



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시, 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리, 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지, 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교 육 학 석 사 학 위 논 문

분석-종합법을 이용한 기하 증명

지도에 대한 연구

- <9-나>단계를 중심으로



2008년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

고 은 경

교 육 학 석 사 학 위 논 문

분석-종합법을 이용한 기하 증명
지도에 대한 연구
- <9-나>단계를 중심으로

지도교수 백 영 길

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.



2008년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

고 은 경

고은경의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2008년 8월 27일



주 심 이학박사 송 현 종 (인)

위 원 이학박사 심 효 섭 (인)

위 원 이학박사 백 영 길 (인)

목 차

Abstract	iii
I. 서론	1
II. 이론적 배경	5
2.1 Van - Hiele의 기하 학습 이론	5
2.2 분석법에 대한 고찰	14
III. 설문조사 방법 및 결과 분석	23
3.1 설문조사 절차 및 내용	23
3.2 설문조사 결과 분석	24
IV. 분석-종합법을 이용한 증명방법에 대한 연구	31
4.1 분석-종합법을 이용한 기하 증명의 예	31
4.2 분석-종합법을 이용한 기하 증명 교수-학습 지도안	35
V. 결론 및 제언	41
참 고 문 헌	44
부록 (설문지)	46

그림 목차

[표1] 소단원의 Van Hiele's 기하 학습 수준	8
[표2] 1. 피타고라스의 정리	9
[표3] 2. 피타고라스의 정리의 활용	9
[표4] 1. 원과 직선	10
[표5] 2. 원과 각	10
[표6] 3. 원과 비례	11
[표7] 수학 교과에 대한 흥미도	24
[표8] 수학학습을 통한 사고력 향상에 대한 인식	25
[표9] 도형의 증명에 대한 필요성에 대한 인식	26
[표10] 도형의 증명에 대한 난이도	26
[표11] 도형의 증명에 대한 난이도의 원인	27
[표12] 도형의 증명에 대한 이해도	28
[표13] 도형의 증명에 관한 학습방법에 대한 인식	29
[표14] 도형단원을 배운 소감	30

A Study on Teaching Geometric Proofs to Apply
The Method of Analysis – Synthesis
– for a level of <9-na>

Eun Kyeong Ko

*Graduate School of Education
Pukyong National University*

Abstract

The method of Analysis-Synthesis is the unified one consisting of the analysis-method to find conditions being necessary to hold the conclusions and the synthesis-method to derive such conditions from the hypothesis. Teaching the proofs in geometry by the method of Analysis-Synthesis makes students develop courage and interest in solving problems and so we may hope that it will give students an impetus in activity of mathematical thought.

In this thesis, we try to find teaching-learning methods to teach geometric proofs of configuration parts in <9-na> level by applying the method of Analysis-Synthesis.

I. 서론

지식과 정보가 가치창출의 원천이 되는 21세기 세계화, 지식기반사회에서는 무한 경쟁 속에서 창의적인 지식이 중시되고, 스스로 계획하고 실행하여 평가하는 자기 주도적 학습능력이 요구된다. 그에 따라 7차 교육과정에서 수학과목의 목표는 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기르는 것이다.([12])

수학은 추론하는 것이라 할 수 있다. 즉 추론은 수학적 힘의 근원이 되는 것이다. 따라서 학생들은 자신의 경험을 통해서 형성된 신념을 설명하고 정당화하여 논리적으로 추론하고 비판적 사고할 수 있어야 한다. 이러한 추론은 토론하는 환경 속에서 계발될 수 있다.

미국 수학 교사 연구회(NCTM)은 수학교육의 질을 개선하고 나아갈 방향을 제시하였다. NCTM의 《학교수학을 위한 교육과정과 평가 기준》(1989,[15])에서는 학생들이 갖추어야 할 수학적 소양 중의 하나로 추론을 강조하고 있으며, NCTM의 《학교수학의 원리와 기준》(2000,[16])에서는 교육과정 기준으로 '추론과 증명'을 제시하고 있다. 이처럼 미국의 수학과 교수과정에서는 수학적 추론과 증명활동을 학교 수학의 중요한 목표로 삼고 있음을 알 수 있다.

Fischbein([14])는 수학적 증명의 의미를 경험적 증명과 비교하여 설명하고 있는데 경험적 증명은 어떤 명제를 확실히 하는 여러 가지 사실을 만들고 관찰하는 것으로 구성되고, 이에 비해 수학적 증명은 전제나 이미 받아

들여지고 있는 다른 여러 가지 명제로부터 논리적으로 추론되는 필연적인 결론이라는 것이다.([10]) 따라서 수학적 추론 능력을 기르는데 중요한 역할을 하는 것이 증명지도라 할 수 있다.

수학적 추론에는 발견적 추론과 연역적 추론이 있다. 먼저 발견적 추론이 있는 다음에 발견된 지식을 체계적으로 정리하는 연역적 추론이 뒤따른다. 그리스 사람들은 발견 과정을 숨기고 결과만을 우아하게 체계화하였다. 곧 수학적 사고의 반을 감춘 것이다. Descartes는 Euclid적인 종합적 양식은 정신을 질식시킨다고 하여 비판하고 분석적 사고의 중요성을 강조하였다. 학교수학을 자세히 살펴보면 증명 곧, 연역적 추론과 함께, 관찰된 특수한 사례의 공통성에 주목하여 일반적인 법칙을 이끌어내는 귀납추론과 유사성을 바탕으로 추측하는 유추에 의해 많은 내용이 전개되고 있음을 알 수 있다. 이러한 귀납적인 추론은 반드시 타당한 추론이라고는 볼 수 없는 추론으로 개연적 추론이라고도 한다. 수학은 추측에 의한 발견이 있는 다음에 이를 공리적으로 체계화하는 과정에서 증명이 등장한다. 그러나 지금까지 수학을 공부할 때, 증명 과정만을 강조하고 발견적 추론 과정은 아주 소홀히 다루지 않았나 생각된다.([9]) 이는 단편적인 지식과 규칙을 암기하여 기계적으로 적용하는 것을 당연한 것으로 받아들이는 전통적인 수학교육 방식에서 여전히 벗어나지 못하고 있으며, 수학교육의 본질을 망각하여 수학적 추론과정으로서의 증명을 소홀히 다루고 있음을 알 수 있다.

최현호와 한태식([13])은 중학교 2학년 학생의 25%정도만이 증명능력이 있다고 한다. 그리고 Van Hiele's 기하 학습 수준 이론에 기초하여 제7차 교육과정의 교과서를 분석하면, 전체적으로 기하 학습 수준 2, 3, 4에 해당하는 내용을 비교적 순차적으로 구성되어 있다. 하지만 김미정(1994,[2])은 기하 증명을 처음 배우는 중학교 2학년 학생들의 93.6%와 3학년 학생들의

74.8%가 수준 2이하에서 사고하는 것으로 나타났으며, 또한 박지혜(2000,[5])는 2학년은 수준 1, 2, 3, 4가 각각 26.88%, 19.35%, 36.56%, 2.15%로 나타났으며 수준 1에 못 미치는 수준 0에 해당하는 학생들도 15.05%나 되며, 3학년의 경우는 9.84%, 16.06%, 51.30%, 15.03%가 각 수준에 해당하고 7.77%가 수준 0에 해당된다. 이는 교과서에서 다루는 내용의 수준과 학생들의 기하 수준이 차이가 남에 따라서 학생들이 기하증명에 더욱 어려움을 느낄 수밖에 없음을 말한다.

따라서 학생들의 기하 수준을 올릴 수 있는 증명지도 방법을 연구할 필요가 있음을 알 수 있다. 나귀수([4])는 공준이나, 공리, 정의에 근거하여 가정으로부터 결론으로 이끌어가는 선형적 사고방식인 종합적 방식은 단지 증명의 외형적인 모습에 불과하며, 외형적으로는 가정으로부터 결론에 이르는 것으로 보이는 증명과정이 실제로 선형적으로 생성되는 것은 아니다. 증명의 심층을 상세히 살펴보면, 증명은 결론이 참이기 위해서 우선 만족되어야 할 선행 조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 선행 조건을 공리와 정의에 근거해서 가정으로부터 이끌어 내는 종합적 방식이 통합된 역동적 사고를 통해 이루어짐을 알 수 있다. 따라서 분석적 방식과 종합적 방식이 통합된 역동적인 수학적 사고 활동으로서 증명을 지도할 필요가 있다. 다시 말해서, 결론이 성립하기 위해서 성립되어야 할 전제 조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 전제 조건을 가정에서부터 이끌어내는 종합적 방식의 역동적 통합으로서 증명을 지도해야 한다는 것이다.

따라서 본 논문에서는 중학교 3학년을 대상으로 설문조사를 실시하여 학생들의 도형증명에 대한 인식정도와 학습방법을 조사하고, 수학 9-나 단계의 도형 영역을 중심으로 분석-종합법을 이용한 기하 증명 교수-학습 방안을 모색하고자 한다. II장에서는 Van Hiele의 기하 학습 수준 이론을

토대로 제 7차 교육과정 중학교 교과서를 분석하고 학생들의 기하 수준을 살펴본다. 또한 수학적 발견술 가운데 가장 오래 전부터 사용되어 온 분석법과 종합법을 적용한 기하증명에 대하여 살펴본다. III장에서는 중학교 학생들의 도형 증명에 대한 인식정도와 학습방법에 대한 설문조사 결과를 분석한다. IV장에서는 (주)두산 수학 9-나 교과서([1])의 도형영역에 제시된 명제에 대해서 분석-종합법을 이용한 증명 지도의 예를 제시하고 아울러 분석-종합법을 이용한 '원과 직선'단원의 학습지도안을 예시로 제안한다. V장에서는 결론 및 제언을 제시한다.

