



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시, 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리, 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지, 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교육학 석사 학위논문

복의 진동모드에 대한
이론적 고찰



2008년 8월

부경대학교 교육대학원

물리교육전공

김지향

교육학석사 학위논문

복의 진동모드에 대한
이론적 고찰

지도교수 김성부

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2008년 8월

부경대학교 교육대학원

물리교육전공

김지향

김지향의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2008 년 8 월 27 일



주심 이학박사 홍 지 상 (인)

위원 이학박사 이 종 규 (인)

위원 이학박사 김 성 부 (인)

<목 차>

목차.....	i
표목차.....	ii
그림목차.....	ii
Abstract.....	iv
I. 서론.....	1
II. 이론.....	4
III. $k = k_{mn}$ 진동자의 위치에 따른 모드변화.....	13
1. θ' 에 따른 모드변화.....	14
2. r' 에 따른 모드변화.....	21
3. 원형 북 진동모드의 적용.....	29
IV. $k \neq k_{mn}$ 일 때 북의 진동모드.....	31
1. $k = 19$ 일 때.....	32
2. $k = 41$ 일 때.....	35
3. $k = 45$ 이고 $m = 0$ 인 모드를 통한 식(57)의 검토.....	38
V. 결론.....	40
참고 문헌.....	42
부록.....	44

<표 목 차>

표1. 원형 북의 진동모드와 수소전자의 확률밀도 분포.....28

<그 립 목 차>

그림1. $m=0, \theta'=0$ 일 때 실험사진.....14
그림2. $m=0, \theta'=0$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$14
그림3. $m=0, \theta'=\pi/2$ 일 때 실험사진.....14
그림4. $m=0, \theta'=\pi/2$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$14
그림5. $m=1, \theta'=0$ 일 때 실험사진.....15
그림6. $m=1, \theta'=0$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$15
그림7. $m=1, \theta'=\pi/6$ 일 때 실험사진.....15
그림8. $m=1, \theta'=\pi/6$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$15
그림9. $m=1, \theta'=\pi/3$ 일 때 실험사진.....16
그림10. $m=1, \theta'=\pi/3$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$ 16
그림11. $m=1, \theta'=\pi/2$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$16
그림12. $m=1, \theta'=0$ 일 때 실험사진.....17
그림13. $m=2, \theta'=0$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$17
그림14. $m=2, \theta'=\pi/6$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$17
그림15. $m=2, \theta'=\pi/3$ 일 때 실험사진.....18
그림16. $m=2, \theta'=\pi/3$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$18
그림17. $m=2, \theta'=\pi/2$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$18
그림18. $m=0$ 일 때 북의 반지름 r 에 대한 $f(r)$21
그림19. (0, 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간.....21

그림20. (0, 1)모드에서 진동자 r' 의 위치에 따른 $f(r)$	22
그림21. $m=1$ 일 때 북의 반지름 r 에 대한 $f(r)$	24
그림22. (1, 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간.....	24
그림23. (1, 1)모드에서 진동자 r' 의 위치에 따른 $f(r)$	25
그림24. $m=2$ 일 때 북의 반지름 r 에 대한 $f(r)$	26
그림25. (2, 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간.....	26
그림26. (2, 1)모드에서 진동자 r' 의 위치에 따른 $f(r)$	27
그림27. $k=19, r'=0.05(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$	32
그림28. $\theta=\theta'$ 일 때 $m=0$ 에서 $m=5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$	32
그림29. $k=19, r'=0.10(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$	33
그림30. $\theta=\theta'$ 일 때 $m=0$ 에서 $m=5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$	33
그림31. $k=41, r'=0.05(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$	35
그림32. $\theta=\theta'$ 일 때 $m=0$ 에서 $m=5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$	35
그림33. $k=41, r'=0.10(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$	36
그림34. $\theta=\theta'$ 일 때 $m=0$ 에서 $m=5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$	36
그림35. $k=45, m=0$ 인 모드의 r 에 대한 $f(r)$	38
그림36. $k=45, m=0$ 인 모드의 r 에 대한 $f'(r)$	39

Theoretical study for the vibration modes of a drum

Ji-Hyang Kim

Graduate School of Education

Pukyong National University

Abstract

The vibration mode characteristics of a drum were analyzed using the Green's function method. In our experimental system, the drum was percussed by external vibrator at polar position (r', θ') .

The normal modes appeared on the drum in case of $k = k_{mn}$, and they were changed by the position of driving force (r', θ') . The maximum amplitude of the mode was also formed along the angle θ' . When the radius of driving position r' was changed, the amplitude of the mode was proportional to the value of Bessel function($J_m(kr')$). Therefore, the maximum amplitude appears where the value of $J_m(kr')$ is maximum.

If $k \neq k_{mn}$, the drum had abnormal modes with less amplitude than those of the normal modes. In this case, the shapes of these abnormal modes those became to be irregular with the position r' . However, we observed, that the amplitude of the modes was not changed by the position of driving force r' .

In conclusion, we propose that the systems explored in our studies can be utilized to describe the concepts of probability density and mode of wave formation in Quantum mechanics.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

중등학교 제 7차 교육과정에서 파동단원은 7학년 과정에 포함되어 있다. 과거에는 중학교가 아니라 고등학교 과정에서 다루었던 단원이다. 교육과정이 바뀌면서 파동의 중요성이 커져 중학교 1학년에 해당하는 7학년 과정에 포함시키게 된 것이다. 이렇다 보니 파동단원에 대한 교수-학습 자료를 찾아보기가 쉽지 않다. 또한 학생들의 이해도에 있어서도 다른 힘이나 전기와 자기 단원에 비해 떨어지는 것이 사실이다. 파동단원은 10학년으로 이어지고 또한 물리 1에서 본격적으로 다루어진다. 학생들은 물리 1에서 가장 이해하기 어렵고 생소한 단원은 파동단원이라고 대다수 학생들은 말하고 있다.

파동단원은 물리 1에서 학습하고 물리 2에 이어지는 원자단원에서 기본적인 개념들을 이해하고 학습하는 밑바탕이 된다. 그리고 보어의 수소원자모델, 수소원자의 전자 확률밀도에 대한 개념까지도 적용이 가능하다. 그러나 물질파로 설명되어지는 원자모델에 대한 개념적 설명이 추상적일 뿐만 아니라 이해하기가 매우 어렵다. 그래서 원자모형에 대한 형상화를 통해 좀 더 쉽게 이해시키려 노력하여 왔다. 그 결과 보어의 원자모형에 대한 형상화 실험 장치로 원형 줄을 이용한 역학적 정상파를 이용하는 것이 오늘날 보편화 되어 있다. 이 실험 장치는 에너지 준위를 포함한 여러 물리량들이 실제 원자모형과 상당한 차이를 보임에도 불구하고 원자모형의 개념적 이해를 증가시키는데 의미 있는 실험 장치로 인정받고 있다. 그러나 오늘날

의 수소 원자모형은 보어모델이 갖는 한계성 때문에 Schrödinger 파동방정식을 이용한 파동함수를 구함으로써 완벽하게 얻을 수 있다. 여기에는 3차원적 모드의 개념이 도입될 뿐만 아니라 각 모드의 진폭에 따른 전자를 발견할 확률밀도 개념이 도입된다.

본 논문에서는 북의 진동모드를 이용하여 수소원자의 각 모드별 확률밀도에 대한 개념적 설명이 가능함을 보여주고, 특히 왜 파동함수의 진폭이 가장 큰 곳에서 전자를 발견할 확률밀도가 가장 큰지를 보여주려 한다.

한편 이에 관한 연구는 수소원자의 전자구름 가시화에 대한 연구[3]가 이루어진바 있고 원형 북의 타격점 변화에 따른 진동모드에 관한 연구[7]도 이루어졌다. 실험으로 얻은 결과를 이론에 적용하여 보다 쉽게 설명하기 위한 연구들이다. 하지만 실제 실험결과들만 있을 뿐 실험결과들을 명확히 이론적으로 뒷받침해줄 근거가 마련되어 있지 않았다. 또한 학생들에게 모형이나 예를 제시하게 될 때에는 명확한 근거가 있는 방법들을 이용하여야 한다. 그렇지 않으면 오개념만 쌓이게 되고 큰 성과를 거두기는 어렵다. 이에 본 연구는 실험적 사실들은 뒷받침할 수 있는 이론적 근거를 마련하고자 한다.

2. 연구의 내용

수소원자의 전자구름 가시화에 대한 연구[3]에서는 원형 북의 진동면에 생기는 모드를 이용해 학생들에게 1s, 2s, 2p, ... 등과 같은 원자의 양자상태(물론 에너지 상태는 진동모드와는 서로 다르다)를 시각적으로 보여줄 수 있었다.

또한 원형 북의 타격점 변화에 따른 진동모드에 관한 연구[7]에서는 진동자의 위치 (r', θ') 에 따라 북의 진동모드가 어떻게 형성되는지를 실험하였다. 진동모드의 진폭이 가장 큰 지점에 진동자가 있을 때 그 모드가 가장 빨리 형성되고, 마디 지점에 있을 때는 그 모드가 형성되지 않음을 보임으로써 확률밀도에 관한 개념적 설명을 이 실험 장치를 통해 가능함을 확인할 수 있었다. 실험으로 얻어진 원형 북의 진동모드는 수소원자모형에 비유시킬 수 있었고 실제로 전자를 찾을 확률밀도가 가장 큰 곳을 시각화 할 수 있었다.

본 연구에서는 이론적으로 r' 의 위치에 진동자가 있을 때의 파동방정식을 Green 함수를 이용해 각 θ' 와 r' 의 위치에 따른 모드변화를 알고자 한다.

또한 동차파동방정식에서는 $k=k_{mn}$ 일 때만 모드가 형성되고 $k \neq k_{mn}$ 일 때는 모드가 형성되지 않는 것으로 알려져 있다. 그러나 $\vec{r}(r', \theta')$ 지점에 ω 의 진동수로 강제 진동시키는 진동원이 있을 때, 즉 비동차방정식에서 $k \neq k_{mn}$ 일 때의 모드 형성유무에 대하여 이론을 통해 알아보고 실험으로 확인해보고자 한다. MATLAB을 이용한 수치해석을 통해 이론적으로 구한 해들의 그래프를 그리고 그것을 실험 결과와 비교하여 설명하고자 한다.

II. 이론

반지름이 a 인 북의 원형 진동면 위에 ω 로 진동하는 진동자가 (r', θ') 지점에 있을 때 저항에 의한 감쇠가 무시되는 파동방정식은

$$\nabla^2 \psi + \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1)$$

이다. 여기서 파동함수 ψ 는 진동면의 진폭으로 $\psi(r, \theta, t) = \phi(r, \theta) e^{i\omega t}$ 로 둘 수 있다. 이로부터 시간독립 파동방정식을 구해보면

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2)$$

이 된다.

한편 Dirac delta 함수 $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ 은 r, θ 로 표현되는 2차원 원통형 좌표계에서

$$\iint \delta(\vec{r} - \vec{r}') da = 1 \quad (3)$$

이므로

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \quad (4)$$

이다.

따라서 시간독립 파동방정식은 최종적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \quad (5)$$

이제 $\delta(\theta - \theta')$ 와 $\delta(r - r')$ 을 원형 진동면위에서의 동차 방정식

$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0$ 과 경계조건을 만족하는 해로 표시 해보자.

