교 육 학 석 사 학 위 논 문

일차함수 개념의 이해에 관한 연구

-중학교 2학년 중・하위 수준 학생을 대상으로-

2014년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

최 성 화

교 육 학 석 사 학 위 논 문

일차함수 개념의 이해에 관한 연구

-중학교 2학년 중·하위 수준 학생을 대상으로-

지도교수 서 종 진

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2014년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

최 성 화

최성화의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2014년 8월 22일

주 심 이학박사 박진한 (인)

위 원 이학박사 표용수 (인)

위 원 교육학박사 서종진 (인)

목 차

표 목 차

A STUDY ON THE UNDERSTANDING OF LINEAR FUNCTION CONCEPTS

- focused on the mid-low level students for the 8th grades -

Seong-Hwa Choi

Graduate School of Education

Pukyong National University

Abstract

This study looks into what concept images second-year students in middle school have about functions and what their erroneous concepts are by examining how much they understand the concept of functions, and aims to improve the teaching-learning method to correct their wrong concepts.

For this purpose, the following research questions were set up.

1. What do the students think about functions?

2. To what extent can a point given on a coordinate plane represent the pre-image of a function and its corresponding image?

3. How much do they understand linear functions, graphs, domains of definition and ranges?

To answer these research questions, the researcher randomly chose 4 classes (75 students) in two schools in Busan and carried out research.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

19세기 말 산업혁명의 시대가 도래하면서 당시의 시대적 상황과 사회적 요구에 부합되는 수학교육의 필요성을 인식하게 되고 수학교육을 개선하려는 움직임이 일어난다. 이러한 움직임은 20세기 초의 ‘수학교육 근대화 운동’으로 전개가 된다. 이러한 시기에 독일의 Klein이 수학교육에서 함수 개념의 함양을 주장한 이래 함수 개념이 학교수학에 도입되었다(우정호, 1998; 황혜정 외 5명, 2012).

집합 사이의 대응 관계로의 현대적인 함수 개념이 학교수학에 도입된 것은 1960년대(새수학)이다. 현재, 학교수학에서는 함수와 관련된 많은 내용을 다루고 있다. 초등학교 수학에서는 ‘함수’의 용어를 사용하지는 않지만 대응 규칙 찾기, 비와 비례식, 표와 그래프, 정비례와 반비례, 도수분포표 등 대응관계나 종속관계와 관련된 많은 함수적 사고 활동을 요구하고 있다. 중학교 수학에서는 형식적으로 함수의 정의와 용어를 도입하고, 일차함수, 이차함수 및 그 그래프, 직선의 방정식, 삼각비 등을 다룬다. 그리고 고등학교에서는 다항 함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수, 유리함수, 합성함수, 역함수 등을 다루고, 다항 함수의 미분과 적분 등을 다루도록 되어 있다. 이러한 많은 내용들이 학교수학에서 다루어지고 있기 때문에, 학생들이 함수의 기본 개념을 어떻게 형성하는가에 따라 수학학습의 성공에 많은 영향을 미친다고 볼 수 있다. 이러한 관점에서 본 논문에서는, 중학생들이 일

차함수를 학습한 후에 함수와 관련된 기본적인 내용을 어느 정도 알고 있는지, 또, 그러한 것들을 어느 정도 연결시키고 있는지 조사・분석하여 교수・학습 방향을 모색하여 보았다.

2. 연구 문제

본 연구에서는, 중학교 2학년 학생들이 중학교에서 학습한 일차함수 개념에 대하여 어는 정도 이해하고 함수 관련된 내용을 어느 정도 연결시키고 있는지 알아보기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제1. 학생들이 함수 및 주어진 일차함수를 보고 어떠한 생각을 하는지 그 반응을 조사・분석한다.

연구문제2. 좌표평면에 주어진 몇 개의 점을 지나는 함수(일차함수)의 그래프를 어느 정도 올바르게 그릴 수 있는가?

연구문제3. 일차함수식 및 그래프, 정의역 치역에 대하여 어느 정도 이해하고 있는가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 P광역시에 소재한 2개 학교 4개 학급(75명)을 대상으로 조사하였으므로, 본 연구의 결과가 전국 중학교 상황을 대표하기에는 어려움이 따른다. 하지만, 각 학교나 학생들의 수준을 고려하여 조사 도구를 약간 수정・보완하여 적용할 경우 그 결과를 토대로 함수의 기본 개념을 지도하는 자료로 활용할 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경 및 선행 연구

1. 이론적 배경

함수 개념은 4000년 전부터 나타났다. 3700년 동안은 예전의 단계이고, 최근 300년 동안에 미적분, 해석학의 문제와 밀접한 관련을 가지고 발달되었다. 예견의 단계는 함수 개념이 명백한 형태로 표현되기 위한 여러 가지 수학적 토대를 만드는 시기였다. 함수 개념은 미적분, 해석학과 더불어 발달된 점을 미루어 볼 때, 미적분의 발달에 따라 다양한 함수가 나오게 되고, 따라서 함수의 정의가 필요했음을 알 수 있다(이종희, 1999).

(1) 암묵적인 함수 개념 단계

이 단계는 변환이나 양사이의 관계에 대한 암묵적인 아이디어의 단계이다. 함수 개념을 이해하기 위한 첫 번째 조건은 세계의 존재를 이해하는 것이다. 즉, 변화하는 세계, 변화하는 대상의 세계, 변화 사이의 관계의 세계 또는 한 대상에서 다른 대상으로의 변화 과정의 세계, 규칙이나 패턴 혹은 법칙의 세계가 존재함을 알아야 하는 단계이다. 변화가 있음을 알아야 하고, 변화 사이의 관계는 연구되어야 할 가치가 있는 것으로 인식해야 한다. 주변 세계에서 변화하는 대상들이 문제의 근원이 되기도 한다. 여기에서 변화 사이의 관계를 인식하고, 규칙성을 인식하는 것은 이러한 변화에 대처하는 도구가 된다. 사실 함수 개념은 주변 세계에서 관찰되고 경험되는 변화에 타협하기 위한 노력의 결과로 볼 수 있다. 만약 수학이란 시

제 문제와 관계가 없는 것으로 보는 경우, 함수 개념의 발달을 위한 필요조건인 이러한 행동이 무시된다면, 이것은 함수개념이 발달되는데 장애가 될 것이다(이종희, 1999).

(2) 고대 수학에서의 함수 개념의 사용

라이프니츠(Leibniz : 1646~1716)에 의해 함수라는 개념에 대한 정의가 직접적으로 나오기 전에도 비록 함수라는 표현은 아니지만 그 전에도 함수의 개념을 암묵적으로 사용하였다. 이 개념의 출현은 기원전 5세기경 고대 바빌로니아 시대까지 거슬러 올라간다. 이 바빌로니아 시대에 함수의 개념을 사용했던 흔적으로는 곱셈표, 역수표, 제곱 및 세제곱표, 지수표 등이 있다. 실제로 19세기 초반 메소포타미아에서 고고학자들에 의해 발굴된 50만 개의 점토판 유적 중 약 200여 개가 이에 해당한다. 이는 천문학에 대한 연구로부터 천체의 주기적인 변화를 알고자 하는 데 필요한 것으로써, 함수의 개념이 이 시기에도 사용되었음을 나타내는 좋은 증거가 된다고 할 수 있을 것이다. 또한, 그리스 천문학자 프톨레마이오스(Ptolemaeous, C. ; ?85~?165)의 천문학 책에 나오는 현의 표도 천체 운동을 삼각함수로 기술한 것으로 해석할 수 있다(박영훈 외 5인, 2009; Howard Eves, 1995).

(3) 17세기 변량 사이의 종속관계로써의 함수의 출현 및 발전

수학의 암흑기를 지나 15세기로부터 17세기까지 수학에는 많은 변화가 일어나게 되었다. 수의 개념이 실수에까지 확대되고 이러한 수의 구조를 연구하는 대수학이 발전하게 되었으며 데카르트(Descartes, R : 1596~1650)에 의해 좌표의 개념이 등장함에 따라 해석기하학이 발전하게 되었고, 또

한 물리학의 발전에 따른 역학에 대한 연구가 활발히 진행되었다. 이러한 발전은 함수의 개념이 확립되도록 하는 밑거름이 되었는데, 특히 17세기 등장한 해석기하학과 수학식으로 표현된 역학은 변수들 사이의 관계를 방정식으로 표시하고 이러한 관계를 그래프로 도식화한 곡선의 연구를 가능하게 하였으며 이는 함수의 개념의 확립에 결정적인 계기가 되었다. 함수 개념이 완전히 인식되기 전 이었던 17세기 대부분의 함수는 곡선으로 연구되었다. 함수에 대한 개념화는 여러 가지 운동을 연구하는 것으로부터 시작되었다. 17세기에 라이프니츠는 뉴턴과 독립적으로 미적분을 연구하였는데 그는 미적분을 연구하면서 곡선의 기하학적 대상을 기술하기 위하여 함수라는 용어를 공식적으로 사용하게 된다. 함수라는 용어는 곡선을 해석적으로 탐구하고 기술하는 기하학적 문맥에서 생겼다. 1673년 Leibniz는 *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*에서 서로 역이 되는 문제에 관심을 가졌다. 첫째는 횡좌표와 종좌표가 방정식으로 주어지는 어떤 곡선에 대하여 그 곡선과 관계있는 접선영, 법선, 그리고 다른 선분을 발견하는 일. 둘째, 한 곡선의 접선영, 법선, 그리고 다른 선분들이 주어져 있을 때, 횡좌표와 종좌표와의 관계를 발견하는 것. 이러한 '곡선과 관련있는 선분'을 곡선에 대해 어떤 기능을 수행하는 선분(lines fulfilling some function for the curve)이라고 불렀다. 1694년 Leibniz는 *Le Journal des scavans*에서 곡선과 관련된 선분을 나타내기 위해서 'function'이라는 용어를 사용하였다. 예를 들어 Leibniz는 'a tangent is a function of a curve'라고 하였다. 이것은 환유적 축약의 신호라고 볼 수 있는데, 곡선에 대한 어떤 기능을 수행하는 선분을 단순히 'function'라고 하였다. 그는 이 논문에서 어떤 기능을 수행하는 선분사이의 관계보다는 선분 그 자체에만 관심을 가지게 되었다. 그래서 Leivniz와 그의 제자 요한 Bernoulli와의 서신왕래에서의 중심 주제는 'function'이라는 용어의 정확성이라기보다는, 곡선

좌표와 좌표사이의 관계, 대상과 대상사이의 관계 연구가 더 중요한 것이었다. 관계로 한 곡선과 다른 곡선이 정확히 구별되었고, 이러한 관계를 분류함으로써 곡선의 분류가 생겼다. 이러한 분류 이전에 수학자들은 Descartes의 분류, 즉 곡선은 운동적인(mechanical)것과 기하학적인(geometrical)것을 사용하였다. 그러나 Descartes시기에는 운동적인 것은 수학에서 제외되었다. 그러나 Leibniz의 새로운 분류에는 운동적인 곡선도 포함시켰다. 그는 운동적인 곡선을 '초월적(transcendental)'이라고 한 반면에, Descartes의 기하학적 곡선을 '대수적(algebraic)'이라고 불렀다. 그래서 Leibniz는 곡선을 초월적인 것과 대수적인 것으로 구분하였다. 라이프니츠는 여러 가지 운동을 양적으로 조직화하기 위해 운동과 관련하여 나타나는 여러 가지 변량(예를 들어, 곡선 위의 점에서의 접선, 법선, 접선영, 법선영의 길이의 변화)을 일반화하여 함수의 개념을 도입하였으며, 처음으로 'function' 이라는 용어를 사용하였다. 그 당시의 함수 개념은 지금의 함수 개념과는 조금 다른 것으로 변수 x의 값에 따라 y값이 정해지면 y를 함수라고 정의하였다. 그 후 곡선과 결합된 함수를 나타내는 방정식이 점차 주목받게 되어 방정식에 나타나는 기호와 그러한 기호 사이의 관계가 연구대상이 되면서 17세기 말경에 대수적인 함수가 등장하게 되었다(박영훈 외 5인, 2009; 이종희, 1999; Howard Eves, 1995).