본 논문에서 분석-종합법을 이용한 증명방법이라 함은 결론을 탐구하여 결론이 성립하기 위해서 성립되어야 할 전제 조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 전제 조건을 가정에서부터 이끌어내는 종합적 방식을 통합한 방법이라 하겠다.

이 연구의 제한점으로는 울산광역시, 부산광역시 소재 중학교 3학년 학생을 대상으로 실시한 설문조사이기에 우리나라 전체 학생에게 결과를 일반화하기에는 다소 무리가 있을 것으로 예상된다. 또한, 제한적인 설문조사 내용으로 응답자의 자유로운 의견 제시함에도 다소 어려움이 있었을 것으로 판단된다. 그리고 분석-종합법을 이용한 증명지도의 필요성과 교수-학습 방안에 대하여 언급하였지만 실제로 적용해 본 후 학생들의 증명학습에 대한 태도변화, 증명능력의 성취도에 대한 연구를 실시하지 못한 점이 아쉬움으로 남는다.

II. 이론적 배경

2.1. Van Hiele의 기하 학습 이론

2.1.1 Van Hiele의 기하적 사고 수준

1950년대 네덜란드의 중학교 수학교사였던 Van Hiele는 자신들이 증명을 열심히 지도함에도 불구하고 학생들이 기하학습에 곤란을 겪고 있음을 파악하여 그 원인을 밝히는데 노력하게 되었다. 그 당시 Piaget에 대해 연구하고 있었던 Van Hiele는 아동에게 제시되는 문제나 과제가 종종 아동의 사고 수준을 넘어서는 용어나 성질에 대한 지식을 요구함에 관심을 갖고 아동의 사고 수준 이상의 수준에서 기하지도가 이루어지면 아동은 그 내용을 이해함에 어려움을 겪는다는 것을 밝혀내었다. 즉 교사는 자신의 수준에서 자기 자신은 이해하고 있지만 이를 학생들에게 설명하는 가운데, 학생들은 교사의 사고 수준보다 낮은 수준에서 사고하기 때문에 사고 수준의 차이로부터 학생들은 교사의 설명을 이해할 수 없다는 것이다. 따라서 교사는 학생들의 사고 수준을 파악하여 그 수준에 맞게 지도를 함으로써 학생들은 수학적 사고 활동을 통해서 다음 수준에 도달할 수 있다.

Van Hiele(1986)가 제시한 다섯 수준의 기하학적 사고는 다음과 같다.

· 제 1 수준 (시각적 인식 수준)

주변 대상을 형이란 인식 수단에 의해 파악하는 단계로 기본적인 도형을 그 구성요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다. 세모꼴, 네모꼴, 상자모양 등으로 도형의 이름을 말할 수 있으나 그 성질을 명확히 말하지 못한다.

· 제 2 수준 (기술적/분석적 인식 수준)

주변 대상의 정리 수단이었던 형이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 직사각형의 대각선의 길이는 같든가 마름모의 네 변은 길이가 같다는 등의 성질을 말할 수 있지만 도형이나 그 성질을 명확히 상호 관련지을 수 없다.

· 제 3 수준 (관계적/추상적 인식 수준)

도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다. 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 이를테면, 모든 정사각형은 직사각형임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다.

· 제 4 수준 (형식적 연역 수준)

명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체 기하의 연역체계를 파악한다. 이를테면, 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 명제를 증명할 수 있다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며 다른 공리 체계의 가능성을 이해하지 못한다.

· 제 5 수준 (엄밀한 수학적 수준)

기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리체계를 비교할 수 있고, Hilbert류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다. 공리의 무모순성, 독립성, 환전성과 같은 공리체계의 성질을 이해한다. ([9])

Van Hiele의 학습 수준 이론의 특징을 크게 다섯 가지로 구분해보면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 수학학습에서 $n-1$ 수준을 통과하지 않고 n 수준에 도달할 수 없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 차례로 거쳐 발달한다.

둘째, 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지는 않으며, 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있다.

셋째, 앞의 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 그 다음 수준에서 의식화 되어 명확히 인식되게 된다. 각 수준의 수학적 사고는 그 전 수준의 수학적 사고의 내적 질서를 대상으로 하여 연구하는 것이다.

넷째, 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 그를 연결하는 관계망을 갖고 있다. 수준의 이행은 언어의 확장과 관련된다.

다섯째, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다. ([7])

2.1.2. Van Hiele 이론에 기초한 제 7차 교육과정 <9-나>단계 교과서 분석

이 절에서는 Van Hiele 이론에 기초하여 제 7차 교육과정 <9-나>단계를 중심으로 교과서를 분석하고자 한다. <9-나>단계에서는 기하 학습 수준 3, 4에 해당하는 내용이 비교적 순차적으로 구성되어 있다. Van Hiele 기하 학습 수준 이론에 따르면 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준에 도달할 수 없으므로 교과서는 학생들의 기하 학습 수준을 고려하여 단계적으로 구성되어야 한다. 다음은 교과서를 분석한 결과이다.

[표1] 소단원의 Van Hiele 기하 학습 수준

대단원	중단원	소단원	수준
Ⅱ. 피타고라스의 정리	1. 피타고라스의 정리	1. 피타고라스의 정리	3,4
	2. 피타고라스의 정리의 활용	1. 평면도형에의 활용 2. 입체도형에의 활용	3,4 3,4
Ⅲ. 원	1. 원과 직선	1. 원과 현 2. 원의 접선	3,4 3,4
	2. 원과 각	1. 원주각 2. 원에 내접하는 사각형의 성질 3. 접선과 현이 이루는 각	3,4 3,4 3
	3. 원과 비례	1. 원과 비례	4
		2. 할선과 접선	4

다음은 각 소단원에 따른 교과서의 내용별 Van Hiele 기하 학습 수준을 나타낸다.

II. 피타고라스의 정리

[표2] 1. 피타고라스의 정리

소단원	교과서 내용	수준
1. 피타고라스의 정리	1. 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계에 대하여 안다.	2,3,4
	2. 피타고라스의 정리의 역을 안다.	3,4
	3. 삼각형에서 각의 크기와 세 변의 길이 사이의 관계를 안다.	4

[표3] 2. 피타고라스의 정리의 활용

소단원	교과서 내용	수준
1. 평면도형에의 활용	1. 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	3,4
	2. 평면도형에서 길이와 넓이를 구할 수 있다.	4
2. 입체도형에의 활용	1. 입체도형의 길이, 넓이, 부피를 구할 수 있다.	3,4

III. 원

[표4] 1. 원과 직선

소단원	교과서 내용	수준
1. 원과 현	1. 원에서 현에 관한 성질을 안다.	3,4
2. 원의 접선	1. 원의 접선과 반지름은 서로 수직임을 안다. 2. 접선의 길이에 대하여 안다.	3,4 4

[표5] 2. 원과 각

소단원	교과서 내용	수준
1. 원과 각	1. 원주각과 중심각 사이의 관계를 안다. 2. 원주각의 크기와 호의 길이 사이의 관계를 안다. 3. 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 안다.	3,4 3,4 3,4
2. 원에 내접하는 사각형의 성질	1. 원에 내접하는 사각형의 성질을 안다. 2. 사각형이 원에 내접하는 조건을 안다.	3,4 4
3. 접선과 현이 이루는 각	1. 접선과 현이 이루는 각에 관한 성질을 알고, 이를 활용할 수 있다.	4

[표6] 3. 원과 비례

소단원	교과서 내용	수준
1. 원과 비례	1. 원과 두 직선이 만나서 생기는 선분의 길이 관계를 안다.	4
	2. 네 점이 한 원 위에 있을 조건을 안다.	4
2. 할선과 접선	1. 할선과 접선이 만드는 선분의 길이 사이의 관계를 안다.	4

2.1.3. 중학교 학생들의 Van Hiele's 기하 학습 수준 분포

Van Hiele's 이론에 근거하여 우리나라 중학생들의 기하 학습 수준에 관한 연구결과는 다음과 같다.

김미정(1994,[2])은 학생들의 기하 수준을 조사하기 위하여 Van Hiele level test와 임상 면담의 두 가지 방법을 사용하였다. Van Hiele level test는 609명의 중학생들을 대상으로 실시했는데 이 중 86.5%가 Van Hiele's 수준에 연속적으로 도달하는 것으로 나타났으며, 이는 Van Hiele's 이론이 한국의 중학생들에게 적용 가능함을 시사하는 바이다. 뿐만 아니라, 기하 증명을 처음 배우는 2학년 학생들의 93.6%와 3학년 학생들의 74.8%가 수준 2 이하에서 사고하는 것으로 나타났는데, 이 학생들은 증명을 이해하기 어려울 것으로 생각된다. 또한 Van Hiele's 수준과 준 level에 속하는 9명의 학생을 선택하여 몇 차례의 임상 면담을 실시하였다. 면담 시

이 학생들의 초기 수준은 대부분 Van Hiele level test의 경우보다 낮은 수준 1이나 2를 보이는 것으로 밝혀졌으며, 학생들의 수준은 여러 차례의 면담을 통하여 더 높은 수준으로 향상되기도 했다. 또한, 학생들은 부정확한 용어를 사용하거나 늘 보아왔던 도형의 모양에 의존하여 사고하는 것으로 보인다. 학생들은 이러한 문제점들 때문에 기하 개념을 향상시키는데 어려움을 겪기도 하고 선행 학습에 의하여 방해를 받기도 했다. 그러므로 학생들은 기하 수준을 향상시킬 수 있는 다양한 비형식 기하를 경험할 필요가 있다. 특히, 임상 면담에서의 각 Module의 내용 중 학생들의 기하 개념의 형성을 도울 수 있는 자료들을 교편물로 이용하는 것이 효과적일 것이다.

