energy operator", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 8, no. 1, pp. 10-12, Jan. 2001.
- [41] 이승훈, 윤동한, 웨이브렛 변환 이론 및 적용, 보성각, 2004.
- [42] 김충락, 송현중, 장대홍, 홍창근, 웨이브렛의 기본이론과 통계에의 응용, 아르케, 1999.
- [43] 최병선, Wavelet 해석, 세경사, 2001.
- [44] 문홍득, 강경덕, 배상범, 김남호, "평균 및 위너 필터를 사용한 영상 복원에 관한 연구", *한국해양정보통신학회논문지*, 제8권, 제7호, pp. 1393-1398, 2004.
- [45] 배상범, 김남호, "개선된 에지검출 특성을 위한 웨이브렛 함수에 관한 연구", *한국해양정보통신학회논문지*, 제11권, 제6호, pp. 1156-1161, 2007.

감사의 글

학문의 길에 발을 내딛은 후로부터 지금까지 부모님의 심정으로 저를 가르치고 인도해 주신 지도교수님이신 김남호 교수님께 진심으로 감사드리며, 교수님께서 사랑으로 가르쳐 주신 그 모든 것을 영원히 간직할 것입니다.

바쁘신 와중에도 불구하고 본 논문의 심사를 맡으시면서 좋은 논문이 될 수 있도록 세심한 관심과 정성어린 지도를 아끼지 않으셨던 김태효 교수님, 박영석 교수님, 황용연 교수님, 김만고 교수님께 깊이 감사드립니다. 그리고 학부시절부터 지금까지 언제나 희망과 용기를 북돋아 주시고, 많은 격려와 충고를 아끼지 않으신 이형기 교수님, 최연욱 교수님, 변기식 교수님, 안영주 교수님, 이경창 교수님께 감사드립니다.

또한 언제나 굳은 심지로 열정적인 인생을 설계하고 계신 강경덕 선배님을 비롯하여, 저의 버팀목이 되어 주신 김승영 선배님, 동기인 김남수, 강부경, 후배 임재환, 구분석, 이상준, 문홍득, 서현수, 노현용, 김파, 김욱, 이경효, 김국승에게 감사의 말을 전하며, 그 동안 M&DSP 연구실에서 함께 했던 그 모든 추억들이 인생의 한 장면 한 장면이 되어 제 삶의 밑거름이 될 것입니다.

아울러, 긴 세월 제가 돌아갈 수 있는 추억의 보금자리를 끝까지 지켜주고 있는 친구 김광수, 명성완, 정재훈, 박종명, 김호산, 김호택 그리고 힘들고 지칠 때면 항상 휴식 같은 친구가 되어 준 신용진, 김순웅, 박갑철, 조환균, 김은미에게 미안하다는 말과 감사하다는 말을 함께 전하며, 그 외에 미처 이름을 다 밝히지 못한 많은 분들께도 감사드립니다.

현재의 제가 있기까지 따뜻한 정성으로 보살피 주신 장인어른, 장모님 그리고 항상 저희 가족에게 큰 힘이 되어 주시고 넓은 마음으로 가족들을 보살피시는 처남 내외분, 가족의 의미를 일깨워 주시고 편안한 안식처가 되어 주신 처형, 처제 내외분께도 머리 숙여 감사드립니다.

어느덧 세 아이의 아빠가 되어 가장으로서, 든든한 아들로써, 형보다 나은 동생으로서 열심히 살아가고 있는 사랑하는 동생과 가족의 대소사에 헌신적이면서도 상냥한 제수씨에게 항상 고마웠다는 말을 전하고 싶습니다.

끝으로, 아들 노릇 제대로 못한 저에게 항상 인자하신 모습으로 지켜봐주신 제가 세상에서 가장 존경하는 아버지와 모든 것을 다 퍼주시고도 밤이나 낮이나 자식 잘 되기만을 바라며 고생하시는 어머니, 지난 17년 동안 묵묵히 인내와 정성으로 저를 믿고 따라와 준, 몇 번을 태어나도 다시 결혼하고 싶은 사랑하는 아내, 가족의 사랑을 받고 건강하게 자라고 있는 사랑하는 아들 윈빈이와 딸 해진이에게 감사와 사랑의 말을 전하며, 저의 미약한 재능으로 완성한 이 한편의 작은 결실을 바칩니다.

2009년 12월
배 상 범 올림