식(5)에서 먼저 $\delta(\theta - \theta')$ 을

$$\delta(\theta - \theta') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\theta} \quad (6)$$

라고 두자. 식(6)의 양변에 $e^{-im\theta}$ 를 곱하여 적분하면

$$\int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta') e^{im\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{il\theta} e^{-im\theta} d\theta \quad (7)$$

와 같다. 여기서 C_m 은 아래와 같이 표시된다.

$$C_m = \frac{e^{-im\theta'}}{2\pi} \quad (8)$$

따라서 $\delta(\theta - \theta')$ 은 다음과 같다.

$$\delta(\theta - \theta') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-im\theta'}}{2\pi} e^{im\theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\theta - \theta')} \quad (9)$$

또한 식(5)에서 $\frac{1}{r}\delta(r - r')$ 을

$$\frac{1}{r}\delta(r - r') = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m(k_{mn}r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad m > -1 \quad (10)$$

으로 두면 Fourier Bessel Series에 의해서 b_{mn} 은

$$b_{mn} = \frac{2}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \int_0^a \frac{1}{r} \delta(r - r') J_m(k_{mn}r) r dr = \frac{2J_m(k_{mn}r')}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (11)$$

이다. 따라서 식(5)의 파동방정식은 아래 식으로 표시가능하다.

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{im(\theta - \theta')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_m(k_{mn}r') J_m(k_{mn}r)}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (12)$$

이제 식(12)의 해 ϕ 를 아래 식으로 두고

$$\phi = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \frac{1}{\pi} e^{im(\theta - \theta')} \frac{J_m(k_{mn}r') J_m(k_{mn}r)}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (13)$$

계수 d_{mn} 을 구하기 위해 이 식을 식(12)의 양변에 각각 대입하여 보자.

좌변은

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi + k_{mn}^2 \phi + (k^2 - k_{mn}^2) \phi \quad (14)$$

이고 우변은

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{J_m(k_{mn}r') J(k_{mn}r)}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (15)$$

이다. 좌변에서 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi + k_{mn}^2 \phi = 0$ 이므로 식(14)는

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (k^2 - k_{mn}^2) d_{mn} \frac{1}{\pi} e^{im(\theta-\theta')} \frac{J_m(k_{mn}r') J_m(k_{mn}r)}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (16)$$

이다. 식(15)와 식(16)을 비교해보면

$$d_{mn} = \frac{1}{k^2 - k_{mn}^2} \quad (17)$$

이 된다. 따라서 ϕ 는

$$\phi = - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(k_{mn}r') J(k_{mn}r)}{(k^2 - k_{mn}^2) a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (18)$$

이다. 이 해는 임의의 m 값에 대하여 Bessel 함수의 시리즈로 표시됨을 의미한다.

이제 시리즈로 표시된 이 함수를 연속 함수로 바꾸기 위하여

$\phi = - \sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} f(r)$ 로 두자. 그러면 Fourier Bessel Series에서

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} J_m(k_{mn}r) \quad (19)$$

로 둘 수 있고 c_{mn} 은 아래 식으로 표시된다.

$$c_{mn} = \frac{2}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \int_0^a f(r) J_m(k_{mn}r) r dr = \frac{J_m(k_{mn}r')}{\pi(k^2 - k_{mn}^2) a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \quad (20)$$

연속함수 $f(r)$ 은 k 에 관한 함수이고, 동시에 북의 진동면의 경계조건 ($r=a$ 에서 $f(a)=0$)을 만족하여야 하므로 다음과 같이 두어보자.

$$f(r) = b J_m(kr_{<}) [J_m(ka) H_m(kr_{>}) - J_m(kr_{>}) H_m(ka)] \quad (21)$$

위의 식은 조건에 따라서

$$f(r) = b J_m(kr) [J_m(ka) H_m(kr') - J_m(kr') H_m(ka)] , \text{ for } r < r' \quad (22)$$

$$f(r) = b J_m(kr') [J_m(ka) H_m(kr) - J_m(kr) H_m(ka)] , \text{ for } r > r' \quad (23)$$

로 표시됨을 의미한다. 그리고 $r=r'$ 일 때 두식은 동일한 값을 갖는다. 이제 $f(r)$ 의 계수 b 를 구하기만 하면 된다. $f(r)$ 을 식(20)에 대입하여 계산하면

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \frac{2b}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \int_0^a J_m(kr_{<}) [J_m(ka) H_m(kr_{>}) - J_m(kr_{>}) H_m(ka)] J_m(k_{mn}r) r dr \\ &= \frac{2b}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} [[J_m(ka) H_m(kr') - J_m(kr') H_m(ka)] \int_0^{r'} J_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr \\ &\quad + J_m(kr') J_m(ka) [\int_{r'}^a J_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr + i \int_{r'}^a N_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr] \\ &\quad - J_m(kr') H_m(ka) \int_{r'}^a J_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr] \end{aligned} \quad (24)$$

이다.

여기서 A, B, C를 다음과 같이 두자.

$$A = \int_0^{r'} J_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr \quad (26)$$

$$B = \int_{r'}^a J_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr \quad (27)$$

$$C = i \int_{r'}^a N_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr \quad (28)$$

먼저 A의 값을 구하기 위하여 아래의 Bessel 방정식들을 이용하자.

$$r \frac{\partial^2 J_m(kr)}{\partial r^2} + \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} + (k^2 r - \frac{m^2}{r}) J_m(kr) = 0 \quad (29)$$

$$r \frac{\partial^2 J_m(k_{mn}r)}{\partial r^2} + \frac{\partial J_m(k_{mn}r)}{\partial r} + (k_{mn}^2 r - \frac{m^2}{r}) J_m(k_{mn}r) = 0 \quad (30)$$

식(29)와 식(30)에 각각 $J_m(kr)$ 과 $J_m(k_{mn}r)$ 을 곱해서 빼고, 이를 0에서 r' 까지 적분을 취하면,

$$A = \frac{1}{k^2 - k_{mn}^2} \left[\int_0^{r'} J_m(kr) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_m(k_{mn}r)}{\partial r} \right) dr - \int_0^{r'} J_m(k_{mn}r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} \right) dr \right] \quad (31)$$

이 된다. 식(31)의 적분 값은 부분적분들을 이용하여 정리하면 아래 식을 얻게 된다.

$$A = \frac{r'}{k^2 - k_{mn}^2} \left[(k_{mn} J_m'(k_{mn}r') J_m(kr') - k J_m(k_{mn}r') J_m'(kr')) \right] \quad (32)$$

이다. 여기서 $J_m'(k_{mn}r')$, $J_m'(kr')$ 은 $\frac{\partial J_m(k_{mn}r)}{\partial(k_{mn}r)}|_{r=r'}$ 과 $\frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)}|_{r=r'}$ 이고, 이

후에도 이 기호는 동일하게 적용된다.

B를 A와 동일한 방법으로 적분하면,

$$\begin{aligned} B &= \int_{r'}^a J_m(kr) J_m(k_{mn}r) r dr \\ &= \frac{1}{k^2 - k_{mn}^2} \left[\int_{r'}^a J_m(kr) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_m(k_{mn}r)}{\partial r} \right) dr - \int_{r'}^a J_m(k_{mn}r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} \right) dr \right] \quad (33) \end{aligned}$$

이고 적분한 결과는 다음과 같다.

$$B = \frac{1}{k^2 - k_{mn}^2} [(k_{mn} a J_m(ka) J_m'(k_{mn} a) + kr' J_m(k_{mn} r') J_m'(kr') - k_{mn} r' J_m(kr') J_m'(k_{mn} r')] \quad (34)$$

C 의 값을 구하기 위하여 같은 방법으로 아래의 Bessel 방정식들을 이용하면,

$$r \frac{\partial^2 N_m(kr)}{\partial r^2} + \frac{\partial N_m(kr)}{\partial r} + (k^2 r - \frac{m^2}{r}) N_m(kr) = 0 \quad (35)$$

$$r \frac{\partial^2 J_m(k_{mn} r)}{\partial r^2} + \frac{\partial J_m(k_{mn} r)}{\partial r} + (k_{mn}^2 r - \frac{m^2}{r}) J_m(k_{mn} r) = 0 \quad (36)$$

식(35)와 식(36)에 각각 $N_m(kr)$ 와 $J_m(k_{mn} r)$ 을 곱해서 빼고, 이를 r' 에서 부터 a 까지 적분하면,

$$\frac{C}{i} = \int_{r'}^a N_m(kr) J_m(k_{mn} r) r dr \quad (37)$$

$$= \frac{1}{k^2 - k_{mn}^2} [\int_{r'}^a N_m(kr) \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial J_m(k_{mn} r)}{\partial r}) dr - \int_{r'}^a J_m(k_{mn} r) \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial N_m(kr)}{\partial r}) dr] \quad (38)$$

이고 따라서 C 는

$$C = \frac{i}{k^2 - k_{mn}^2} [(k_{mn} a N_m(ka) J_m'(k_{mn} a) - k_{mn} r' N_m(kr') J_m'(k_{mn} r') + kr' J_m(k_{mn} r') N_m'(kr')] \quad (39)$$

이 된다. 식(25)에 A , B 와 C 를 대입하면

$$c_{mn} = \frac{2b}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn} a)]^2} [i J_m(ka) N_m(kr') A - i J_m(kr') N_m(ka) A + J_m(kr') J_m(ka) C - i J_m(kr') N_m(ka) B] \quad (40)$$

$$= \frac{2b}{a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2} \alpha \quad (41)$$

이다. 여기서 α 를 계산하면

$$\alpha = \frac{i}{k^2 - k_{mn}^2} [kr' \{J_m(kr')J_m(ka)J_m(k_{mn}r')N_m'(kr') - J_m(k_{mn}r)J_m'(kr')J_m(ka)N_m(kr')\}] \quad (42)$$

이고

$$\alpha = \frac{iJ_m(ka)J_m(k_{mn}r')}{k^2 - k_{mn}^2} kr' [J_m(kr')N_m'(kr') - J_m'(kr')N_m(kr')] \quad (43)$$

이다. Bessel함수에 대한 Wronskian 공식에 의해

$$\alpha = \frac{i2J_m(ka)J_m(k_{mn}r')}{\pi(k^2 - k_{mn}^2)} \quad (44)$$

이 된다. 식(44)를 식(41)에 대입해 보면

$$c_{mn} = i \frac{4bJ_m(ka)J_m(k_{mn}r')}{\pi a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2 (k^2 - k_{mn}^2)} \quad (45)$$

이 된다. 식(45)는 식(20)의 우변과 같아야 하므로

$$c_{mn} = i \frac{4bJ_m(ka)J_m(k_{mn}r')}{\pi a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2 (k^2 - k_{mn}^2)} = \frac{J_m(k_{mn}r')}{\pi a^2 [J_{(m+1)}(k_{mn}a)]^2 (k^2 - k_{mn}^2)} \quad (46)$$

이고 따라서 b 는 다음과 같다.

$$b = \frac{1}{4iJ_m(ka)} \quad (47)$$

Bessel 시리즈에 대한 단일함수 $f(r)$ 은 식(47)을 식(21)에 대입해보면

$$f(r) = \frac{1}{4iJ_m(ka)} J_m(kr_{<}) [J_m(ka)H_m(kr_{>}) - J_m(kr_{>})H_m(ka)] \quad (48)$$

식(48)에서 $H_m = J_m + iN_m$ 을 대입해서 정리하면

$$f(r) = \frac{J_m(kr_{<})}{4J_m(ka)} [J_m(ka)N_m(kr_{>}) - J_m(kr_{>})N_m(ka)] \quad (49)$$

이다. 이를 구간별로 나누어 정리하면 다음 식들로 표시된다.

$$f(r) = \frac{J_m(kr)}{4J_m(ka)} [J_m(ka)N_m(kr') - J_m(kr')N_m(ka)], \quad \text{for } r < r' \quad (50)$$

$$f(r) = \frac{J_m(kr')}{4J_m(ka)} [J_m(ka)N_m(kr) - J_m(kr)N_m(ka)], \quad \text{for } r > r' \quad (51)$$

특히 $k = k_{mn}$ 일 때 $J_m(ka) = 0$ 이므로

$$f(r) = -\frac{N_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r')}{4J_m(k_{mn}a)} J_m(k_{mn}r) \quad (52)$$

이다.

