

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

• 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건 을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer 🖃





공 학 박 사 학 위 논 문

초기 비틀림/굽힘을 가진 복합구조체의 미소 역학적 빔 모델링



부 경 대 학 교 대 학 원

기계공학학연협동과정

이 원 석

공 학 박 사 학 위 논 문

초기 비틀림/굽힘을 가진 복합구조체의 미소 역학적 빔 모델링

지도교수 오 정 환

이 논문을 박사학위논문으로 제출함.

2015년 8월

부 경 대 학 교 대 학 원

기계공학학연협동과정

이 원 석

이원석의 공학박사 학위논문을 인준함.

2015년 8월 21일

위 원 장 공학박사 남 기 우 (인)

위 원 공학박사 오정환(인)

위 원 공학박사 박 정(인)

위 원 공학박사 이 창 용 (인)

위 원 공학박사 안 석 환 (인)

목 차

| Abstract | iii |
|--------------------------------|-----|
| 제 1 장 서 론 | 1 |
| 1.1. 연구 배경 | 1 |
| 1.2. 이전 연구의 검토 | 4 |
| 1.2.1 빔 모델링 | 4 |
| 1.2.2 대표 구조 요소 빔 모델링 | 12 |
| 1.3. 본 연구 내용 | 17 |
| 제 2 장 3D 빔 운동학과 에너지 수식화 | 19 |
| 2.1. 3D 빔 운동학 | |
| 2.2. 3D 에너지 수식화 | 28 |
| 제 3 장 차원 감소 | 34 |
| 3.1. 변동함수의 Zeroth-오더 근사화 | 35 |
| 3.2. 변동함수의 First-오더 근사화 | 38 |
| 3.3. 일반화된 Timoshenko 빔 모델로의 변환 | 45 |
| 제 4 장 3D 복원 관계 | 59 |

| 제 5 장 검증 및 결과 | .63 |
|------------------------------------|-----|
| 5.1. 초기 굽힘이 없는 복합 구조체의 강성행렬 비교 | .64 |
| 5.1.1 사각 코어를 가진 복합구조체 빔에 대한 단위격자 | .64 |
| 5.1.2 90° 회전된 사각 코어를 가진 빔에 대한 단위격자 | .66 |
| 5.2. 초기 굽힘이 있는 복합 구조체의 강성행렬 비교 | .68 |
| 5.3. 제안 모델과 Full 3D FEA와의 비교 | .72 |
| 5.4. 기하구조 변화에 따른 변동함수와 강성 행렬의 비교 | .83 |
| 5.4.1 원형 홀이 있는 코어를 가진 단위격자 | .83 |
| 5.4.2 사각 박스형 코어를 가진 단위격자 | .93 |
| 5.4.3 경사지 사다리형 코어를 가진 단위격자 | 102 |
| 제 6 장 결 론 | 111 |
| REFERENCE | 114 |
| अ ट्रा या | |
| | |

Micro-mechanical Beam Modeling of Initial Twisted and Curved Composite Structures

Won Suk Lee

Department of Mechanical Engineering, The Graduate School, Pukyong National University

Abstract

Along with the increased knowledge and fabrication techniques of multifunctional microstructures, research on the usage of composite structures with them in designing and manufacturing future helicopter blades have received considerable and consistent attention in the past few decades. Unlike the published work invoking the prismatic beam modeling, the present work proposes a new micro-mechanical approach for analyzing and predicting complicatedly mechanical behaviors of composite structures with initial twisted and curved configurations. At first, the three-dimensional heterogeneous elasticity problem is compactly formulated in an intrinsic form which admits initially twisted and curved effects. By taking advantage of smallness of beam-geometric and microstructure-heterogeneous parameters, the variational asymptotic method is then used to split the original three-dimensional problem into a linear three-dimensional micromechanical analysis on the microscopic level and a nonlinear one-dimensional beam analysis on the macroscopic level, respectively. Furthermore, the formulation obtained from the present approach is transformed into a generalized Timoshenko-like beam model as a reasonable compromise between efficiency and accuracy for modeling the initial twisted and curved beams. As the primary validation, a few examples available in the literature are used to demonstrate the capability and accuracy of this new model.

제1장서 론

1.1. 연구 배경

고강도 및 경량성, 에너지 고 흡수성, 초 내열성과 같은 뛰어난 기계적특성을 가진 복합구조체가 자동차, 항공우주, 그리고 건설분야 등 다양한산업체 내에서 공학적 적용을 위해 지속적으로 연구되어 왔다. 특히 항공산업에서 고강도와 경량성은 초기 항공산업에서부터 현대에 이르기까지지속적으로 관심이 되어왔던 분야이다. 항공기의 성능은 항공기 중량과 밀접한 연관이 있으며, 개발단계에서 많은 노력들이 항공기 성능에 대한 요구도를 만족시키면서 중량을 줄이는 방향으로 진행된다. 따라서 항공 분야에서의 복합구조체의 적용은 항공기의 중량을 줄이면서 구조적 강도 및 강성을 만족시키기 위하여 고려되어야 하는 중요한 부분이라 할 수 있다. 미래의 항공분야는 점점 더 많은 부분에서 이러한 요구를 고려하여 설계하고해석해야 하는 복합구조체를 이용한 구조물이 늘어날 것으로 예상된다.

본 연구에서는 항공기 날개나 헬기의 로터 블레이드와 같은 빔 구조물에 복합구조체를 적용하여 해석할 수 있는 모델을 제시하고자 한다.

범이란 한 차원이 다른 두 차원보다 훨씬 크며 차원적으로 축소가 가능한 구조물을 말한다. 항공산업에서 범과 같은 구조물들의 전형적인 적용예로는 종횡비가 큰 항공기 날개나 헬리콥터 로터 블레이드와 같은 구조물이 대표적이다. 이런 구조물들은 일반적으로 초기 비틀림이나 굽힘이 포함된 형상이며, 내부 구조는 적은 무게에 비해 높은 강도를 가지도록 다양한종류의 재료와 복잡한 형상으로 만들어진다.

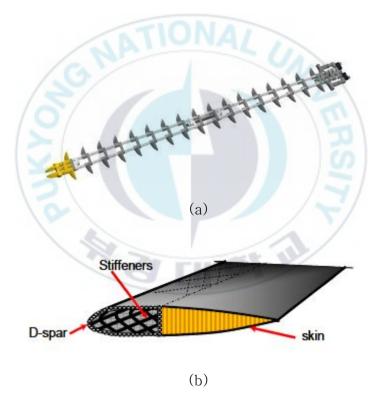


Figure 1 Inner Structure of Helicopter Rotor Blade(출처: 인터넷)

최근에는 미소 구조물의 특성을 예측하고 통제하는 폭 넓은 해석적 이

해와 정교한 실험적 기술로 인하여, 고성능에 대한 요구를 충족할 수 있는 새로운 미소 구조물 기반(Microstructure-based)의 재료와 구조물의 생산이 가능하게 되었으며, 항공산업에도 적용되고 있다.

