

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

• 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건
 을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer





교 육 학 석 사 학 위 논 문

90/150 TPSACA를 이용한 패턴분류기의 설계



2014년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학교육전공

송 현 승

교육학석사학위논문

90/150 TPSACA를 이용한 패턴분류기의 설계



2014년 8월 부경대학교 교육대학원 수 학 교 육 전 공

송 현 승

송현승의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2014년 8월 22일



위 원 교육학박사 서 종 진 (인)

위 원 이학박사 조 성 진 (인)

목 차

	표 목차	ii
	그림 목차	ii
	Abstract ····	iii
Ι.	서론	1
Π.	배경지식 및 기존연구	4
	2.1. 셀룰라오토마타(CA)의 정의 및 성질	4
	2.2. 90/150 TPSACA	10
Ш.	90/150 TPMACA 기반의 새로운 패턴분류기 설계 ·····	15
IV.		21
		21
	4.2. 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기	27
V.		30
	참고문헌	31
	ST TH OLIM	

표 목차

<표 Ⅱ-1> 전이규칙	. 6
<표 Ⅱ-2> 전이규칙 90과 150	. 6
<포 II-3> 90/150 TPSACA와 90/150 TPMACA	11
$<$ 표 \mathbb{N} -1 $>$ \mathbb{C}_{T_1} 와 \mathbb{C}_{T_2} 의 트리로부터 \mathbb{C}_T 의 트리 구성	23
<표 IV-2> 패턴들의 분류 ······	26
(포 IV-2) 패턴들의 분류 그림 목차	
<그림 Ⅱ-1> 3-이웃 선형 CA의 셀 구조 ··································	• 4
<그림 Ⅱ-2> 5-셀 90/150 TPMACA의 상태전이 그래프	12
<그림 Ⅱ-3> 5-셀 TPMACA C의 상태전이 그래프 ···································	14
<그림 \square -1> \mathbb{C}_{T_s} 의 상태전이 그래프 \cdots	18
<그림 Ⅲ-2> ℂ _{T1} 의 상태전이 그래프 ···································	19
<그림 \mathbb{N} -1> \mathbb{C}_{T_2} 의 상태전이 그래프	22
<그림 IV-2> \mathbb{C}_T 의 상태전이 그래프	24
<그림 IV-3> 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기	27

Design of Pattern Classifier using 90/150 TPSACA

Hyun-Seung Song

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

The essential prerequisites of designing the pattern classifier include high throughput, low memory requirements, and low cost hardwired implementation. Several studies have been done on the MACA based pattern classifier. This pattern classifier reduces the problem of complexity in calculating, however, it takes too much time to construct the 0-tree of the MACA.

The pattern classifier proposed in this thesis can be a method to solve this problem. We analyze 90/150 TPMACA and design an efficient pattern classifier by synthesizing a number of 90/150 TPMACA. Using this pattern classifier, we can easily find the attractor tree that a pattern could belong. The two stage pattern classifier using 90/150 TPSACA, synthesizing a number of 90/150 TPMACA into a single bit, maps an n-bit patter x generated by pattern classifier x which 90/150 TPMACA. As a result, the pattern classifier proposed in this thesis will classify a larger test pattern set.

I. 서론

셀룰라 오토마타(cellular automata, 이하 CA)의 동질구조에 관한 연구 는 J. von Neumann에 의해서 시작되었다[20]. 그리고 그와 함께 Wolfram 에 의해 스스로 조직화하고 재생산할 수 있는 모델로 소개되었다[22]. CA 의 동질구조의 발전의 역사에서 이정표는 Wolfram에 기인하는데, 그는 국 부적인 상호연결을 갖는 세포구조의 단순성을 제시하였다. 그가 제안한 CA구조는 세포들로 구성되어 있는데 각 세포들은 균일한 세 이웃 상호연 결을 갖는 오로지 두 상태만을 갖는다. 각 세포의 상태전이를 결정하는 기 능은 next-state function로서 간주된다. Wolfram에 의해서 소개된 단순화 는 LFSR(Linear Feedback Shift Register)의 그것과 유사한 다항식 대수적 분석이 잘 되는 선형 다음상태 함수를 만들었다. 그러나 그 기술은 비균일 상호연결 구조를 갖는 CA를 분석하기 위해 사용될 수 없다. 그 후에 Das 등은 선형 다음 상태함수를 갖는 CA의 상태전이 행동의 분석에 대한 응용 이 자유자재인 행렬 대수적 도구를 제안했다[8, 9, 12]. 그것은 또한 비균일 상호연결을 갖는 CA를 다룰 수 있다. 또한 이것은 연구자들에게 CA 행동 에 좀 더 주도면밀한 연구를 하게하고 이 선형 기계의 혁신적인 응용을 찾 는데 동기를 부여했다. 전이규칙이 오직 XOR논리만을 사용하는 CA를 선 형 CA라 부르고 이에 반해 XOR/XNOR 논리 둘 다를 사용하는 CA를 additive CA라 부른다[10, 20, 22].

CA란 동역학계(dynamical system)를 해석하는 한 방법으로 공간과 시간을 이산적으로 다루고, 이산적인 공간을 셀룰라 공간(cellular space)의기본단위인 각 셀의 취할 수 있는 상태를 유한하게 처리하며, 각 셀들의

상태가 국소적인 상호작용에 의해서 동시에 갱신되는 시스템이다[8]. 이러한 CA는 인접한 이웃들과 결합논리로 서로 연결되어 있고, 그 형태가 규칙적인 배열로 구성되어 있다. 즉, 각 셀들은 자기 자신과 이웃 셀의 함숫 값에 의해 다음 상태가 결정되어 동시에 갱신된다.

CA는 전이규칙에 의해 변화되는 상태를 나타낸 상태전이그래프의 형태에 따라 그룹 CA와 비그룹 CA로 분류할 수 있다. 그룹 CA는 모든 셀들의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는 CA로 임의의 한 상태에 대한 이전 상태가 유일하다. 비그룹 CA는 셀들의 몇몇 상태가 사이클을 이루지 않는 CA이며, 트리 구조를 이루고 이전 상태가 유일하지 않다[3, 5, 12].