따라서 식(2)의 파동방정식과 북의 경계조건을 만족하는 해는 최종적으로 다음 식으로 표시된다.

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\theta-\theta')} \frac{J_m(kr_{<})}{4J_m(ka)} [J_m(kr_{>})N_m(ka) - J_m(ka)N_m(kr_{>})] \quad (53)$$

한편, $\phi(r, \theta)$ 는 $\theta = \theta'$ 과 $r = r'$ 에서 연속이나 r 에 관한 1차 미분 값은 $r = r'$ 에서 불연속이 된다. 이를 확인하기 위하여 다시 식(2)로 되돌아가자.

양변을 r' 과 θ' 부근의 아주 작은 면적에 대하여 적분하면

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \int_{r'-\epsilon_0}^{r'+\epsilon_0} \int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'+\epsilon} (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) r dr d\theta = \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \int_{r'-\epsilon_0}^{r'+\epsilon_0} \int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'+\epsilon} -\delta(\vec{r}-\vec{r}') r dr d\theta = -1 \quad (54)$$

이 된다. 좌변의 두 번째 항에 대한 적분은 피적분함수가 r' 과 θ' 부근에서 유한하므로 0이 된다. 따라서

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \int_{r'-\epsilon_0}^{r'+\epsilon_0} \int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'+\epsilon} \nabla^2 \phi r dr d\theta = -1 \quad (55)$$

이어야 한다. 여기서 $\nabla^2 \phi r dr d\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} \right) r dr d\theta$ 이므로

식(55)는

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'+\epsilon} e^{im(\theta-\theta')} \left[r' \left(\frac{\partial}{\partial r} f(r) \Big|_{r'+\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial r} f(r) \Big|_{r'-\epsilon_0} \right) \right] d\theta = -1 \quad (56)$$

이어야 한다. 따라서

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon_0} - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon_0} \propto \frac{1}{r'} \quad (57)$$

이다. 식(57)에 대한 검증은 $k \neq k_{mn}$ 일 때 자세한 검토가 있을 것이다.



Ⅲ. $k = k_{mn}$ 일 때

진동자의 위치에 따른 모드 변화

외부 진동자의 파수 k 가 복의 고유파수 k_{mn} 과 같을 때 ($k = k_{mn}$) (53)식은 다음과 같이 표시 가능하다.

$$\phi(r, \theta) \simeq \frac{1}{\pi} e^{im(\theta - \theta')} \frac{J(k_{mn}r_{<})}{4J_m(k_{mn}a)} [J_m(k_{mn}r_{>}) N_m(k_{mn}a)] \quad (58)$$

왜냐하면 분모 중에서 $J_m(k_{mn}a) = 0$ 이므로 $m = m$ 일 때만 ϕ 의 진폭이 최대가 되고 나머지 항들은 진폭이 상대적으로 매우 작아 무시할 수 있기 때문이다.

1. θ' 에 따른 모드 변화

파동함수의 해는 진동자의 위치인 θ' , r' 에 관련된 함수이다. θ' 에 관련된 함수는 $e^{im(\theta-\theta')}$ 에서 실수부만 취하게 되면 $g(\theta) = \cos m(\theta-\theta')$ 가 된다. $\theta = \theta'$ 일 때 최대 진폭을 가지게 된다. 원형 북의 진동모드에서 대각선의 마디 선은 파동함수 중 방위각 θ 에 의존하는 것으로 각을 이동하여 진동시키면 마디선이 따라서 움직인다.

예를 들면 (1, 1)모드에서 방위각 θ 에 따른 파동함수는 $\cos m\theta$ 에 의해 나타나므로 $m=1$ 이므로 $\cos\theta$ 가 되고 $\pi/2, 3\pi/2$ 가 0이 되어 2차원의 원형 북에서 마디 선은 하나가 나타난다. 진동자의 오른쪽을 x 축으로 두었을 때, 진동자의 위치가 항상 $\theta=0, \pi$ 가 되도록 모드가 형성된다.[7]

가. $m=0$ 일 때

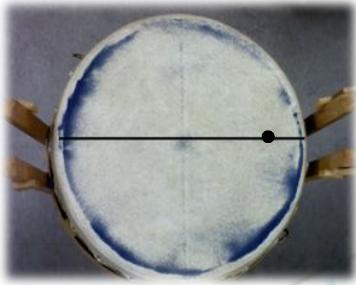


그림 1 $m=0, \theta'=0$ 일 때 실험사진

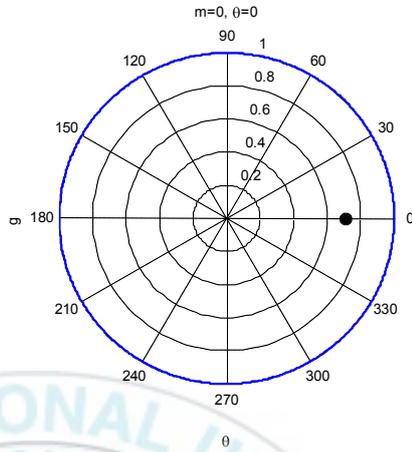


그림 2 $m=0, \theta'=0$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

(● : 진동자의 위치)

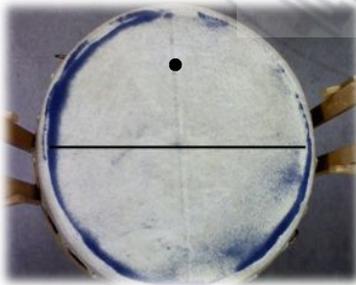


그림 3 $m=0, \theta'=\pi/2$ 일 때 실험사진

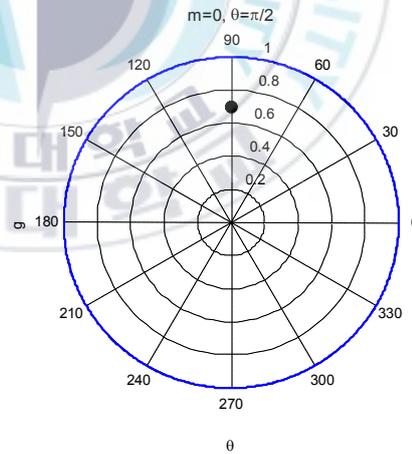


그림 4 $m=0, \theta'=\pi/2$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

나. $m=1$ 일 때



그림 5 $m=1, \theta'=0$ 일 때 실험사진
(정금화, 2007)

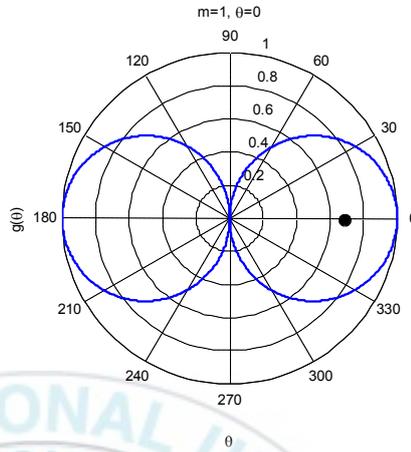


그림 6 $m=1, \theta'=0$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$
(● :진동자의 위치, 이하 동일)



그림 7 $m=1, \theta'=\pi/6$ 일 때 실험사진
(정금화, 2007)

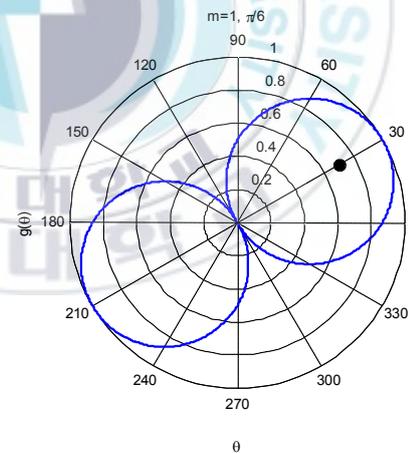


그림 8 $m=1, \theta'=\pi/6$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$



그림 9 $m=1, \theta'=\pi/3$ 일 때 실험사진
(정금화, 2007)

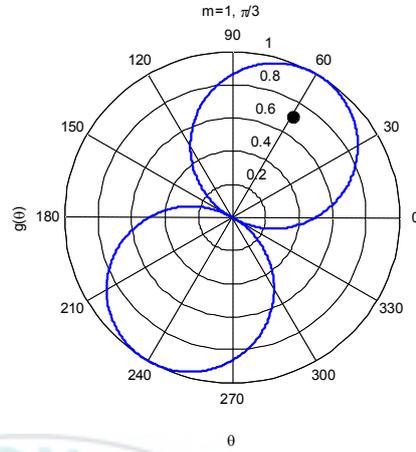


그림 10 $m=1, \theta'=\pi/3$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

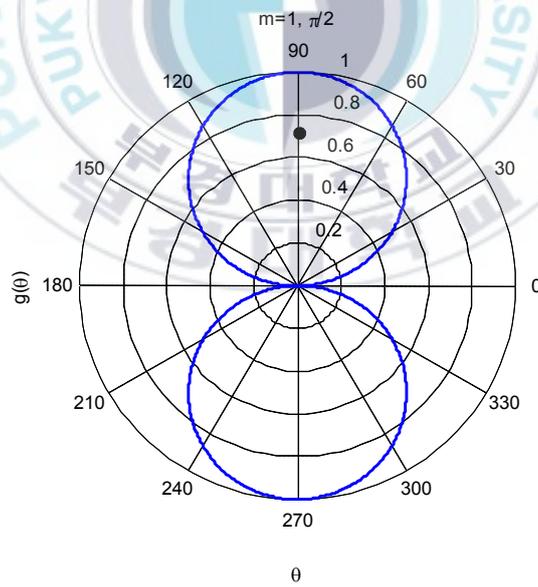


그림 11 $m=1, \theta'=\pi/2$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

다. $m = 2$ 일 때

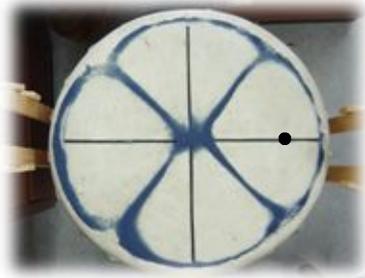


그림 12 $m = 2, \theta' = 0$ 일 때 실험사진
(정금화, 2007)

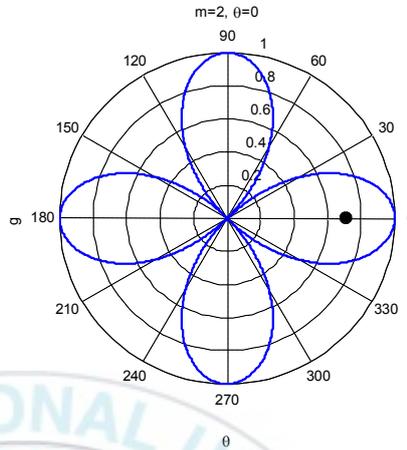


그림 13 $m = 2, \theta' = 0$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

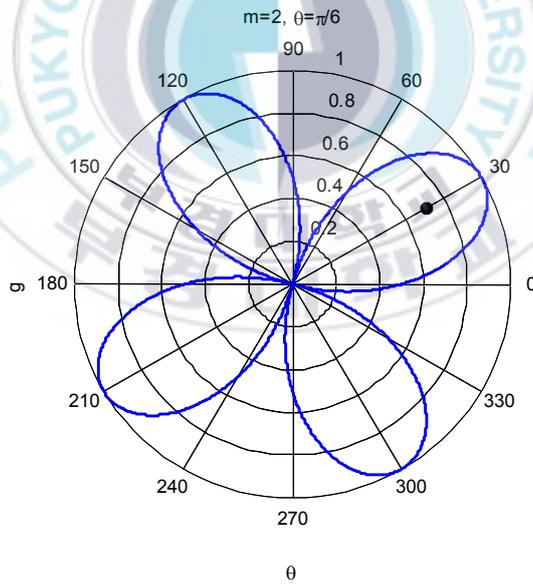


그림 14 $m = 2, \theta' = \pi/6$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$