(4) 18세기의 함수의 발전

미적분의 등장에 의한 해석기하학의 발달로 인하여 여러 곡선들이 방정식으로 표현되게 됨에 따라 변수들 사이의 함수 관계가 방정식으로 나타내어질 수 있게 되었다. 오일러(Euler, L : 1707~1783)는 이러한 변량사이의 관계를 나타내는 표현식을 함수라고 정의하였다. 또한 오일러는 현재 함수

를 나타내는 기호인 $f(x)$을 처음으로 사용한 것으로 유명하다. 그의 '무한소 해석 입문'에서 변량의 함수를 '변량과 정량으로 된 임의의 해석적 식'이라고 정의하였다. 비록 오늘날 이 '해석적 식'이 무엇을 가리키는지에 대하여는 설명할 수 없기 때문에 이 정의는 받아들여지지 않지만 이를 통하여 오일러는 주로 대수적인 함수와 삼각함수를 비롯한 초월함수를 나타내었음을 추론해 볼 수 있다. 함수는 곡선과 밀접한 관련을 가지고 있음을 분명한 일이다. 실제로 곡선을 대응관계로 생각해보면 다가대응이 되는데 만일 한 변수와 다른 변수와의 종속관계가 다가대응이 되면 다루기 어려워지고 특히 음함수와 같은 함수식에서 한 변수를 다른 변수로 나타낼 때 여러 식이 나오는 경우 혼란을 일으키게 된다. 이를 막기 위해 함수를 변수들 사이의 일가 대응으로 제한하게 되었고, 이것을 함수의 일반적인 정의로 받아들이게 되었다. 독립 변수와 종속 변수의 구별은 Euler에서 시작되었다고 볼 수 있다. 정의구역과 치역의 구별은 함수의 정의에서 대칭적이지 않다. 즉 정의역과 치역을 바꿀 수 있는 것은 아니다. 변수의 순서의 구별이 중요하다고 인식되는 데는 오랜 시간이 걸렸다. 함수 개념은 해석기하학의 문맥에서 시작되었다고도 볼 수 있는데, 해석기하학에서는 곡선에 대해 역할을 하는 서로 다른 선분(diameter, axis, …)이 고려되었다. 그런데 타원의 방정식을 생각한다면 변수의 순서는 그리 중요하지 않게 된다. Descartes의 변수의 역할은 대칭적이었으며, 이러한 구분은 Newton에서도 분명하지 않았다. 독립 변수와 종속 변수의 등장은 함수 개념 발달에 결정적인 역할을 했으며, 이는 1755년 Euler에 의해 시작된 개념이라고 할 수 있다. 이후 함수를 보다 엄밀하게 정리하고자 하는 시도가 일어나게 되었다. 이러한 시도는 엄밀주의를 주장하였던 라그랑주(Lagrange, J. L : 1736~1813)에 일어나게 되었고 이러한 시도는 이후 19세기에 이르기까지 계속되었다. 라그랑주는 1797년 출간된 그의 저작 '해석함수론'으로부터 미

적분학을 더욱 논리적으로 만족스럽게 만들려고 했다. 각 차수의 도함수를 나타내는 기호들 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$들은 라그랑주의 연구에서 나오게 된 유명한 기호들이다. 프랑스 혁명 기간 동안 이루어진 라그랑주의 연구는 새로운 연구 분야를 일으켰으며 커다란 영향력을 미칠 수 있었다. 새로운 분야, 곧 실변수 함수론은 그 뒤의 수학에서 관심의 대상이 되었다(박영훈 외 5인, 2009; 이종희, 1999; Howard Eves, 1995).

18세기 후반에 이르러 응용수학에 대한 연구에서 하나의 식으로 나타내어지지 않는 함수가 등장하게 되었다. 함수는 하나의 식으로 표현될 수 있다는 전통적인 관념에 혁명적인 변화를 가져온 것이다. 특히 푸리에(J. -B. Fourier : 1768~1830)는 급수 표시를 이용하여 도함수가 존재하지 않는 점을 가지는 함수나 불연속인 점이 수많이 존재하는 함수일지라도 그 함수는 푸리에 전개식으로 표현할 수 있다는 것을 보임으로써, 보다 넓은 의미의 함수를 표시할 수 있었다. 이는 함수가 반드시 식으로 표시되어야 한다는 기존의 관념으로부터의 탈피를 가져오는 중요한 계기가 되었다(Howard Eves, 1995).

(5) 19세기 이후에서 오늘날에 이르기까지 함수 개념의 발전

19세기 초부터 수학은 변혁을 겪게 된다. 해석적 식으로서의 함수 개념이 그 이상으로 확대될 필요성은 변수 사이의 관계의 모임에서 일반적인 정리를 공식화하고 특정한 함수에 대해 얻어진 결과를 조직하는데서 나타났다. 이러한 과정은 Euler, d'Alembert, Bernoulli의 진동 끈 문제에 대한 논쟁에서 시작되었고, 열전도 문제를 해결하기 위한 Fourier의 삼각급수 이론의 발전과 함께 계속되었으며, Cauchy, Dirichlet, Bolzano등에 의한 연속

함수 개념과 함께 계속되었다. 코시(A. -L. Cauchy, 1789~1857)는 기존의 수학자들이 무한소를 아주 작은 고정된 수로 생각하였던 것을 변수로 명확하게 정의하고 이러한 개념에 의해 극한 개념을 확립하게 된다. 그는 $\epsilon-\delta$ 논법을 제안하여 극한 개념에 의해 도함수를 새로이 정의하고, 연속, 미분가능성, 적분 개념을 극한이라는 용어로 엄밀하게 정의하였다. 이러한 코시의 업적은 오늘날 해석학에서 이용되는 정의로 사용되고 있다. 디리클레(Dirichlet, 1805~1859)는 어떤 구간의 각 점에 어떠한 값이 대응되는 관계를 함수라고 정의하는 현대적인 함수의 개념을 제기하였다. 그는 Fourier급수와 그 급수의 수렴조건을 찾는 연구를 통해서, 1837년 함수의 일반적 정의하고, 처음으로 함수의 정의에서 영역을 구간으로 명백하게 제한하였다. 그의 정의는 두 집합사이의 대응의 현대적인 관점과 유사하지만, '집합'과 '실수' 개념은 그 시기에 아직 확립되지 않았다.

이러한 디리클레의 함수개념은 1939년 부르바키(Bourbaki)라는 단체에 의해 보다 확실히 정립되어진다. 이 단체는 집합E의 변수 x와 집합F의 변수 y사이의 관계가 만약 모든 $x\in E$에 대하여 x와 주어진 관계에 있는 $y\in F$가 하나만 있다면, 그 관계를 y에서의 함수적 관계라고 하였다. 우리는 이런 식으로 모든 $x\in E$에 x와 주어진 관계에 있는 $y\in F$를 관련시키는 연산에 함수라는 이름을 준다. 그리고 y를 원소 x에서의 함수 값이라고 하며, 주어진 함수적 관계에 의하여 함수가 결정되었다고 한다. 함수 관계가 같으면 그 함수는 같다'라고 정의하였는데, 실제로 이는 오늘날 널리 사용되는 함수의 정의이다(박영훈 외 5인, 2009; 이종희, 1999; Howard Eves, 1995).

2. 선행 연구

학생들은 함수 개념의 정의를 말할 수 있으면서도 서로 양립할 수 없는 지식의 두 가지 측면이 개념 이미지에 근거하여 문제를 해결하는 구획화 현상이 일어난다. 즉, 그들은 함수를 두 집합의 원소들 사이의 대응으로 정의 할 수 있지만 어떤 함수의 그래프에 대해 함수가 아니라 X에서 Y로의 임의 대응이라고 생각할 수 있다는 것이다(정영옥, 1997). 다시 말해, 학생들이 그래프를 보고 그래프에 내재한 정보를 분석하고 해석하는 일과 이들을 함수 및 함수식과 관련시킬 수 있도록 지도되어야 하고 학습되어야함을 의미한다. 이는 수학교사는 함수와 관련된 지식을 갖추고 있어야 하고, 학생들은 함수와 관련된 개념들을 연결할 수 있는 자신들 만의 학습방법을 터득해야함을 의미한다. 김원경(2002)은 함수 개념과 관련된 연구에서, 대부분의 수학 교사들이 순서쌍과 그래프에 의한 함수와 대응에 의한 함수 개념에 대해서는 오류가 적게 나타났지만, 관계에 의한 함수와 식에 대해서는 오류 정도가 높게 나타나 났다. 그리고 Norman(1992)는 미국의 중등 교사들을 대상으로 한 연구에서, 대부분의 교사들이 함수의 그래프를 단순히 식에 의해서 표현된 관계성을 시각화하는 방법으로 생각한다는 것이다. 이러한 연구에서 볼 때, 수학교사들의 함수 교육의 필요성이 제기된다고 할 수 있다.

학생들을 대상으로 한 연구를 살펴보면, 학생들은 함수의 용어나 성질들을 잘 이해하지 못하고, 그래프와 대수식을 연결 짓는데 많은 어려움을 가지고 있으며, 그래프와 대수식을 서로 별개의 지식으로 심상에 존재하는 것 이다(김원경 외 1인, 2002. 신인숙, 1996). 교육과정의 측면에서 볼 때, 함수 단원은 수학 교육에 있어서 매우 중요하다. 특히 함수를 처음으로 접

하는 중학교 교육과정에서 함수 단원의 지도 방법을 연구하고 개발함으로써 학생들로 하여금 함수에 대한 정확한 개념을 형성할 수 있도록 하여야 할 것이고, 실생활에서 함수를 응용할 수 있는 폭넓은 적용 능력을 길러주어야 할 것이다(권민경, 2009). 그리고 일차함수 개념정의에서 정의역을 보다 명시적으로 제시 하고 관계식, 그래프 등의 다양한 표상에서도 잘 나타날 수 있도록 하여야 할 것이다. 정의역을 배제하고 일차식에 치중하여 일차함수의 개념을 익힌 학생들은 일차함수의 그래프가 직선밖에 없다고 인지할 것이고 정의역을 변화시키면서 이에 따른 함수 표현을 숙지한 학생들은 일차함수에 대한 그래프 이미지를 달리할 것으로 생각한다. 교과서는 교사의 교수학적 지식에 가장 중요하게 영향을 줄 수 있을 뿐 아니라 학생들의 수학적 개념형성과 사고에도 중대한 영향을 주기 때문에 교과서에 사용되는 개념 및 기호표현, 실생활에 사례는 심도 있는 논의를 거친 다음 도입되어야 한다(김진환, 2010). 함수의 그래프에 대한 오류는 주로 함수에 관한 여러 가지 용어들의 개념과 성질을 제대로 알지 못하고 학생들이 기계적으로 문제를 풀거나 그래프를 해석하거나 식이나 기호를 그래프화하는 능력의 부족으로 인한 것이 대부분이었다. 따라서 학생들의 함수의 그래프에 대한 이해를 돕기 위해서는 함수의 다양한 표상들-특히 대수식과 그래프-을 서로 통합시킬 수 있는 수업 계획을 세워야 하며 학생들의 오개념이나 오류를 제거하기 위해서는 개념에 대한 다양한 표상들이 제시되고, 탐구되거나 제안되어야 한다(최은형, 2004).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 P광역시 중학교 2학년 75명을 연구 대상으로 하였다. 연구대상 학교는 P광역시에서 중·하위권 정도의 수준이고, 연구 대상은 학업 수준이 이질적으로 구성되었다.

2. 연구 절차

본 연구에서는 중학교 2학년 학생들이 함수에 대하여 어느 정도 이해하고, 함수의 개념들 간의 연결 정도에 대하여 어느 정도 알고 있는지 알아보기 위하여 다음과 같은 절차에 따라 연구를 진행하였다.

첫째, 2013년도 5월-6월에, 초등학교에서 학습한 두 양 사이의 대응관계를 나타낸 표에서 규칙을 찾는 문제, 중학교 1학년에서 학습한 정의역, 치역, 순서쌍과 좌표, 그래프 그리기, 중학교 2학년에서 학습한 일차함수 문제를 수집하여 분석하였다.

둘째, 2012년 7월-8월에는, 수집한 자료를 분석한 결과를 토대로 검사 도구를 구성하여 수학 교사 및 수학 전문가의 자문을 받아 수정・보완하였다.

셋째, 2012년도 9월에 중학교 75명을 대상으로 조사하여 학생들의 자료를 비교 분석하였다.

3. 연구 도구 및 자료 분석

본 연구에서는, 함수에 대하여 어는 정도 이해하고, 함수 개념들 간의 연결에 대하여 어느 정도 알고 있는지 조사하기 위하여 첫 번째, 함수를 생각했을 때 떠오르는 것을 쓰는 문제지와 두 번째, 좌표평면에 주어진 점을 이용하여 그래프를 그리는 6문항, 세 번째, 초등학교 수학 영역 중 두 양 사이의 대응관계를 나타낸 표에서 규칙 찾기 2문항, 정비례 관계식 세우기 1문항, 중학교 1학년에서 학습한 정의역과 함숫값 구하기 4문항, 순서쌍과 좌표 4문항, 그래프 그리기 2문항, 중학교 2학년에서 학습한 일차함수 6문항을 구성하였다. 학생들을 통해 수집된 자료를 기술통계를 사용하여 분석하였다.