박지혜(2000,[5])는 서울시 서초구 내 위치한 1개 S중학교 2, 3학년 470명을 선정하여 Van Hiele level test를 실시하였다. 이 중 Van Hieles 이론을 적용할 수 있는 학생의 분포는 약 80.64%였다. 이는 지금까지 우리나라 학생들을 대상으로 한 다른 연구와 유사하며 Van Hieles 이론이 우리나라 중학생의 기하학적 인지 발달 수준을 연구하는데 의미 있다는 것을 말한다. 연구대상자들의 Van Hieles 수준 분포에 있어서 4/5기준으로 2학년은 수준 1, 2, 3, 4가 각각 26.88%, 19.35%, 36.56%, 2.15%로 나타났으며 수준 1에 못 미치는 수준 0에 해당하는 학생들도 15.05%나 된다. 3학년의 경우는 9.84%, 16.06%, 51.30%, 15.03%가 각 수준에 해당하고 7.77%가 수준 0에 해당된다.

서지현(2005, [6])는 D중학교 100명, Y중학교 150명 모두 250명의 검사지를 분석한 결과 학생들은 1수준, 2수준, 3수준에 주로 분포하였고, 전체 250명 중 논리적인 추론이 가능한 3수준, 4수준의 학생이 95명으로 38%밖에 되지 않으므로 나머지 62%의 학생들은 실제로 학교에서 증명단원을 공부하는데 많은 장애를 겪을 것으로 예상된다.

위의 연구 결과를 종합해 보면 다수의 학생들의 기하 수준은 3이하이므로 교과서에서 다루는 기하 내용의 수준에 못 미치고 있음을 알 수 있다. Van Hiele's 기하 학습 수준 이론에 따르면 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준에 도달할 수 없으므로 수준을 차례로 거쳐 발달한다. 또한 모든 학생이 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것도 아니기 때문에 서로 다른 수준의 사람은 수준의 차이 때문에 서로 이해할 수 없음을 알 수 있다. 즉 교과서의 수준에 맞게 교사가 수업을 진행하게 되면 그 수준과 다른 학생들은 학습함에 어려움이 발생하게 된다. 따라서 효율적인 기하 교수가 이루어지기 위해서 학생들의 수준을 높일 수 있는 기하 교육과정이 필요하다. 학생들은 다양한 경험을 통해 도형의 여러 성질 사이의 관련성 또는 여러 가지 도형 사이의 관련성을 탐구하고 조직함으로써 수학적으로 사고하고 연역적으로 추론하는 힘을 기를 수 있다. 그러므로 교사는 일방적인 설명식 수업이 아닌 구체적이고 다양한 활동을 통해서 학생들의 실질적인 수학적 사고 활동을 자극할 수 있도록 해야 한다.

2.2 분석법에 대한 고찰

2.2.1. 수학적 발견술의 역사

발견술이란 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 실제적인 문제해결에서 전형적으로 유용한 발견과 발명의 방법과 규칙, 실제적인 발견과 발명의 전략과 전술이며, 이를 찾는 것은 인류의 오랜 꿈 가운데 하나이었다. 발견술은 주어진 문제의 해답을 발견하는 데 도움을 주지만, 그에 따라 사고한다고 하여 문제의 해결이 보증되는 것은 아니며, 해답이 발견되었다고 하더라도 그것이 옳다는 것을 보증해주지도 않는다.

발견술에 대한 연구는 그리스 시대까지 거슬러 올라가는 오랜 역사를 가지고 있다. 수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 오래 전부터 사용되어 온 방법이 분석법이다. 분석법은 기원전 6세기 경에 Pythagoras학파의 수학자들에 의해 사용되었으며 Platon에 의해 그 중요성이 강조되었다고 하는데, 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기 경의 그리스 수학자 Pappus이다. Pappus에 의해 분석법이 제시된 이래 20세기 초까지 수학적인 발견과 발명의 방법, 문제해결에 전형적으로 유용한 사고 조작 곧, 발견술의 규명은 Descartes, Leibnitz, Bolzano 등 많은 수학자들의 끊임없는 도전의 대상이었으며 소망스런 꿈이었다. Descartes는 문제를 해결하는 보편적인 방법을 제시하려고 노력하였고 Leibnitz는 모든 문제를 해결할 수 있는 일반적인 알고리즘을 찾으려는 시도를 하였으며 Bolzano는 문제해결에서 문제를 분명히 이해할 것과 사람은 여러 가지 아이디어에 동시에 주의를 집중하기 어렵다는 점을 고려하여 문제와 관련된 모든 것을 기록할 것을 권하였으며 적절한 기호를 선택할 것과 문제를 해결하는

동안에는 강한 감각적 자극을 피할 것 그리고 분석법과 종합법을 모두 구사하면서 미지인 것과 주어진 조건의 양 끝에서 동시에 사고할 것을 권하였다. 그러나 그간의 노력에도 불구하고 주지하는 바와 같은 《Euclid원론》식의 ‘형식적인’ 수학 교육이 2천년 여 동안 지속되어 왔음은 문제해결 교육의 역사적 현실을 이해할 수 있게 한다.

20세기 중반에 들어와 거의 주목받지 못하고 잊혀져 가던 발견술을 교육적 측면에서 부흥시킨 수학 교육자가 Polya이다. Polya는 훌륭한 교육은 학생들에게 독자적인 발견의 기회를 체계적으로 제공하는 것이라고 보고, ‘수학적인 발견은 어떻게 이루어지며 문제는 어떻게 해결되는가’라는 문제를 교육적 입장에서 연구하여, 발견 발명의 방법과 그 교육 방법에 대한 체계적인 설명을 시도하였다. ([7],[8])

2.2.2. 분석-종합법

수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 가장 오래 전부터 사용되어 온 방법이 분석법이다. 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기경의 그리스 수학자 Pappus이다. 그리스의 분석법은 기하학에서 정리의 증명법을 찾아내는 데 한정되어 있었으나, 이를 대수 곧 방정식을 이용한 문제해결 방법으로 확장하여 현대수학 나아가 과학발전에 지대한 영향을 미치게 된 것은 Descartes에 의해서이다. 알고리즘화 된 산술과 대수는 그 자체가 발견과정인면서 정당화의 과정이 되는 강력한 문제해결 방법이다. ([7])

다음은 분석법에 대해서 Pappus의 보고서([17])를 의역한 것이다.

“간단히 말해서, 소위 발견술이란 일반 원론을 공부한 후에, 수학 문제를 푸는 능력을 얻고자 하는 사람들이 사용하도록 하기 위한 특별한 가르침이며, 오직 이것에만 쓰일 수 있는 것이다. 그것은 원론의 저자인 유클리드와 페르가의 아폴로니우스, 그리고 형인 아리스테우스 세 사람의 연구 결과이다. 그것은 분석과 종합의 과정을 가르친다.”

“분석에서는, 요구되고 있는 것으로부터 시작하며, 요구되고 있는 것이 옳다고 가정하고 그 결과로부터 다시 결과를 이끌어 내어, 종합에서 출발점으로 사용할 수 있는 점에 도달할 때까지 계속한다. 분석에서는 하도록 요구되고 있는 것을 이미 이루어진 것처럼(구하고 있는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼) 가정하는 것이다. 선행하는 어떤 것으로부터 바라는 결과가 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자의 선행자는 무엇인가 묻기를 계속하여, 결국 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 이르게 된다. 이러한 절차는 분석 또는 거꾸로 풀기, 또는 역행적 추론이라고 부른다.”

“그러나 종합에서는 그 과정을 반대로 하여, 분석에서 제일 마지막에 도달한 점, 즉 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것으로부터 시작한다. 그로부터 분석에서 그에 선행한 것을 이끌어내며, 분석 과정을 되밟아가면서 마지막에 요구하고 있는 것에 도달할 때까지 그러한 연역 과정을 계속한다. 이러한 절차를 종합 또는 구성적 풀이 또는 전진적 추론이라고 부른다.”

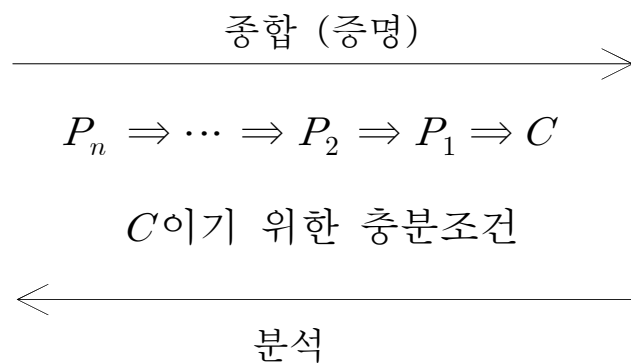
“그런데 분석에는 두 종류가 있다. 그 하나는 '증명 문제'의 분석으로 참인 정리를 만드는데 목적이 있다. 다른 하나는 '답을 구하는 문제'의 분석으로, 미지인 것을 구하는 데 목적이 있다.” ([8])

위의 내용을 정리해 보면 분석에서는 결론이 성립한 것으로 가정하고

그로부터 유도될 수 있는 명제를 탐색하고 또 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 탐색하기를 반복하여 이미 알고 있는 전제조건에 도달하게 된다. 종합은 분석의 과정을 거꾸로 하여 가정한 명제로부터 시작하여 마지막에 결론에 도달하는 연역과정이다. 즉, 분석은 풀이계획을 발견·발명하는 사고과정이고 종합은 그 계획을 실행하는 과정이다.