그림 15 $m=2, \theta' = \pi/3$ 일 때 실험사진
(정금화, 2007)

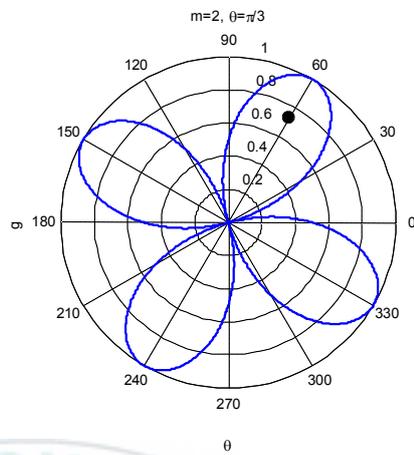


그림 16 $m=2, \theta' = \pi/3$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

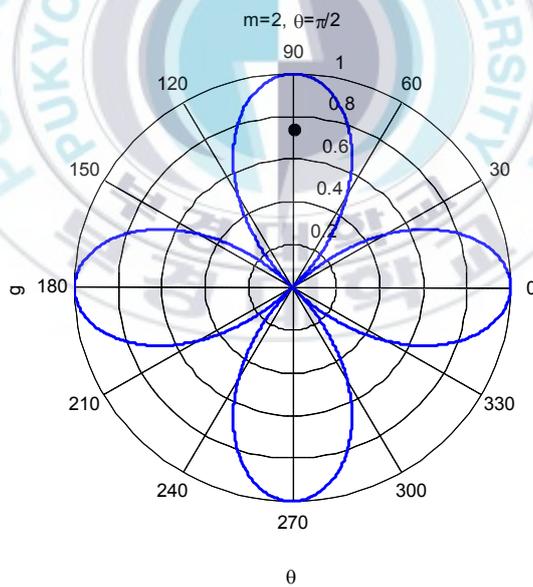


그림 17 $m=2, \theta' = \pi/2$ 일 때 진동자의 위치 θ' 에 대한 $g(\theta)$

$m=0$ 일 때 그림 1~4에서 나타난 것과 같이 $\theta' = 0, \pi/2$ 로 소스의 위치가 이동함에 따라 원형 복의 진동모드는 소스의 위치 θ 와 상관없이 원형의 모습 그대로를 유지하고 있다. 소스의 각도가 달라져도 진동모드의 모습은 변하지 않는다.

$m=1$ 일 때 그림 5~11에서 나타난 것과 같이 $\theta' = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ 로 소스의 위치가 이동함에 따라 $\theta = \theta'$ 위치에서 최대 진폭이 되도록 진동모드의 모습도 함께 이동하는 것을 볼 수 있다.

$m=2$ 일 때 그림 12~17에서 나타난 것과 같이 $\theta' = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ 로 소스의 위치가 이동함에 따라 $\theta = \theta'$ 위치에서 최대 진폭이 되도록 진동모드의 모습도 함께 이동하는 것을 볼 수 있다.



2. r' 에 따른 모드 변화

r' 에 관련된 함수는

$$r < r' \text{ 일 때 } f(r) = \frac{J_m(kr)}{4J_m(ka)} [J_m(ka)N_m(kr') - J_m(kr')N_m(ka)]$$

이고

$$r > r' \text{ 일 때 } f(r) = \frac{J_m(kr')}{4J_m(ka)} [J_m(ka)N_m(kr) - J_m(kr)N_m(ka)]$$

이다.

특히 k 값이 복의 고유진동모드인 k_{mn} 과 같을 때는

$$f(r) = -\frac{N_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r')}{4J_m(k_{mn}a)} J_m(k_{mn}r)$$

이 된다. 이 함수들은 진동자의 위치 r' 에 따라 진폭이 Bessel 함수에 의존함을 보여주고 있고, 복의 진동면이 저항에 의한 감쇠가 무시되는 상태를 가정했으므로 특히 $k = k_{mn}$ 일 때는 진폭이 무한히 커짐을 알 수 있다.

가. (0, 1)모드



그림 18 $m=0$ 일 때 북의 반지름 r 에 대한 $f(r)$

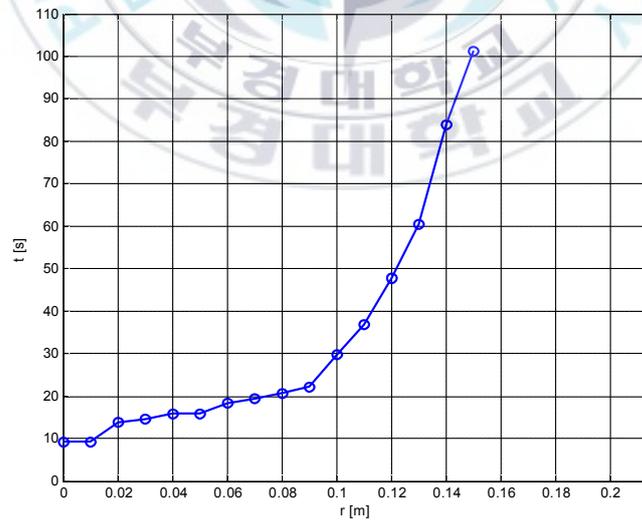


그림 19 (0, 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간

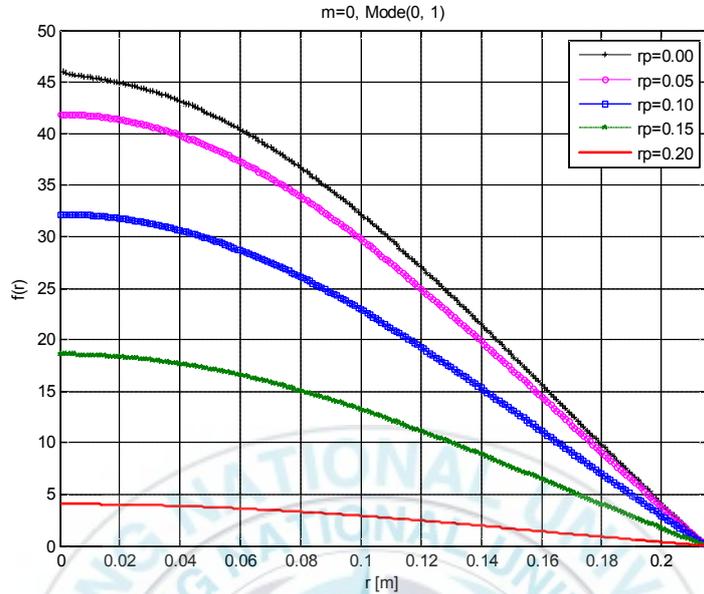


그림 20 (0, 1)모드에서 진동자 r' 의 위치에 따른 $f(r)$
 (* $r_p=r'$ 은 진동자의 위치를 나타낸다)

$m=0$ 일 때 $J_0(x)$ 는 $x=0$ 에서부터 $x \approx 2.40$ 까지 함수 값은 점점 작아진다. 이 값을 그림 18에서 보는 바와 같이 (0, 1)모드에서 북의 반지름 ($a=0.215m$)으로 환산해보면 반지름 $r=0$ 에서부터 $r=0.215$ 이 될 때까지 함수 값은 감소한다. 그림19에서 살펴보면 $r=0$ 에서부터 $r=0.15$ 가 될 때까지 모드가 가시적으로 형성되는 거리는 시간이 길어짐을 확인할 수 있다.

따라서 $r'=0$ 의 위치에 소스가 놓여 있을 때 그림 20에서 보는 바와 같이 함수의 진폭이 가장 큰 것을 알 수 있고 소스의 위치가 $r'=0$ 에서 $r'=0.20$ 로 증가할수록 상대적 진폭 $f(r)$ 값은 작아짐을 알 수 있다.

북의 진폭이 크다는 것은 북의 원형 막 위에 모래를 뿌려 놓았을 때 큰 진폭으로 인해 모래들이 빨리 움직일 것이고 그것은 곧 눈으로 확인 가능

한 형태가 나타나기까지 걸리는 시간이 짧다는 것을 의미한다[7]. 즉 모드가 가시적으로 형성되기까지 걸리는 시간이 상대적 진폭이 클수록 짧고 상대적 진폭이 작을수록 길다.



나. (1, 1)모드

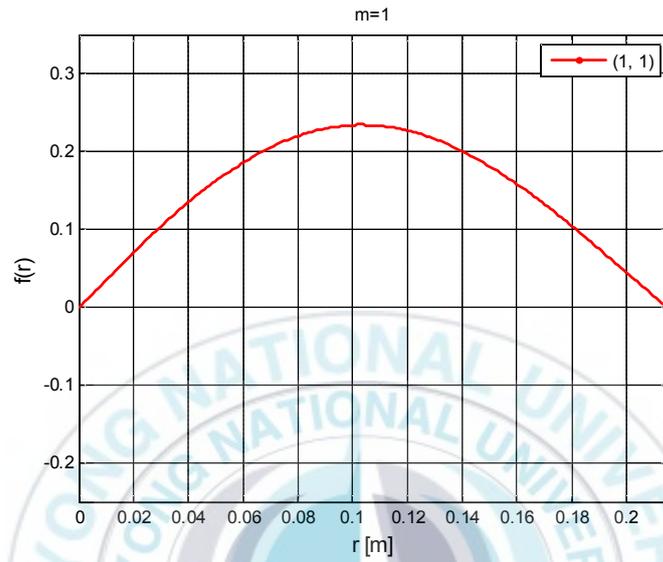


그림 21 $m=1$ 일 때 북의 반지름 r 에 대한 $f(r)$

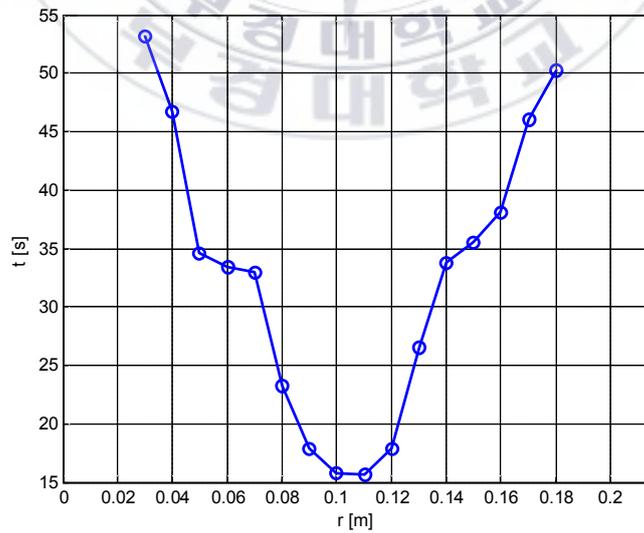


그림 22 (1, 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간

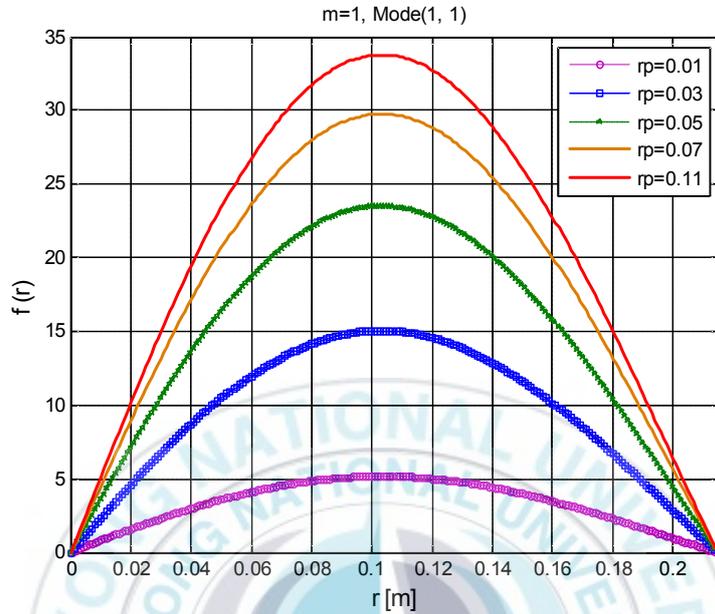


그림 23 (1, 1)모드에서 진동자 r' 의 위치에 따른 $f(r)$
 (* $rp=r'$ 은 진동자의 위치를 나타낸다)

$m=1$ 일 때 $J_1(x)$ 는 $x=0$ 에서부터 $x \approx 1.8$ 까지 함수 값은 점점 커지다가 $x=3.8$ 이 될 때 까지 함수 값은 다시 작아진다. 그림 21에서 보는 바와 같이 북의 반지름으로 환산해보면 반지름 $r=0$ 에서부터 $r \approx 0.11$ 까지 진폭이 증가하다가 $r=0.215$ 이 될 때까지 진폭은 감소한다. 그림 22는 (1, 1)모드에 대한 진동자의 r' 위치에 따른 모드가 형성되는데 걸리는 시간에 관한 그래프이다[7]. 그림 21에 (1, 1)모드에 대한 그래프와 비교해 볼 수 있다.