하지만 이런 구조물들에 대하여 3차원(3D) 유한요소 해석(FEA)을 수행하는 것은 과도한 컴퓨터 사용량을 요구하며 능률적이거나 편리하지 않다. 이런 이유로 완전한 3D FEA를 대신할 접근법이 오래 전부터 개발되어 왔다. 그 접근법 중 하나로 실제 로터 블레이드와 같은 구조물을 모델링하기 위한 목적으로 개발된 변분 점근법을 이용한 단면분석(VABS, Variational—Asymptotic Beam Section Analysis)이 있다. 이 이론은 구조물과 관련된 몇 가지 변수의 미소성을 고려하여, VAM (Variational Asymptotic Method) (Berdichevsky V. L., 1979)을 이용해 일반적인 3D 비선형 탄성 문제를 선형 단면(2D) 해석과 1차원(1D) 비선형 범 해석문제로 분해하여 해석한다 (Danielson & Hodges, 1987). 하지만 이 방법은 범의 단면 형상이 일정한 경우 적용할 수 있는 방법으로 축 방향으로이질성을 가지는 범 구조물에서는 적용하기 어렵다.

이 한계를 극복하기 위해 비균질의 이방성 단위격자(UC, Unit Cell)를 가지는 빔에 대한 해석 방법이 새롭게 개발되었으며 Prismatic 빔에 적용되었다 (Lee & Yu, 2011b). 여기서는 횡 전단변형이 매우 심각하게 나타나는 낮은 종횡비(Low-aspect-ratio)를 가진 빔의 기계적 거동을 분석

하고 예측하는데 사용되는 개선된 모델을 제안하였다. 하지만 실제 로터 블레이드와 같이 초기 비틀림과 굽힘이 고려된 복합구조체 빔에 대해서는 적합하지 않다. 초기 비틀림과 굽힘이 고려된 복합구조체 빔의 기하학적 비선형 해석 모델의 제시는 항공기 초기 개발단계에서 일정 수준의 정확성 을 유지하면서 실용적으로 사용 가능한 해석 모델을 적용하므로 항공기 개 발에서 소요되는 모델링과 해석 과정의 시간을 상당 수준 절약할 수 있다 는 점에서 중요하다.

본 논문에서는 초기 비틀림과 굽힘을 가지며 범의 축을 따라 주기적으로 반복되는 단위격자를 가지는 구조물에 대한 해석적 방법을 제시한다. 이전 연구에서는 주기적으로 반복되는 Prismatic 범에 대한 해석 (Lee & Yu, 2011b)이었다. 하지만, 여기서는 고려되지 않은 초기 굽힘과 비틀림을 반영하여 해석을 수행하였다.

1.2. 이전 연구의 검토

1.2.1 빔 모델링

한 차원이 다른 두 차원에 비해 훨씬 긴 특수한 기하학적 특성으로 인하여, 빔 모델링은 갈릴레오의 연구 이래로 매우 고전적인 탄성학 문제로

되어왔다. 갈릴레오 이 후 수세기 이상 동안 연구자들이 빔의 기하학적 특 성을 이용하여 3D 빔 문제를 1D 빔 문제로 해석을 단순화하려고 시도해 왔다. 이전의 이런 관점에서 단순화하고 그리고 가능한 한 신뢰할 수 있도 록 하기 위해 구조물에서의 3D 에너지를 표현하는 방법으로 시도되었다. 가장 단순하면서도 매우 유명한 Euler-Bernoulli 가정은 이 요구조건을 만족하도록 유도되었다. 빆이 변형될 때 횡단면은 평면으로 유지되며 기준 선에 수직하다고 가정한다. 이 가정으로부터 나온 이론들은 인장과 두 방 햣으로의 굽힘을 설명할 수 있다. 비틀림을 설명하기 위해서 횡단면은 어 떤 특정 형상을 제외하고 평면으로 유지할 수 없다. 그러나 비틀림 동안 횡단면은 그 형상과 크기가 유지되며 자유롭게 평면 밖으로 휘어질 수 있 다고 가정한다. 고전적인 빔 이론들은 이들 가정에 근거하여 인장과 비틀 림, 두 방향에서 굽힘을 설명할 수 있는 이론들이며 매우 단순한 빔 이론 이다. 그러나, 이 사용된 가정들은 단순한 하중 조건 하에서 등방성 재료 로 이루어진 일부 이상화된 범에서만 적용이 가능하다. 그리고 고전적 범 이론들은 가늘고 긴 빔에 대하여 거시적 거동을 잘 예측할 수 있다. 하지 만 빔 구조물이 가늘고 길지 않을 경우에 정확성을 더 높이기 위해 더욱 개선된 이론들이 필요하다.

일반적으로 인장과 두 방향으로의 굽힘/전단, 비틀림을 나타내는 6개의 기본적인 거시적 변형이 있다. 고전적 빔 이론을 넘어선 진화된 다음 단계 이론은 Timoshenko 빔 이론이다. 여기서는 빔이 변형될 때 횡단면이 기준선에 수직하다는 가정이 완화된다. 따라서 변형되는 동안 횡단면은 횡전단에 의해 경사진 횡단면(oblique cross section)으로 된다. 1D로 축소된 빔의 변형에너지가 원래의 3D 모델의 변형에너지와 일치한다는 것을 보여주기 위해 전단 강성을 보정하기 위한 전단 보정 계수가 사용된다.

등방성 범에 대하여 여러 가지 경우에 적용하기 위해 Euler-Bernoulli 와 Timoshenko 범 이론을 사용하는 것은 충분하다. 그러나 복합재 범에 대하여 그런 선험적인 운동학적 가정들을 포함하는 것은 중요한 에러를 유발할 수 있다. 이것은 유사 Timoshenko 범 이론에 대하여 6개의 기본적인 강성 값 대신에 6×6 대칭형 강성 행렬로 나타나는 21개의 강성 값이 있을 수 있다는 것을 의미한다. 이 분야에서 연구가 중요한 발전을 이루어왔다. Hodges (1990b)에 의해 1990년 이 전까지의 문헌들이 검토되었다. 더욱 더 광범위한 검토가 Cesnik (1994)에 의해 진행되었다. 그리고 복합재 범 모델링과 관련된 문헌의 대부분의 검토는 참고 문헌인 (Jung, Nagaraj, & Chopra, 1999)과 (Volovoi, Hodges, Cesnik, & Popescu, 2001)에서 찾을 수 있다. 범 모델링에서의 접근 방법으로 크게 해석적 접근과 유한요소에 근거한 접근 방법으로 분류된다.

해석적 접근은 아주 세련된 완전한 형태의 수식이거나 단순한 해석적 근사화를 통하여 변동함수와 강성 값의 해를 찾는 방법이다. 여기서 그 연

구 내용들을 검토해 본다.

Kim & R. (1997)에 의해서 얇거나 두꺼운 벽으로 이루어진 복잡한 박스 빔 모델이 개발되었다. 이 이론에서 변동(warping)과 횡전단 효과 모두 고려되지만 그 해석은 횡단면의 평면 변형과 같은 엄격한 가정에 근거하며 횡전단 변형은 두께를 따라 포물선으로 변화한다고 가정한다.