2.2.3. 기하 증명에서의 분석-종합법

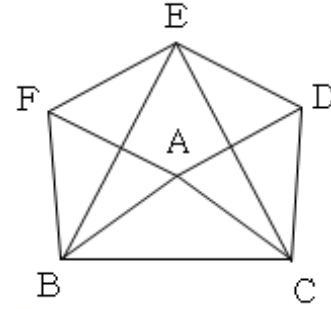
기하 증명에서의 분석법은 보이고자 하는 것을 성립한 것으로 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하고 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속 반복하여 이미 가정한 명제에 도달하는 방법을 생각할 수 있다. 다시 말하면, 결론이 성립할 (필요)충분조건을 거둬 찾아 가는 방법이다. 종합법은 분석에서 이루어진 계획을 거꾸로 실행하는 과정으로, 주어진 가정으로부터 논리적으로 추론을 거쳐 선형적으로 결론에 도달한다.



다음은 분석-종합법을 이용한 증명방법의 예를 제시한다.

(예시1)

오른쪽 그림과 같이 $\angle A \neq 60^\circ$ 인 임의의 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 그리고 각 꼭지점을 각각 D, E, F라고 할 때, 사각형 ADEF는 평행사변형임을 증명하여라.



이 명제의 증명 방법을 생각하기 위해서는 먼저 다음과 같은 몇 가지 사실을 알고 있어야 한다. 우선 평행사변형의 정의와 그 필요충분조건인 성질을 알고 있어야 한다. 평행사변형이란 두 쌍의 대변이 각각 평행인 사각형이며, 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 같다는 성질을 갖고 있다. 그리고 다각형의 변의 길이나 각의 크기가 같음을 보이려면 대부분의 경우 삼각형의 합동이나 닮음을 이용해야 하며, 그렇게 하기 위해서 보조선을 그을 필요성이 생기게 된다. 이런 이유로 Euclid기하학을 ‘보조선 방법’을 사용하는 ‘삼각형 기하학’이라고도 한다. 다음은 이 명제에 대한 분석과정이다.

사각형 ADEF가 평행사변형이라고 가정하자. 사각형 ADEF가 평행사변형이 되기 위한 (필요)충분조건은

$$\overline{AF} = \overline{DE}, \overline{AD} = \overline{EF}.$$

여기서 $\overline{AF} = \overline{DE}$ 이기 위한 (필요)충분조건은, $\overline{AF} = \overline{AB}$ 이므로

$$\triangle ABC \equiv \triangle CED$$

그리고 $\triangle ABC \equiv \triangle CED$ 이기 위한 (필요)충분조건은

$$\overline{BC} = \overline{CE}, \overline{CA} = \overline{CD}, \angle DCE = \angle ACB$$

가정에 의해 $\triangle ACD$ 와 $\triangle BCE$ 는 정삼각형이므로 $\overline{BC} = \overline{CE}$, $\overline{CA} = \overline{CD}$ 와 $\angle ACD = \angle ECB = 60^\circ$ 이다. 그리고 $\angle ECA$ 는 공통이므로 $\angle DCE = \angle ACB$ 성립한다. 따라서 이 명제는 참이다. $\overline{AD} = \overline{EF}$ 에 대해서도 마찬가지로 방법으로 생각해 볼 수 있다.

이상과 같은 분석과정을 거꾸로 되밟아 결론에 도달하는 종합이 곧 증명이다.

주어진 조건에 의해

$$\overline{BC} = \overline{CE}, \quad \overline{CA} = \overline{CD}$$

$\angle ACD = \angle ECB = 60^\circ$ 이고 $\angle ECA$ 는 공통이므로

$$\angle DCE = \angle ACB$$

따라서 삼각형의 합동조건에 의해

$$\triangle ABC \equiv \triangle CED$$

$$\therefore \overline{AF} = \overline{DE}$$

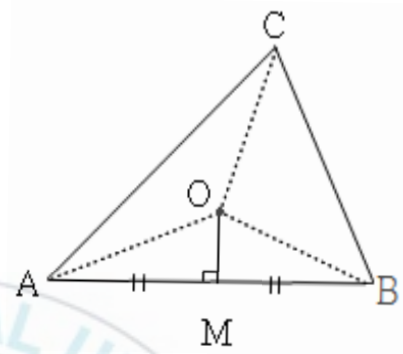
마찬가지 방법으로

$$\overline{AD} = \overline{EF}$$

따라서 사각형 ADEF는 평행사변형이다. ([7])

(예시2)

오른쪽 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선의 교점을 O라 할 때, $\overline{OA} = \overline{OB}$ 임을 증명하여라.



[가정] ① $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AM} = \overline{BM}$

② $\angle AMO = 90^\circ$

[결론] ③ $\overline{OA} = \overline{OB}$ (구하는 것)

<분석적 사고 활동>

④ $\overline{OA} = \overline{OB}$ 가 성립함을 보이려면 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 를 포함하는 합동인 삼각형이 있으면 충분하므로 $\triangle AMO$ 와 $\triangle BMO$ 를 생각해 보자.

⑤ $\triangle AMO$ 와 $\triangle BMO$ 가 $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$ 임을 보이려면 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이고, $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ 이며 $\overline{OM}$ 이 공통인 변이므로, 대응하는 두 변과 그 끼인각이 (SAS합동에 따라 사고) 같으면 된다.

$\Rightarrow$ 분석적 사고 활동을 통한 다음 종합적으로 기술

< 종합적 사고 활동 >

⑥ $\triangle AMO$ 와 $\triangle BMO$ 에서 $\overline{AM} = \overline{BM}$ (가정 ①에 의해서)

⑦ $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ (가정 ②에 의해서)

⑧ $\overline{OM}$ 은 공통인 변이므로

⑨ ⑥, ⑦, ⑧에 의해 두 삼각형은 합동이다.

즉, $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$ (SAS합동)

⑩ 그러므로 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 증명 끝. ([11])

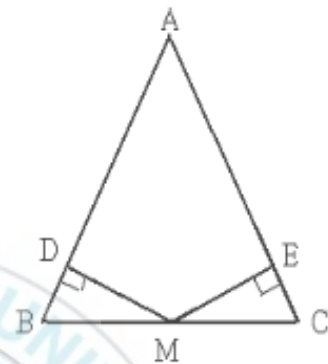
(예시3)

$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형에서 밑변 BC의 중점 M에서 두 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{MD} = \overline{ME}$ 임을 증명하여라.

주어진 것(조건) : $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{MD} \perp \overline{AB}$, $\overline{ME} \perp \overline{AC}$

구하는 것(결론) : $\overline{MD} = \overline{ME}$



이 문제의 해결 탐색 과정에서 가장 먼저 생각할 수 있는 것은 주어진 것들로부터 우리가 구하는 것을 증명할 수 있는 가를 알아보는 것이다.

학생들이 문제를 풀기 위해 어떤 탐색이 가능한가?, 결론을 위해서 무엇을 알아야 하는가?, 또는 결론을 증명하기 위해서 무엇을 증명해야 하는가? 등을 생각해 볼 수 있다.

즉 이 문제는 결론으로부터 문제 해결 과정의 탐색이 시작된다. 이 때 가능한 대답들 중에서 결론을 증명하기 위해 $\overline{MD} = \overline{ME}$ 를 보이면 충분하다.

그러면 $\overline{MD} = \overline{ME}$ 를 증명하기 위해서 무엇을 보여야 하는가?

$\overline{MD}$, $\overline{ME}$ 를 포함하는 합동인 삼각형이 있으면 충분하다.

그러면 두 삼각형 $\triangle MBD$ 와 $\triangle MCE$ 가 합동임을 보이기 위해 무엇을 알아야 하는가? $\angle B = \angle C$, $\overline{MB} = \overline{MC}$ 이면 된다.

이등변삼각형 ABC의 두 밑각의 크기가 같기 때문에 $\angle B = \angle C$ 이고, $\overline{MB} = \overline{MC}$ 이다.

또 $\triangle MBD$ 와 $\triangle MCE$ 는 직각삼각형이므로 $\angle MDB = \angle MEC = 90^\circ$ 이다.

이와 같은 분석적 방법을 통해서 증명 해결의 실마리를 찾을 수 있다.

이제 풀이 과정을 종합적 방법으로 기술해 보자.

$\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle B = \angle C$ 이다.

따라서 $\angle MDB = \angle MEC = 90^\circ$ (가정), $\overline{MB} = \overline{MC}$ 이므로 직각삼각형의

합동조건에 의해서 $\triangle MBD \equiv \triangle MCE$ 이다. 그러므로 $\overline{MD} = \overline{ME}$ 이다.

([3])



Ⅲ. 설문조사 방법 및 결과 분석

3.1. 설문조사 절차 및 내용

3.1.1. 설문조사 절차

중학교 3학년 과정을 배운 후, 학생들은 수학 교과에 대해서 어떤 생각을 가지고 있는지 특히, 도형의 증명에 대한 인식정도와 학습방법을 조사하기 위하여 중학교 3학년 학생들을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 설문조사는 9-나 도형영역을 배운 직후인 2007년 12월에 교육환경과 지역을 고려하여 울산광역시 북구 소재인 H중학교(편의상 A학교) 3학년 3학급 108명, 부산광역시 서구 소재인 J중학교(편의상 B학교) 3학년 3학급 97명으로, 총 205명을 대상으로 하였다.