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 일차함수에 대한 반응

가. '함수'라는 용어에 대한 학생들의 반응

'함수'의 용어를 제시하고 학생들이 생각나는 것을 모두 쓰도록 하였다. 그 결과는 <표 1>과 같이 나타났다.

<표 1> 문제 1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용	인원수(%)
변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용	1)x, y.2)a, b.3)점, 선.4)숫자.5)기호.6)분수 7)유리수8)음수,양수9))수학 용어의 한 단어	39(18.4)
함수와 직접 관련된 내용	1)식,계산,풀이2)직선3)곡선4)직선과 곡선 5)포물선6)그래프7)함수 그래프8)x축, y축 9) 10) 11) 12) 13)x절편,y절편14)함수축15)제 1,2,3,4사분면 16)정의역,공역,치역17)좌표평면과 x축,y축, 원점18)평면19)x평면,y평면20)$(x,\ y)$좌표, (0,1),21)$f(x)$22)$y=f(x)$23)x와 y의 관계 24)$y=ax+b\ (a\neq 0)$25)$y=ax$26)$y=ax+b$ 에 대입해서 표에 넣은 것27)식.28)함수.29) $y=\dfrac{20}{x}$ 30) $\dfrac{y\text{증가량}}{x\text{증가량}}$ 31) $\dfrac{y\text{절편}}{x\text{절편}}$ 32)일차함수.33)이차함수.34)삼차함수.35)상수함수	121(59.1)
일차함수의 활용 문제와 관련된 내용	타고 있는 양초	1(0.5)
무의미한 반응	1)수학 2)수학 익힘책 3)문제 4)네모 5)공부 6)시험 7)모르겠다. 8)어렵다.	46(22)
전체		207(100)

문제 1은 함수를 생각했을 때 학생들의 반응에 대하여 서술할 수 있도록 하였다. 변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용을 적은 학생은 18.4% (39명)로 나타났고 함수와 직접 관련된 내용을 적은 학생은 59.1% (121명), 일차함수의 활용문제와 관련된 내용을 적은 학생은 0.5% (1명), 무의미한 반응을 보인 학생은 22% (46명)으로 나타났다.

나. $y=\frac{a}{x}$ (a 는 상수)에 **대한 학생들의 반응**

학생들이 반비례 함수 $y=\frac{a}{x}$ (a 는 상수)을 보고 생각나는 것을 모두 쓰도록 하였다. 그 결과는 <표 2>과 같이 나타났다.

<표 2> 문제 2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용	인원수(%)
변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용	1)a, x, y. 2)$a=1$. 3)유리수 4)숫자 5)분수 6)a는 양수 ($a>0$)	21(20.2)
문제와 유사한 내용	1)$y=\frac{a}{x}$. 2)$x=\frac{a}{y}$. 3)$y=\frac{x}{a}$. 4).$y=\frac{a}{x}+b$ 5)$xy=a$ 6)$y=\frac{a}{2x}\left(y=\frac{a}{3x}, y=\frac{a}{4x}\right)$. 7)$a$는 상수 8)$y=-\frac{a}{x}$. 9)$a=\frac{y}{x}$, $a=\frac{x}{y}$ 10)x가 분모(x 는 a의분모) 11)$y=\frac{a}{2}$	32(30.8)
$y=\frac{a}{x}$ 와 직접 관련된 내용	1)곡선 그래프 2)분수 함수 3)곡선(곡선인 함수) 4)y는 x에 반비례한다.	9(8.6)
함수와 관련된 내용	1)함수 2)$y=2x$ 3)(x, y) 4)x축,y축 5)포물선 6)그래프 7)함수 그래프 8)기울기 9)y절편(x절편) 10)상수항 11)좌표평면 12)직선	28(26.9)

무의미한 반응	1)a는 무슨 숫자일까? 2)y는 자연수일 것 같다 3)숫자는 어디 있지? 4)y는 미지수이다. x도 미지수이다. 5)x에 대해 나눈다. 6)한 쌍 7)$y=a$, $y=a+b$ 8)문자 9)문제	14(13.5)
전체		104(100)

문제 2는 함수를 생각했을 때 학생들의 반응에 대하여 서술할 수 있도록 하였다. 변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용을 적은 학생은 20.2% (21명)로 나타났고 문제와 유사한 내용을 적은 학생은 30.8% (32명), $y=\frac{a}{x}$와 직접 관련된 내용을 적은 학생은 8.6% (9명), 함수와 관련된 내용을 적은 학생은 26.9% (28명), 무의미한 반응을 보인 학생은 13.5% (14명)으로 나타났다. $y=\frac{a}{x}$와 직접 관련된 내용 반비례, 곡선에 대해서 적은 학생은 8.6% (9명)로서 학생들이 함수 $y=\frac{a}{x}$에 대한 이해도가 부족하다는 것을 의미한다.

다. $y=ax+b$ (a, b는 상수)에 대한 학생들의 반응

학생들이 일차함수의 일반형($y=ax+b$, a, b는 상수)을 보고 생각나는 것을 모두 쓰도록 하였다. 그 결과는 <표 3>과 같이 나타났다.

문제 3에서는 함수 $y=ax+b$를 생각했을 때 학생들의 반응에 대하여 서술할 수 있도록 하였다. 변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용을 적은 학생은 26.2% (32명)로 나타났고 문제와 유사한 내용을 적은 학생은 15.6% (19명), $y=ax+b$와 직접 관련된 내용을 적은 학생은 21.3% (26명), 함수와 관련된 내용을 적은 학생은 18.9% (23명), 무의미한 반응을 보인 학생은 18.0% (22명)으로 나타났다.

<표 3> 문제 3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용	인원수(%)
변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용	1)a, b, x, y. 2)$1+b$. 3)ax, bx 4)숫자 5)유리수 6)상수 7)방정식	31(26.2)
문제와 유사한 내용	1) $ax+b$. 2) $y=ax+b$. 3) $y=bx+a$. 4) $y=a+b$5)$y=2x+b$6)$x=y+b$7)$a=yx+b$ 8)$y=-ax-b, y=ax-b$	19(15.6)
$y=ax+b$와 직접 관련된 내용	1)$y=1x+2$,$y=2x+3$,$y=3x+4$, $y=4x+5$,$y=5x+6$,$y=6x+7$.2)$a>0$ 3)$y=x+1$.4)일차함수.5)상수항.6)b는y절편.7)$x=0$일때y값.8)a는기울기.9)기울기.10) $a=\frac{y\text{증가량}}{x\text{증가량}}$11)$y$가 0일 때 x에 들어가는 수는 x절편($y=0$ 일 때 x의 값)12)$y=ax$에서 b만큼 이동.13)기울기는(1,3)(4,6)을 지나면 1이다.14)원점을 지나지 않는 함수.15) a,b가 양수면 오른쪽으로 기운다.16)a,b가 음수면 왼쪽으로 기운다.	26(21.3)
함수와 관련된 내용	1)함수 2)치역 3)(b, a),$(b, 0)$,$(0, -\frac{b}{a})$ 4)직선 5)x축,y축 6)x절편,y절편 7)좌표평면 8) $f(x)$ 9)++, -+, --. +- 10)제 1,2,4 사분면, 제 1,2,3 사분면 11)그래프 12)x축, y축	23(18.9)
무의미한 반응	1)x는 뭘까? 2)y와 x는 미지수이다 3)a와 b는 상수이다 4)a와 b가 자연수면 좋겠다. 5)a와 x사이에는 ×(곱하기)가 생략 되어 있을 것이다 6)영어 7)계산 8)수학 9)문자 10)식 11)대입 12)덧셈 13)공부 14)시험 15)답 16)등호 17)$ab=$상수 (a, b는 상수)	22(18.0)
전체		122(100)

$y=ax+b$와 직접 관련된 내용을 적은 학생 중에는 'a,b가 양수면 오른쪽으로 기운다.' 'a,b가 음수면 왼쪽으로 기운다.' 같은 틀린 내용을 적은 학생들도 있었다. 그러나 위 문항 2에서 $y=\frac{a}{x}$와 직접 관련된 내용을 적은 학생 8.6% (9명)보다 2학년 학생들이 최근에 학습하여 기억에 남아있는 일

차함수 $y = ax + b$ 관한 내용을 적은 학생 21.3% (26명)로서 2배 넘게 많다는 것을 알 수 있다.

2. 좌표평면에 주어진 점을 지나는 함수(일차함수)에 대한 반응

학생들이 함수의 기본 개념을 어느 정도 이해하고 있는지 알아보기 위하여 좌표평면에 몇 개의 점을 제시하고 다음과 같은 세 가지 질문에 대하여 답하도록 하였다. 그리고 문제는 6문항을 구성하여 각 문항마다 체크하고 함수의 그래프를 그리고 그 이유를 제시하도록 하였다.

첫째, 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가?
둘째, 함수의 그래프를 그려라.
셋째, 학생들이 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하여라.

가. 한 점이 주어졌을 때의 학생들의 반응

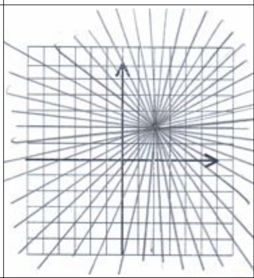
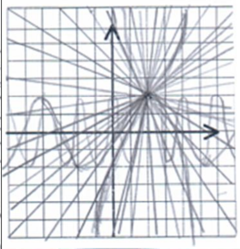
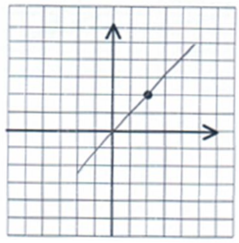
한 점이 주어졌을 때 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는지 답하도록 하였다. 그 결과는 <표 4>와 같이 나타났다.

<표 4> 문제 1-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제1-1	①	②	③	④	⑤	⑥	무반응	전체
인원수(%)	3(4.0)	5(6.7)	2(2.7)	7(9.3)	7(9.3)	51(68)	0(0)	75(100)

한 점이 주어졌을 때 그래프를 그리도록 하였다. 그 결과는 <표 5>와 같이 나타났다.

<표 5> 문제 1-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용			
	무한개의 직선	무한개의 직선 및 곡선	하나의 직선	무반응
문제 1-2				
인원수(%)	54(72.0)	3(4.0)	6(8.0)	12(16.0)

문제 1-2는 한 개의 점을 지나는 함수의 그래프에 대해서 나타낼 수 있도록 하였다. '한 개의 점을 지나는 직선은 무수히 많다'라고 생각하여 무한개라고 답한 학생은 72.0% (52명)이다. 그러나 4% (3명)의 학생만이 '한 개의 점을 지나는 직선과 곡선은 무한개이다'라고 답하였다.

문제 1-1에서는 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하도록 하였다. 그 결과는 <표 6>와 같이 나타났다.

<표 6> 문제 1-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제	반응 내용	인원수(%)
문제 1-3	한 점을 지나는 직선은 무수히 많기 때문에.	30(40.0)
	한 점을 지나는 직선과 곡선은 무한하기 때문에.	4(5.3)
	소수점으로 생각하면 무한히 쪼갤 수 있기 때문.	1(1.3)
무반응	반응 없음	40(53.4)
전체		75(100)

문제 1-3에서 문제를 푼 학생들은 모두 무한개라고 답하였다. 학생들이 하나의 점을 지나는 직선은 무한하다는 답을 한 학생들이 46.7% (35명)중에서 40% (30명)으로 나타났고 무한한 직선뿐만 아니라 곡선까지도 생각

한 학생들은 5.3% (4명)으로 나타났다. 중학교 2학년 학생들 대부분이 그래프가 직선으로만 나온다고 생각한다는 것을 의미한다.

나. 두 점이 주어졌을 때의 학생들의 반응

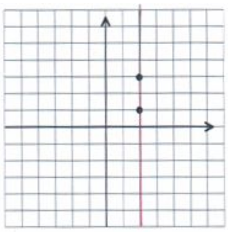
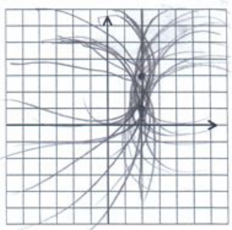
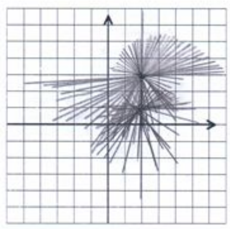
두 점이 주어졌을 때 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는지 답하도록 하였다. 그 결과는 <표 7>와 같이 나타났다.