패턴분류는 데이터베이스에 있는 한 부류의 테스트 패턴 집합에 속한 패턴들의 공통 성질을 식별하여 패턴들을 다른 클래스로 분류하고자 하는 것이다. 데이터베이스에서 사전에 정의된 클래스에 속한 패턴들로 구성된 테스트 패턴 집합을 택하여, 공통 성질에 따라 제대로 분류가 가능하도록 패턴분류기(pattern classifier)가 설계되었는지를 시험한다. 테스트 패턴 집 합으로 시험한 다음 데이터베이스에 있는 패턴들이 속한 클래스를 제대로 분류하는지를 알아보는 예측 작업을 수행한다. 패턴분류기 설계의 요구 조 건은 데이터 처리량이 크고 저장 공간은 작아야 한다는 것이다. 더욱이 낮 은 가격대로 패턴분류기를 구현하는 것은 매우 중요한 조건이다. 관용적인 패턴 분류기법인 베이지안 분류기, 신경망, 유전알고리즘, 결정 트리 등은 그런 요구 조건들을 충족하기에는 너무 복잡하다. 기존의 CA를 이용한 패 턴분류기는 간단하고 규칙적이며 작은 단위로 확장 연결할 수 있는 희소 (sparse) 네트워크인 3-이웃(3-neighbourhood) CA로 구성되기 때문에 VLSI(Very Large Scale Integration) 하드웨어 구현에 알맞다[11]. 다중 끌 개 셀룰라 오토마타(Multiple Attractor Cellular Automata, 이하 MACA) 라고 하는 특별한 부류의 CA에 기반을 둔 패턴분류기에 대한 많은 연구가

이루어졌다[2, 13, 17, 18]. 특히 클래스가 2개인 분류기의 설계가 [14, 15]에서 제안되었는데, 이 분류기는 기억장치의 오버헤드를 감소시킬 수 있는 MACA를 이용한 패턴분류기이다. 이것은 MACA의 0-트리로부터 기저를 구하여 선형연립방정식을 풀어 의존벡터 DV를 구한 후 테스트 패턴과 내적을 하여 패턴을 분류하였다. 이 방법은 기존 MACA를 이용한 패턴분류기의 계산복잡도를 $O(n^3)$ 에서 O(n)으로 줄이는 효과를 가져왔다. 그러나 DV를 구하기 위해서는 MACA에 대응하는 0-트리의 모든 원소를 구하여 그것을 계수로 하는 동차연립방정식의 해를 구해야하기 때문에 초기 설정시간이 오래 걸린다는 문제점을 여전히 가지고 있다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하는 패턴분류기를 설계하고자 한다. 이 패턴분류기는 최소다항식과 특성다항식이 같은 90/150 TPSACA로부터 얻은 TPMACA를 여러 개 결합하여 구성한 MACA를 기반으로 한다. 이 분류기의 장점은 패턴이 속할 attractor 트리를 바로 알 수 있다는 것이다. 그리고 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기는 m개의 90/150 TPSACA로부터 얻은 TPMACA을 결합하여 설계한 패턴분류기 T에 의해 생성된 n-비트 패턴 \mathbf{x} 를 단일 비트(0 또는 1)에 맵핑하게 한다. 그러므로 본 논문에서 제안한 패턴분류기는 큰 테스트 패턴집합을 효율적으로 분류할 수 있다.

본 논문의 구성은 2장에서 논문의 이해를 위해 바탕이 될 배경지식과 기존에 연구되었던 부분을 살펴보며, 이러한 지식을 바탕으로 새로운 패턴 분류기를 설계하는 작업을 3장에서 다루었다. 그리고 4장에서는 m-개의 TPMACA를 결합하여 제시했던 문제점을 해결하며 결론을 맺는다.

Ⅱ. 배경지식

이 장에서는 본 논문에서 사용하는 CA의 용어와 기본성질에 대하여 기술하고 기존 연구에 대해서 알아본다.

2.1 셀룰라 오토마타(CA)의 정의 및 성질

셀이 선형으로 배열되어 있는 CA인 1차원 선형 CA(One-dimensional CA, 1-D CA)는 이산 시간의 동적 시스템으로 셀이라는 기본 단위 메모리의 배열이 선형으로 이루어져 있어 가장 간단하다. 1-D CA(One dimensional CA) 중에서 국소적 상호작용이 세 개의 셀, 즉 자기 자신과인접한 두 개의 셀에 의해 이루어진 CA를 3-이웃 선형 CA(3-neighborhood linear CA)라고 한다. 3-이웃 선형 CA의 셀 구조는 [그림 Ⅱ-1]과 같다.



[그림 Ⅱ-1] 3-이웃 선형 CA의 셀 구조

이 시스템에서 셀의 다음 상태는 어떤 규칙에 따라 정해진다. 즉, 각 셀들은 자기 자신과 이웃 셀의 함숫값에 의해 다음 상태가 결정되어 동시에 갱신되는데, 3-이웃 CA에 대한 **상태전이함수**(state-transition function)는 다음 식 (2.1)과 같다.

$$q_{i}(t+1) = f[q_{i}(t), q_{i+1}(t), q_{i-1}(t)]$$
(2.1)

이 식에서 쓰인 기호들은 다음과 같다.

 \triangleright i : 일차원으로 배열되어 있는 각 셀들의 위치

> t : 시간단계

 $\triangleright q_i(t)$: 시간 t 에서 i 번째 셀의 상태

 $> q_i(t+1) :$ 시간 t+1 에서 i 번째 셀의 상태

여기서 f는 결합 논리를 가지는 국소전이 함수이다. GF(2)상에서 3-이웃 CA에는 서로 다른 2^3 개의 이웃의 배열상태가 있으며 그러한 CA에는 2^{2^3} 개의 상태전이함수가 있게 되며, 이를 CA의 전이규칙(transition rule)이라고 한다. 본 논문에서 사용하는 전이규칙 60, 90, 102, 150, 240은 다음 [표 Π -1]과 같다.

[표 Ⅱ-1] 전이규칙

전이규칙	전이함수
60	$q_i(t+1) = q_{i-1}(t) \oplus q_i(t)$
90	$q_i(t+1) = q_{i-1}(t) \oplus q_{i+1}(t)$
102	$q_i(t+1) = q_i(t) \oplus q_{i+1}(t)$
150	$q_i(t+1) = q_{i-1}(t) \oplus q_i(t) \oplus q_{i+1}(t)$
170	$q_i(t+1) = q_{i-1}(t)$
204	$q_i(t+1)=q_i(t)$
240	$q_i(t+1) = q_{i+1}(t)$

예를 들어 다음 [표 Ⅱ-2]는 전이규칙 90과 150을 나타낸 표이다.