3.1.2. 설문조사 내용

중학교 3학년 학생들을 대상으로 실시한 설문조사 내용은 다음과 같다.

[문항1] 수학 교과를 공부하는 것이 재미있습니까?

[문항2] 수학 공부를 통해서 논리적인 사고력을 키울 수 있다고 생각합니까?

[문항3] 도형에 대한 성질을 공부함에 있어서 "도형의 성질 증명"부분이 필요하다고 생각합니까?

[문항4] 다른 영역과 비교해볼 때 도형의 증명이 어렵다고 생각합니까?

[문항4-1] 위 문항에서 ①(매우 그렇다), ②(그렇다)을 선택한 경우,
 그 이유는 무엇입니까?
 [문항5] 교과서에 제시된 도형의 증명과정을 어느 정도 이해합니까?
 [문항6] 도형의 증명문제를 어떻게 공부합니까?
 [문항7] (피타고라스의 정리, 원) 단원을 배운 소감을 간단히 적어주시기
 바랍니다.

3.2 설문조사 결과 분석

다음은 학생들이 수학 교과에 대해서 어떤 생각을 가지고 있는지 특히, 도형의 증명에 대한 인식정도와 학습방법에 대하여 연구자가 직접 작성한 조사지로 설문한 결과를 정리한 것이다. 통계처리는 설문지 각 문항에 대하여 응답자의 도수, 백분율을 Micro - Excel을 이용하였다.

학생들의 수학 교과에 대한 흥미도에 대한 결과는 [표7]에 정리한 것과 같다. 이하의 괄호는 모두 응답자의 백분율이고, 소수점 둘째자리에서 반올림하였다.

[표7] 수학 교과에 대한 흥미도 (단위:명)

구분	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다	총계
A학교	14(13.0)	15(13.9)	35(32.4)	28(25.9)	16(14.8)	108(100.0)
B학교	6(6.2)	16(16.5)	37(38.1)	19(19.6)	19(19.6)	97(100.0)
총계	20(9.8)	31(15.1)	72(35.1)	47(22.8)	35(17.2)	205(100.0)

두 학교는 큰 차이가 없으며 전체적으로 살펴보면 긍정적인 대답을 한 학생은 24.7%, 부정적인 대답을 한 학생은 40.0%이다. 그리고 매우 재미있다고 답한 학생은 9.8%에 불과하였다. 따라서 수학교과에 대해 흥미도가 적은 학생들이 더 많음을 알 수 있다.

수학학습을 통해서 사고력 향상에 대한 인식정도는 [표8]에 나타낸 것과 같다.

[표8] 수학학습을 통한 사고력 향상에 대한 인식 (단위:명)

구분	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다	총계
A학교	13(12.0)	25(23.2)	39(36.1)	20(18.5)	11(10.2)	108(100.0)
B학교	7(7.2)	26(26.8)	43(44.4)	17(17.5)	4(4.1)	97(100.0)
총계	20(9.7)	51(25.0)	82(40.2)	37(18.0)	15(7.1)	205(100.0)

두 학교의 차이는 다소 없으며 전체적으로 수학학습을 통해서 사고력을 향상시킬 수 있다고 응답한 학생은 34.7%이고, 사고력을 향상시킬 수 없다고 응답한 학생은 25.1%이므로 수학학습을 통해서 사고력을 향상시킬 수 있다고 생각하는 학생들이 더 많다고 할 수 있다.

다음의 [표9]는 도형의 증명에 대한 필요성에 대한 인식정도를 정리한 것이다.

[표9] 도형의 증명에 대한 필요성에 대한 인식 (단위:명)

구분	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다	총계
A학교	12(11.1)	12(11.1)	37(34.3)	30(27.8)	17(15.7)	108(100.0)
B학교	4(4.1)	25(25.8)	35(36.1)	19(19.6)	14(14.4)	97(100.0)
총계	16(7.6)	37(18.4)	72(35.2)	49(23.7)	31(15.1)	205(100.0)

매우 그렇다라고 응답한 학생의 수는 B학교(4.1%)보다 A학교(11.1%)의 학생들이 더욱 많음을 알 수 있다. 하지만 긍정적인 응답에 대한 두 학교의 학생의 수는 큰 차이가 없다. 전체적으로 살펴보면 도형의 증명이 필요하다고 응답한 학생은 26.0%이고, 필요하지 않다고 응답한 학생은 38.8%이다. 도형의 증명의 필요성에 대해서 부정적으로 생각하는 학생이 더 많음을 알 수 있다. 따라서 학생들에게 도형의 증명을 배워야하는 이유에 대해서 언급할 필요가 있을 것이다.

[표10] 도형의 증명에 대한 난이도 (단위:명)

구분	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다	총계
A학교	15(13.9)	29(26.9)	41(38.0)	16(14.8)	7(6.5)	108(100.0)
B학교	20(20.6)	33(34.0)	31(32.0)	10(10.3)	3(3.1)	97(100.0)
총계	35(17.2)	62(30.4)	72(35.0)	26(12.6)	10(4.8)	205(100.0)

위의 [표10]은 도형의 증명에 대한 난이도를 묻는 문항에 대한 결과를 나타낸 것이다. A학교와 B학교 모두 도형의 증명이 어렵다고 생각하는 학생이 그렇지 않은 학생보다 더 많은 것으로 판단된다. 특히 B학교의 경우 그렇지 않다고 답한 학생이 13.4%에 불과하므로 A학교보다 B학교의 학생들이 도형의 증명을 더욱 어려워함을 알 수 있다. 도형의 증명이 어렵다고 답한 학생에 한해 ‘어려운 원인이 무엇인가’라는 질문에 대한 결과는 아래의 [표11]과 같다.

[표11] 도형의 증명에 대한 난이도의 원인 (단위:명)

구분	A학교	B학교	총계
기호, 용어가 어렵다.	3(6.8)	5(9.4)	8(8.1)
추상적이다.	6(13.6)	5(9.4)	11(11.5)
어떤 조건을 적용해야 하는지 모르겠다.	27(61.4)	28(52.9)	55(57.2)
기초지식이 충분하지 않다.	1(2.3)	5(9.4)	6(5.8)
무엇을 증명해야 하는지 정확히 파악이 되지 않는다.	6(13.6)	7(13.2)	13(13.4)
기타	1(2.3)	3(5.7)	4(4.0)
총계	44(100.0)	53(100.0)	97(100.0)

A학교와 B학교의 대다수 학생(A학교 : 61.4%, B학교 : 52.9%)이 도형의 증명을 공부함에 있어서 어떤 조건을 적용해야 하는지 모르기 때문에 증명이 어렵다고 응답하였고, 그 다음으로는 ‘무엇을 증명해야 하는지 정확히 파악이 되지 않는다’라고 응답한 학생이 많았다(A학교 : 13.6%, B학교 : 13.2%).

따라서 증명과정의 필연성을 알게 된다면 증명을 이해하는데 많은 도움이 될 것이다. 이로부터 현재 학교에서 이루어지고 있는 연역적 증명지도에 대한 변화가 필요함을 알 수 있다. 그리고 명제에서 가정과 결론이 무엇인지 명확히 구분하여 설명할 필요가 있다.

교과서에 제시된 도형의 증명과정을 어느 정도 이해합니까? 라는 질문에 대한 결과는 [표12]와 같다.

[표12] 도형의 증명에 대한 이해도 (단위:명)

구분	A학교	B학교	총계
스스로 서술할 수 있다.	18(16.7)	3(3.1)	21(9.9)
스스로 서술할 수는 없지만 모두 이해한다.	33(30.6)	21(21.7)	54(26.1)
어느 정도 이해한다.	40(37.0)	55(56.7)	95(46.9)
모두 이해하지 못 한다.	10(9.2)	11(11.3)	21(10.3)
문제자체도 이해하지 못 한다.	7(6.5)	7(7.2)	14(6.8)
총계	108(100.0)	97(100.0)	205(100.0)

A학교의 경우에는 52.7%의 학생들이 교과서에 제시된 증명과정을 제대로 이해하지 못하는, 즉 완전한 학습을 이루지 못하고 있음을 알 수 있다. B학교의 경우에는 A학교보다 더 많은 학생들(75.2%)이 증명과정을 모두 이해하지 못한다고 한다. 특히, 문제 자체도 이해하지 못하는 학생들(6.8%)도 적지 않음을 알 수 있다. 이는 도형의 증명에 대해 제대로 이해하지도

못한 채 다음 단계 과정을 배우고 있음을 학생들 스스로 판단하고 있음을 말해준다. 이를 Van - Hiele's 기하 학습 수준 이론에 기초하여 생각하면 학생들의 수준이 교과과정에서 다루고 있는 수준에 도달하지 않았음에도 불구하고 교과지도가 이뤄지고 있기 때문에 학생들은 도형의 증명에 대해서 더욱 어려움을 겪을 수 밖에 없음을 파악할 수 있다.

다음의 [표13]은 도형의 증명문제를 어떻게 공부하느냐는 질문에 대한 학생들의 응답결과를 나타낸 것이다.