<표 7> 문제 2-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제2-1	①	②	③	④	⑤	⑥	무반응	전체
인원수(%)	3 (4.0)	36 (48.0)	11 (14.7)	8 (10.7)	4 (5.3)	9 (12.0)	4 (5.3)	75 (100)

두 점이 주어졌을 때 그래프를 그리도록 하였다. 그 결과는 <표 8>와 같이 나타났다.

<표 8> 문제 2-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

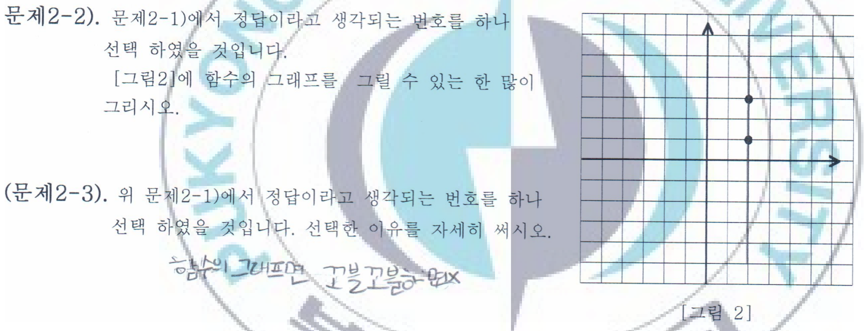
	반응 내용			
	하나의 직선	하나의 직선 및 무한개의 곡선	각 점을 지나는 직선	무반응
문제 2-2				
인원수(%)	40(53.4)	1(1.3)	9(12.0)	25(33.3)

문제 2-2에서 정답인 '그래프를 그릴 수 없다'고 답한 학생은 4% (3명)에 불과했다. 하나의 직선이라고 답한 학생들이 53.4% (40명)로 가장 많은

것을 알 수 있었다. 비록 오답이지만 곡선을 생각한 학생은 2.6% (2명)에 불과했다. 또 곡선이 나올 수 없기 때문에 하나의 직선이라고 답한 학생들도 2.6% (2명)으로 나왔다. 학생들은 함수의 기본적인 대응관계에 대한 개념이 많이 부족하다는 것을 알 수 있었고 직선모양의 일차함수의 그래프에 집착하는 경향이 두드러졌다.

아래 <학생A>의 풀이 과정을 살펴보면, 이 학생들은 함수의 그래프가 직선일 수밖에 없다는 생각을 가지고 있다.

<학생 A>의 풀이



문제 2-1에서는 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하도록 하였다. 그 결과는 <표 9>와 같이 나타났다.

문제 2-3에서 ‘만약 x가 2일 때, y는 1,3으로 x가 조건이 하나인데 y가 두 가지로 나올 수가 없기 때문’이라고 정답과 가장 비슷한 반응을 보인 학생은 1.3% (1명)이다. 그러나 y가 두 가지로 나올 수 없으니 함수가 아니라는 생각까지는 하지 못한다는 것을 의미한다. 이 학생은 y가 두 가지로 나올 수 없다고 답을 하고도 그래프가 하나라고 문제 2-1문항을 답하였다. 가장 많은 30.8% (23명)는 두 점을 지나는 직선은 하나밖에 없기 때문이라고 답하였다.

<표 9> 문제 2-3 (부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제	반응 내용	인원수(%)
문제 2-3	두 점을 지나는 직선은 하나 밖에 없기 때문에	23(30.8)
	두 점을 지나는 직선을 길이만 다르게 그릴 수 있다	1(1.3)
	만약 x가 2일 때, y는 1,3으로 x가 조건이 하나인데 y가 두 가지로 나올 수가 없기 때문	1(1.3)
	함수의 그래프라면 꼬불꼬불 하면 안 되니깐.	1(1.3)
	직선 그래프는 1개 밖에 안 되지만 곡선 그래프는 역시 끝이 없어서	1(1.3)
	줄이 2개니깐	1(1.3)
	직선	1(1.3)
	위, 좌우만 그을 수 있어서	1(1.3)
	무한개이다.	2(2.7)
무반응	반응 없음	43(57.4)
전체		75(100)

다. 다섯 개의 점이 주어졌을 때의 학생들의 반응

다섯 개의 점이 주어졌을 때 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는지 답하도록 하였다. 그 결과는 <표 10>와 같이 나타났다.

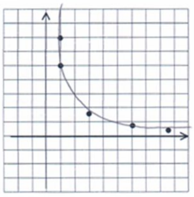
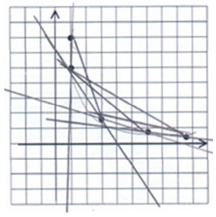
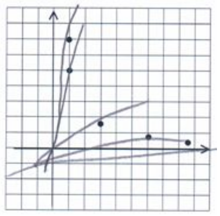
<표 10> 문제 3-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제3-1	①	②	③	④	⑤	⑥	무반응	전체
인원수(%)	11 (14.7)	28 (37.3)	5 (6.7)	11 (14.7)	7 (9.3)	8 (10.6)	5 (6.7)	75 (100)

한 점이 주어졌을 때 그래프를 그리도록 하였다. 그 결과는 <표 11>와 같이 나타났다.

문제 3-2는 함수의 그래프를 그릴 수 없다. 하지만 그릴 수 없다고 답한 학생은 14.7% (11명)이다.

<표 11> 문제 3-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용		
	하나의 곡선	각 점을 연결한 직선	무반응
문제 3-2		 	
인원수(%)	38(50.7)	9(12.0)	28(37.3)

이 학생들 중에서 2.6% (2명)의 학생은 '모든 점을 지나려면 곡선으로 그려야 하는데 그래프는 곡선으로 그릴 수 없어서'라고 답했다. 여전히 일차함수의 직선모양의 그래프에 집착하는 것을 알 수 있었다.

하나의 곡선이라고 답한 학생이 50.7% (38명)으로 가장 많았다. 좌표평면에 주어진 점이 많아 그대로 이어서 그래프를 그린 학생들이 대부분 이였다. 앞 문항들에서 직선 그래프만 생각했던 학생들도 하나의 곡선이라고 답하였다. 그래프에 대한 어떤 개념을 가지고 접근하는 것이 아니라 그냥 점을 이어보는 그림이라고 생각하는 것 같다.

문제 3-1에서는 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하도록 하였다. 그 결과는 <표 12>와 같이 나타났다.

문제 3-3에서 '5개의 점을 지나는 곡선은 하나 밖에 없기 때문에'라고 답한 학생이 14.8% (11명)로 가장 많았고, '5개의 점을 지나는 직선은 하나밖에 없기 때문'이라고 답하여 곡선을 직선으로 답하는 오류를 보인 학생도 1.3% (1명)있었다. 함수의 그래프는 직선이어야 한다고만 생각한 학생들은 5.3% (5명)로 '곡선으로 그려야 하는데 곡선으로 그리면 안 되기 때문'이라고 답하였다. 올바른 답인 '그래프를 그릴 수 없다'고 답한 학생은 한명도 없었다.

<표 12> 문제 3-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제	반응 내용	인원수(%)
문제 3-3	5개의 점을 지나는 선은 곡선 하나밖에 그을 수 없다	11(14.8)
	5개의 점을 한 번에 지나는 선은 곡선 밖에 없기 때문에 1개의 직선이 나온다.	2(2.7)
	x가 증가함에 따라 y는 $\frac{1}{2}$씩 감소한다.	1(1.3)
	직선이기 때문에 동시에 지나지 못해서	1(1.3)
	모두 지나려면 곡선으로 그려야 하는데 곡선으로 그리면 안 되기 때문	3(4.0)
	길이를 다르게 그릴 수 있어서	1(1.3)
	점 1개와 곡선 1개만 있어서	1(1.3)
	줄이 5개니깐	4(5.3)
무반응	반응 없음	51(68)
전체		75(100)

라. 두개의 점이 주어졌을 때 학생들의 반응

두 개의 점이 주어졌을 때 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는지 답하도록 하였다. 그 결과는 <표 13>와 같이 나타났다.

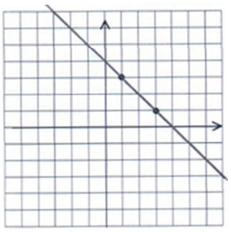
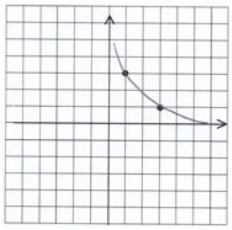
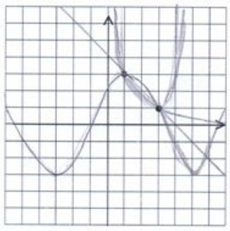
<표 13> 문제 4-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제4-1	①	②	③	④	⑤	⑥	무반응	전체
인원수(%)	8 (10.7)	21 (28.0)	15 (20.0)	10 (13.3)	8 (10.7)	9 (12.0)	4 (5.3)	75 (100)

두 개의 점이 주어졌을 때 그래프를 그리도록 하였다. 그 결과는 <표 14>와 같이 나타났다.

문제 4-1에서 하나의 직선이라고 답한 학생이 45.3% (34명)으로 나타났고 한 개의 곡선 및 한 개의 직선으로 그래프를 두 개 그릴 수 있다고 답한 학생이 12% (9명)으로 나타났다.

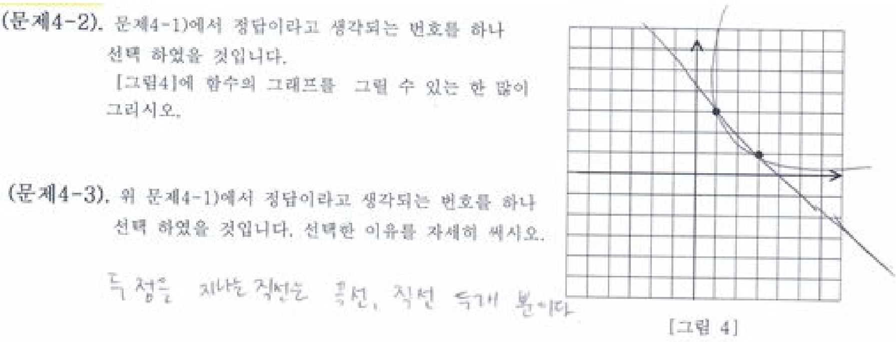
<표 14> 문제 4-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용			
	하나의 직선	하나의 곡선	직선 및 곡선	무반응
문제 4-2				
인원수(%)	34(45.3)	3(4.0)	11(14.7)	27(36.0)

2.7% (2명)의 학생은 한 개의 직선과 유한개의 곡선이라 답하였다. 한 개의 직선과 무한개의 곡선이 정답이므로 곡선이 유한개라고 생각하는 오류를 범하고 있다. 하나의 곡선과 두 개의 직선이라 답한 학생은 9.3% (7명)으로 나타났다. 곡선과 직선을 하나씩만 생각하지 못한 학생들이다.

아래 <학생 A, B>의 풀이 과정을 살펴보면, 학생 A는 직선과 곡선 하나씩을 생각하였고, 학생 B는 A와 마찬가지로 곡선그래프를 생각하였지만 유한하다고 하였다.

<학생 A>의 풀이

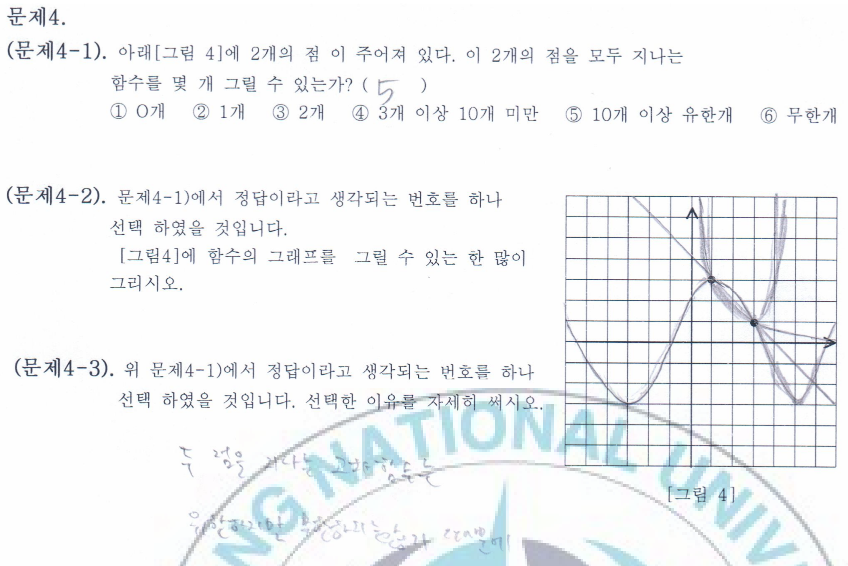

(문제4-2). 문제4-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다.
[그림4]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제4-3). 위 문제4-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 씨시오.