[표 Ⅱ-2] 전이규칙 90과 150

		1					/	and the second	
이웃상태	111	110	101	100	011	010	001	000	전이규칙
다음상태	0	1	0	1	1	0	1	/ 0	90
다음상태	1	0	0	1	0	1/	1/	0	150

전이규칙이 XOR 논리만으로 이루어진 CA를 선형 CA(linear CA)라고하며, 이런 선형 n-셀 CA의 상태전이함수는 $n \times n$ 행렬로 나타낼 수 있으며, 이를 상태전이행렬(state transition matrix)이라고 한다. \mathbb{C}_T 를 상태전이행렬이 T인 선형 CA라고 하자. 이때 상태전이행렬 T는 식 (2.2)와 같은삼중대각행렬이다[4, 5].

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$
 (2.2)

이후부터는 표기상의 편리함을 위하여 상태전이행렬 T를 식 (2.3)와 같이 나타내기로 한다.

$$T = \langle d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_{n-1}, d_n \rangle$$
 (2.3)

여기서 $d_i \in GF(2)$ 이고 식 (2.4)와 같이 전이규칙이 90이면 "0"으로 150이면 "1"로 나타낸다.

$$d_i = \begin{cases} 0, & i \text{번째 셀의 전이규칙} = 90\\ 1, & i \text{번째 셀의 전이규칙} = 150 \end{cases}$$
 (2.4)

<정의 2.1 [3]> 그룹 CA란 모든 셀의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는 CA를 뜻하고, 비그룹 CA는 셀들의 몇 가지 상태가 사이클을 이루지 않는 CA를 뜻한다. attractor는 비그룹 CA의 상태전이그래프에서 순환상태들 중 사이클의 길이가 1인 상태, α-트리는 순환상태 α를 루트로하는 트리이다. 비그룹 CA의 상태전이그래프에서 임의의 도달 불가능상태에서 가장 가까운 순환상태로 전이되는데 걸리는 최소 상태전이 수를 depth

라고 한다. MACA(Multiple-Attractor CA)는 비그룹 CA의 모든 순환상태들이 attractor인 CA를 MACA라고 한다. 특히 직전자의 수가 2개인 MACA를 TPMACA(Two Predecessor MACA)라고 한다. Attractor의 개수가 한개인 MACA를 SACA(Single-Attractor CA)라고 하며, 직전자의 수가 2개인 SACA를 TPSACA라고 한다. 특성다항식(characteristic polynomial)이란 주어진 n-4 CA의 상태전이행렬 T의 특성다항식 $c_T(x)$ 은 $GF(2)=\{0,1\}$ 상에서 $c_T(x)=|T\oplus xI|$ 이다. 여기서, I는 n차 단위행렬이다. 최소다항식(minimal polynomial)은 특성다항식의 인수 중 T를 근으로 갖는 차수가 가장 낮은다항식을 최소다항식이라 하고 $m_T(x)$ 로 나타내며 Level이란, 어떤 상태 x가 α -트리의 level $l(l \leq \text{depth})$ 상태라고 하면, 상태 x가 정확히 l번 상태전이 후 상태 α 가 된다. 즉 $T^px=\alpha$ 가 되는 p값 중 최솟값이 l이다.

<정리 2.2 [9, 16]> 임의의 *m*×*n* 행렬 *A*에 대하여 다음 식(2.5)가 성립한다.

$$rank(A) + \dim N(A) = n \tag{2.5}$$

상태전이행렬이 T인 n-셀 MACA에서 $T\oplus I$ 의 계수(rank)가 r이면 <정리 2.2>에 의하여 attractor의 개수는 2^{n-r} 이다. 여기서 I는 n차 단위행렬이다.

<**정리 2.3 [21]>** 상태전이행렬이 *T*인 *n*-셀 90/150 CA에서는 특성다 항식과 최소다항식이 같다.

k개 attractor 트리를 갖는 n비트 MACA는 자연스런 패턴분류기로 볼

수 있다.

<청의 2.4 [3]> n비트 패턴집합에서 2^m 개 패턴이 모두 발생하는 m비트를 m비트 의사전수필드(pseudo-exhaustive field, 이하 PEF)라고 한다.

<**정리 2.5 [3]>** attractor의 개수가 2^m개인 CA에는 m비트 PEF가 존재한다.



2.2 90/150 TPSACA

<**정리 2.6 [6]>** 임의의 $n-1(n \ge 2)$ 셀 90/150 TPSACA를 합성할 수 있으며, 이 TPSACA의 특성다항식과 최소다항식은 x^{n-1} 이다.

<**정리 2.7 [6]>** $C_S^k = < d_1, d_2, \cdots, d_k >$ 이 k-셀 90/150 TPSACA라 하면 다음이 성립한다.

- (i) $C_S^{2k}=< d_1,d_2,\cdots,d_k\oplus 1,d_k\oplus 1,\cdots,d_2,d_1>$ 은 최소다항식이 x^{2k} 인 2k-셀 TPSACA이다.
- (ii) $C_S^{2k+1}=< d_1, d_2, \cdots, d_k, 0, d_k, \cdots, d_2, d_1>$ 은 최소다항식이 x^{2k+1} 인 (2k+1) -셀 TPSACA이다.

<정리 2.6>과 <정리 2.7>로부터 모든 차수의 TPSACA가 존재함을 알수 있다.

 <보조정리 2.8 [6]> $C_S^k = < d_1, \cdots, d_k >$ 을 k-셀 90/150 TPSACA라 하자. 그러면 최소다항식이 $x^{2k}(x+1)$ 인 n(=2k+1)-셀 90/150 TPMACA

$$C_M^n := \langle d_1, \dots, d_k, 1, d_k, \dots, d_1 \rangle$$
 (2.8)

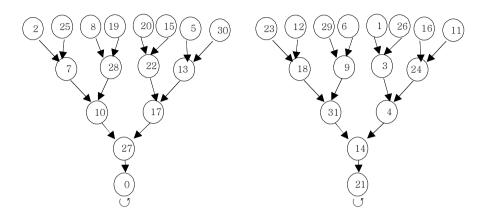
가 존재한다.