[표13]도형의 증명에 관한 학습방법에 대한 인식 (단위:명)

구분	A학교	B학교	총계
스스로 새로운 증명 방법 서술하려 노력한다.	9(8.3)	2(2.1)	11(5.4)
조건을 생각하며 증명을 이해한다.	40(37.0)	28(28.9)	68(33.2)
어느 정도 이해하고 암기한다.	33(30.6)	43(44.3)	76(37.1)
무조건 암기한다.	18(16.7)	13(13.4)	31(15.1)
무조건 공부하지 않는다.	8(7.4)	11(11.3)	19(9.2)
총계	108(100.0)	97(100.0)	205(100.0)

A학교와 B학교의 경우 모두 대다수 학생들(A학교:75.9%, B학교:75.3%)이 기존에 제시된 증명방법을 이해하거나, 어느 정도 이해하고 암기한다고 응답하였다. 하지만 증명과정에서 활용된 조건을 이해하는 학생들에 비해서 많은 학생들이 암기식 학습방법 선택하고 있음을 알 수 있다. 특히 증명문

제는 무조건 공부하지 않는다는 극단적인 반응을 보이는 학생들도 적지 않음을 파악할 수 있다.

피타고라스의 정리, 원 단원을 배운 소감에 대한 학생들의 응답을 분석한 결과는 다음과 같다.

[표14] 도형단원을 배운 소감 (단위:명)

		A학교	B학교	총계
긍정적인 반응	재미있다.	8(10.0)	11(13.6)	19(11.8)
	흥미롭다.	7(8.7)	7(8.7)	14(8.7)
	쉽다.	7(8.7)	10(12.3)	17(10.5)
부정적인 반응	어렵다.	41(51.2)	39(48.1)	80(49.7)
	실용성이 없다.	1(1.3)	3(3.7)	4(2.5)
	필요성을 모르겠다.	3(3.8)	3(3.7)	6(3.7)
	재미없다.	12(15.0)	5(6.2)	17(10.6)
기타		1(1.3)	3(3.7)	4(2.5)
총계		80(100.0)	81(100.0)	161(100.0)

[표14]에서와 같이 도형영역의 단원을 배우고 난 소감으로 A학교는 51.2%, B학교는 48.8%의 학생들이 어렵다는 부정적인 반응을 보였고, 그 중 원의 성질이 피타고라스의 정리보다 더욱 어려웠다는 대답이 대다수였다. 특히, 기타 의견으로 “피타고라스는 대단하다”, “귀찮았다”, “어려웠지만 뿌듯했다” 등이 있었다.

IV. 분석-종합법을 이용한 증명 방법에 대한 연구

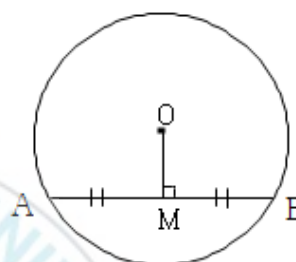
4.1 분석-종합법을 이용한 기하 증명의 예

예시1. 원 O에서 현AB에 내린 수선의 발을 M이라

하면, $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이 성립함을 보여라.

가정 : $\overline{AB} \perp \overline{OM}$

결론 : $\overline{AM} = \overline{BM}$



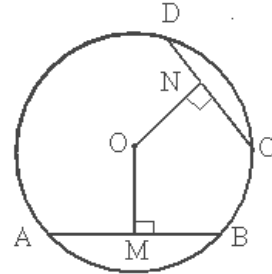
분석법	보이고자 하는 결론은 $\overline{AM} = \overline{BM}$이다. 따라서 $\overline{AM} = \overline{BM}$이 성립하기 위해서는 $\overline{AM}$, $\overline{BM}$을 포함하는 합동인 삼각형이 있으면 충분하다. 보조선 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 그어서 $\triangle OAM$와 $\triangle OBM$을 생각해보자. 이제 두 직각삼각형에 대해서 $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$이 성립하려면 직각삼각형의 합동조건에 따라서 $\overline{OM}$은 공통이므로 $\overline{OA} = \overline{OB}$이 성립함만 보이면 된다. 그런데 이는 원의 반지름으로써 성립한다.
종합법	보조선 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$을 그으면 $\triangle OAM$와 $\triangle OBM$에서 $\begin{aligned} \angle OMA &= \angle OMB = 90^\circ \\ \overline{OA} &= \overline{OB} (\text{반지름}) \\ \overline{OM} &\text{은 공통} \end{aligned}$ 이므로 $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ 따라서 $\overline{AM} = \overline{BM}$

예시2 . 원 O 위의 두 현 AB, CD에 대하여 중심O에서 두 현에 내린 수선의 발을 M, N이라 하자.

$\overline{OM} = \overline{ON}$ 이면 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 임을 보여라.

가정 : $\overline{AB} \perp \overline{OM}$, $\overline{CD} \perp \overline{ON}$, $\overline{OM} = \overline{ON}$

결론 : $\overline{AB} = \overline{CD}$

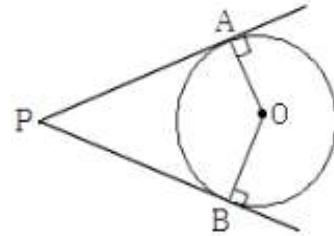


분석법	보이고자 하는 결론은 $\overline{AB} = \overline{CD}$이다. 하지만 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이미 알고 있다. 따라서 $\overline{AB} = \overline{CD}$이 성립하기 위해서는 $\overline{AM} = \overline{CN}$ 임을 보이면 된다. 그렇다면 $\overline{AM}$, $\overline{CN}$을 포함하는 합동인 삼각형이 있으면 충분하다. 따라서 보조선 $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ 를 그어서 $\triangle OAM$과 $\triangle OCN$에 대해 생각해 보자. 이제 $\triangle OAM \equiv \triangle OCN$ 임을 보이기 위해서 두 삼각형은 직각삼각형이므로 직각삼각형 합동조건에 따라서 $\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OM} = \overline{ON}$ 임을 보이면 된다. 그런데 $\overline{OA}$와 $\overline{OC}$는 원의 반지름으로 같고, $\overline{OM}$과 $\overline{ON}$은 가정에 의해서 같다.
종합법	보조선 $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ 을 그으면 $\triangle OAM$과 $\triangle OCN$ 에서 $\angle OMA = \angle ONC = 90^\circ$ $\overline{OA} = \overline{OC} \text{ (원의 반지름)}$ $\overline{OM} = \overline{ON} \text{ (가정)}$ 이므로 $\triangle OAM \equiv \triangle OCN$ 따라서 $\overline{AM} = \overline{CN}$ $\overline{AB} = 2\overline{AM}, \overline{CD} = 2\overline{CN} \text{ 이므로 } \overline{AB} = \overline{CD}$

예시3. 원 O의 외부에 있는 점 P에서 원 O에 그은 접선의 접점을 A, B라 하자. $\overline{AP} = \overline{BP}$ 임을 보여라.

가정 : $\overline{AP} \perp \overline{OA}$, $\overline{BP} \perp \overline{OB}$ (접선)

결론 : $\overline{AP} = \overline{BP}$

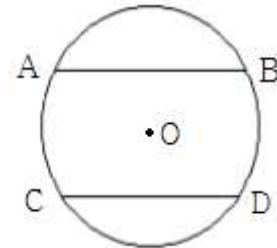


분석법	보이고자 하는 결론은 $\overline{AP} = \overline{BP}$이다. 그렇다면 $\overline{AP} = \overline{BP}$이 성립하기 위해서는 $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$가 대응변이 되도록 하는 합동인 두 삼각형이 있으면 된다. 따라서 보조선 $\overline{PO}$를 그으면, $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$를 포함하는 두 삼각형 $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$를 만들 수 있다. 접선의 성질에 의해서 이 두 삼각형은 직각삼각형이다. 따라서 $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$이 성립하기 위해서는 직각삼각형의 합동조건에 따라서 $\overline{PO}$는 공통이므로 $\overline{OA} = \overline{OB}$이 성립함을 보이면 된다. 하지만 $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$는 원의 반지름으로 같다.
종합법	보조선 $\overline{PO}$를 그으면 $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서 $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ $\overline{PO}$는 공통 $\overline{OA} = \overline{OB}(\text{반지름})$ 이므로 $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$ 따라서 $\overline{AP} = \overline{BP}$

예시4. 원 O의 두 현 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이면 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ 임을 보여라.

가정 : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

결론 : $\widehat{AC} = \widehat{BD}$



분석법	보이고자 하는 결론은 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$이다. $\widehat{AC} = \widehat{BD}$이 성립하기 위한 필요충분조건은 ‘두 호의 중심각의 크기가 서로 같다’이다. 즉, $\angle AOC = \angle BOD$이다. 호에 대한 중심각은 원주각의 2배이므로 보조선 $\overline{BC}$를 그으면, $\angle ABC$는 호AC의 원주각이 되어 $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$을 만족하고, 마찬가지로 호BD에 대해서 $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$이 성립한다. 따라서 $\angle AOC = \angle BOD$이 성립하기 위한 필요충분조건은 $\angle ABC = \angle BCD$이다. 그런데 가정에 의해 서로 엇각이므로 $\angle ABC = \angle BCD$이 성립한다.
종합법	보조선 $\overline{BC}$를 그으면 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이기 때문에 $\angle ABC = \angle BCD \text{ (엇각)}$ 따라서 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 두 배이므로 $\angle AOC = \angle BOD$ 즉 두 호의 중심각이 서로 같다. 따라서 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