Jung et al. (1999)은 평면 밖의 변동(warping)과 변동의 구속, 횡전단과 같은 비-고전적 효과의 영향을 포함하는 얇거나 두꺼운 벽으로 이루어진 뱀에 대하여 7개의 1D 자유도(인장과 두 방향에서의 굽힘/전단, 비틀림, 구속된 변동)를 가지는 포괄적인 복합재 빔 모델 (Jung, Nagaraj, & Chopra, 1999)을 제안했다. 이 모델링 과정은 7×7 강성 행렬을 계산한다.

Rand (2000)는 굽힘 모멘트의 작용 아래 고체의 직교 이방성 범에 대한 완전 해를 사용하여, 평면 밖으로의 변동이 중요하지만 평면 안에서의 변동 또한 어떤 층간 각도에 대하여 중요한 역할을 한다는 것을 보였다.

Buannic et al (2000)은 형식화된 점근적 확장 방법(formal asymptotic expansion method)을 사용하여 횡 방향 이방성 빔을 해석하였다. 이 논문에서 제안한 이론이 뛰어난 정확성으로 완전한 3D 내부의 해를 근사화할 수 있다는 것을 보였다. 그 지배 미분 방정식은 기하학적 미소 변수(횡단면 차원 대 축 방향 길이의 비)의 오더에 따라 확장된다. 이 이론은 점

근적으로 보정되지만, 처리과정은 다루기 힘들고 복잡하다.

Berdichevsky et al. (1992)는 이방성의 얇은 벽을 가진 빔을 모델링하기 위해 VAM(Variational Asymtotic Method)을 사용하였다. 이 방법은 Volovoi와 Hodges (2000)에 의해 수정되었다. 이 두 연구의 중요한의미는 미소 기하학적 변수들을 사용하여 격자 안에 저장된 원래의 변형에너지를 일련의 1D 빔 변형에너지로 점근적으로 근사화하기 위해 VAM을사용한다는 것이다. 또한 Trabucho et al. (1996)은 다른 종류의 빔 문제들에 대하여 일련의 이론들을 개발하기 위한 목적으로 VAM이 사용되었다.하지만 이들 처리과정들은 공학적이기 보다는 수학적인 측면이 강하다.

대부분의 해석적 모델에 대하여 횡단면의 기하구조 또는 재료 배치의 간소화가 도입되는 것이 필수적이다. 횡단면을 이산화 처리함으로써 전형적인 2D 유한 요소로써 임의의 횡 단면 기하구조를 메시화하여 변동함수, 전단중심, 그리고 탄성 특성 등을 결정하도록 유한 요소 방법이 사용될 수있다. Petrov et al. (1998)은 기하학적으로 정확한 비선형 공식을 개발하기 위한 운동학적 가정으로써 등단면 빔(prismatic beam)을 위한 3D 엄밀해(exact solution)를 구하였다. 등방성 등단면의 경우, 여섯 가지 기본적인 변형이 특정한 빔 축을 선택함으로써 분리되기 때문에 이러한 가정은합리적이다. 그러나, 이방성 빔에서 등방성 빔에서와 같이 특정한 하중에대해 동일한 응력 성분이 존재할 것이라고 가정할 수 없다. 따라서, 비록

그들의 모델들이 등방성 범에 성공적인 결과를 보일지라도 복합체 범에서도 같은 결과를 예상하긴 어렵다. Taufik (1999)의 연구에서는 변형률에 대해 직접적인 가정을 도입하였다. 단면의 강체 변위를 나타내는 중 방향절점에서의 변동함수와 6개의 구속에 관한 선형 대수 방정식을 풀어서 강성과 응력을 계산하였다. 이러한 방식은 지나친 가정(단축 변형률과 단축응력)으로 인하여 복합재 범의 정확한 모델링을 방해한다. Borri의 연구(1983; 1992)는 매우 일반적이다. 그의 이론과 이와 관련된 컴퓨터 프로그램 HANBA2는 등단면 복합재 범의 횡전단 특성(6×6강성 행렬 형식)과 변동함수를 계산할 수 있다. 이러한 방식은 가상일 개념에 기초한다.해석으로부터 "중심(central)"과 "선단(extremity)"의 두 가지 해를 얻을 수 있다. 이 연구는 참고문헌 (Borri, Ghiringhelli, & Merlini, 1992)에서 초기 굽힘과 비틀림을 가진 복합체 범으로 이론으로 확장된다. 비록현재의 공식이 점근적으로 보정되진 않았지만, 이 연구에서의 수치해석적 예계들은 3D MSC-NASTRAN과 상당히 일치한다.

Hodges (1994; 1995; 1997)에 의해 개발된 새로운 유한 요소 기반의접근법인 변분 점근적 빔 단면 분석(VABS)은 새로운 모델링 개념을 도입한 접근법이다. 이 접근법의 고유한 특징은 다음과 같다:

1. 일반적인 3D 비선형 탄성 문제를 탄성 상수를 제공하는 2D 선형 횡

단면 분석과 거시적 변형을 계산하는 1D 비선형 빔 문제로 분리할 목적으로 VAM가 VABS의 수학적 기반으로 사용된다.

- 2. 점근적으로 보정된 단면 분석과 기하학적으로 정확한 빔 해석은 회전 텐서 분해 개념에 근거한 공통된 framework으로부터 유도된다.
- 3. 이 이론은 임의 단면 형상을 가지는 비균질 이방성 빔을 정확히 표현한다.

Popescu와 Hodges (1999)는 일반적인 경우에 점근적으로 보정된 유사 Timoshenko 이론이 존재하지 않는다는 것을 보였다. 그들은 등단면 복합재 빔에 대하여 횡전단 효과을 잡아내는 방법을 개발했다. 최소자승의 최소화 기술을 이용하여 가장 근사한 해를 찾았다. Popescu et al. (2000)는 또한 기준 단면이 기준선에 수직하여야 한다는 제한을 완화하였다. Popescu와 Hodges (1999)는 Trapeze 효과를 설명했다.

Wenbin (2002)에 의해서 공학 프로그램인 VABS의 확장이 이루어졌다. 이 연구에서 일반화된 단면 모델링 기법을 수행하여 초기 굽힘과 비틀림을 가지는 복합재 빔에 대한 변동장의 내부 해와 함께 1D 빔의 6×6 강성행렬을 얻었다.