[표 II-3] 90/150 TPSACA와 90/150 TPMACA

n	TPSACA	TPMACA
1	0	1
2	11	
3	000	010
4	1001	
5	11011	11111
6	001100	
7	0000000	0001000
8	10000001	
9	100101001	100111001
10	1101001011	
11	11011011011	11011111011
12	001101101100	A .
13	0011000001100	0011001001100

<예제 2.9> [표 Π -3]에서 5-셀 90/150 TPMACA C_M^5 :=<1,1,1,1,1> 이고 상태전이행렬 T와 상태전이 그래프를 나타내면 [그림 Π -3]과 같다.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 (2.9)



[그림 Ⅱ-2] 5-셀 90/150 TPMACA의 상태전이 그래프

<청리 2.10 [7]> \mathbb{C} 를 TPMACA라 하자. α_{ij} 를 \mathbb{C} 에서 α -트리의 level i의 j번째 상태라 하고 β_{ij} 를 \mathbb{C} 에서 β -트리의 level i의 j번째 상태라 하면 다음을 만족한다.

$$\alpha_{ij} \oplus \beta_{ij} = \alpha \oplus \beta \tag{2.10}$$

<예제 2.11> 5개의 셀로 이루어진 CA에 적용된 전이규칙이 <102, 102, 60, 60, 60>이면 전이행렬 *T*는 다음과 같다.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 (2.11)

일차독립인 행의 수가 4이므로 rank(T)=4이다. 그러므로 T의 영공간의 차원은 1이다. 그러므로 주어진 선형 CA는 2개의 직전자를 가지는 nongroup CA이다. $(T\oplus I)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$T \oplus I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

(*T*⊕*I*)의 계수는 3이다. 그러므로 attractor의 수는 $2^{5-3} = 2^2 = 4$ 이다. 또한 *T*의 최소다항식은 $m(x) = x^3(x+1)$ 이다. 그러므로 이 선형 CA는 depth가 3이고 attractor가 4개인 TPMACA이다. [그림 II-4]는 TPMACA의 상태전이 그래프이다. 1-트리의 level 2의 첫 번째 상태인 28=(11100)과 17-트리의 level 2의 첫 번째 상태인 11100⊕01100=10000=16이다. 이는 상태 1과 상태 17의 합인 00001⊕10001=10000=16과 같다. 상태19의 서로 다른 두 직전자 13(01101)과 14(01110)의 합은 01101⊕01110=00011=3으로 상태 0의 0이 아닌 직전자 3과 같다.



Ⅲ. 90/150 TPMACA 기반의 새로운 패턴분류기 설계

attractor 트리가 k개인 n비트 MACA는 자연스러운 패턴분류기로 볼수 있다. 그런 MACA는 주어진 패턴 집합의 패턴들을 k개의 서로 다른 클래스로 분류한다. 여기서 각 클래스는 attractor 트리에 있는 상태들의 집합을 포함한다. 두 개의 n비트 패턴집합 S_1 과 S_2 에 대한 MACA에 기반을 둔 패턴분류기의 설계는 한 클래스(예를 들어 S_1)의 원소들이 다른 클래스(S_2)의 원소들을 전혀 포함하지 않는 하나의 attractor 트리에 속해야하고 그 역도 마찬가지이다. 즉 임의의 두 n비트 패턴 P_1 $\in S_1$ 과 P_2 $\in S_2$ 은다른 attractor 트리에 속하도록 패턴분류기를 설계하는 것이다.

여기서 전이규칙이 $RV_{\mathbb{C}}$ 인 (n-1)-셀 90/150 TPSACA를 \mathbb{C} 라 하고 T_s 를 \mathbb{C} 의 상태전이행렬이라 할 때, 다음 형태로 표현되는 행렬 T를 우리가설계한 새로운 패턴분류기의 모양이라고 한다.

$$T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ T_S & 0 \\ 1 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (3.1)

<**보조정리 3.1>** 특성다항식과 최소다항식이 각각 $x^{n-1}(x+1)$ 인 n-4 MACA에 대하여 다음이 성립한다.

- (i) attractor의 개수는 2개다.
- (ii) 0-트리의 상태의 개수는 2^{n-1} 개다.

(중명) (i) 특성다항식이 $x^{n-1}(x+1)$ 이고, 상태전이행렬 T의 고유값 (eigenvalue)은 특성방정식 $c_T(x)=0$ 의 근이므로 $x^{n-1}(x+1)=0$ 의 근은 (중복을 허락하여) n-1개의 0과 1개의 1이다. 그리고 특성다항식과 최소 다항식이 $x^{n-1}(x+1)$ 이므로, $T \oplus xI$ 은 다음 식(3.2)과 같은 대각행렬로 변형될 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \\ x^{n-1}(x+1) \end{pmatrix}$$
 (3.2) (여기서 대각선의 1의 개수는 $n-1$ 개)

x가 attractor라면 Tx=x이므로 attractor는 $T\oplus I$ 의 영공간이다. x=1일 때 $T\oplus I$ 은 다음 행렬 식(3.3)로 생각하면 된다.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

(여기서 대각선의 1의 개수는 <math>n-1개)

그러므로 $T\oplus I$ 의 계수는 n-1이다. 따라서 정리 2.10에 의하여 $T\oplus I$ 의 영공간의 차원이 1이므로 attractor의 개수는 $2^1=2$ 개다.

(ii) attractor 트리에 있는 상태의 개수가 같으므로, 각 attractor 트리의 상태의 개수는 $2^n/2=2^{n-1}$ 이다.

 <정리 3.2>
 90/150 TPSACA를 이용하여 attractor가 2개인 트리를 갖

 는 TPMACA를 합성할 수 있다.