$r'=0.01$ 의 위치에 진동자가 놓여 있을 때 그림 23에서 보는 바와 같이 상대적 진폭이 가장 큰 것을 알 수 있으며 진동자의 위치가 $r'=0.01$ 에서 $r'=0.11$ 로 증가할수록 상대적 진폭은 작아짐을 그림 23에서 확인할 수 있다.

다. (2, 1)모드

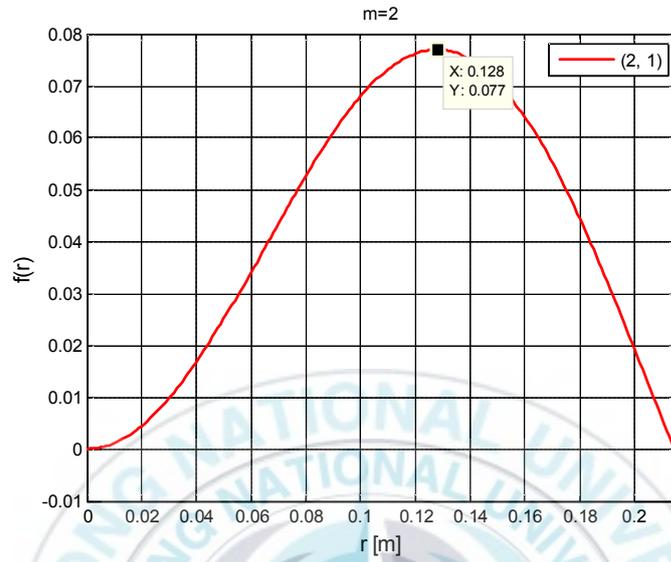


그림 24 $m=2$ 일 때 북의 반지름 r 에 대한 $f(r)$

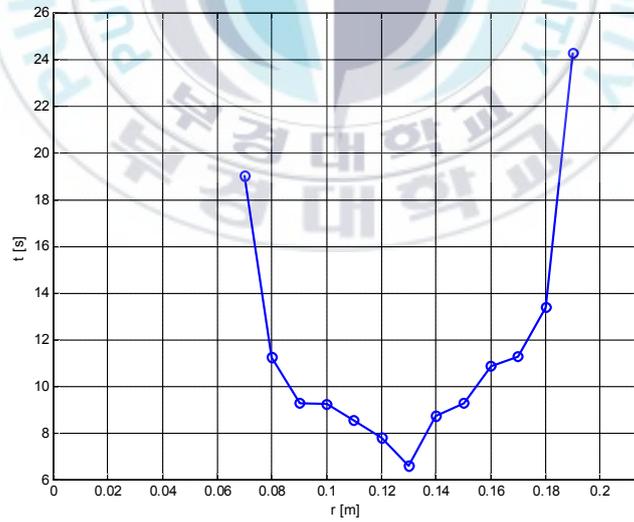


그림 25 (2, 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간

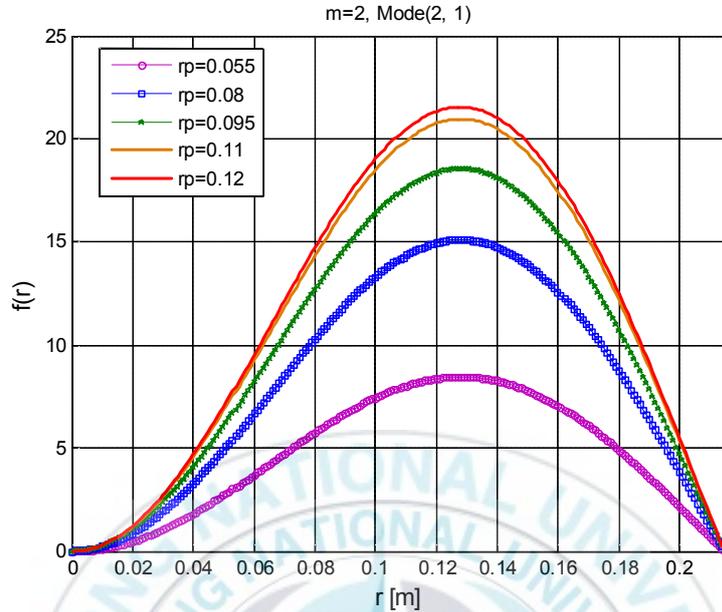


그림 26 (2, 1)모드에서 진동자 r' 의 위치에 따른 $f(r)$

(※ $r_p=r'$ 은 진동자의 위치를 나타낸다)

$m=2$ 일 때 $J_1(x)$ 는 $x=0$ 에서부터 $x \approx 3.7$ 까지 함수 값은 점점 커지다가 $x \approx 5.1$ 이 될 때 까지 함수 값은 다시 작아진다. 이 값을 북의 반지름으로 환산해보면 그림 24에서 보는 바와 같이 반지름 $r=0$ 에서부터 $r \approx 0.128$ 까지 진폭이 증가하다가 $r=0.215$ 가 될 때까지 진폭은 감소한다. 그림 24~25에서 확인할 수 있듯이 함수 값이 큰 곳을 진동시키면 진폭은 크고 따라서 모드가 형성되는데 걸리는 시간이 짧게 걸리고 함수 값이 작은 곳을 진동시키면 진폭은 작을 것이고 따라서 모드가 형성되는데 걸리는 시간은 오래 걸린다.

따라서 $r'=0.120$ 의 위치에 소스가 놓여 있을 때 그림 26에서 보는 바와 같이 함수의 진폭이 가장 큰 것을 알 수 있으며 소스의 위치가 $r'=0.055$ 에서 $r'=0.120$ 로 증가할수록 상대적 진폭은 작아짐을 그림 26에서 확인할 수 있다.

3. 원형 북 진동모드의 적용

RESONANCE WIRE LOOP라는 실험을 통해 보어모델을 가시적으로 설명을 하기 위해 원형 줄을 이용한 역학적 파동으로 설명을 해왔다. 그리고 보어의 원자모형을 확인하고 물질파에 대한 내용을 학습하고 있다. 하지만 현대물리학과 양자역학이 발전하면서 보어모델로서 설명할 수 없는 부분들이 나타나게 되었다.

따라서 우리는 원형 북의 진동모드를 통해서 수소전자의 확률밀도 분포를 형상화시켜서 설명하고자 한다.



표 1 원형 북의 진동모드와 수소전자의 확률밀도 분포[8]

표 1은 원형 북의 진동모드와 수소전자의 확률밀도 분포와 비교한 것이다. 눈으로 직접 볼 수 없는 수소전자의 확률밀도 분포를 원형 북의 진동모드로 가시화 시켜 보여 줄 수 있다. 진동자의 위치 r' 에 대한 실험결과에서 설명하였듯이 (0, 1)모드를 예로 들면 북의 중앙지점의 함수 값이 가장

크고 가장자리로 갈수록 함수 값은 작아진다. 진동자의 위치 r' 을 중앙에서 가장자리로 옮기면서 모드가 가시적으로 형성되는데 까지 걸리는 시간을 측정해보면, 함수 값이 가장 큰 중앙지점에서 시간이 가장 짧게 걸리고 가장자리로 갈수록 시간이 많이 걸리는 것을 알 수 있다. 이것은 수소전자의 확률밀도 분포 $1s$ 에 비교 될 수 있다. 표 1에서 보는 바와 같이 중앙에서 멀어질수록 수소전자의 확률밀도분포는 줄어들고 있는 것을 확인할 수 있다. 그 외의 다른 모드들도 표 1에서 보는 바와 같이 서로 비슷한 모습을 보이고 있는 것을 확인할 수 있다.

실제 고등학교 학생들과 대학교 1학년 학생들에게 수소전자의 확률밀도 분포를 원형 북의 진동모드로 형상화 시켜 설명을 한다면 보다 이해하기 쉽고 유용하게 쓰일 수 있는 모델이 될 것으로 기대 된다.



IV. $k \neq k_{mn}$ 일 때 복의 진동모드

외부 진동자의 파수 k 가 복의 고유파수 k_{mn} 과 동일하지 않을 경우 (53)식은 (58)식과 같이 ϕ 를 하나의 연속함수로 표시하기가 불가능하다. 왜냐하면 $J_m(ka) \neq 0$ 이므로 $m=0, 1, 2, 3 \dots$ 등 일 때 각각의 진폭들이 $k=k_{mn}$ 일 때에 비해 매우 작기 때문이다. 따라서 이때의 해는 (53)식과 같이 모든 m 값에 대한 합으로만 표시될 수 있다.

그런 가운데에서도 주어진 k 값이 어떤 특정한 k_{mn} 값들과 비슷할 때 특정한 k_{mn} 모드와 유사한 모드들의 진폭이 상대적으로 커지게 된다. 이것을 좀더 구체적으로 이해하기 위해 (18)식으로 돌아가자. m 과 n 의 시리즈로 표현되는 이 식에서 분모 $(k^2 - k_{mn}^2)$ 항이 있으므로 주어진 k 에 대하여 이 값과 비슷한 k_{mn} 일 때만 진폭이 상대적으로 커지게 된다. 따라서 ϕ 는 고주파에 의한 높은 모드를 얻을 목적이 아닌 한 무한개수의 시리즈로 표현되는 것이 아니라 5~6개정도의 유한개수의 합으로 근사적 표시가 가능하다.

여기서는 그 예로써 $k=19$ 일 때와 $k=41$ 일 때 모드가 어떻게 나타나는지를 살펴보고자 한다. 그리고 식(57) 즉, $\frac{\partial f(r)}{\partial r}|_{r'+\epsilon_0} - \frac{\partial f(r)}{\partial r}|_{r'-\epsilon_0} \propto \frac{1}{r'}$ 에 대한 검토도 하고자 한다.