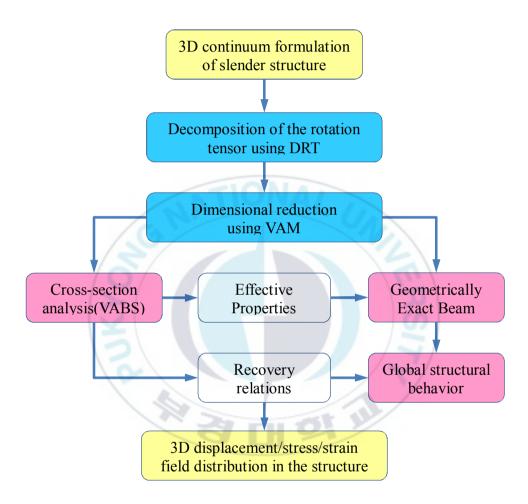


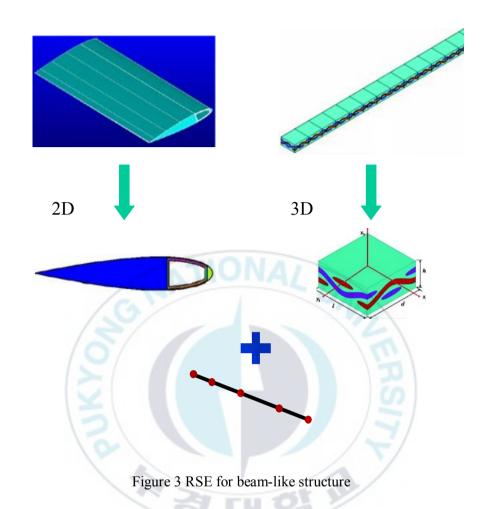
Figure 2 Efficient Beam modeling using VABS and GEBT

1.2.2 대표 구조 요소 빔 모델링

최근에는 대표 구조 요소(RSE, Representative Structural Element)라 는 구조 역학과 미소 역학을 통합하는 새로운 개념 (Yu. 2012; Yu. 2013) 이 도입되었다. RSE의 개념은 구조 역학과 미소 역학 사이의 갭을 채워 줄 뿐만 아니라 미소 역학적 관점으로부터 구조 역학을 볼 수 있게 해준다. 이 이론의 배경은 빔에 대한 2D 단면 분석법을 3D 단위격자 분석으로 확장하는 과정에서 도입되었다. 초기 복합구조체로 이루어진 빔에 대한 단 위격자의 미소 역학적 모델링 (2011a; 2011b)을 연구하면서 대표 체적 요소(RVE, Representative Volume Element)을 도입하였다. 하지만 이 이론은 미소 역학과 구조 역학 사이의 미시적 좌표와 거시적 좌표를 분리 하고 둘 사이의 간섭을 무시하였다. 이것을 피하기 위해 RVE를 대신하는 RSE라 부르는 새로운 개념을 사용하였다. 이것은 현재 물질 개놈 (Material Genome)과 구조 분석 사이의 갭을 채운다는 개념으로 새로운 개념의 구조 개놈(Structure Genome)을 소개하고 있다. RSE는 거시적 구조 해석을 목적으로 유효한 특성을 찾기 위해 사용하는 구조물의 최소 빌딩 블록 단위로서 정의한다. RSE는 대표적이어야 하지만 형식적으로 대 표성을 명시하지는 않는다. 대신에 구조물의 대표 빌딩 블록이라는 것을 결정하는 것은 분석자의 경험적 의견에 의존한다. 이 자유로운 정의는

RSE를 선택하는데 있어 대단히 자유로운 경향을 제공한다. 실험주의자가 물질의 특성을 찾기를 원할 때 그들의 판단에 따라 물질의 대표적인 조각을 자른다. 그리고 물성치와 관련된 통계를 얻기 위해 시험을 한다. 우리는 실험을 하지 않으므로 같은 개념으로 RSE는 최소의 수학적 빌딩 블록으로 해석해야 한다.

RVE와는 달리 RSE는 직접 차원적으로 축소가 가능한 구조물에 적용한다. 예를 들어 종횡비가 큰 빔 요소를 사용하여 거시적 구조해석을 수행하다면(Figure 3), 동일한 단면을 가지는 복합구조체 빔에 대한 RSE는 2D단면 영역이 된다. 그리고 동일한 단위격자를 가진 복합구조체 빔에 대한 RSE는 3D 단위 격자 영역을 정의한다.(Figure 3)



RSE 개념을 기반으로 Figure 4에서 도시된 바와 같이, 새로운 다중 스케일 구조 모델링 방식을 개발할 수 있다. 3D 연속체 수식화로부터 시작하여 먼저 미소 변수들과 RSE를 정의한다. 그리고 변분 점근법(VAM)을 이용하여 3D 연속체 수식화의 변분 과정에서의 점근적 분석을 수행한다. 여기서 VAM은 3D 비선형 문제를 RSE의 미소 역학 해석과 거시적 구조 해석으로 수학적으로 분리한다. RSE 해석은 거시적 구조 해석에 필요한 구성

관계뿐만 아니라 원래의 구조물 안에서 국부적인 영역을 계산하기 위한 복 원 관계를 제공한다. 이 새로운 접근 방식의 독특한 특징은 다음과 같다.

- 1. RSE를 사용하여 미소 역학과 구조 역학 사이의 갭을 채운다. 지식적으로는 RSE를 통하여 미소 역학의 관점에서 구조 역학을 볼 수 있다. 기술적으로 RSE를 통하여 가장 작은 구조적 차원과 비교할 수 있는 길이 방향 스케일의 이방성을 가지는 복잡한 강화 구조물을 세련되게 처리할 수 있다.
- 2. VAM을 사용하여 다른 접근방식에서 공통적으로 포함하는 선험적인 가정들을 피한다. 이것은 가장 수학적으로 엄격하고 가장 공학적인 일반성을 제공한다.
- 3. 원래의 복잡한 이질성 해석을 두 가지의 분석으로 분리한다. RSE 해석과 거시적 구조해석
 - 이 해석으로 거시적 구조 해석이 일반적인 (1D, 2D, 3D)연속체로서 정확히 수식화 된다.