두 점을 지나는 직선는 곡선, 직선 두개 뿐이다

[그림 4]

<학생 B>의 풀이>



문제4.

(문제4-1). 아래[그림 4]에 2개의 점 이 주어져 있다. 이 2개의 점을 모두 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (5)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 이상 10개 미만 ⑤ 10개 이상 유한개 ⑥ 무한개

(문제4-2). 문제4-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림4]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제4-3). 위 문제4-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 써시오.

두 점을 지나는 고차함수는

유한하지만 무한하지는 않기 때문에

[그림 4]

문제 4-1에서는 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하도록 하였다. 그 결과는 <표 15>와 같이 나타났다.

<표 15> 문제 4-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제	반응 내용	인원수(%)
문제 4-3	두 점을 지나는 직선은 곡선, 직선 두 개 뿐이다.	5(6.8)
	두 점을 지나는 직선은 하나뿐이기 때문이다	9(12.0)
	길이를 다르게 그릴 수 있어서	1(1.3)
	줄이 2개니깐	4(5.3)
	두 점을 지나는 고차함수는 유한하지만 무한하지는 않기 때문에	1(1.3)
무반응	반응 없음	55(73.3)
전체		75(100)

문제 4-3에서 두 점을 지나는 직선이 하나뿐이라는 답을 한 학생들은 12.0% (9명)으로 나타났고 직선과 곡선을 모두 생각한 학생들은 6.8% (5명)으로 나타났다. 하지만 직선과 곡선을 모두 생각했더라고 직선과 곡선이 하나씩 나온다고 생각하여 그래프를 두 개 그릴 수 있다고 답하였다.

고차함수라는 용어를 쓴 학생은 1.3% (1명)으로 나타났는데, 고차함수는 유한개라고 답하였다.

마. 네 개의 점이 주어졌을 때의 학생들의 반응

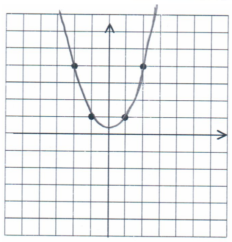
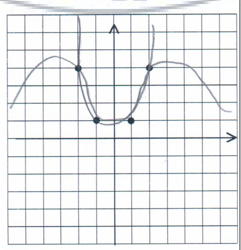
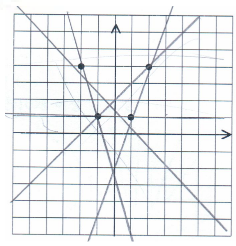
네 개의 점이 주어졌을 때 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는지 답하도록 하였다. 그 결과는 <표 16>과 같이 나타났다.

<표 16> 문제 5-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제5-1	①	②	③	④	⑤	⑥	무반응	전체
인원수(%)	17 (22.7)	12 (16.0)	5 (6.7)	17 (22.7)	7 (9.3)	7 (9.3)	10 (13.3)	75 (100)

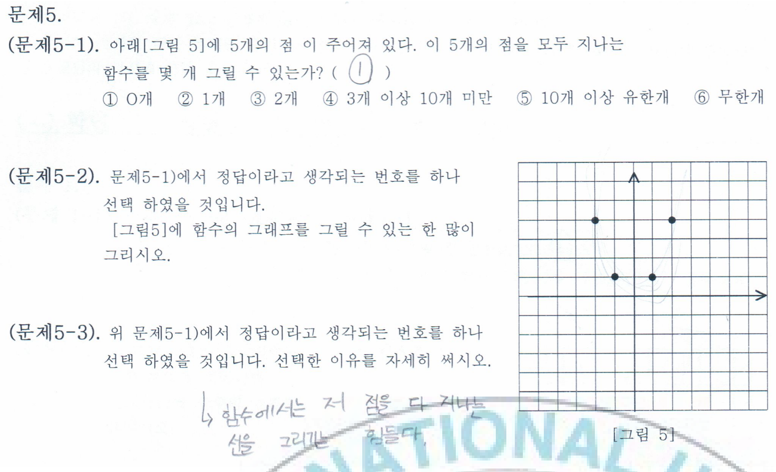
네 개의 점이 주어졌을 때 그래프를 그리도록 하였다. 그 결과는 <표 17>과 같이 나타났다.

<표 17> 문제 5-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용			
	하나의 곡선	두 개의 곡선	각 점을 지나는 직선	무반응
문제 5-2				
인원수(%)	9(12.0)	2(2.7)	23(30.7)	41(54.6)

문제 5-2에서는 하나의 곡선이라 답한 학생은 12% (9명)이었고, 두 개의 곡선이라 답한 학생은 2.7% (2명)으로 곡선이라 생각한 학생은 모두 14.7% (11명)으로 나타났다. 직선이라 생각한 학생은 30.7% (23명)으로 나타났다.

<학생 A>의 풀이



문제5.

(문제5-1). 아래[그림 5]에 5개의 점 이 주어져 있다. 이 5개의 점을 모두 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (1)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 이상 10개 미만 ⑤ 10개 이상 유한개 ⑥ 무한개

(문제5-2). 문제5-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림5]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제5-3). 위 문제5-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 써시오.

↳ 함수에서는 저 점을 다 지나는 선을 그리기는 힘들다

[그림 5]

문제 5-1에서는 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하도록 하였다. 그 결과는 <표 18>와 같이 나타났다.

<표18> 문제 5-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제	반응 내용	인원수(%)
문제 5-3	무한개라서	2(2.8)
	점 5개를 지나는 선은 저런 모양의 곡선 밖에 없다고 생각	7(9.4)
	모두 지나야 하는데 지나게 되면 함수의 그래프가 되지 않아서(나올 수 없다고 생각 한다)	4(5.3)
	길이만 다르게 그릴 수 있다	1(1.3)
	곡선에서 2개, 직선에서 4개가 있어서	1(1.3)
	점을 연결하다 보니 3~5가지가 나와서	1(1.3)
	줄이 4개니깐	3(4.0)
무반응	반응 없음	56(74.6)
전체		75(100)

문제 5-3에서 올바른 답인 무한개라고 답한 학생은 2.8% (2명)로 나타났고 하나의 곡선이라고 답한 학생은 5.2% (4명)로 나타났다. 그래프가 나올 수 없다고 생각한다고 답한 학생은 5.2% (4명)으로 나타났다.

바. 나란히 두개의 점이 주어졌을 때의 학생들의 반응

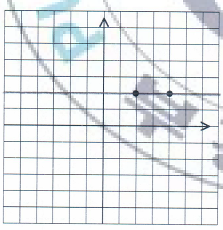
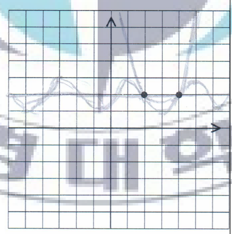
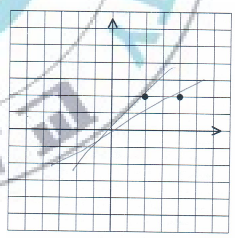
나란히 두 개의 점이 주어졌을 때 주어진 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는지 답하도록 하였다. 그 결과는 <표 19>와 같이 나타났다.

<표 19> 문제 6-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제6-1	①	②	③	④	⑤	⑥	무반응	전체
인원수(%)	5 (6.6)	32 (42.7)	6 (8.0)	11 (14.7)	2 (2.7)	4 (5.3)	15 (20.0)	7 (100)

나란히 두 개의 점이 주어졌을 때 그래프를 그리도록 하였다. 그 결과는 <표 20>와 같이 나타났다.

<표 20> 문제 6-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용			
	하나의 직선	하나의 직선 및 여러 개의 곡선	각 점을 지나는 직선	무반응
문제 6-2				
인원수(%)	28(37.3)	5(6.7)	6(8.0)	36(48.0)

문제 6-2에서 하나의 직선이라고 답한 학생이 37.3% (28명)으로 가장 많았고 하나의 직선 및 여러 개의 곡선으로 답한 학생이 6.7% (5명)으로 나타났다. 직선뿐만 아니라 곡선까지 생각한 학생은 직선만 생각한 학생보다 30.6% (23명)이나 작게 나타난 것을 알 수 있다.

문제 6-1에서는 그래프를 그릴 수 있는 개수를 선택한 이유를 제시하도록 하였다. 그 결과는 <표 21>와 같이 나타났다.

<표 21> 문제 6-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제6-3	반응 내용	인원수(%)
문제 6-3	점이 2개 이므로 단하나의 직선 밖에 지날 수 없다	11(14.8)
	두 점을 지나는 곡선은 유한개, 직선은 1개이기 때문에	1(1.3)
	곡선과 직선이 1개+4개=5개가 나와서	1(1.3)
	직선 1개, 곡선에서 3개가 있다.	1(1.3)
	길이만 다르게 그릴 수 있다	1(1.3)
	줄이 2개니깐	3(4.0)
	선을 수직이게 해서	1(1.3)
무응답	반응 없음	56(74.7)
전체		75(100)

문제 6-3에서 하나의 직선만을 답한 학생은 14.8% (11명)으로 나타났고 유한개의 곡선과 하나의 직선을 답한 학생은 3.9% (3명)으로 나타났다.

3. 일차함수식 및 그래프, 정의역 치역에 대한 반응

가. 관계식 구하기에 대한 학생들의 반응

<표22> 문제 1-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 1-1	반응 내용	인원수(%)	전체(%)
정답	$y=300-x$	39(52.0)	75(100)
오답	$x=y$	2(2.7)	
	$x-y=300$	1(1.3)	
	$x+y$	3(4.0)	
	$y=x+300$	1(1.3)	
	$300y-x$	3(4.0)	
	$y=300x$	3(4.0)	
	$300x+y$	1(1.3)	
	$y=300x+b$	1(1.3)	
무반응	반응 없음	21(28.0)	

문제 1-1은 실생활에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계로써 함수의 개념을 이해하고, 두 양 사이의 관계식을 구할 수 있도록 하는 문제이다. 답을 맞은 학생은 52% (39명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 20% (15명), 풀지 않은 학생은 28% (21명)로 나타났다.

<표23> 문제 1-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 1-2		반응 내용	인원수(%)	전체(%)
정답		$y=5x$	34(45.4)	75(100)
오답	*	$y=4x$, $y=2x$, $x=y$, $1x=5y$, $y=\frac{x}{5}$	7(9.3)	
	**	$y=x+5$,$y=x+4$,$x+y=25$ $1x+1=5y+5$	6(8.0)	
	***	$1x\times5y$, $x\times y=$기울기, 5	3(4.0)	
무반응		반응 없음	25(33.3)	

*:$y=ax$ 답한 학생 **:$y=ax+b$ 답한 학생 ***: 전혀 답을 한 학생

문제 1-2는 정비례 관계인 두 양 사이의 관계식을 구할 수 있도록 하였다. 답을 맞은 학생은 45.3% (32명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 21.4% (16명), 풀지 않은 학생은 33.3% (25명)로 나타났다.

<표24> 문제 1-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 1-3	반응 내용	인원수(%)	전체(%)
정답	$y=\frac{5}{x}$	17(22.8)	75(100)
오답	$y=x-4$	1(1.3)	
	$y=\frac{x}{5}(\frac{1}{5}x)$,$1x=5y$	6(8.0)	
	$y=-\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}$	1(1.3)	
	$y=5x+5$	1(1.3)	
	$y=\frac{x}{2}(\frac{1}{2}x)$	1(1.3)	
	$\frac{1}{5}$	2(2.7)	
	$y=5x$	3(4.0)	
	$y=\frac{4}{5}x$	1(1.3)	
	$y=x$	1(1.3)	
무반응	반응 없음	40(53.3)	

문제 1-3은 반비례 관계인 두 양 사이의 관계식을 구할 수 있도록 하였다. 답을 맞은 학생은 22.7% (17명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 24% (18명), 풀지 않은 학생은 53.3% (40명)로 나타났다. 답을 맞힌 22.7% (17명)

를 제외하고 틀린 답에는 x를 분수로 적은 학생은 한명도 없었다.

나. 수직선상의 주어진 좌표구하기에 대한 학생들의 반응

문제 2-1은 수직선 위의 한 점의 위치를 그에 대응하는 수를 써서 나타낼 수 있도록 하였다.