1. $k = 19$ 일 때

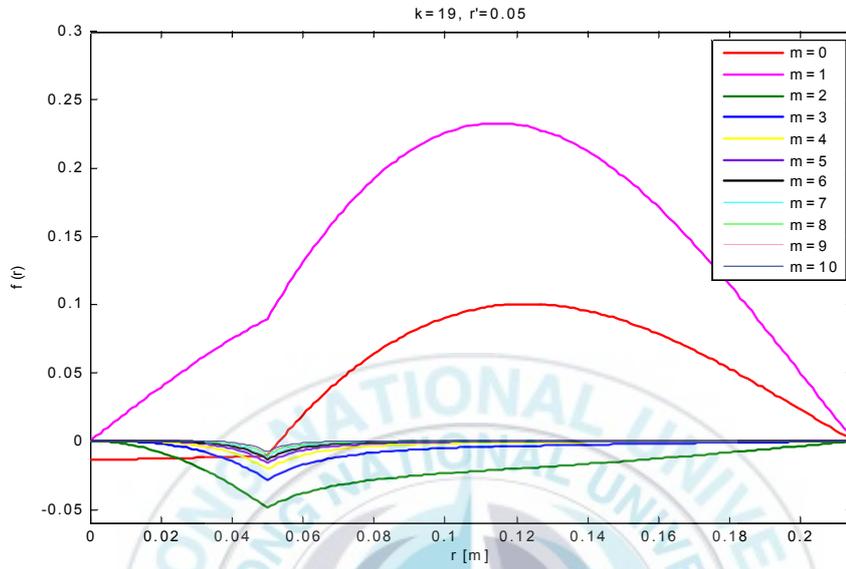


그림 27 $k = 19, r' = 0.05(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$

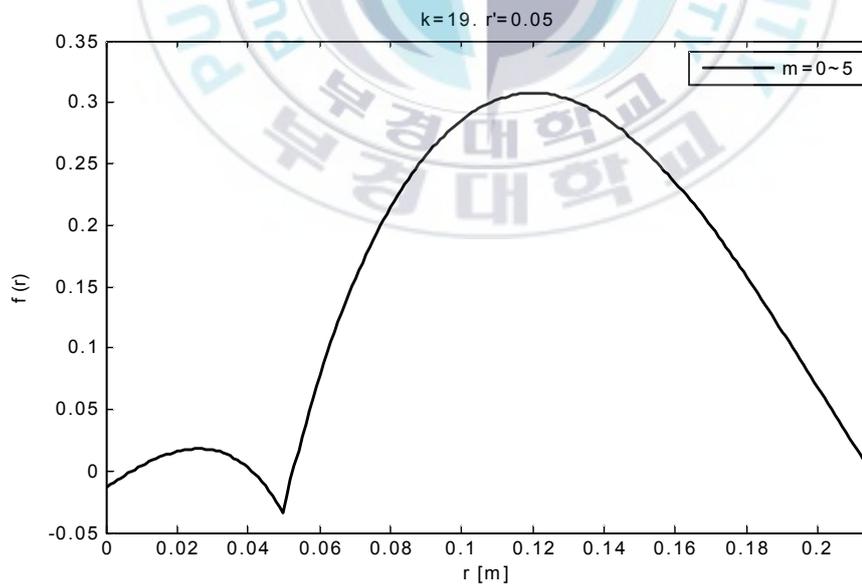


그림 28 $\theta = \theta'$ 일 때 $m = 0$ 에서 $m = 5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$

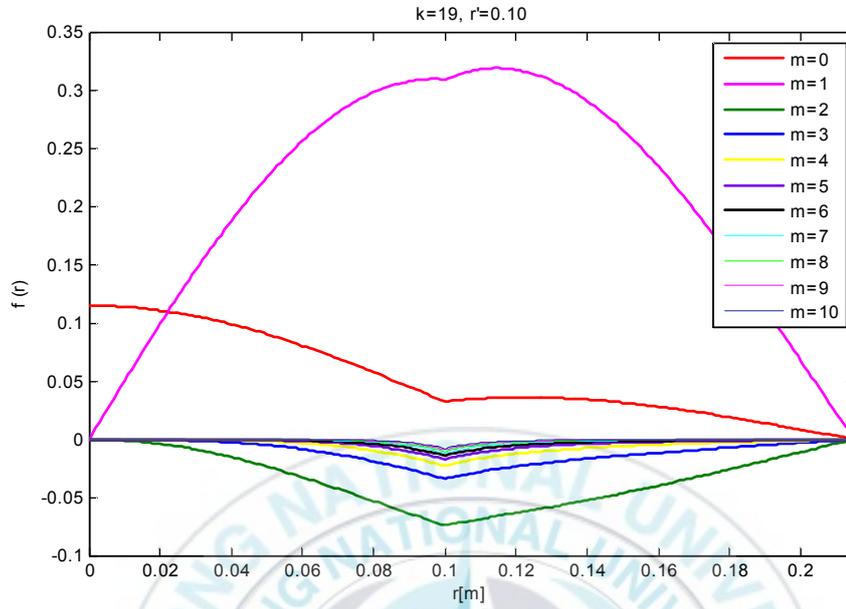


그림 29 $k=19, r'=0.10(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$

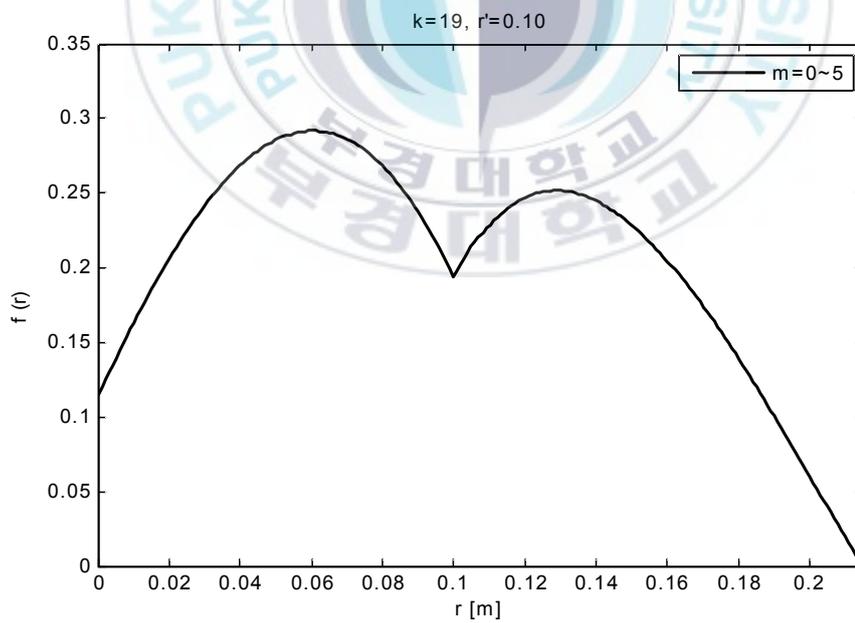


그림 30 $\theta = \theta'$ 일 때 $m=0$ 에서 $m=5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$

m 이 0에서 10까지 변할 때 19에 가까운 k_{mn} 값을 구해보면 $k_{01} = 11.16$, $k_{02} = 25.67$, $k_{11} = 17.81$, $k_{12} = 32.65$, $k_{21} = 23.90$, $k_{31} = 29.67$, $k_{41} = 35.30$, $k_{51} = 40.79$, $k_{61} = 46.19$, $k_{71} = 51.53$, $k_{81} = 56.84$, $k_{91} = 62.09$, $k_{101} = 67.30$ 이다. 따라서 상대적으로 진폭이 큰 모드는 $m=0, 1, 2, 3, 4$ 정도임을 알 수 있고, 특히 k_{11} , k_{21} , k_{01} 또는 k_{02} , 그리고 k_{31} , k_{41} 순으로 이와 유사한 모드들이 주된 역할을 할 수 있다. 그림 27이 이러한 추측이 타당함을 보여주고 있다.

따라서 $k=19$ 일 때의 최종 해는 $\phi(r, \theta) \simeq \sum_{m=0}^4 \cos m(\theta - \theta') f(r)$ 으로 표시할 수 있고, 특히 $\theta = \theta'$ 일 때는 $\phi(r, \theta') \simeq \sum_{m=0}^4 f(r)$ 이므로 이를 그림 28에 나타내었다.

한편 (18)식 또는 (53)식에 따르면 각 모드의 진폭은 진동자의 위치 r' 에도 의존하므로 그림 27, 28에서는 진동자의 위치를 $r' = 0.05(m)$ 에 두었으나 그림 29에서는 k 값은 19 그대로 두고 진동자의 위치를 $r' = 0.10(m)$ 로 바꾸었다. 그 결과 주된 모드는 비슷하나 III-2에서 언급하였듯이 각 모드의 진폭에 다소 변화가 생겼다. 그림 29에 각 모드별 $f(r)$ 함수를, 그리고 그림 30에 $\theta = \theta'$ 일 때 $m=0$ 에서 5까지 더해진 최종 해 $\phi(r, \theta')$ 을 나타내었다. 그림 28과 그림 30에 나타난 최종 해의 모습은 매우 상이함을 알 수 있다.

2. $k = 41$ 일 때

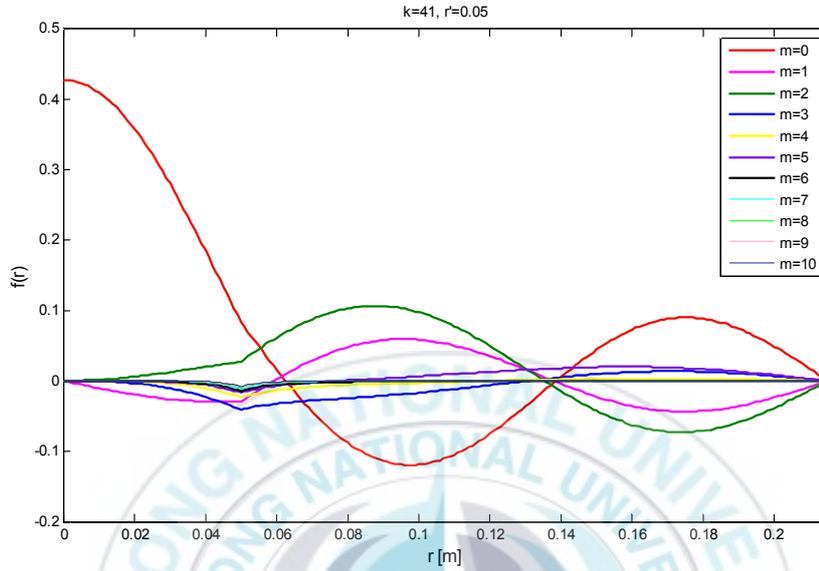


그림 31 $k = 41, r' = 0.05(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$

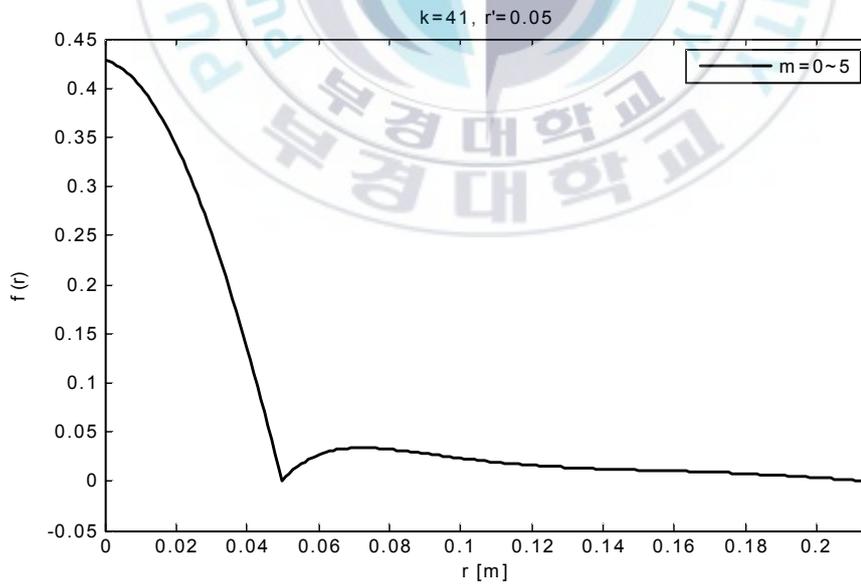


그림 32 $\theta = \theta'$ 일 때 $m = 0$ 에서 $m = 5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$