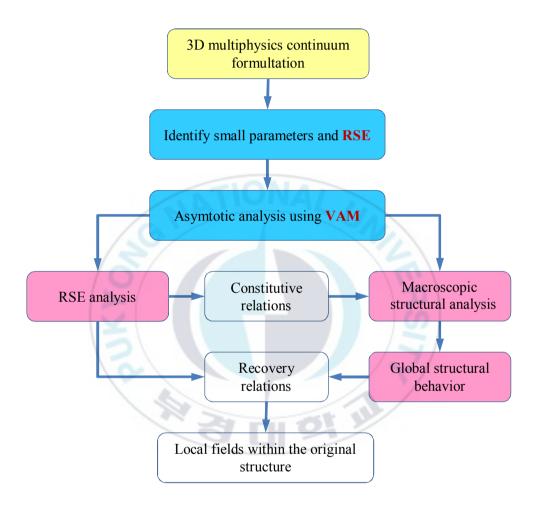


Figure 4 RSE-based multiscale modeling

1.3. 본 연구 내용

이 논문에서는 RSE를 기반으로 한 다중스케일 모델링 방식으로 초기 비틀림과 굽힘을 가지며 범의 축을 따라 주기적으로 반복되는 단위격자를 가지는 구조물에 대한 해석적 방법을 제시한다. 이전 연구에서 단위격자가 주기적으로 반복되는 Prismatic 빔 해석 (Lee & Yu, 2011b)만을 고려하 여 초기 범의 상태를 고려하지 않았지만 이번 연구에서는 고려하지 못한 초기 비틀림과 굽힘의 효과를 곡률 좌표계를 사용하여 더욱 더 일반화된 형식으로 기존 모델을 확장하여 반영하였다. 먼저 초기 비틀림과 굽힘을 가진 3D 이방성 탄성 문제를 회전 텐서 분해 개념 (Danielson & Hodges. 1987) 을 사용하여 간결하고 일반성이 있는 고유한 형태로 수식화한다. 그리고, 단면 차원 대 길이의 변수(Cross- sectional Dimension-tolength Parameter) (e)와 비균질성(η)이 모두 미소함을 고려하여, VAM 을 이용해 기존의 비선형 3D 비균질 이방성 문제를 (i)단위격자의 선형 3D(RSE) 미소 역학적 해석과 (ii) 비선형의 거시적 1D 빔 해석으로 엄격 하게 분리한다. 여기서 단위격자의 선형 3D(RSE) 미소 역학적 해석은 1 차 오더까지 점근적으로 보정된 에너지 함수와 서로 다른 스트레인 간의 운동학적 관계에 기초하며, 마지막으로 일반화된 티모센코 빔 모델로의 변 환을 통하여 공학적으로 사용하기 쉬운 모델이 된다. 여기에서 제안된 모

델의 검증을 위하여 이전 문헌에서 사용된 간단한 예제들을 사용하여 수행하였다. 그리고 다양한 기하구조를 모델링하여 기하구조의 변화에 따른 변동함수의 변화를 분석하였다.



제2장 3D 빔 운동학과 에너지 수식화

2.1. 3D 빔 운동학

초기 비틀림과 굽힘을 가지며 주기적으로 반복되는 단위격자(UC)를 가진 이질성 빔을 고려해 보자. 여기서 단위격자는 빔 구조물의 기준선 r을따라 Fig. 1과 같이 축 상에 있다. 이 논문에서 그리스어로 표기되는 첨자는 2,3을 나타내고, 라틴어로 표기된 첨자는 1,2,3을 나타낸다. 그리고 반복되는 첨자는 명확히 의미를 표시한 곳을 제외하고 그들 영역을 합하는 것을 의미한다.

먼저 UC로 대표되는 비균질 구조물의 균질화 처리를 위하여 두 가지 가정이 필요하다. 첫째로 미시적 좌표 (y_i) 와 거시적 좌표 (x_i) 로 설명되는 두타입의 변수가 있다고 가정한다.

이 두 공간적 변수의 관계는 $y_i = x_i/\eta$ 로 표현된다. 여기서 우리는 UC의 영역 (Ω) 을 y_i 를 사용하여 표현할 수 있다.

$$\Omega = \left\{ (y_1, y_2, y_3) \middle| -\frac{d_1}{2} < y_1 < \frac{d_1}{2}, -\frac{a_2}{2} < y_2 < \frac{a_2}{2}, -\frac{a_3}{2} < y_3 < \frac{a_3}{2} \right\}$$
(1)

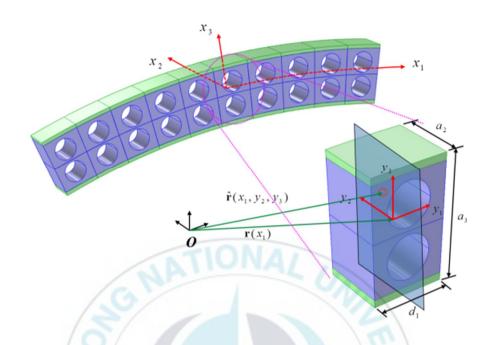


Figure 5 A Initial Curved Beam with Repeated Unit Cells

UC에서 정의된 영역 함수 f_i 의 x_i 에 대한 미분은 다음과 같이 y_i 의 함수로 표현된다.

$$\frac{\partial f_{i}(x_{1}; y_{1}; y_{2}; y_{3})}{\partial x_{1}} = \frac{\partial f_{i}}{\partial x_{1}} \bigg|_{y_{1}=const} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial f_{i}}{\partial y_{1}} \bigg|_{x_{1}=const} \equiv f'_{i} + \frac{1}{\eta} f_{i|1}$$

$$\frac{\partial f_{i}(x_{1}; y_{1}; y_{2}; y_{3})}{\partial x_{\alpha}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial f_{i}}{\partial y_{\alpha}} \equiv \frac{1}{\eta} f_{i|\alpha}$$
(2)

여기서 η 는 숫자를 의미하는 것이 아니며 서로 다른 두 공간간의 구별

을 나타내는 의미로서 사용되는 기호이다.

둘째는 영역 변수의 정확한 해는 Ω 의 체적 평균을 갖는다고 가정한다. 만약 u_i 가 UC내 임의 위치에서의 변위라면 이에 대응하는 Ω 의 체적 평균 변위가 존재한다.

$$v_{i} = \frac{1}{\Omega} \int_{y_{1}} \int_{y_{2}} \int_{y_{3}} u_{i} dy_{1} dy_{2} dy_{3} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u_{i} d\Omega \equiv \langle u_{i} \rangle$$
(3)

3D 빔 형상 구조체의 기계적 거동을 분석하기 위해 먼저 삼차원에서의 빔의 변형 전과 변형 후를 묘사해 보자.

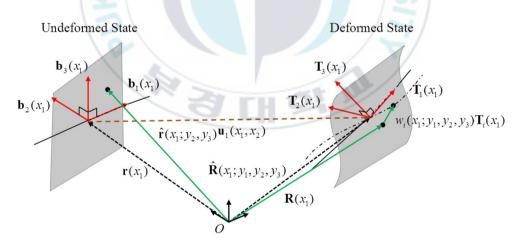


Figure 6 Schematic of Beam Deformation

변형 전의 빔 형상을 임의의 고정된 기준점 0 에서의 기준선 상의 직

교좌표 b,로 표현되는 위치좌표 r로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(x_1) + \eta y_2 \mathbf{b}_2(x_1) + \eta y_3 \mathbf{b}_3(x_1) \tag{4}$$

여기서, \mathbf{r} 은 기준선 상의 x_1 에 위치한 위치벡터이고, x_1 에 대하여 미분하면 \mathbf{b}_1 이 된다.