<표25> 문제 2-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 2-1		반응 내용	인원수(%)	전체(%)
정답		$A=-\frac{5}{3}$ $B=-\frac{1}{3}$ $C=\frac{1}{3}$	15(20.0)	75(100)
오답	*	(1) $-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$ (3) $\times,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$ (4) $-\frac{3}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$ (5) $-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	9(12.0)	
	**	(1) $-\frac{1}{3},0,0$ (2) $-1\frac{3}{2},1,\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{2}{6},-\frac{1}{4},\frac{2}{4}$	3(4.0)	
	***	(1) $-\frac{6}{9},-\frac{1}{9},\frac{1}{6}$ (2) $-\frac{5}{6},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}$ (3) $-1.3,0.2,0.1$ (4) $-2.5,-0.5,0.5$	8(10.7)	
무반응		반응 없음	40(53.3)	

*:2개의 좌표를 맞힌 학생 **:1개의 좌표를 맞힌 학생 ***:모두 오답인 학생

답을 맞은 학생은 20.0% (15명)로 나타났고 2개의 좌표를 바르게 답한 학생은 12% (9명), 1개의 좌표만은 바르게 답한 학생은 4.0% (3명), 3개의 좌표 모두 틀리게 답한 학생은 10.7% (8명)로 나타났다. 문제를 풀지 않은 학생은 53.3% (40명)로 나타났다.

문제 2-2는 수직선 위에 좌표를 표시하도록 하였다. 이 문항에 대해서 2개의 좌표를 모두 바르게 답한 학생은 36.0% (27명), 1개의 좌표만은 바르게 답한 학생은 13.3% (10명), 2개의 좌표 모두 틀리게 답한 학생은 8.0% (6명)로 나타났다. 문제를 풀지 않은 학생은 42.7% (32명)로 나타났다.

<표26> 문제2-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 2-2		반응 내용	인원수(%)	전체(%)
정답		$-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$	27(36.0)	75(100)
오답	*	(1)$-\frac{1}{2},\frac{3}{2}$(2)$-\frac{1}{2},\frac{7}{4}$(3)$-\frac{3}{2},\frac{3}{4}$(4)$\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ (5)$-\frac{1}{4},\frac{3}{4}$(6)$-\frac{7}{4},\frac{3}{4}$(7)$-\frac{7}{4},-\frac{1}{2}$	10(13.3)	
	**	(1)$-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}(2)-\frac{7}{4},\frac{7}{4}(3)-\frac{7}{4},\frac{9}{4}$ (4)$-2,\frac{7}{4}$(5)$-2,\frac{11}{4}$	6(8.0)	
무반응		반응 없음	32(42.7)	

*:1개의 좌표를 맞힌 학생 **:모두 오답인 학생

다. 주어진 좌표 구하기에 대한 학생들의 반응

<표 27> 문제 3-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

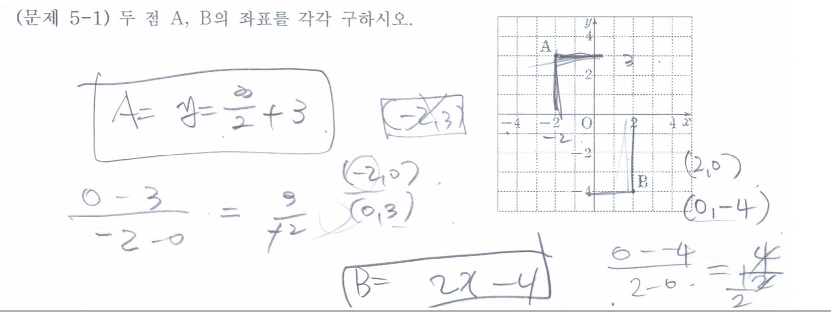
문제 3-1		반응 내용	인원수(%)	전체(%)
정답		$A(-2,\ 3)$, $B(2,-4)$	32(42.7)	75(100)
오답	*	$A(-2,3)B(4,\ 3)$,$A(-2,2)B(2,-4)$ $A(3,-2)B(2,-4)$,$A(-2,4)B(2,\ -4)$	11(14.7)	
	**	$A=-2x+3y$,$B=2x-4y$,$A=-2$,$B=4$ $A=y=\frac{3}{2}+3$, $B=y=2x-4$,	3(4.0)	
무반응		반응 없음	29(38.6)	

*:1개의 좌표를 맞힌 학생 **:모두 오답인 학생

문제 3-1은 좌표평면 위의 점이 주어졌을 때 그 점의 좌표를 구할 수 있도록 하였다. 좌표를 바르게 찾은 학생은 42.7% (32명), 1개의 좌표를 바르게 찾은 학생은 14.7% (11명), 답을 적었으나 좌표가 아닌 식이나 상수로 답을 적은 학생은 4.0% (3명), 풀지 않은 학생은 38.7% (29명)로 나타났다.

점 A와 점 B의 좌표를 구하는 문제 3-1 <표 28>의 학생은 (-2,0). (0,3)으로 점 A의 좌표를 구하고 이 두 점을 지나는 일차함수식을 구하였다.

<표 28> 문제 3-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

<table>
<tr><th></th><th>반응 내용</th></tr>
<tr><td>오류 1</td><td>
</td></tr>
</table>

또, B좌표도 같은 방법으로 일차함수식을 구하였다. 좌표를 구하라는 문제에 식을 답으로 나타냈다는 것은 ‘좌표’라는 용어의 뜻을 전혀 알지 못한다는 것을 의미한다.

<표 29> 문제 3-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

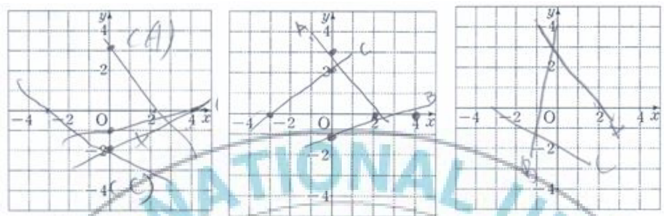
<table>
<tr><th colspan="2">문제 3-2</th><th>반응 내용</th><th>인원수(%)</th><th>전체(%)</th></tr>
<tr><td colspan="2">정답</td><td>$A(2,\ 3),\ B(4,\ -1),\ C(-3,\ -2)$</td><td>34(45.4)</td><td rowspan="5">75(100)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">오답</td><td>*</td><td>$A(3,2)B(4,-1)C(-3,-2)$
$A(2,3)B(4,-1)C(-2,-3)$</td><td>2(2.7)</td></tr>
<tr><td>**</td><td>$A(2,3)B(-4,2)C(-2,-3)$
$A(2,3)B(-1,4)C(-3,2)$
$A(2,3)B(-1,4)C(2,-3)$
$A(2,3)B(-1,4)C(-2,-3)$</td><td>4(5.3)</td></tr>
<tr><td>***</td><td>그래프로 나타냄</td><td>4(5.3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">무반응</td><td>반응 없음</td><td>31(41.3)</td></tr>
</table>

*:2개의 좌표를 맞힌 학생 **:1개의 좌표를 맞힌 학생 ***:모두 오답인 학생

문제 3-2는 좌표가 주어졌을 때 그 좌표에 대응하는 점을 좌표평면에 나타낼 수 있도록 하였다. 3개의 좌표 모두를 바르게 답한 학생은 45.4% (34명), 2개의 좌표만을 바르게 답한 학생은 2.7% (2명). 1개의 좌표만은 바르게 답한 학생은 5.3% (4명), 3개의 좌표 모두 틀리게 답한 학생은 5.3% (4명)로 나타났다. 문제를 풀지 않은 학생은 41.3% (31명)로 나타났다. 좌표 오답을 적은 학생들 8.0% (6명)중 5명의 학생이 점 A의 좌표는 바르게 구하였다. 학생들이 양수인 부분에서 더 정확하게 좌표를 읽어낸다는 것을 알 수 있다.

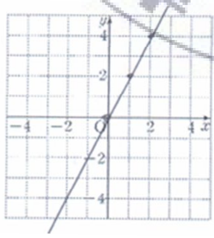
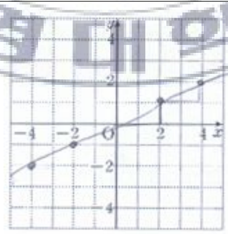
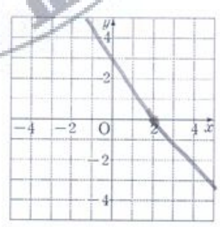
문제 3-2는 좌표에 대응하는 점을 좌표평면에 나타낼 수 있도록 하였다. 그 중 점을 모두 선으로 연결한 학생들은 5.3% (4명)으로 나타났다. 이 학생들은 $A(2,\ 3)$좌표를 x축 위에 4, y축 위에 3을 찾아서 연결하였다. 나머지 B좌표와 C좌표도 같은 방법으로 선으로 연결하였다.

<표 30> 문제 3-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용	인원수(%)
오류		4(5.3)
전체		75(100)

라. 함수의 그래프 그리기에 대한 학생들의 반응

<표 31> 문제 4-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

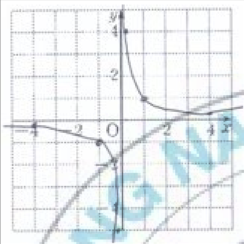
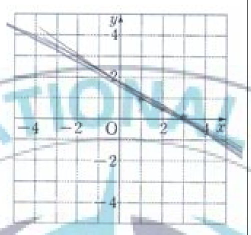
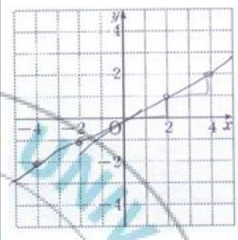
	반응 내용			
	정답	오류1	오류2	무반응
문제 5-2				
인원수(%)	18(24.0)	6(8.0)	11(14.7)	40(53.3)

문제 4-1은 $y = ax(a \neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있도록 하였다. 바르게 그래프를 그린 학생은 24.0% (18명), 틀린 학생들 중 함수의 그래프 모양이 흡사하지만 기울기를 $\frac{1}{2}$ 또는 1로 표현하여 그래프를 그린 학생은 8.0% (6명), 일차함수의 그래프 모양이 전혀 같지 않은 학생은 14.7% (11명), 풀

지 않은 학생은 53.3% (40명)로 나타났다.

문제 4-2는 $y=\dfrac{a}{x}(a\neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있도록 하였다.

<표32> 문제 4-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용			
	정답	오류1	오류2	무반응
문제 5-2				
인원수(%)	9(12.0)	8(10.7)	3(4.0)	55(73.3)

답을 맞은 학생은 12.0% (9명), 오류가 있는 학생들 중 (1,1)을 지난다고 그래프를 그린 학생은 10.7% (8명), 일차함수의 그래프 모양이 전혀 같지 않은 학생이 4.0% (3명), 풀지 않은 학생은 73.4% (55명)로 나타났다. 문항 4-1의 $y=ax(a\neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있었던 24.0% (18명) 학생들에 비해 12.0% (9명)로 감소하였고 풀지 않은 학생들은 53.3% (40명)로 증가하였다.

마. 함수식 구하기와 그래프 그리기에 대한 학생들의 반응

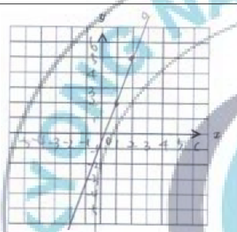
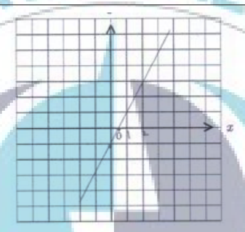
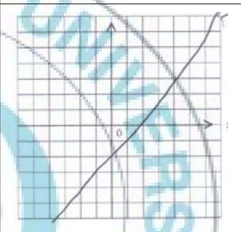
<표 33> 문제 5-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 5-1		반응 내용	인원수(%)
정답		$y=3x-1$	12(16.0)
오답	*	$y=3x+2,\ y=3x+8$	4(5.3)
	**	$y=\dfrac{5}{3}x+3,\ y=\dfrac{8}{3}x+16$	3(4.0)
무반응		반응 없음	56(74.7)

*:기울기만 맞힌 학생 **:오답인 학생

문제 5-1은 기울기와 한 점의 좌표를 이용하여 일차함수의 식을 구할 수 있도록 하였다. 답을 바르게 적은 학생은 12.0%(16명), 기울기는 바르게 적었으나 y절편을 잘못 적은 학생은 5.3% (4명), 기울기와 y절편 모두 틀린 학생은 4.0% (3명), 풀지 않은 학생은 74.7%(56명)로 나타났다. 앞에 문항에서 풀지 않은 학생들은 40% 정도인 것과 비교했을 때 일차함수의 식을 구하는 문항부터는 풀지 않은 학생이 74.7%로 높아졌다는 것을 알 수 있다.

<표 34> 문제 5-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	반응 내용			
	정답	오류1	오류2	무반응
문제 5-1				
인원수(%)	6(8.1)	3(4.0)	3(3.9)	63(84.0)

문제 5-1 그래프 그리기에서는 일차함수의 그래프를 그릴 수 있도록 하였다. 문제 5-1에서 답을 한 학생들 25.3% (19명) 중 그래프를 그린 학생은 16% (12명), 그중 일차함수의 식과 그래프 모두 바르게 답을 한 학생은 81.% (6명)로 나타났다. y절편은 바르게 찾았지만 기울기가 잘못 된 학생은 4.0% (3명), 일차함수 그래프의 모양이 전혀 같지 않은 학생은 3.9% (3명), 풀지 않은 학생은 84.0%(63명)로 나타났다.