4.2 분석-종합법을 이용한 기하 증명 교수-학습 지도안

1. 단원명

가. 대단원 : Ⅲ. 원

나. 중단원 : 1. 원과 직선

다. 소단원 : 1. 원과 현

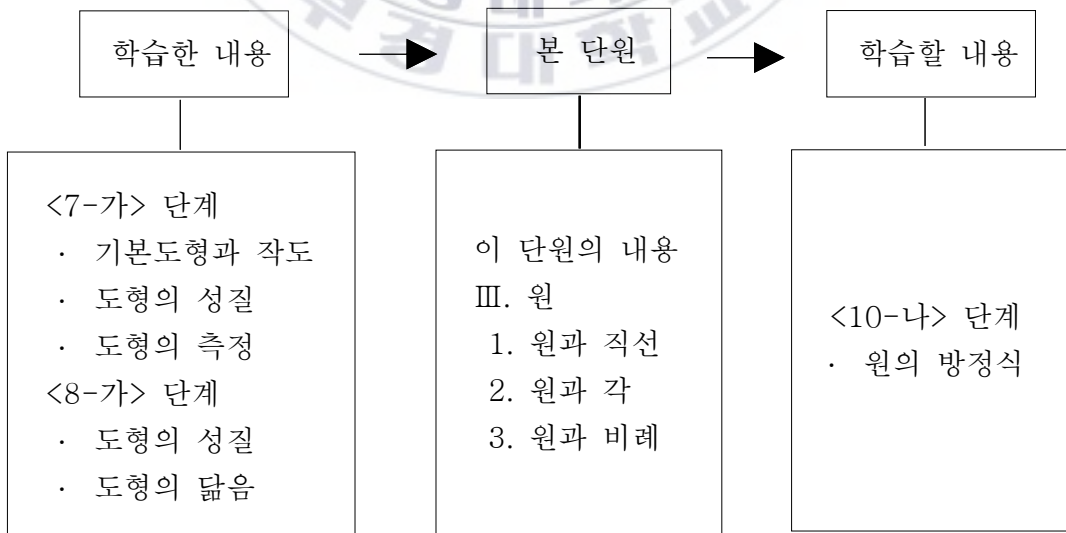
2. 단원의 목표

가. 원에서 현과 접선에 관한 성질을 이해하고, 이를 증명할 수 있다.

나. 원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 또, 원에 내접하는 사각형의 성질과 접선과 현이 이루는 각에 관한 성질을 안다.

다. 원과 두 직선, 접선과 할선이 만나서 생기는 선분의 길이의 비를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

3. 단원의 구조



4. 단원 지도상 유의사항

- 가. 학생들이 내용에 알맞은 그림을 정확하게 그릴 수 있도록 지도한다.
- 나. 7단계에서 학습한 정리 「원의 접선은 반지름에 수직이다」를 간단히 증명해 보인다.
- 다. 삼각형은 반드시 원에 내접, 외접하지만 사각형은 꼭 그렇지만은 않음을 알도록 지도한다.
- 라. 원에 내접하는 사각형의 성질의 증명은 간단히 다루고, 활용에 중점을 둔다.
- 마. 원과 비례에 관한 성질의 증명은 간단히 다루고, 활용에 중점을 둔다.
- 바. 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 접하는 직선, 즉 접선을 그을 수 있음을 직관적으로 이해하도록 지도한다.

5. 단원 지도 계획

중단원	소단원	차시	지도내용
1.원과 직선	1.원과 현	1~3	현의 성질
	2.원의 접선	4~5	접선의 성질 접선의 길이
	중단원 정리	6	연습문제 풀이
2.원과 각	1.원주각	7~10	원주각과 중심각 원주각과 호의 길이 네점이 한 원 위에 있을 조건
	2.원에 내접하는 사각형의 성질	11~12	원에 내접하는 사각형 사각형이 원에 내접할 조건
	3.접선과 현이 이루는 각	13	접선과 현이 이루는 각
	중단원 정리	14	연습문제 풀이

3. 원과 비례	1. 원과 비례	15~16	원에서의 비례 관계 네 점이 한 원 위에 있을 조건
	2. 할선과 접선	17	접선과 할선의 선분의 길이의 비
	중단원 정리	18	연습문제 풀이
	단원 마무리	19	단원 마무리 문제 풀이

6. 차시별 학습 지도 계획

가. 학습 주제 : 원과 현

나. 학습 목표 : 원에서 현에 관한 성질을 안다.

다. 학습 구조

전시 학습 내용	분시 학습 내용	차시 학습 내용
<7-나> 단계 · 원과 부채꼴 대해 안다. · 원과 직선의 위치관계를 안다. · 삼각형의 합동 조건을 안다. <8-나> 단계 · 삼각형의 성질과 내접 원, 외접원을 안다.	· 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다. · 한 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.	· 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다. · 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

라. 지도상의 유의사항

직관이나 수학적 추론에 의하여 원의 성질을 알아보고, 그 이해를 깊게 하는 학습을 한다. 이때, 논리적으로 사고하고 표현하는 능력을 신장시킬 수 있도록 유의하여 지도한다. 단, 증명은 간단히 다루고 이들 성질의 활용에 중점을 둔다.

마. 본시 학습 전개 계획

학습목표	원과 현의 성질을 안다.			차시	1/19
단계	학습내용	교수 학습 활동		자료 및 비고	시간
		교사 활동	학생 활동		
도입	전시 학습 확인	· 원과 현을 도입 하면서 원과 부 채꼴의 성질을 상기시킨다.	· 부채꼴의 중심 각의 크기와 호 의 길이가 정비 례함을 생각한다.	· 학생들은 7단계에서 원과 부채꼴 의 성질을 알 고 있다.	5분
	학습 목표 제시	· 학습목표제시	· 학습목표를 확 인한다.		
전개	개념	· 분석법을 이용 하여 원의 심에 서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 확 인한다. - 현이 이등분되 기 위한 충분조 건은 무엇인가? - 두 선분이 포 함된 두 삼각형 이 합동이 되기 위한 충분조건 은 무엇인가?	· 교사의 도움으 로 분석적 사고 활동을 경험한다.	· 분석법 : 결론이 성립 하기 위한 전제조건을 탐색하고 다시 그에 대 한 전제조건 을 탐색하여 주어진 가정 에 도달하도 록 유도한다.	35분

전개	예제 - 가정으로부터 참인 명제인가? · 종합적 사고 활동으로 증명을 기술한다. · 명제 ‘한 원에서 현의 수직이 등분선은 그 원의 중심을 지난다’를 분석-종합적 방법을 이용하여 학생들이 스스로 증명하도록 한다. 문제 · 정리를 이용한 문제 풀이	· 앞에서 한 활동을 토대로 연역적 증명법을 확인한다. · 스스로 분석-종합적 방법으로 명제를 증명해 본다.	· 종합법: 가정으로부터 논리적으로 결론을 이끌어내는 과정	
정리 및 차시예고	정리 · 학습지를 풀게 하고 풀이를 통해 원의 중심과 현의 이등분선과의 관계를 정리한다. 차시예고 · 차시예고 - 다음 시간에는 원의 중심과의 거리에 따른 현의 길이에 대해 알아볼 것입니다.	· 학습지를 풀어보며 원의 중심과 현의 이등분선과의 관계를 다시 생각한다.		5분

형성평가지			
단원명	Ⅲ. 원	1. 원과 직선	1.1 원과 현
학습목표	원과 현의 성질을 안다.		
학습자	3학년 ()반 ()번 이름 :		

1. 오른쪽 그림과 같은 원O에서 현AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면, $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이 성립함을 보여라.

(1) 보이교자 하는 결론은 무엇입니까?

(2) 빈칸에 알맞은 것을 적으시오.

<분석적 과정>

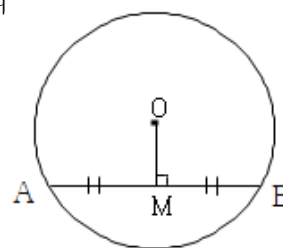
- $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이 성립하기 위해서는 $\triangle OAM \equiv (\quad)$ 임을 보이면 된다.
- $\triangle OAM$ 와 $\triangle OBM$ 에 대해서 우리가 가정에 의해서 알고 있는 조건은
 - ① $\overline{OM}$ 은 공통
 - ② $\angle OMA = \angle (\quad) = (\quad)^\circ$
- $\triangle OAM \equiv (\quad)$ 이기 위해서는 $\overline{AO} = \overline{(\quad)}$ 이 성립함을 보이면 된다.
- $\overline{AO} = \overline{(\quad)}$ 는 원의 ()로서 성립한다.

<연역적 과정>

$\triangle OAM$ 와 $\triangle OBM$ 에서

- ① $\overline{OM}$ 은 공통
- ② $\angle OMA = \angle (\quad) = (\quad)^\circ$: M은 현AB의 수선의 발
- ③ $\overline{AO} = \overline{(\quad)}$: 원의 ()

$\therefore \triangle OAM \equiv \triangle OBM$
 $\therefore \overline{AM} = \overline{BM}$



V. 결론 및 제언

수학적 사고력을 키우기 위해서 증명지도는 중요한 역할을 한다. 교사는 구체적이고 다양한 활동을 통해서 학생들의 실질적인 수학적 사고 활동을 자극할 수 있도록 해야 한다. 하지만 학교수학에서는 시간적, 수업 환경적 문제로 인해 연역적인 방식으로만 지도하게 되고 그로 인해 많은 학생들이 증명의 본질을 알지 못한 채 형식적인 증명학습을 하고 있다. 따라서 결론이 성립하기 위해서 성립되어야 할 전제 조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 전제 조건을 가정에서부터 이끌어내는 종합적 방식의 역동적 통합으로서 증명을 지도해야 할 필요성이 있다.