범이 변형이 일어난 후 3D 구조체의 형상을 묘사하기 위해서 변형 전상태의 위치 벡터와 대응되는 변형 후의 위치 벡터 $\hat{\mathbf{R}}$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}(x_1) + \eta y_2 \mathbf{T}_2(x_1) + \eta y_3 \mathbf{T}_3(x_1) + \eta w_i(x_1; y_1, y_2, y_3) \mathbf{T}_i(x_1)$$
(5)

여기서, \mathbf{T}_i 좌표는 변형된 상태의 범에서의 단위벡터로 변형 후의 기준선에 접하는 직교 좌표계이며, VAM을 이용하여 차원을 줄이는 과정을 용의하게 하기 위하여 선택되었다. \mathbf{T}_i 와 \mathbf{b}_i 사이의 관계는 방향 코사인의 행렬 $C(x_1)$ 으로 식(6)과 같이 정의되며 임의의 대 회전을 표현한다.

$$\mathbf{T}_{i} = C^{Tb}\mathbf{b}_{j} = C_{ij}\mathbf{b}_{j} \quad \text{with} \quad C_{ij} = \mathbf{T}_{i} \cdot \mathbf{b}_{j}$$
 (6)

만약 복합 구조체 내에서 어떠한 변형도 발생되지 않는다면 C는 단순히 단위행렬이 되고 결과적으로 T_i 와 \mathbf{b}_i 는 일치하게 된다.

R은 변형된 구조물에서의 기준선의 위치벡터로 $\mathbf{r}+\mathbf{u}$ 로 표현된다. 여기서 \mathbf{u} 는 변형 전과 변형 후의 기준선의 변형을 나타내는 변위벡터($u_i\mathbf{b}_i$)이다. 그리고 w_i 는 R과 \mathbf{T}_i 로 잡아낼 수 없는 UC내의 변형을 나타내는 변동함수를 표현한다.

식(5)에서 $\hat{\mathbf{R}}$ 과 $(\mathbf{R}, \mathbf{T}_i, w_i)$ 사이에 일 대 일 맵핑을 위해 네 가지 구속조건이 필요하다. 만약 변형된 빔의 기준선에서 $\langle x_{\alpha} \rangle = \langle \eta y_{\alpha} \rangle = 0$ 이라고 정의하면 다음의 3가지 구속조건을 얻을 수 있다.

$$\left\langle w_{i}\right\rangle =0\tag{7}$$

이것은 변동함수가 빔 기준선의 거시적 강체 변위에 영향을 주지 않음을 의미한다. 그리고 T₁을 기준으로 변동함수의 회전에 의한 비틀림 변형은 역시 거시적 강체 변위에 영향을 주지 않으므로 다음과 같은 구속조건을 얻을 수 있다.

$$\left\langle w_{2|3} - w_{3|2} \right\rangle = 0 \tag{8}$$

추가적으로 빔 전체를 구성하고 있는 UC의 반복성으로 서로 연결되는 각 UC면의 변동함수에 대한 주기적 경계조건을 부여할 수 있다.

$$w_i(x_1; d_1/2, y_2, y_3) = w_i(x_1; -d_1/2, y_2, y_3)$$
(9)

본질적인 형태의 3D 문제를 1D 문제로 표현하기 위하여 빔의 변형률를 \mathbf{R} 과 \mathbf{T}_i 를 x_1 에 대한 편미분의 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R'} = (1 + \gamma_{11}) \mathbf{T}_{1}$$

$$\mathbf{T'}_{i} = \mathbf{K} \times \mathbf{T}_{i} \quad \text{with} \quad \mathbf{K} = \mathbf{k} + \kappa$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (k_{3} + \kappa_{3}) & -(k_{2} + \kappa_{2}) \\ -(k_{3} + \kappa_{3}) & 0 & (k_{1} + \kappa_{1}) \\ (k_{2} + \kappa_{2}) & -(k_{1} + \kappa_{1}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1} \\ T_{2} \\ T_{3} \end{bmatrix}$$

$$(10)$$

여기서 γ_{11} 은 인장 변형률, \mathbf{K} 는 변형된 기준선의 곡률벡터, \mathbf{k} 는 변형 전기준선의 곡률벡터, κ_1 은 비틀림, κ_{α} 는 굽힘 곡률을 나타낸다.

회전 텐서의 분해 개념 (Hodges, 2006)에 따라 빔 내의 미소 회전을 3D Jauman-Biot-Cauchy변형률 성분을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(F_{ij} + F_{ji} \right) - \delta_{ij} \tag{11}$$

여기서 δ_{ij} 는 Kroneckor 기호를 나타내고 i와 j가 같으면 1, 다르면 0을 나타낸다. 그리고 F_{ij} 는 변형 구배 텐서를 나타내며 다음과 같이 된다.

$$F_{ij} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{G}_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{b}_j \tag{12}$$

변형 구배 텐서에서 \mathbf{g}^k 는 변형 전 3D 빔의 반변 기저벡터이고, \mathbf{G}_k 는 변형 후 3D 빔의 공변 기저벡터로 단위벡터의 기울기 벡터를 의미한다.

$$\mathbf{g}^{i} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \grave{o}_{ijk} \mathbf{g}_{j} \times \mathbf{g}_{k} \quad \text{with } \grave{o}_{ijk} = 3D \text{ permutation symbol}$$

$$\therefore \grave{o}_{ijk} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
(13)

여기서 \mathbf{g}_i 는 변형 전 3D 빔의 공변기저 벡터로 단위벡터의 기울기 벡터를 나타낸다.

$$\mathbf{g}_{i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_{i}}{\partial x_{i}} \tag{14}$$

$$\mathbf{g}_{1} = (1 - \eta y_{2}k_{3} + \eta y_{3}k_{2})\mathbf{b}_{1} - \eta y_{2}k_{1}\mathbf{b}_{2} + \eta y_{3}k_{1}\mathbf{b}_{3}$$

$$\mathbf{g}_{2} = \mathbf{b}_{2}$$

$$\mathbf{g}_{3} = \mathbf{b}_{3}$$
(15)

변형 전의 3D 빔에 대한 반변 기저벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{g}^{1} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{b}_{1}$$

$$\mathbf{g}^{2} = \mathbf{b}_{2} + \frac{\eta y_{3} k_{1}}{\sqrt{g}} \mathbf{b}_{1}$$

$$\mathbf{g}^{3} = \mathbf{b}_{3} - \frac{\eta y_{2} k_{1}}{\sqrt{g}} \mathbf{b}_{1}$$

$$\sqrt{g} = (1 - \eta y_{2} k_{3} + \eta y_{3} k_{2})$$

$$(16)$$

변형 후의 3D 빔에 대한 공변 기저벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{G}_{i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_{i}}{\partial x_{i}} \tag{17}$$

$$\mathbf{G}_{1} = (\mathbf{r} + \mathbf{u})' + x_{\alpha} \mathbf{T}_{\alpha}' + w_{i}' \mathbf{T}_{i} + w_{i} \mathbf{T}_{i}'$$

$$= \left[1 + \gamma_{11} - \eta y_{2} \left(k_{3} + \kappa_{3}\right) + \eta y_{3} \left(k_{2} + \kappa_{2}\right) + \eta w_{1}' - \eta w_{2} k_{3} + \eta w_{3} k_{2}\right] \mathbf{T}_{1}$$

$$+ \left[-\eta y_{3} \left(k_{1} + \kappa_{1}\right) + \eta w_{2}' - \eta w_{3} k_{1} + \eta w_{1} k_{3}\right] \mathbf{T}_{2}$$