(중명) 전이규칙이 $RV_{\mathbb{C}}$ 인 (n-1)-셀 90/150 TPSACA를 \mathbb{C} 라 하고 T_s 를 \mathbb{C} 의 상태전이행렬이라 하자. 그러면 정리 2.16에 의하여 T_s 의 특성다항식과 최소다항식은 x^{n-1} 이다. T를 다음과 같은 행렬 (3.4)이라 하자.

$$T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ T_S & 0 \\ 1 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (3.4)

그러면 전이규칙이 $<\!RV_{\mathbb{C}}, 102\!>$ 인 CA \mathbb{C}_T 의 상태전이행렬 T에 대하여

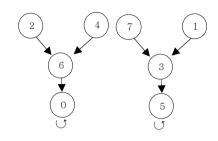
$$\begin{split} c_T(x) &= \big| T \oplus x I_n \big| \\ &= (1+x) \big| T_s \oplus x I_{n-1} \big| \\ &= (1+x) c_{T_s}(x) \\ &= x^{n-1} (1+x) \end{split} \tag{3.5}$$

이고 $c_{T_s}(x)=m_{T_s}(x)$ 이므로 $c_T(x)=m_T(x)=x^{n-1}(x+1)$ 이다. 그러므로 \mathbb{C}_T 은 TPMACA이다.

<예제 3.3> \mathbb{C}_{T_s} 을 전이규칙이 $RV_{\mathbb{C}_T} = <150,150>$ 인 2-셀 90/150
TPSACA라 하자. 그러면 \mathbb{C}_{T_s} 의 상태전이행렬은 $T_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이고, 그 특성다항식과 최소다항식은 x^2 으로 같다. [그림 III-1]은 \mathbb{C}_{T_s} 의 상태전이그래프를 나타낸 것이다. \mathbb{C}_{T_1} 를 전이규칙이 $< RV_{\mathbb{C}_T}$, 102>=<150,150,102>인 CA라 하자. 그러면 \mathbb{C}_{T_1} 의 상태전이행렬 T_1 은 $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이고, 그 특성다항식과 최소다항식은 $x^2(x+1)$ 이다. [그림 III-2]는 \mathbb{C}_{T_1} 의 상태전이그래프를 나타낸 것이다. [그림 III-2]에서 \mathbb{C}_{T_1} 의 attractor는 <0,0,0>,<1,0,1>이다.



[그림 Ⅲ-1] \mathbb{C}_{T_s} 의 상태전이 그래프



[그림 III-2] \mathbb{C}_{T_1} 의 상태전이 그래프

<정리 3.4> 전이규칙이 $< RV_{\mathbb{C}_T}$, 102 >인 n-셀 TPMACA \mathbb{C} 에서, 한 패턴집합에 속한 패턴은 그 패턴의 최하위비트에 의하여 0-트리와 $\alpha-$ 트리 $(\alpha$: 홀수)로 분류될 수 있다.

(증명) \mathbb{C} 의 상태전이행렬 T는 다음 식 (3.6)와 같다.

$$T = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ T_S & 0 \\ & & 1 \\ 0 \cdots 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

여기서 T_s 는 (n-1)-셀 TPSACA \mathbb{C}_{T_s} 의 상태전이행렬이다.

짝수인 상태 $a=< a_1, \cdots, a_{n-1}, 0>^t$ 의 최하위비트는 0이므로 Ta의 최하위비트도 0이다. 그러므로 모든 자연수 i에 대하여 T^ia 의 최하위비트도 0이

다. a의 직전자 x가 홀수라면 x는 $x=<^*,\cdots,^*,1>^t$ 와 같이 표현할 수 있다. 그런데 T의 마지막 행이 $<0,\cdots,0,1>$ 이므로 $Tx=<^*,\cdots,^*,1>^t$ 이다. 이는 홀수이므로 모순이다. 그러므로 a의 직전자의 최하위비트도 0이어야한다. 따라서 \mathbb{C} 의 0-트리의 모든 원소는 짝수이다. 홀수인 상태 $b=< b_1,\cdots,b_{n-1},1>^t$ 의 최하위비트는 1이고 T의 마지막 행이 $<0,\cdots,0,1>$ 이므로 $Tb=<^*,\cdots,^*,1>^t$ 의 최하위비트도 1이다. 그러므로 모든 자연수 i에 대하여 T^ib 의 최하위비트도 1이다. b의 직전자 y가 짝수라면 y는 $y=<^*,\cdots,^*,0>^t$ 와 같이 표현할 수 있다. 그런데 T의 마지막 행이 $<0,\cdots,0,1>$ 이므로 $Ty=<^*,\cdots,^*,0>^t$ 이다. 이는 짝수이므로 모순이다. 그러므로 b의 직전자의 최하위비트도 1이어야 한다. 따라서 \mathbb{C} 의 α -트리 α : 홀수)의 모든 원소는 홀수이다.

Ⅳ. m-개의 90/150 TPSACA를 이용한 패턴분류기

4.1 m-개의 TPMACA의 결합

m개의 90/150 TPSACA로부터 <정리 3.1>을 이용하여 얻은 m개의 TPMACA $\mathbb{C}_{T_i}(i=1,2,\,\cdots,m)$ 를 결합하여 생성한 MACA \mathbb{C}_T 의 상태전이행



이렇게 구성한 \mathbb{C}_T 가 본 논문에서 제안하는 새로운 패턴분류기이다.

T의 성질은 다음과 같다.

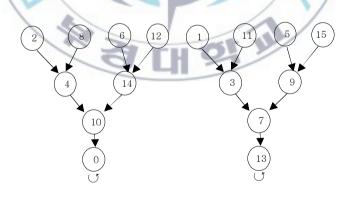
① 각 $i=1,2,\cdots,m$ 에 대하여 $c_{T_i}(x)=x^{k_i}(x+1)$ 이므로 T의 특성다항식은 $c_T(x)=x^{k_1+k_2+\cdots+k_m}(x+1)^m=x^{n-m}(x+1)^m$ 이다. 여기서 \mathbb{C}_{T_i} 의 셀의 수는 k_i+1 이다.

- ② 최소다항식은 $m_T\!(x) = x^{\max\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}} \, (x+1)$ 이다.
- ③ \mathbb{C}_T 는 MACA이다.
- ④ \mathbb{C}_T 는 2^m 개의 attractor를 갖는다.
- ⑥ 짝수 트리의 개수와 홀수 트리의 개수는 2^{m-1} 개다.

<예제 4.1> \mathbb{C}_{T_2} 를 전이규칙이 < 90,90,90,102>인 TPMACA라고 하자.

그러면 \mathbb{C}_{T_2} 의 상태전이행렬 T_2 는 $T_2=\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0\\1\,0\,1\,0\\0\,1\,0\,1\\0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$ 이고, 그 특성다항식과 최소

다항식은 $x^3(x+1)$ 이다. [그림 IV-1]는 \mathbb{C}_{T_2} 의 상태전이그래프를 나타낸 것이다. [그림 IV-1]에서 \mathbb{C}_{T_2} 의 attractor는 <0,0,0,0>,<1,1,0,1>이다.