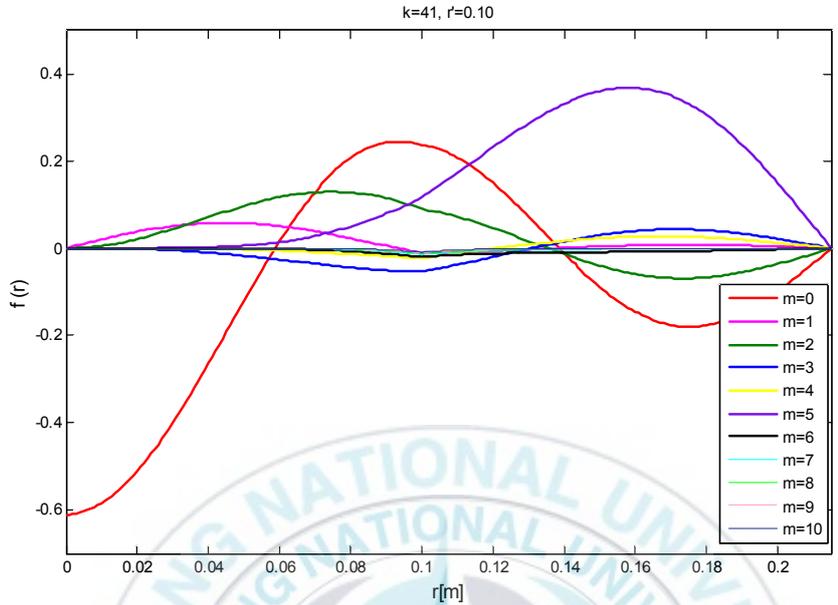


그림 33 $k = 41, r' = 0.10(m)$ 일 때 m 값에 따른 $f(r)$

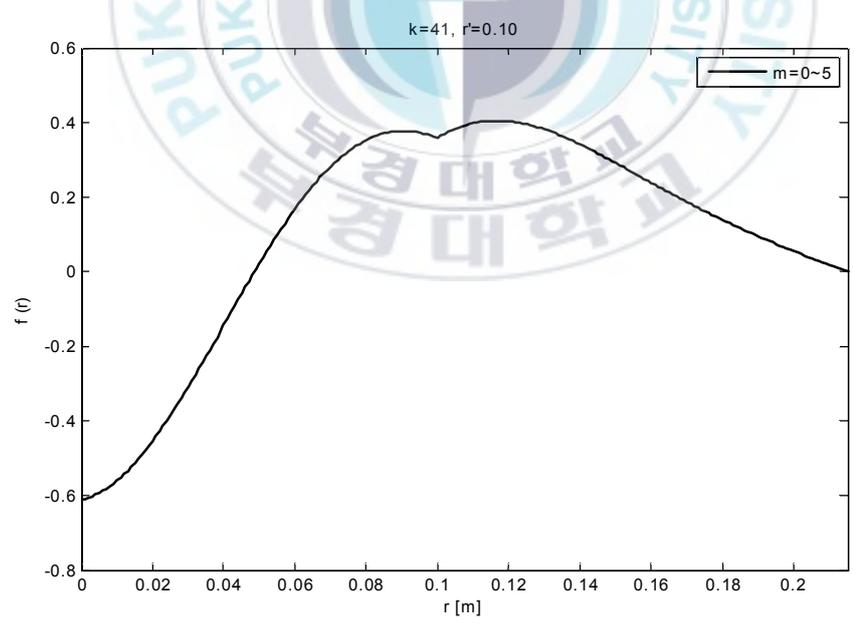


그림 34 $\theta = \theta'$ 일 때 $m = 0$ 에서 $m = 5$ 까지 각 모드의 합으로 표시된 $\phi(r, \theta')$

이번에는 진동자의 파수 k 값을 41로 증가시켰을 때 모드의 변화를 살펴보기로 하자. m 이 0에서 10까지 변할 때 41에 가까운 k_{mn} 값을 구해보면 $k_{03} = 45.23$, $k_{13} = 47.30$, $k_{22} = 39.16$, $k_{32} = 45.40$, $k_{41} = 35.30$, $k_{42} = 51.44$, $k_{51} = 40.79$, $k_{61} = 46.19$, $k_{71} = 51.53$, $k_{81} = 56.84$, $k_{91} = 62.09$, $k_{101} = 67.30$ 이다. 따라서 상대적 진폭이 큰 모드는 $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 정도이며, 나머지는 진폭이 매우 작아짐을 알 수 있다. 각 모드의 진폭은 r' 의 값에 의존하기도 하지만 특히 k_{51} , k_{22} , k_{03} , k_{32} , k_{13} , k_{41} 순으로 이들과 유사한 모드들이 주된 역할을 하게 될 것이다. 그림 31과 그림 33에서 이를 확인할 수 있다. 그림 32와 34에서는 6개의 개별모드가 합해진 최종 해 ϕ 를 $\theta = \theta'$ 인 각도에서 나타낸 것이다. 개별 모드들은 유사해도 최종 해는 진동자의 위치 r' 의 값에 따라 상당한 모드 차이가 있음을 알 수 있다.

이제까지 $k \neq k_{mn}$ 인 예로써 $k=19$ 와 41의 두 경우를 살펴보았다. 최종 해인 각각의 $\phi(r, \theta)$ 는 $k = k_{mn}$ 인 경우와 달리 높은 모드가 실험목적이 아닌 5~6개 모드의 합으로 나타낼 수 있으며, 그 진폭은 $k = k_{mn}$ 일 때와 비교해 상대적으로 매우 작다. 그리고 r' 에 따른 최종 모드의 변화 역시 $k = k_{mn}$ 일 때는 모드모양은 동일하나 진폭변화만 생기는 데 비해 $k \neq k_{mn}$ 일 때는 진폭은 거의 비슷하나 모드모양이 완전 다른 비정규모드 형태를 보이고 있다.

3. $k=45$ 이고, $m=0$ 인 모드를 통한 식(57)의 검토

그림 35와 36은 r 에 대한 $f(r)$ 의 그래프와 수치해석을 통한 $f'(r)$ 의 그래프이다. 식(57)을 검증하기 위해서 $k=45$ 이고 $m=0$ 인 모드를 예를 들어 설명을 하고자 한다. 식(57)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} \Big|_{r'+\epsilon_0} - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \Big|_{r'-\epsilon_0} \propto \frac{1}{r'}$$

그림 35는 $k=45$, $m=0$ 일 때 진동자의 위치 r' 을 $r'=0 \sim 0.21$ 까지 $r=0.01$ 간격으로 위치를 옮겨서 그린 그래프이다. 그림 35에서 r' 위치에서 1차 미분이 불연속인 지점이 나타나게 된다. 아래 그래프를 1차 미분을 하게 되면 그림 36이 된다.

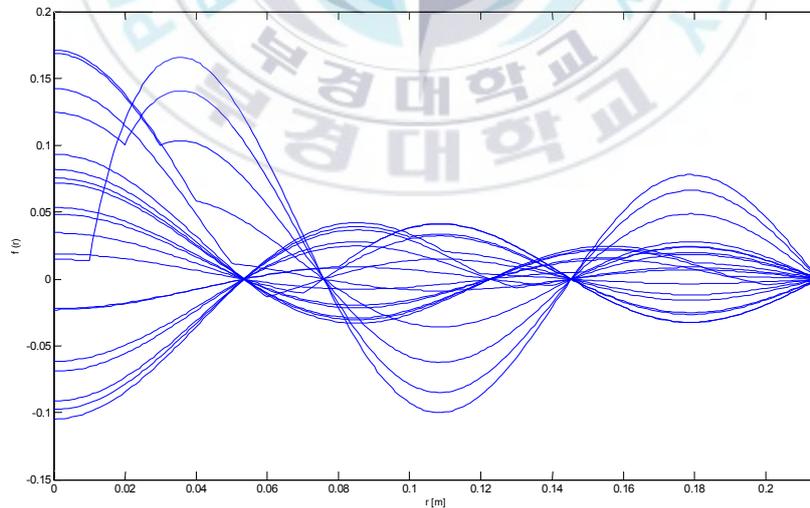


그림 35 $k=45$, $m=0$ 인 모드의 r 에 대한 $f(r)$

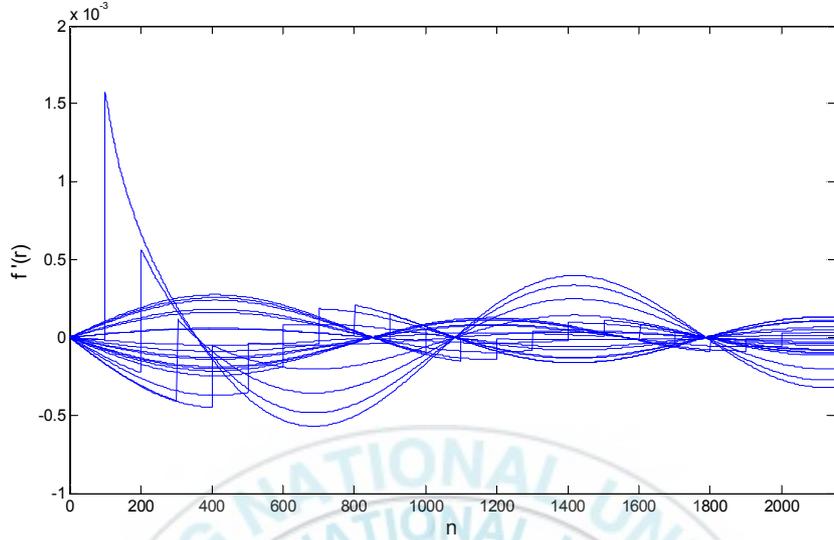


그림 36 $k=45$, $m=0$ 인 모드의 r 에 대한 $f'(r)$

그림 36에서 x 축의 n 이 의미하는 것은 수치해석을 통해 그린 그래프이므로 각각의 지점의 data의 순번을 나타낸다. 예를 들면 그림 35의 $r'=0.02$ 인 지점은 그림 36의 $n=200$ 일 때의 지점과 대응되고 $r'=0.04$ 인 지점은 $n=400$ 인 지점과 대응된다. 그림 36에서 $r'=0.01$ 의 그래프와 $r'=0.08$ 인 지점의 그래프의 불연속지점의 $f'(r)$ 의 값 차이는 식(57)에 의해서 $1/r'$ 에 비례하므로 $1/8$ 의 크기 차이가 나야한다.

그래프의 data값의 차이를 구해보면 $\Delta f'(r)_{r'=0.01} = 1.583 \times 10^{-3}$ 이고 $\Delta f'(r)_{r'=0.08} = 1.986 \times 10^{-4}$ 이다. 즉, $\Delta f'(r)_{r'=0.08} / \Delta f'(r)_{r'=0.01} \approx 1/8$ 이다. 다른 r' 의 경우에도 모두 동일하게 적용되어진다. 따라서 식(57)과 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

V. 결 론

북의 진동모드에 대한 이론적 고찰을 해보았다. 실험을 통해 북의 진동모드를 찾을 수 있었고 실험결과에 대한 이론적 근거를 마련하게 되었다. 그 결과 북의 진동모드는 수소원자모델의 확률밀도모드와 상당부분 유사한 모양을 갖는다는 것을 확인하였다. 이것은 양자역학에서 왜 모드가 형성되는지에 대한 개념적 설명을 하는데 향상화된 북의 진동모드가 유용함을 의미한다.