$$+ \left[-\eta y_{2} \left(k_{1} + \kappa_{1}\right) + \eta w_{3}' + \eta w_{2} k_{1} - \eta w_{1} k_{2}\right] \mathbf{T}_{3}$$

$$\mathbf{G}_{\alpha} = \mathbf{T}_{\alpha} + w_{i|\alpha} \mathbf{T}_{i}$$

$$(18)$$

변형률 성분인 식(11)을 전개하여 3D 변형률 장에 대한 주도적인 항을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\gamma_{11} - \eta y_2 \kappa_3 + \eta y_3 \kappa_2 + \eta w_1' - w_2 k_3 + w_3 k_2 + w_{1|2} \eta y_3 k_1 - w_{1|3} \eta y_2 k_1 \right)$$

$$2\Gamma_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-\eta y_3 \kappa_1 + \eta w_2' - w_3 k_1 + w_1 k_3 + w_{2|2} \eta y_3 k_1 - w_{2|3} \eta y_2 k_1 \right) + w_{1|2}$$

$$2\Gamma_{13} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\eta y_2 \kappa_1 + \eta w_3' + w_2 k_1 - w_1 k_2 - w_{3|3} \eta y_2 k_1 + w_{3|2} \eta y_3 k_1 \right) + w_{3|1}$$

$$\Gamma_{22} = w_{2|2}$$

$$2\Gamma_{23} = w_{2|3} + w_{3|2}$$

$$\Gamma_{33} = w_{3|3}$$

여기서, $\sqrt{g} = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = 1 - \eta (y_2 k_3 - y_3 k_2) = 1 - \eta \chi_R$ 로 단위격자내의 단위체적을 나타내며,

(19)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = 1 + \eta(y_2k_3 - y_3k_2) + \eta^2(y_2k_3 - y_3k_2)^2 + O(\eta^3k_\alpha^3) = 1 + \eta\chi_R + \eta^2\chi_R^2$$
로 표현된다.

식(19)의 3D 변형률 장을 수치해석화 구현을 용이하게 하기 위해 다음과 같이 행렬로 표현한다.

$$\Gamma = \Gamma_h w + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon + \eta \left(\Gamma_R w + \Gamma_l w' \right) \right]$$

$$= \Gamma_h w + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta \left(\Gamma_{hR} + \overline{\Gamma}_R \right) w + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta \Gamma_l w'$$
(20)

여기서, $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 2\Gamma_{12} & 2\Gamma_{13} & \Gamma_{22} & 2\Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}^T$, $w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}^T$, $\varepsilon = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{bmatrix}^T \cap \Pi$, 식 (20)에서의 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_{R} = \begin{bmatrix}
k_{1} \left(y_{3} \frac{\partial}{\partial y_{2}} - y_{2} \frac{\partial}{\partial y_{3}} \right) & -k_{3} & k_{2} \\
k_{3} & k_{1} \left(y_{3} \frac{\partial}{\partial y_{2}} - y_{2} \frac{\partial}{\partial y_{3}} \right) & -k_{1} \\
-k_{2} & k_{1} & k_{1} \left(y_{3} \frac{\partial}{\partial y_{2}} - y_{2} \frac{\partial}{\partial y_{3}} \right) \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix} = \Gamma_{hR} + \overline{\Gamma}_{R} \tag{21}$$

2.2. 3D 에너지 수식화

3D 빔에 대한 탄성학 문제는 빔의 변형에너지와 작용하중에 의한 가상 일로 전체 퍼텐셜 에너지를 표현할 수 있다.

먼저 미소 변형 가정하에서 유도된 3D 변형률을 사용하여 3D 빔에 저장되는 변형 에너지를 다음과 같이 정의한다.

$$U = \int_{0}^{l} \mathcal{U} dx_{1}$$

$$2\omega \mathcal{U} = \left\langle \left(\Gamma^{T} D \Gamma \right) \sqrt{g} \right\rangle$$

$$= \left\langle \left\{ \left[\Gamma_{h} w + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta \Gamma_{R} w + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta \Gamma_{l} w' \right]^{T} D \left[\Gamma_{h} w + \frac{1}{\sqrt{g}} \Gamma_{\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta \Gamma_{R} w + \frac{1}{\sqrt{g}} \eta \Gamma_{l} w' \right] \right\} \sqrt{g} \right\rangle$$

$$= \left\langle \left\{ \left(\Gamma_{h} w \right)^{T} D (\Gamma_{h} w) \right] (1 - \eta \chi_{R})$$

$$+ 2 \left\{ \left(\Gamma_{h} w \right)^{T} D (\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon) + \eta \left[\left(\Gamma_{h} w \right)^{T} D (\Gamma_{R} w) + \left(\Gamma_{h} w \right)^{T} D (\Gamma_{l} w') \right] \right\}$$

$$+ \left[\left(\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon \right)^{T} D (\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon) \right] (1 + \eta \chi_{R} + \eta^{2} \chi_{R}^{2})$$

$$+ 2 \eta \left[\left(\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon \right)^{T} D (\Gamma_{R} w) + \left(\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon \right)^{T} D (\Gamma_{l} w') \right] (1 + \eta \chi_{R} + \eta^{2} \chi_{R}^{2})$$

$$+ \eta^{2} \left[\left(\Gamma_{R} w \right)^{T} D (\Gamma_{R} w) + 2 \left(\Gamma_{R} w \right)^{T} D (\Gamma_{l} w') + \left(\Gamma_{l} w' \right)^{T} D (\Gamma_{l} w') \right] (1 + \eta \chi_{R} + \eta^{2} \chi_{R}^{2})$$

여기서, u 는 단위 길이당 변형에너지 밀도이며, ω 는 y_1 방향의 UC길이, D는 미소 좌표계 (y_i) 로 표현된 4차 (forth-order) 탄성 텐서인 3D 6×6 재료상수 행렬을 나타낸다.

(23)

기존 문헌(Yu et al. (2012), Yu (2013))에서 제시한 방식에 따라, 3D 빔 복합 구조체에 작용하는 하중을 직접적으로 분석하는 대신에 작용 하중에 의해 발생된 에너지를 고려하는 가상 일(Virtual work)의 개념이 도입한다. 다음과 같이 변위 장에 Lagrangian 변분을 취하여 가상 변위를 구한다.

$$\delta \hat{\mathbf{R}} = \overline{\delta q}_{i} \mathbf{T}_{i} + \eta y_{\alpha} \delta \mathbf{T}_{\alpha} + \eta \delta w_{i} \mathbf{T}_{i} + \eta w_{j} \delta \mathbf{T}_{j}$$
(24)

여기서, 기준선에 대한 가상 변위와 가상 회전은 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{\delta q}_i = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_i , \quad \delta \mathbf{T}_i = \overline{\delta \psi}_j \mathbf{T}_j \times \mathbf{T}_i$$
(25)

 $\overline{\delta q}_i$ 와 $\overline{\delta \psi}_j$ 는 각각 \mathbf{T}_i 시스템에서의 가상 변위와 가상 회전의 성분을 가지고 있다. 변동함수가 미소하므로 가상 변위($\delta \hat{\mathbf{R}}$)에서 변동함수와 가상 회전의 곱은 무시할 수 있다. 따라서 이후 점근적인 오더(order)의 정의에 의해 차원감소가 구현될 때, 수식 유도 과정의 용이성을 위해 작용하중의 가상 일은 다음과 같이 구분한다.