[그림 IV-1] \mathbb{C}_{T_2} 의 상태전이 그래프

T를 <예제 3.2>의 T_1 과 <예제 4.1>의 T_2 를 블록대각선형식(Block Diagonal Form)으로 배열한 다음과 같은 행렬이라 하자.

$$T = \begin{pmatrix} [T_1] & O \\ O & [T_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.2)

$$e_T(x) = x^5(x+1)^2 (4.5)$$

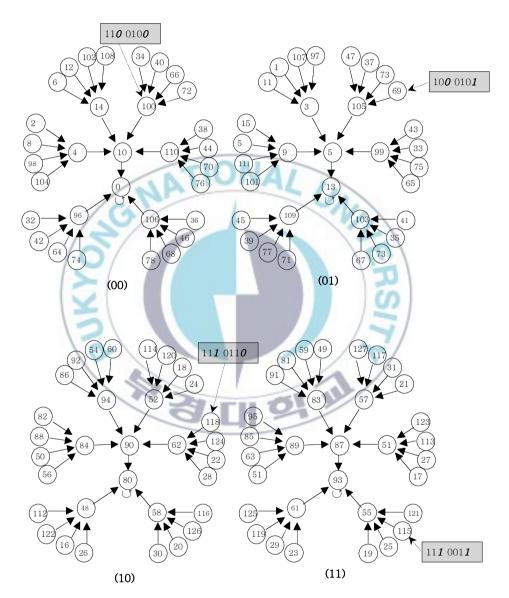
$$m_T(x) = x^3(x+1)$$
 (4.6)

 \mathbb{C}_T 의 attractor는 0(0000000), 13(0001101), 80(1010000), 93(1011101)이다. attractor 93은 \mathbb{C}_{T_1} 의 attractor 5(101)과 \mathbb{C}_{T_2} 의 attractor 13(1101)의 연결 (1011101)이다.

그러면 T_1 의 트리와 T_2 의 트리로부터 attractor 트리가 2^2 개이고 직전자가 4개인 MACA의 상태전이그래프를 다음과 같이 구할 수 있다.

[표 IV-1] \mathbb{C}_{T_1} 와 \mathbb{C}_{T_2} 의 트리로부터 \mathbb{C}_T 의 트리 구성

\mathbb{C}_{T_1} 의 0 -트리 + \mathbb{C}_{T_2} 의 0 -트리 = \mathbb{C}_T 의 0 -트리
\mathbb{C}_{T_1} 의 0-트리 + \mathbb{C}_{T_2} 의 13-트리 = \mathbb{C}_T 의 13-트리
\mathbb{C}_{T_1} 의 5-트리 + \mathbb{C}_{T_2} 의 0-트리 = \mathbb{C}_T 의 80-트리
\mathbb{C}_{T_1} 의 5-트리 + \mathbb{C}_{T_2} 의 13-트리 = \mathbb{C}_T 의 93-트리



[그림 \mathbb{N} -2] \mathbb{C}_T 의 상태전이 그래프

k-셀 CA \mathbb{C}_{T_1} 과 (n-k)-셀 CA \mathbb{C}_{T_2} 에 대하여 T_1 과 T_2 를 블록대각선형 식으로 배열한 행렬을 T라고 하자. $b=b_1\parallel b_2(b_1$ 은 k비트, b_2 는 (n-k) 비트)가 \mathbb{C}_T 의 한 트리에서 도착가능상태일 때, a_1 과 a_1^* 가 b_1 의 두 직전자이고 a_2 와 a_2^* 가 b_2 의 두 직전자이면 $T(a_1\parallel a_2)=T(a_1\parallel a_2^*)=T(a_1^*\parallel a_2)=T(a_1^*\parallel a_2^*)=b$ 이다. 여기서 $a_1=a_{11}\cdots a_{1k},\ a_2=a_{21}\cdots a_{2(n-k)}$ 일 때 a_1 과 a_2 의 연결(concatenation) $a_1\parallel a_2$ 은 $a_1\parallel a_2=a_{11}\cdots a_{1k}a_{21}\cdots a_{2(n-k)}$ 을 나타낸다.

k-셀 TPMACA \mathbb{C}_{T_1} 의 0-트리에는 2^{k-2} 개의 도착가능상태와 2^{k-2} 개의 도착불가능상태가 있고, (n-k)-셀 TPMACA \mathbb{C}_{T_2} 의 0-트리에는 2^{n-k-2} 개의 도착불가능상태와 2^{n-k-2} 개의 도착불가능상태가 있다. T_1 과 T_2 를 블록대 각선형식으로 배열한 행렬을 T라고 할 때, \mathbb{C}_{T_1} 의 0-트리의 도착가능상태와 \mathbb{C}_{T_2} 의 0-트리의 도착불가능상태의 연결, \mathbb{C}_{T_1} 의 0-트리의 도착불가능상태와 \mathbb{C}_{T_2} 의 0-트리의 도착불가능상태의 연결, 그리고 \mathbb{C}_{T_1} 의 0-트리의 도착불가능상태와 \mathbb{C}_{T_2} 의 0-트리의 도착불가능상태의 연결은 \mathbb{C}_{T} 의 0-트리의 도착불가능상태의 연결은 \mathbb{C}_{T} 의 0-트리의 도착불가능상태이다. 그러므로 \mathbb{C}_{T} 의 0-트리의 도착가능상태는 $2^{k-2} \cdot 2^{n-k-2} = 2^{n-4}$ 개고, 도착불가능상태는 $2^{n-2} - 2^{n-4} = 3 \cdot 2^{n-4}$ 개다. 따라서 \mathbb{C}_{T} 의 전체 트리의 도착가능상태는 $2^{2} \cdot 2^{n-4} = 2^{n-2}$ 개고, 도착불가능상태는 $3 \cdot 2^{n-2}$ 개다.