본 논문에서는 관련 연구를 통해서 Van Hiele의 기하 학습 수준 이론을 토대로 교과서에서 다루는 내용의 수준과 학생들의 수준의 차이를 파악하고, 분석법에 대해 고찰하였다. 중학교 3학년 학생들을 대상으로 증명에 대한 인식정도와 학습방법에 대하여 조사하고, 합리적인 도형증명의 학습이 이루어질 수 있도록 분석-종합법을 이용한 증명지도 교수-학습 방안에 대해서 연구하였다. 또한, 수학 9-나 단계의 원과 현의 단원에서 분석-종합법을 이용한 증명지도 학습지도안을 제시하였다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

Van Hiele 기하 학습 수준 이론에 기초하여 제7차 교육과정의 교과서를 분석하면, 전체적으로 기하 학습 수준 2, 3, 4에 해당하는 내용을 비교적

순차적으로 구성되어 있다. 관련 연구 결과를 고찰해보면 교과서에서 다루는 내용의 수준보다 학생들의 기하 수준이 다소 낮은 것을 알 수 있다. 따라서 교사가 교과서에 제시된 기하 수준으로 지도하게 되면 학생들은 기하학습에 어려움을 느낄 수밖에 없다. 학생들의 기하 학습 수준을 올릴 수 있는 증명지도가 필요하다.

울산광역시 소재 H중학교 3학급과 부산광역시 소재 J중학교 3학급을 대상으로 학생들의 증명에 대한 인식정도와 학습방법에 대한 설문조사를 실시하여 결과를 백분율로 분석하였다. 전체적인 응답결과를 살펴보면 다음과 같다. 첫째, ‘도형의 증명에 대한 필요성’에 대한 질문에 ‘매우 그렇다’ 7.6%, ‘그렇다’ 18.4%, ‘보통이다’ 35.2%, ‘그렇지 않다’ 23.7%, ‘전혀 그렇지 않다’ 15.1%로 긍정적으로 생각하는 학생보다 부정적으로 생각하는 학생이 더 많음을 알 수 있다. 둘째, ‘도형의 증명에 대한 난이도’에 대한 질문에 ‘매우 그렇다’ 17.2%, ‘그렇다’ 30.4%, ‘보통이다’ 35.0%, ‘그렇지 않다’ 12.6%, ‘전혀 그렇지 않다’ 4.8%로 응답하였다. 설문 대상자의 47.6%가 부정적인 반응을 보였다. 셋째, ‘도형의 증명이 어렵다면 그 이유는 무엇인가?’란 질문에 설문 대상자의 57.2%가 ‘증명과정에서 어떤 조건을 적용해야 할지 모르겠다’고 응답하였다. 다음으로는 ‘무엇을 증명해야 하는지 정확히 파악이 되지 않는다’ 13.4%, ‘추상적이다’ 11.5%, ‘기호와 용어가 어렵다’ 8.1%, ‘기초지식이 충분하지 않다’ 5.8%로 나타났다.

넷째, ‘교과서에 제시된 도형의 증명과정을 어느 정도 이해합니까?’라는 질문에 64%의 학생들이 교과서에 제시된 증명과정을 제대로 이해하지 못하는, 즉 완전한 학습을 이루지 못하고 있음을 알 수 있다. 다섯째, ‘도형의 증명문제를 어떻게 공부하느냐?’는 질문에 대해서 74.3%의 학생들이 기존에 제시된 증명방법을 이해하거나, 어느 정도 이해하고 암기한다고 응답하였다.

하지만 증명과정에서 활용된 조건을 이해하는 학생들에 비해 많은 학생들이 이해보다 암기식 학습방법 선택하고 있음을 알 수 있다.

설문조사에서 도형의 증명이 어려운 이유로 증명과정에서 어떤 조건을 적용해야 할지 모르기 때문이라고 응답한 학생이 대다수였다. 따라서 보이거나 하는 것을 성립한 것으로 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하고 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속 반복하여 이미 가정한 명제에 도달하는 방법인 분석법과 주어진 가정으로부터 논리적으로 추론을 거쳐 선형적으로 결론에 도달하는 과정인 종합법을 통합한 증명지도를 통해서 학생들은 증명과정의 필연성을 알게 되고 증명 학습에 자신감을 갖게 하고 흥미를 돋우게 된다. 뿐만 아니라 분석과정에서 수학적 추론을 경험하게 되면서 수학적 사고력이 향상될 수 있다. 따라서 학교 수업에 분석-종합법을 이용한 증명지도가 원활히 활용될 수 있도록 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 교과서 및 학습참고서에 종합법과 분석법을 도입하여 증명지도가 이루어지도록 하고 증명학습에 도움이 될 수 있도록 그에 맞는 학습지, 학습 자료를 개발하여야 한다.

둘째, 교사들은 효율적인 증명지도가 이루어 질 수 있도록 끊임없는 교재개발이 필요하다. 그리고 단순히 기존의 수학 지식을 전달하는 것이 아닌 학생들의 사고를 자극하여 끊임없이 탐구, 추측할 수 있는 환경을 제공해야 한다.

참고 문헌

- [1] 강옥기 외 2인(2002), 9-나 중학교 수학 교사용 지도서, (주)두산.
- [2] 김미정(1994), Van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.
- [3] 김수진(2006), 중학교 기하의 증명지도에 있어서 분석-종합적 증명방법에 관한 연구, 경성대학교 교육대학원, 석사학위논문.
- [4] 나귀수(1998), 증명의 본질과 지도 분석 - 중학교 기하단원을 중심으로, 서울대학교 박사학위논문.
- [5] 박지혜(2000), Van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하 인지 수준과 교재선정에 관한 연구, 연세대학교 석사학위논문.
- [6] 서지현(2005), 기하증명의 학습에서 중학생들이 겪는 어려움에 관하여, 건국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- [7] 우정호(2000), 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부.
- [8] 우정호(2002), 어떻게 문제를 풀 것인가-수학적 사고 방법, 교우사.
- [9] 우정호(1998), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부.
- [10] 이수아(2004), 중등수학의 증명에 대한 분석 및 지도, 경성대학교 교육대학원 수학교육전공.
- [11] 이용민(2000), 중학교 기하영역 증명지도에 있어서 분석-종합적 증명방법에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- [12] 중학교 교육과정, 교육인적자원부, 별책3, 교육인적자원부 고시 제 2007-79호.
- [13] 최현호, 한태식, 기하영역의 Van Hiele이론과 증명능력에 관한 연구, 수학교육논총 제8집. 대한수학회, PP219-241
- [14] E. Fischbein, "Intuition and Proof", 1982. P.14

- [15] NCTM(1989), Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics. Reston, VA : Author : 구광조, 오병승, 류희찬 공역 (1992), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사.
- [16] NCTM(2000), Principles and Standards for school mathematics, Reston, VA : Author
- [17] T.L.Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge, 1908, vol. 1



부록1: 설문지

학생들의 도형 증명에 대한 인식 설문조사

안녕하십니까?

본 설문지는 수학 교과에 대해서 여러분들이 어떤 생각을 가지고 있는지 특히, 도형의 증명에 대한 여러 가지 질문을 통해 여러분의 의견을 파악하여, 보다 효율적인 학습지도를 위한 연구 기초 자료를 얻기 위함입니다.

본 자료는 순수 연구 목적으로만 활용되기 때문에 개인적인 설문결과는 절대 공개되지 않습니다. 각 문항에 대해서 성심껏 답해 주시면 감사하겠습니다.

- 부경대학교 수학교육전공 고은경 -

*** 설문 내용 ***

1. 수학 교과를 공부하는 것이 재미있습니까?
①매우 그렇다 ②그렇다 ③보통이다 ④그렇지 않다 ⑤매우 그렇지 않다
2. 수학 공부를 통해서 논리적인 사고력을 키울 수 있다고 생각합니까?
①매우 그렇다 ②그렇다 ③보통이다 ④그렇지 않다 ⑤매우 그렇지 않다
3. 도형에 대한 성질을 공부함에 있어서 "도형의 성질 증명"부분이 필요하다고 생각합니까?
①매우 그렇다 ②그렇다 ③보통이다 ④그렇지 않다 ⑤매우 그렇지 않다

4. 다른 영역과 비교해 볼 때 도형의 증명이 어렵다고 생각합니까?
①매우 그렇다 ②그렇다 ③보통이다 ④그렇지 않다 ⑤매우 그렇지 않다

4-1. 위 문항에서 ①, ②을 선택한 경우, 그 이유는 무엇입니까?

- ① 증명 과정 중에 사용하는 기호와 용어가 어렵다
- ② 증명 과정이 너무 추상적이다
- ③ 증명할 때 어떤 조건을 적용해야 하는지 모르겠다
- ④ 기초지식이 충분하지 않다
- ⑤ 무엇을 증명해야 하는지 정확히 파악이 되지 않는다
- ⑥ 기타 ()

5. 교과서에 제시된 도형의 증명과정을 어느 정도 이해합니까?

- ① 제시된 증명과정을 스스로 서술할 수 있다
- ② 스스로 서술할 수는 없지만 증명된 것은 모두 이해한다
- ③ 증명된 것을 어느 정도 이해한다
- ④ 증명된 것을 모두 이해하지 못 한다
- ⑤ 문제자체도 이해하지 못 한다

6. 도형의 증명문제를 어떻게 공부합니까?

- ① 기존에 제시된 증명이 아닌 스스로 새로운 증명방법을 생각해서 서술해보려 노력한다
- ② 기존에 제시된 증명에 활용된 조건을 생각하며 증명을 이해한다
- ③ 기존에 제시된 증명을 어느 정도 이해하고 그냥 암기한다
- ④ 기존에 제시된 증명을 무조건 암기한다
- ⑤ 증명문제는 무조건 공부하지 않는다

7. (피타고라스의 정리, 원) 단원을 배운 소감을 간단히 적어주시기 바랍니다.

★ 감사합니다 ★