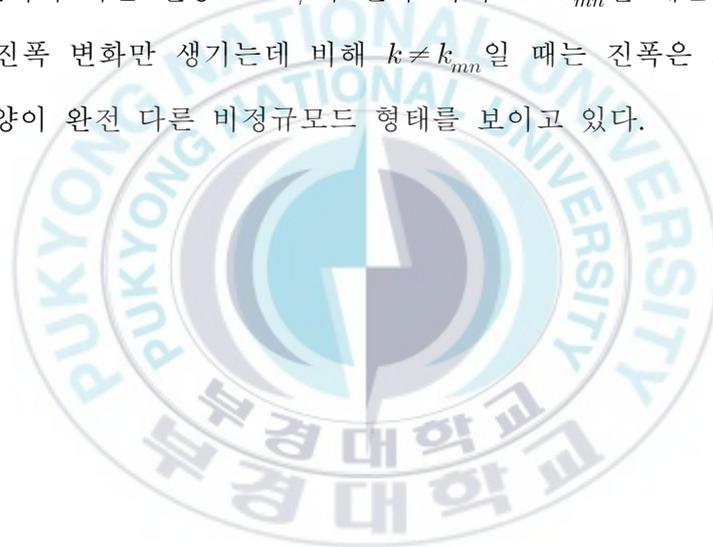
다음으로 왜 파동함수의 진폭이 가장 큰 곳에서 전자를 발견할 확률밀도가 가장 크가에 대한 개념을 이해하기 위하여 $k=k_{min}$ 일 때 북위에 놓여져 있는 진동자의 위치 (r', θ') 를 변화시켜 보았다. 그 결과 ϕ 는 하나의 연속함수로 표시가능하며 이 때 각 θ 값을 변화시키면 소스의 위치가 항상 최대 진폭이 되도록 모드는 형성되어진다. 그것은 $g = \cos m(\theta - \theta')$ 에서 소스가 놓이는 각 θ' 와 θ 의 값이 같을 때 $\cos m(0)$ 이 되어 g 의 값이 최대값이 되므로 최대 진폭을 가지게 형성되는 것이다. 즉 진동자의 위치를 기존 진동위치에서부터 θ 만큼 회전 시켜 진동을 시키면 $m=0$ 일 때를 제외한 다른 모드들의 마디선이 같은 방향으로 θ 만큼 회전한다는 것을 알 수 있다.

진동자의 위치 r' 을 변화시키면 제 1종 Bessel함수의 그래프에서 확인할 수 있듯이 함수 값이 큰 곳에 진동자를 두어 진동을 시킬 때는 진폭이 크고, 함수 값이 작은 곳에 진동자를 두어 진동을 시킬 때는 진폭이 작아진다.

따라서 ϕ 의 값이 최대인 지점에 진동자를 두면 그 모드는 최대의 진폭을 가지며 진동하게 된다. 이것을 향상화시키기 위하여 북위에 모래를 깔고루

뿌려 놓으면 모드의 형성시간이 최단으로 나타나게 된다. 이것을 이론 및 실험적으로 확인하는데 학생들에게 이 실험을 통해 전자의 확률밀도 개념을 이해시키는데 유용할 것으로 판단된다.

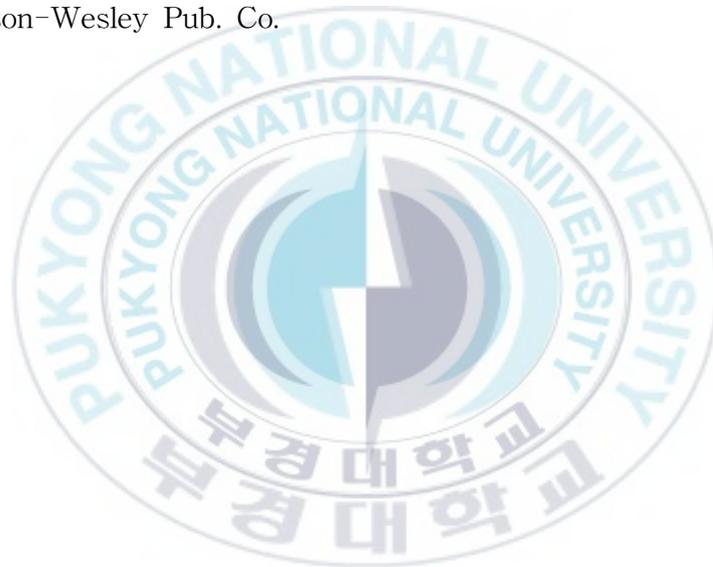
다음으로 $k \neq k_{mn}$ 일 때 모드의 존재유무에 대하여 조사하였는데, 파동함수 ϕ 가 $k = k_{mn}$ 일 때의 단일 연속함수와 달리 고주파에 의한 높은 모드를 얻을 목적이 아닌 한 5~6개 모드의 합으로 된 모드의 형태를 가짐을 확인하였으며, 그 진폭은 $k = k_{mn}$ 일 때와 비교해 상대적으로 매우 작았다. 그리고 r' 의 변화에 따른 진동모드 ϕ 의 변화 역시 $k = k_{mn}$ 일 때는 모드모양은 동일하나 진폭 변화만 생기는데 비해 $k \neq k_{mn}$ 일 때는 진폭은 거의 비슷하나 모드모양이 완전 다른 비정규모드 형태를 보이고 있다.



참고문헌

- (1) 김양한 저(2006), 음향학 강의, 청문각
- (2) 김윤철(2005), 타악기의 원형 진동면에 대한 음향학적 고찰.
부경대 교육대학원 석사학위논문.
- (3) 박지은(2007), 수소원자의 전자구름 가시화에 관한 연구.
부경대 교육대학원 석사학위논문.
- (4) 요네나마 마사노부 저 성지영 역, 원자의 세계 , 이지북
- (5) 이병호 저(1999), 음향학 I, 민음사
- (6) 전영석 역, 툭툭 튀는 소리의 세계, 일본 음향학회편, 아카데미 서적
- (7) 정금화(2007), 원형 북의 타격점 변화에 따른 진동모드에 관한 연구.
부경대 교육대학원 석사학위논문.
- (8) Arthur Beiser 원저(2003), 장준성 이재형 공역, 현대 물리학, Mc
Graw Hill
- (9) Frank J. Blatt 저, 현대물리학 ,Mc Graw Hill
- (10) Halliday, Resnick, Walker 저(1995), Fundamentals of Physics, Wiley

- (11) Lain G. Main 저(2004), 김중복 역, 파동과 진동, 홍릉과학출판사
- (12) Lawrence E. Kinsler & Austin R. Frey & Alan B. Coppens &
James V. Sanders(1982), Fundamentals of Acoustics, Wiley
- (13) Pau A.Tipler, Ralph A.Llewellyn 저, Modern Physics, Freeman
- (14) Thomas D.Rossing 저(1990), The Science of sound,
Addison-Wesley Pub. Co.



<부 록>

MATLAB source code.

[code 1]

```
clear all
```

```
clc
```

```
k=41; % 임의의 k값
rp=0.10; % 진동자의 위치
a=0.215; % 복의 반지름
rn=0:0.001:0.215; % 진동자가 놓일 범위
m = 0; % 해당하는 m값

for i=1:length(rn);
    r=rn(i);
    if r < rp
        f(i) = besselj(m, k*r)*(besselj(m, k*a)*bessely(m, k*rp) - besselj(m,
k*rp)*bessely(m, k*a))/(4*besselj(m, k*a));
    else
        f(i) = besselj(m, k*rp)*(besselj(m, k*a)*bessely(m, k*r) - besselj(m,
k*r)*bessely(m, k*a))/(4*besselj(m, k*a));
    end
end
end % 진동자의 범위에 따른 f(r)
plot(rn, f) % 그래프로 그림.
```

[code 2]

```
clear all
```

```
clc
```

```
k=41; % 임의의 k값
```

```
rp=0.05; % 진동자의 위치
```

```
a=0.215; % 복의 반지름
```

```
rn=0:0.001:0.215; % 진동자가 놓일 범위
```

```
for i=1:length(rn);
```

```
    r=rn(i);
```

```
    if r < rp
```

```
        f(i) = (besselj(0, k*r)*(besselj(0, k*a)*bessely(0, k*rp) - besselj(0, k*rp)*bessely(0, k*a))/(4*besselj(0, k*a)))+(besselj(1, k*r)*(besselj(1, k*a)*bessely(1, k*rp) - besselj(1, k*rp)*bessely(1, k*a))/(4*besselj(1, k*a)))+(besselj(2, k*r)*(besselj(2, k*a)*bessely(2, k*rp) - besselj(2, k*rp)*bessely(2, k*a))/(4*besselj(2, k*a)))+(besselj(3, k*r)*(besselj(3, k*a)*bessely(3, k*rp) - besselj(3, k*rp)*bessely(3, k*a))/(4*besselj(3, k*a)));
```

```
    else
```

```
        f(i) = (besselj(0, k*rp)*(besselj(0, k*a)*bessely(0, k*r) - besselj(0, k*r)*bessely(0, k*a))/(4*besselj(0, k*a)))+(besselj(1, k*rp)*(besselj(1, k*a)*bessely(1, k*r) - besselj(1, k*r)*bessely(1, k*a))/(4*besselj(1, k*a)))+(besselj(2, k*rp)*(besselj(2, k*a)*bessely(2, k*r) - besselj(2, k*r)*bessely(2, k*a))/(4*besselj(2, k*a)))+(besselj(3, k*rp)*(besselj(3, k*a)*bessely(3, k*r) - besselj(3, k*r)*bessely(3, k*a))/(4*besselj(3, k*a)));
```

```
    end
```

```
end % 진동자의 범위에 따른 f(r), m의 범위에 따라서 함수결정.
```

```
plot(rn, f) % 그래프로 그림.
```

감사의 글

어느 덧 2년 반이라는 시간이 지나 이 글을 쓰게 되었습니다. 그동안 있었던 많은 일들이 지금 이 순간 저의 머릿속을 스쳐지나갑니다. 학위과정을 마치는 이 순간 시원함과 아쉬움이 남습니다. 조금 더 열심히 했다면 하는 생각이 후회로 남습니다. 그 후회에 대한 아쉬움은 새로운 시작인 지금부터 다시 채워나가고자 합니다.

제일 먼저 제가 학부 때부터 지금까지 아낌없는 사랑과 격려를 해주시고 이 논문이 완성되기까지 많은 도움을 주신 김성부 교수님께 감사의 말씀을 드립니다. 아울러 논문심사 하시느라 수고하신 이종규 교수님과 홍지상 교수님께 깊이 감사의 말씀을 드립니다. 그리고 저의 부족한 부분을 채워주신 김무준 교수님과 김정순 박사님께도 깊이 감사드립니다.

저보다 먼저 졸업하셨고 제 논문의 큰 도움을 주셨던 박지은 선생님과 정금화 선생님께 감사드립니다. 그리고 같은 실험실에서 생활하면서 많은 조언과 도움을 줬던 지용, 마지막까지 실험을 같이 했던 성제, 나를 대신해 실험실 살림을 맡아준 영숙, 나의 대학생활을 함께한 모든 친구들에게도 고맙다는 말을 전합니다.

8여 년 동안 힘들 때 항상 옆에서 힘이 되어주고 기쁠 때 그 기쁨이 두 배가 되도록 늘 함께해준 친구 미선이 그리고 지금은 사회에 나가있을 00학번 동기들과 멀리 떨어져 있지만 마음속에 항상 함께하는 혜인, 민영, 현정, 정규, 원경, 재석이 그리고 호주팀과 가끔이라도 만나서 많은 얘기들을 할 수 있는 보현, 현정, 승은, 은주에게, 그리고 늘 곁에서 아껴주고 지켜주어 든든한 버팀목이 되어준 나의 한 사람에게도 고맙고 사랑한다는 말을 전합니다.

학업에만 전념할 수 있게 물심양면으로 도와주시고 지금까지 키워주시느라 고생하고 수고하신 부모님께 깊은 감사의 말씀을 드립니다. 앞으로는 더 잘하도록 노력하겠습니다. 부족한 동생이지만 항상 아껴준 사랑하는 우리 도연이 언니와 형부에게도 감사하다는 말을 전합니다.