<예제 4.2> [그림 III -2]에서 \mathbb{C}_{T_1} 의 0-트리와 13-트리의 도착가능상태는 각각 4개이고 [그림 IV -1]에서 \mathbb{C}_{T_2} 의 0-트리와 5-트리의 도착가능상태는 각각 2개이므로 [그림 IV -2]에서 \mathbb{C}_{T} 의 0-트리에는 2^{7-4} =8개의 도착가

능상태가 있다. 그러므로 \mathbb{C}_T 의 전체 트리에는 2^5 개의 도착가능상태가 있고 $3 \cdot 2^{7-2} = 96$ 개의 도착불가능상태가 있다.

m개의 90/150 TPSACA로부터 얻은 m개의 TPMACA를 결합하여 얻은 MACA를 이용하면 정리 3.3에 의하여 마지막 비트가 PEF이므로 패턴이속할 attractor 트리를 바로 알 수 있다. 그러므로 기존의 패턴분류기를 설계하는 데 있어 필수적인 DV를 구하는데 걸리는 시간 복잡도를 줄일 수있다. 예를 들어 그림 IV-2에서 패턴 110 0010은 첫 3비트 중 마지막 비트가 0이고 나중 4비트 중 마지막 비트가 0이므로 패턴 110 0010의 PEF는 00이 되어 00의 00는 로리에 속한다. 그리고 패턴 00이 01은 첫 01는 중 마지막 비트가 01의 PEF는 01이 되어 01의 02를 하지막 비트가 03의트 중 마지막 비트가 03의트 중 마지막 비트가 04의 05를 하지막 비트가 09을 패턴 01가 01에 01를 중 마지막 비트가 01의 02를 패턴 03가를 중 마지막 비트가 01의 02를 패턴 03가를 중 마지막 비트가 01의 되어 03가를 중 마지막 비트가 01의 되어 05를 하지막 비트가 01의 되어 07의 09를 하지막 비트가 01의 되어 01가 01를 중 마지막 비트가 01의 되어 01가 01를 중 마지막 비트가 01의 되어 02를 가지막 비트가 01의 되어 파턴 01가 01의 무단F는 01이 되어 파턴 01가 01의 무단F는 01이 되어 파턴 01가 01의 무단F는 01이 되어 파턴 01가 01의 무단F는 01이므로 07의 03-트리에 속한다.

[표 Ⅳ-2]는 패턴이 속할 attractor 트리를 식별하는 방법이다.

[표 IV-2] 패턴들의 분류

패턴(P)	PEF 1	PEF 2	분류
11 0 010 0	0	0	ℂ _T 의 0-트리
10 0 100 1	0	1	\mathbb{C}_T 의 13-트리
011 1 00 0	1	0	\mathbb{C}_T 의 80-트리
010 1 11 1	1	1	\mathbb{C}_T 의 93-트리

4.2. 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기

이 절에서는 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기에 대해 살펴본다.

90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기는 [그림 IV-3]와 같고 입력층(input layer)의 n-비트 패턴이 1단계 분류기 (Classifier 1, 이하 T_{C_1})에 의해 은닉층(hidden layer)의 m-비트 패턴에 맵핑된다. m-비트 패턴은 2단계 분류기(Classifier 2, 이하 T_{C_2})에 의해 출력층(output layer)의 1-비트(0 또는 1)에 맵핑된다.



[그림 N-3] 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기

특성 다항식이 $x^{n-m}(1+x)^m$ 인 90/150 TPSACA를 이용한 패턴분류기 T_C 는 다음 식 (4.2)와 같고 다른 attractor에 속하는 두 개의 n-비트 패턴 집합 S_1 과 S_2 을 분류 할 수 있다.

$$T_{C_{1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{S_{1}} & \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ T_{S_{i}} & 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \\ T_{S_{m}} & 0 \\ 0 \\ T_{S_{m}} & 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.7)$$

임의의 두개의 n-비트 패턴 $\mathbf{x}_1 {\in} S_1$ 과 $\mathbf{x}_2 {\in} S_2$ 는 다음 식 (4.3)을 만족한다.

$$T_{C_1} \cdot \mathbf{x}_1 \neq T_{C_1} \cdot \mathbf{x}_2 \tag{4.8}$$

 \mathbf{x}_1 과 \mathbf{x}_2 가 각각 은닉층의 m-비트 Class \mathbf{y}_1 과 \mathbf{y}_2 에 맵핑되면, attractor의 총 수는 2^m 이다. 즉, T_{C_1} 는 n-비트 패턴 \mathbf{x}_i 에서 m-비트 Class \mathbf{y}_j 으로 맵핑된다.

 T_{C_2} 는 다음 식 (4.4)과 같고 \mathbf{y}_j 는 1-비트 z=(0 또는 1)에 맵핑된다.

$$T_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{S_{m-1}} & \vdots \\ 0 & 1 \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

여기서, $T_{S_{m-1}}$ 는 (m-1)차 90/150 TPSACA이다.

<예제 4.3> m=2이고 n=7인 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기 T_C 와 T_C 는 각각 다음과 같다.

$$T_{C_{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & O \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ O & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{C_{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4.10)$$

다른 attractor에 속하는 두 개의 n-비트 패턴 집합 S_1 와 S_2 에 대하여 $S_1=\{0000100,0001100,1001000,1100100\},$ $S_2=\{0001001,1000101,1110110,1110011\}$ 이라 하자. 임의의 두개의 n-비트 패턴 $\mathbf{x}_1{\in}S_1$ 과 $\mathbf{x}_2{\in}S_2$ 에 대하여 $\mathbf{x}_1=(1100100)$ 와 $\mathbf{x}_2=(1110011)$ 에 대하여, $T_{C_1}\cdot\mathbf{x}_1\neq T_{C_1}\cdot\mathbf{x}_2$ 를 만족한다.

첫 번째 분류기 T_{C_1} 에 의하여 \mathbf{x}_1 는 은닉층의 Class $\mathbf{y}_1=(00), \mathbf{x}_2$ 는 $\mathbf{y}_2=(11)$ 에 맵핑되고 두 번째 분류기 T_{C_2} 에 의하여 \mathbf{y}_1 는 출력층의 단일 비트 $z=0, \mathbf{y}_2$ 는 z=1에 맵핑된다.

즉, 90/150 TPSACA를 이용한 두 단계 패턴분류기는 큰 테스트 패턴 집합을 분류하기 위하여 m개의 90/150 TPSACA로부터 얻은 TPMACA를 결합하여 설계한 패턴분류기 T에 의해 생성된 n-비트 패턴 \mathbf{x} 을 1-비트(0 또는 1)에 맵핑하게 한다. 따라서 본 논문에서 제안된 패턴분류기는 큰 테스트 패턴집합을 효율적으로 분류할 수 있다.