<표 35> 문제 5-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 5-2	정답	오답		무반응	합계
	$\{3, 5, 7\}$	1	1,2		
인원수(%)	23(30.7)	1(1.3)	2(2.7)	49(65.3)	75(100)

문제 5-2는 정의역이 주어졌을 때 치역을 구할 수 있도록 하였다. 답을

맞은 학생은 30.7% (23명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 4.0% (3명), 풀지 않은 학생은 65.3% (49명)로 나타났다.

<표 36> 문제 5-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	정답	오답					무반응	합계
	{2, 4}	2	2,3	3	5,7	8,10		
인원수(%)	20(26.7)	1(1.3)	1(1.3)	2(2.7)	1(1.3)	1(1.3)	49(65.4)	75(100)

문제 5-3은 치역이 주어졌을 때 정의역을 구할 수 있도록 하였다. 답을 맞은 학생은 26.7% (20명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 7.9% (6명), 풀지 않은 학생은 65.3% (49명)로 나타났다. 문항 5-1에서 정의역이 주어졌을 때 치역을 바르게 구한 학생들 중에 4.0% (3명)이 역으로 치역이 주어졌을 때 정의역을 바르게 구하지 못하였다.

<표 37> 문제 5-4(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	정답	오답					무반응	합계
	$a=-2$	-3	1	2	3	4		
인원수(%)	15(20.0)	3(4.0)	2(2.7)	1(1.3)	2(2.7)	1(1.3)	51(68.0)	75(100)

문제 5-4은 함숫값을 이해하여 상수 a의 값을 구할 수 있도록 하였다. 답을 맞은 학생은 20.0% (15명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 12.0% (9명), 풀지 않은 학생은 68.0% (51명)로 나타났다. 5-1문항, 5-2문항과 비교해 보았을 때 답을 맞은 학생들의 수가 10.7% (8명) 감소하고 그에 비해 풀지 않은 학생들의 수는 2.7% (2명) 증가했다.

문제 5-5은 함숫값을 이해하여 상수 a의 값을 구할 수 있도록 하였다. 답을 맞은 학생은 22.7% (17명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 8% (6명), 풀지 않은 학생은 69.3% (52명)로 나타났다.

<표 38> 문제 5-5(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

	정답	오답				무반응	합계
	$a=6$	3	4	6	$\frac{2}{3}$		
인원수(%)	17(22.7)	2(2.7)	1(1.3)	2(2.7)	1(1.3)	52(69.3)	75(100)

바. 주어진 일차함수의 그래프에 대한 학생들의 반응

<표 39> 문제 6-1(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 6-1		반응 내용	인원수(%)
정답		$P_1(1,1)\,P_2(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\,Q_1(1,\frac{3}{2})$	3(4.0)
오답	*	$P_1(1,1)P_2(\frac{4}{3},\frac{3}{2})Q_1(1,\frac{3}{2})$, $P_1(1,1)P_2(\frac{1}{2},\frac{3}{2})Q_1(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$	2(2.7)
	**	$P_1(1,1)P_2(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})Q_1(1,2)$, $P_1(1,1)P_2(1,-\frac{3}{4})Q_1(1,2)$ $P_1(1,1)P_2(1,2)Q_1(1,1)$, $P_1(1,1)P_2(2,2)Q_1(3,3)$ $P_1(1,1)P_2(2,3)Q_1(1,2)$, $P_1(1,1)P_2(2,3)Q_1(5,6)$	7(9.3)
	***	$P_1(1,\times)P_2(\frac{3}{4},\times)Q_1(\frac{1}{2},\times)$, $P_1(\frac{6}{7},\frac{3}{11})P_2(\frac{4}{7},\frac{8}{11})Q_1(1,\frac{8}{11})$ $P_1(1,\frac{1}{2})P_2(1.5,1)Q_1(1,1)$, $P_1(2,3)P_2(3,4)Q_1(1,2)$ $P_1(4,3)P_2(2,1)Q_1(1,2)$, $P_1(1,\times)P_2(\times,\times)Q_1(1,\times)$	6(8.0)
무응답		반응 없음	57(76.0)

*:2개의 좌표를 맞힌 학생 **:1개의 좌표를 맞힌 학생 ***:모두 오답인 학생

문제 6-1은 3개의 좌표를 모두 바르게 적은 학생은 4.0% (3명), 2개의 좌표를 바르게 적은 학생은 9.3% (7명), 1개의 좌표를 바르게 적은 학생은 8.0% (6명), 풀지 않은 학생은 76.2% (57명)로 나타났다.

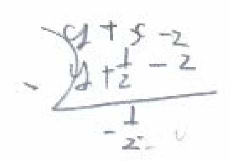
문제 6-2은 답을 맞은 학생은 1.3% (1명)로 나타났고 풀지 않은 학생은 98.7% (74명)로 나타났다.

<표 40> 문제 6-2(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제	반응 내용	인원수(%)
문제 6-2	P_5의 x좌표: $\frac{1}{2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2^{(5-1)}}$ $\left(\frac{1}{16}, \frac{15}{16}\right)$ P_{100}의 좌표: $\frac{1}{2^{99}}$ $\left(\frac{1}{2^{99}}, \frac{2^{99}-1}{2^{99}}\right)$	1(1.3)
무응답	반응 없음	74
전체		75(100)

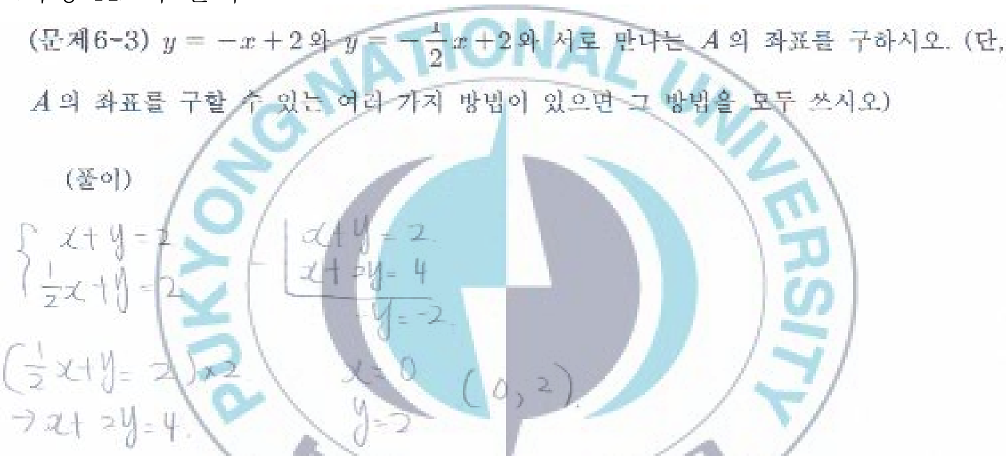
<표 41> 문제 6-3(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 6-3	반응 내용	인원수(%)
정답	(풀이) 교점을 구해본다. $-x-y=-2$ $-\frac{1}{2}x-y=-2$ $-\frac{1}{2}x=0$ $x=0$ $y=2$ → $(0, 2)$	4(5.4)
오류1	(풀이) 교점을 구하면 된다. $y=-x+2$ $y=-\frac{1}{2}x+2$	1(1.3)
오류2	(풀이) $y=-x+2$ $y=-\frac{1}{2}x+2$ 교점구하기. $\frac{1}{2}x-x=$	1(1.3)

오류3		1(1.3)
무응답	반응 없음	68(90.7)
전체		75(100)

문제 6-3항은 답을 맞은 학생은 5.4% (4명)로 나타났고 답이 틀린 학생은 3.9% (3명), 풀지 않은 학생은 90.7% (68명)로 나타났다.

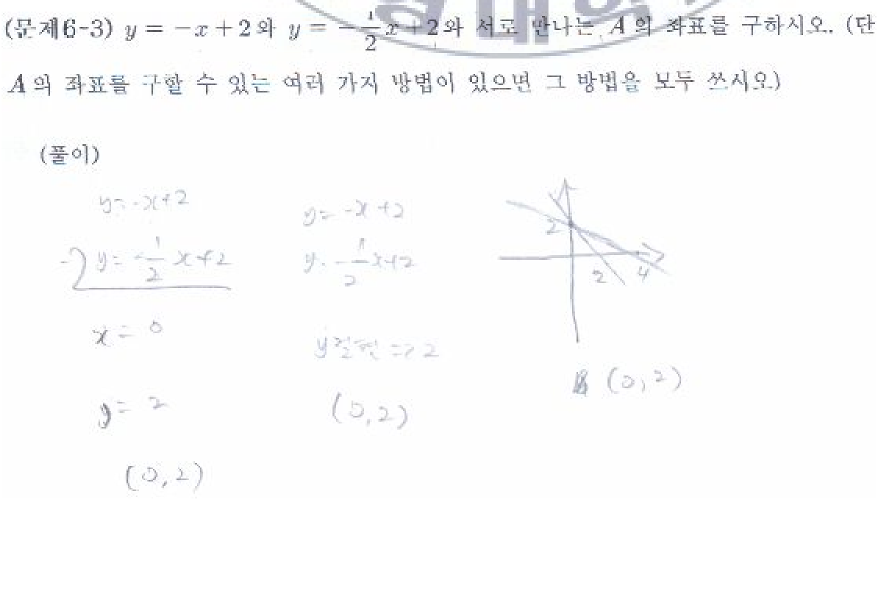
<학생 A>의 풀이



(문제6-3) $y=-x+2$와 $y=-\frac{1}{2}x+2$와 서로 만나는 A의 좌표를 구하시오. (단, A의 좌표를 구할 수 있는 여러 가지 방법이 있으면 그 방법을 모두 쓰시오)

(풀이)

<학생 B>의 풀이



(문제6-3) $y=-x+2$와 $y=-\frac{1}{2}x+2$와 서로 만나는 A의 좌표를 구하시오. (단 A의 좌표를 구할 수 있는 여러 가지 방법이 있으면 그 방법을 모두 쓰시오.)

(풀이)

<표 42> 문제 6-4(부록 참조)에 대한 학생들의 반응

문제 6-4	반응 내용	인원수(%)
정답 1	일차 연립방정식의 해 $y=-x+2$, $y=-\frac{1}{2}x+2$ 일차 함수 $y=-x+2$ $y=-\frac{1}{2}x+2$ 가 서로 만나는 교점	1(1.3)
정답 2	(풀이) $y=-x+2$ 와 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 의 그래프가 지나는 한 점의 좌표이다	1(1.3)
정답 3	$y+x=2$ 와 $y+\frac{1}{2}x=2$ 방정식의 교점 $y=-x+2$ 와 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 의 공통되는 x, y의 값	1(1.3)
정답 4	교점	2(2.7)
정답 5	y좌표	1(1.3)
오류 2	기울기	1(1.3)
무응답	반응 없음	68(90.8)
전체		75(100)

문제 6-4는 답을 한 학생이 9.2% (7명)이었다. '두 그래프가 만나는 교점'이라는 의미를 포함하여 답을 한 학생이 6.6% (5명)으로 나타났고 그 외에 'y좌표'라는 답을 한 학생은 1.3% (1명) '기울기'라는 오답을 한 학생은 1.3% (1명)으로 나타났다.

Ⅴ. 요약 및 결론

1. 요약

본 연구는 중학교 2학년 중・하위 수준의 학생들이 일차함수 개념에 대하여 어느 정도 이해하고 있는지 알아보기 위하여 P광역시에 소재한 2개 학교 4 학급 75명을 대상으로 조사한 결과는 다음과 같다.

첫 번째, 함수에 대한 학생들의 생각에는 변수 및 기호, 수, 용어와 관련된 내용, 문제와 유사한 내용, $y = ax + b$와 직접 관련된 내용 등의 반응을 보였다.

두 번째, 좌표평면에 몇 개의 점을 제시하고 함수의 그래프를 그리는 문제 중 함수가 되도록 그래프를 그릴 수 없는 문항에서 대부분의 학생들은 함수가 되지 않는 그래프를 그린 것으로 나타났다. 그리고 함수의 그래프를 그릴 수 있는 문항에서는 몇 몇 학생을 제외한 모든 학생들이 일차함수의 그래프를 제시하였다. 학생들이 일차함수의 그래프만을 그린 것은 수학교육과정에 준하여 알맞은 답을 제시한 것으로 볼 수 있으나 여러 개 이상(무한개)의 일차함수를 그릴 수 있다는 생각을 하고 있는 학생들은 약 80% 으로 나타났다. 분석 결과 대부분의 학생들이 대응관계로서의 함수에 대한 이해가 매우 낮은 것으로 나타났다.

세 번째, 관계식 구하기 약 40%, 수직선 위에 좌표에 대한 정답률은

36.0%, 주어진 좌표 구하기의 정답률은 약 43%, 주어진 함수의 그래프 그리기에 대한 정답률은 약 24%, 함수식 구하기와 그래프 그리기는 각각 약 12%, 약 8%, 주어진 그래프의 정보를 분석하고 해석하는 문항에서는 약 1-3% 정도의 학생들이 해결한 것으로 나타났다.

2. 결론

조사결과, 학생들이 일차함수의 개념 이해에 대한 정도가 많이 낮은 것으로 나타났다. 이러한 조사 결과를 바탕으로 중학교 중·하위 수준의 학생들의 일차함수 개념에 대한 이해를 돕기 위하여 다음과 같은 내용을 제안한다.

첫째, 일차함수를 학습한 후 학생들의 일차함수에 대한 기본 개념이 어느 정도 형성되었는지 평가하여 학생 개개인의 이해 정도에 맞게 개별학습 프로그램을 구성하여 학생스스로 해결하도록 하고 지도해야할 필요성이 있다.

둘째, 학생들이 수직선상에 제시된 점을 구하거나, 좌표평면에 제시된 좌표를 올바르게 구할 수 있도록 학생스스로 모눈종이에 좌표를 그리고 학생들 스스로 문제를 구성하여 해결하도록 지도하여야 할 것이다.

셋째, 관계식 구하기, 함수식 구하기, 함수의 그래프 그리기를 자유롭게 할 수 있도록 학생 개개인별로 교정 피드백을 할 필요성이 있다.

참 고 문 헌

[1] 강신덕 외 6인(2009). 중학교 수학 1. 서울: 교학사(주).

[2] 강신덕 외 5인(2010). 중학교 수학 2. 서울: 교학사(주).

[3] 교육부(1992). 중학교 수학과 교육과정 해설. 교육부.

[4] 권민경(2009). 제 7차 교육과정에 따른 중학교 함수단원의 지도방법에 대한 연구. 인하대학교 교육대학원 석사학위논문.

[5] 김명진(2000). 중학교 2학년 학생들의 함수 개념에 대한 실태조사. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

[6] 김원경, 김용대(2002). 교사의 수학적 지식에 대한 연구. 한국수학교육학회지. 제 41권 제 1호.

[7] 김원경 외 8인(2013). 중학교 수학 1. 비상교육(주).

[8] 김원경 외 8인(2009). 중학교 수학 2. 비상교육(주).

[9] 김진환(2010). 일차함수의 개념형성을 위한 표상활동에서 정의역의 역할에 대한 고찰. 한국수학사학회지. 제 24집 제1호.

[10] 박영훈 외 5인(2009). 중학교 수학 1 교사용 지도서. 서울: 천재문화(주).

[11] 박종률 외 5인(2008). 중학교 수학 1. 도서출판 디딤돌(주).

[12] 박종률 외 5인(2009). 중학교 수학 2. 도서출판 디딤돌(주).

[13] 변희현, 주미경(2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성. 대한수학교육학회지 수학교육학연구. 제22권 제3호.

[14] 신인숙(1996). 중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구. 한

국교원대학교 대학원 석사학위논문.

[15] 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

[16] 이종희(1999). 함수 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 대한수학교육학회지 수학교육학연구. 제 9권 제 1호.

[17] 이준열 외 5인(2010). 중학교 수학 2 교사용 지도서. 서울: 천재교육(주).

[18] 정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습 지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

[19] 전평국・신동윤・방승진・황현모・정석규(2002). 중학교 수학 8-가 교사용지도서. 서울: 교학연구사.

[20] 최은형(2004). 함수의 그래프에 대한 이해와 오류 분석에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[21] 허혜자, 김종명, 김동원(2011). 함수개념 지도를 위한 모델 비교 연구. 한국수학사학회지. 제 24권 제 4호.

[22] 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012)수학교육학신론, 문음사.

[23] Howard Eves(1995). 수학사. 경문사.

[24] Norman, A.(1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In E. Dubinsky & G. Harel(Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy(pp. 215-230). MAA Notes and Report Series. U.S.A.: Mathematical Association of America.

[부록]

일차함수에 대한 반응

문제1. ‘함수’하면 무엇이 생각나는지 생각나는 것을 최대한 많이 쓰시오.

생각나는 순서	생각나는 내용

문제2. $y = \dfrac{a}{x}$ (a 는 상수)을 보고 생각나는 것을 최대한 많이 쓰시오.

생각나는 순서	생각나는 내용

문제3. $y = ax + b$ (a, b는 상수)을 보고 생각나는 것을 최대한 많이 쓰시오.

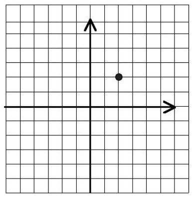
생각나는 순서	생각나는 내용

좌표평면에 주어진 점을 지나는 함수에 대한 반응

(문제 1-1). 아래[그림1]에 1개의 점이 주어져 있다.
이 1개의 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (　　　)
①0개 ②1개 ③2개 ④3개 이상 10개 미만 ⑤10개 이상 유한개 ⑥무한개

(문제 1-2). 문제1-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림1]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제 1-3). 위 문제1-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 쓰시오.

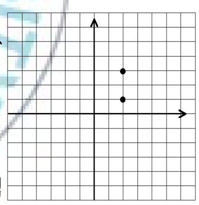


[그림 1]

(문제 2-1). 아래[그림2]에 2개의 점이 주어져 있다.
이 2개의 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (　　　)
①0개 ②1개 ③2개 ④3개 이상 10개 미만 ⑤10개 이상 유한개 ⑥무한개

(문제 2-2). 문제2-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림2]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제 2-3). 위 문제2-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 쓰시오.

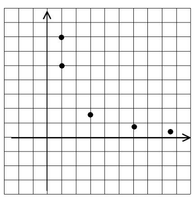


[그림 2]

(문제 3-1). 아래[그림3]에 5개의 점이 주어져 있다.
이 5개의 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (　　　)
①0개 ②1개 ③2개 ④3개 이상 10개 미만 ⑤10개 이상 유한개 ⑥무한개

(문제 3-2). 문제3-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림3]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제 3-3). 위 문제3-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 쓰시오.

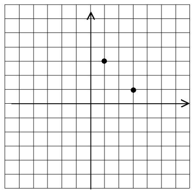


[그림 3]

(문제 4-1). 아래[그림4]에 2개의 점이 주어져 있다.
이 2개의 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (　　　)
①0개 ②1개 ③2개 ④3개 이상 10개 미만 ⑤10개 이상 유한개 ⑥무한개

(문제 4-2). 문제4-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림4]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

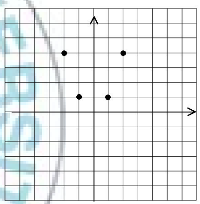
(문제 4-3). 위 문제4-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 쓰시오.


[그림 4]

(문제 5-1). 아래[그림5]에 4개의 점이 주어져 있다.
이 4개의 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (　　　)
①0개 ②1개 ③2개 ④3개 이상 10개 미만 ⑤10개 이상 유한개 ⑥무한개

(문제 5-2). 문제5-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림5]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

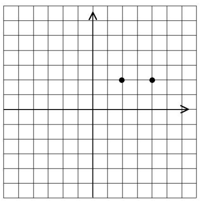
(문제 5-3). 위 문제5-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 쓰시오.


[그림 5]

(문제 6-1). 아래[그림6]에 2개의 점이 주어져 있다.
이 2개의 점을 지나는 함수를 몇 개 그릴 수 있는가? (　　　)
①0개 ②1개 ③2개 ④3개 이상 10개 미만 ⑤10개 이상 유한개 ⑥무한개

(문제 6-2). 문제6-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택 하였을 것입니다. [그림6]에 함수의 그래프를 그릴 수 있는 한 많이 그리시오.

(문제 6-3). 위 문제6-1)에서 정답이라고 생각되는 번호를 하나 선택하였을 것입니다. 선택한 이유를 자세히 쓰시오.


[그림 6]

일차함수식 및 그래프, 정의역, 치역에 대한 반응

(문제 1-1) 300쪽 책에서 x쪽을 읽고 남은 쪽 수를 y쪽이라 할 때, x와 y 사이의 관계식을 구하시오.

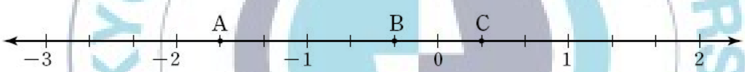
(문제 1-2) 다음 표에서 x, y 사이의 관계식을 구하시오.

x	1	2	3	4	5
y	5	10	15	20	25

(문제 1-3) 다음 표에서 x, y 사이의 관계식을 구하시오.

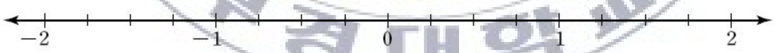
x	1	2	3	4	5
y	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1

(문제 2-1) 다음은 수직선 위에 점 A, B, C를 나타낸 것이다. 빈칸을 알맞게 채우시오.

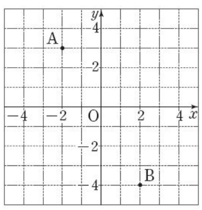


점 A, B, C에 대응하는 수는 각각 $\square$, $\square$, $\square$ 이다.

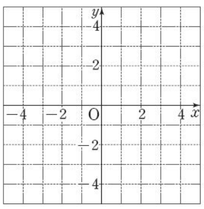
(문제 2-2) 수 $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$을 다음 수직선 위에 각각 나타내시오.



(문제 3-1) 두 점 A, B의 좌표를 각각 구하시오.



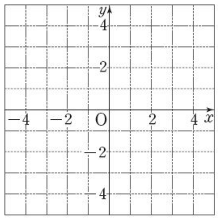
(문제 3-2) 다음 점들을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내시오.
$A(2,\ 3)$, $B(4,\ -1)$, $C(-3,\ -2)$



문제4. 좌표평면 위에 다음 함수의 그래프를 그리시오.

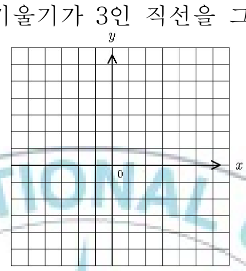
(문제 4-1) $y=2x$

(문제 4-2) $y=\frac{1}{x}$



(문제 5-1) 한 점 (3, 8)을 지나고 기울기가 3인 직선을 그래프로 하는 일차함수 식을 구하고, 그래프를 [그림7]에 그리시오.

(문제 5-1) 번 그래프



[그림 7]

(문제 5-2) 함수 $y=2x+1$ 에 대하여 그 정의역이 {1, 2, 3}일 때 이 함수의 치역을 구하시오.

(문제 5-3) 함수 $y=x+3$ 에 대하여 그 치역이 {5, 7}일 때 이 함수의 정의역을 구하시오.

(문제 5-4) 함수 $f(x)=ax+3$에 대하여 $f(1)=1$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(문제 5-5) 함수 $f(x)=\frac{a}{x}$에 대하여 $f(2)=3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

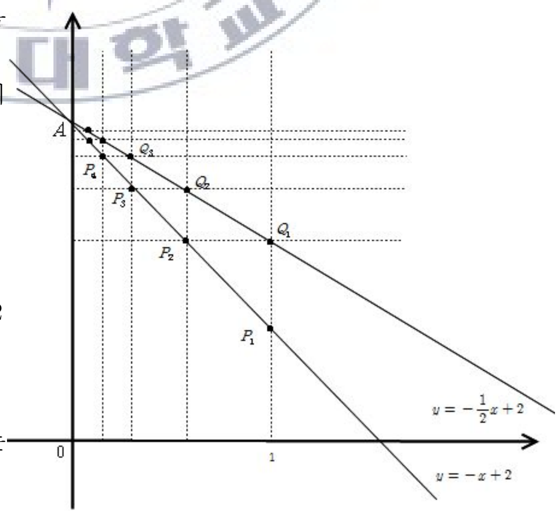
문제6. 아래 그래프([그림8])를 보고 물음에 답하시오.

(문제 6-1) P_1, P_2, Q_1의 좌표를 구하시오.

(문제 6-2) P_5, P_{100}의 좌표를 구하시오.

(문제 6-3) $y=-x+2$와 $y=-\frac{1}{2}x+2$와 서로 만나는 A의 좌표를 구하시오.

(문제 6-4) A의 좌표는 무엇을 의미하는지 자세히 쓰시오.



[그림 8]