V. 결론

기존에 제안된[14] MACA를 이용한 패턴분류기는 MACA의 0-트리로부터 기저를 구하여 선형연립방정식을 풀어 의존벡터 DV를 구한 후 테스트 패턴과 내적을 하여 패턴을 분류하는 방법으로 기존 MACA를 이용한 패턴분류기의 계산복잡도를 $O(n^3)$ 에서 O(n)으로 줄이는 효과를 가져왔다. 하지만 DV를 구하기 위해서는 MACA에 대응하는 0-트리의 모든 원소를 구하여 그것을 계수로 하는 동차연립방정식의 해를 구해야하기 때문에 초기 설정시간이 오래 걸린다는 문제점을 여전히 가지고 있었다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하는 패턴분류기를 설계하였다. 이패턴분류기는 90/150 TPSACA로부터 얻은 TPMACA를 여러 개 결합하여 구성한 MACA를 기반으로 한 것으로 패턴이 속할 attractor 트리를 바로알 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그리고 90/150 TPSACA 이용한 두 단계 패턴분류기는 m개의 90/150 TPSACA로부터 얻은 TPMACA을 결합하여 설계한 패턴분류기 T에 의해 생성된 n-비트 패턴 \mathbf{x} 을 1-비트(0 또는 1)에 맵핑하게 한다. 그러므로 본 논문에서 제안한 패턴분류기는 큰 테스트 패턴집합을 효율적으로 분류할 수 있다.

참고문 헌

- [1] S. Chakraborty, D.R. Chowdhury, and P.P. Chaudhuri, "Theory and Application of Non-Group Cellular Automata for Synthesis of Easily Testable Finite State Machines," *IEEE Trans. on Computers*, pp. 769–781, July 1996.
- [2] S. Chattopadhyay, S. Adhikari, S. Sengupta, and M. Pal, "Highly Regular, Modular, and Cascadable Design of Cellular Automata-Based Pattern Classifier," *IEEE Transaction on VLSI Systems*, vol. 8, no. 6, pp. 724-735, December 2000.
- [3] P.P. Chaudhuri, D.R. Chowdhury, S. Nandi, and S. Chatterjee, Additive Cellular Automata, Theory and Applications, vol. 1, Los Alamitos, California: *IEEE Computer Society Press*, 1997.
- [4] S.J. Cho, U.S. Choi, Y.H. Hwang, Y.S. Pyo, H.D. Kim and S.H. Heo, "Computing phase shifts of maximum-length 90/150 cellular automata sequences," LNCS, 3305, pp. 31–39, 2004.
- [5] S.J. Cho, U.S. Choi, H.D. Kim, Y.H. Hwang, J.G. Kim, and S.H. Heo, "New synthesis of one-dimensional 90/150 linear lybrid group vellular automata," *IEEE Trans. Comput-Aided Des. Integr. Circuits Syst.* vol. 26, no. 9, pp. 1720–1724, 2007
- [6] S.J. Cho, U.S. Choi, H.D. Kim, Y.H. Hwang, and J.G. Kim, "Analysis of 90/150 Two Predecessor Nongroup Cellular Automata," ACRI 2008, LNCS 5191, pp. 128–135, 2008.

- [7] U.S. Choi, "Analysis of The State Transition Behavior of Additive Cellular Automata and Its Application," Ph.D thesis, University of Pukyung National, 2003.
- [8] A.K. Das and P.P. Chaudhuri, "Efficient characterization of cellular automata," *Proc. IEEE.*, vol. 137, no. 1, pp. 81–87, 1990.
- [9] A.K. Das, D. Saha, A.R. Chawdhuri, S. Misra, and P.P. Chaudhuri, "Signature analysers based on additive cellular automata", Fault-Tolerant Computing, FTCS-20. Digest of papers., 20th International Symposium, pp. 265-272, 1990.
- [10] A.K. Das, A. Sanyal, and P.P. Chaudhuri, "On the Characterization of Cellular Automata", *Information Science*, 1991.
- [11] A.K. Das and P.P. Chaudhuri, "Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its application for pseudo-exhaustive test pattern generation," *IEEE Trans. Comput.* vol. 42, no. 3, pp. 340-352, 1993.
- [12] P. Dasgupta, S. Chattopadhyay, P.P. Chaudhuri. and I. Sengupta "Cellular automata-based pseudoexhaustive test pattern generator," *IEEE Transactions of Computer*, vol. 50, no. 2, pp. 177–185, 2001.
- [13] N. Ganguly, P. Maji, B.K. Sikdar, and P.P. Chaudhuri, "Generalized multiple attractor cellular automata (GMACA) model for associative memory," International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, vol. 16, no. 7, pp. 781–795, 2002.
- [14] N. Ganguly, P. Maji, S. Dhar, B.K. Sikdar, and P.P. Chaudhuri, "Evolving Cellular Automata as Pattern Classifier," in *Proceedings of*

- Fifth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, ACRI 2002, Switzerland, pp. 56-68, October 2002.
- [15] N. Ganguly, P. Maji, B.K. Sikdar, and P.P. Chaudhuri, "Design and Characterization of Cellular Automata Based Associative Memory for Pattern Recongnition," *IEEE Transation on System, Man and Cybernetics, Part B*, 2003.
- [16] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [17] H.D. Kim, S.J. Cho, U.S. Choi, S.H. Kwon and H.Y. Song, "Design of Pattern Classifier using 90/150 TPSACA," (Submitted)
- [18] P. Maji and P.P. Chaudhuri, "Theory and Application of Cellular Automata for Pattern Classification," *Fundamenta Informaticae*, vol. 58, pp. 321–353, 2003.
- [19] G.L. Mullen and D. Panario, *Handbook of finite fields*, Chapman and Hall/CRC, 2013.
- [20] J. Von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, Urbana and London, 1966.
- [21] M. Serra, T. Slater, J.C. Muzio, and D.M. Miller, "The analysis of one dimensional linear cellular automata and their aliasing properties," *IEEE Trans. Comput-Aided Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 9, pp. 767–778, 1990.
- [22] S. Wolfram, "Statistical mechanics of cellular automata," Rev. Modern Physics, vol. 55, pp. 601–644, 1983.