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta W}_{1D} + \eta \overline{\delta W}_e^* + \eta^2 \overline{\delta W}_s^* \tag{26}$$

여기서 \overline{W}_{1D} 는 변동함수와 관계없는 가상 일이고, $\overline{\delta W}_e^*$ 와 $\overline{\delta W}_s^*$ 는 각각 $\mathbf{T}_{\!\!\!1}$ 과 $\mathbf{T}_{\!\!\!\!2}$ 방향으로 변동함수가 포함된 가상 일이다.

 \overline{W}_{1D} 와 $\overline{\delta W}_{e}^{*}$, $\overline{\delta W}_{s}^{*}$ 의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{\delta W}_{1D} = \int_{0}^{l} \left(f_{i} \overline{\delta q}_{i} + m_{i} \overline{\delta \psi}_{i} \right) dx_{1}
+ \frac{1}{\omega} \left[\left\langle Q_{i} \right\rangle \overline{\delta q}_{i} \Big|_{x_{1}=0}^{x_{1}=L} + e_{i\alpha j} \left\langle \eta y_{\alpha} Q_{j} \right\rangle \overline{\delta \psi}_{i} \Big|_{x_{1}=0}^{x_{1}=L} \right]
\overline{\delta W}_{e}^{*} = \int_{0}^{l} \frac{1}{\omega} \left(\left\langle F_{1} \delta w_{1} \right\rangle + \int_{s} Q_{1} \delta w_{1} \sqrt{c} ds \right) dx_{1} + \frac{1}{\omega} \left\langle Q_{1} \delta w_{1} \right\rangle \Big|_{x_{1}=0}^{x_{1}=L}
\overline{\delta W}_{s}^{*} = \int_{0}^{l} \frac{1}{\omega} \left(\left\langle F_{\alpha} \delta w_{\alpha} \right\rangle + \int_{s} Q_{\alpha} \delta w_{\alpha} \sqrt{c} ds \right) dx_{1} + \frac{1}{\omega} \left\langle Q_{\alpha} \delta w_{\alpha} \right\rangle \Big|_{x_{1}=0}^{x_{1}=L}$$
(27)

일반화된 힘 (f_i) 과 모멘트 (m_i) 는 아래와 같이 정의된다.

$$f_{i} = \frac{1}{\omega} \left(\langle F_{i} \rangle + \int_{s} Q_{i} \sqrt{c} ds \right), \quad m_{i} = \frac{1}{\omega} e_{i\alpha j} \left(\langle \eta y_{\alpha} F_{j} \rangle + \int_{s} \eta y_{\alpha} Q_{j} \sqrt{c} ds \right)$$

$$\therefore \quad \sqrt{c} = \left| \mathbf{\tau} \times \mathbf{g}_{1} \right| = \sqrt{g + \left(x_{2} \frac{dx_{2}}{ds} + x_{3} \frac{dx_{3}}{ds} \right)^{2} k_{1}^{2}}$$

$$(28)$$

여기서 s는 3D 범의 측면 표면, τ 는 경계부 곡선에 접하는 단위벡터, $\mathbf{F} = F_i \mathbf{T}_i$ 는 작용하는 체적력, $\mathbf{Q} = Q_i \mathbf{T}_i$ 는 작용하는 표면 마찰력을 표시한다. 복합구조체의 3D 탄성학 문제는 식(22)과 식(26)에서 정의된 3D 변형에

너지와 작용하중의 가상 일을 이용하여 가상일의 원리의 항으로 다음과 같 이 표현된다.

$$\delta U - \left(\eta \, \overline{\delta W}_e^* + \eta^2 \, \overline{\delta W}_s^*\right) = 0 \tag{29}$$

식(29)에 비보존적인 힘이 부여될 가능성이 있지만, 3D 탄성학 문제는 보존적인 미지의 3D 변동함수에 의해 지배되며 전체 퍼텐셜 에너지 최소화를 통해 변동함수에만 의존하는 구조해석 문제로 표현할 수 있다.

$$\Pi = U - \left(\eta W_e^* + \eta^2 W_s^*\right) \tag{30}$$

따라서,

$$\delta\Pi = 0 \tag{31}$$

만약 경계층 문제를 고려하지 않는다면 표면의 끝 단에서 변동함수에 의한 가상 일의 항은 제거할 수 있다.

여기서, 작용하는 하중으로 인한 퍼텐셜에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$\omega W_e^* = \left(\left\langle w^T F_e \right\rangle + \int_s w^T Q_e \sqrt{c} ds \right),$$

$$\omega W_s^* = \left(\left\langle w^T F_s \right\rangle + \int_s w^T Q_s \sqrt{c} ds \right)$$
(33)

전체 퍼텐셜에너지 최소화의 원리에 기초하여 식(30)에서의 범함수를 최소화함으로서 식(7), 식(8)의 구속조건과 식(9)의 주기적 경계 조건에 지배를 받는 미지의 변동함수를 풀 수 있다. 이런 방식으로 기존 3D 탄성 문제를 간단히 표현할 수 있다. 하지만 이 문제를 직접적으로 풀고자 한다면, 비선형 3D 탄성학 문제를 3D FEA로 푸는 것만큼 수치해석상 상당한 부담이 되므로, VAM에 의한 차원감소 방법을 적용하여 변동함수를 점근적으로 구한다.

제3장 차원 감소

복합구조체는 복잡한 3D 형상과 여러 종류의 재료들로 구성되어 있어 3차원의 변형에너지와 가상일의 항으로 이루어진 전체 포텐셜 에너지를 3D 탄성학 문제로 풀려고 한다면 쉬운 일이 아니다. 따라서 본질적인 3D 문제를 효과적인 1D 빔 문제로 줄이기 위해, VAM을 이용해 빔에 저장된 3D 퍼텐셜에너지를 재료와 기하구조의 특성을 모두 내포하는 1D 변형률(ε)의항으로 수식화한다. 먼저 분석하고자 하는 구조체의 미소 매개변수를 고려하고, 이를 바탕으로 유도된 3D 포텐셜에너지의 모든 항들이 미소 매개변수와 관련된 오더로써 규정되며, 점근적으로 성립된 에너지 항만을 유지하여 변분법을 통해 미지의 변동함수를 계산한다. 본 연구의 초기 비틀림/굽힘을 가진 복합구조체의 경우에 VAM를 적용하기 위해 세 가지 미소 (smallness) 매개변수를 이용한다. ἐ는 1D 변형률의 미소함을 나타내고, ℓ 는 횡단면 치수 대 길이의 미소함을 나타낸다. 그리고 η는 비균질성의 미소함을 의미한다.

기존의 문헌 (Hodges, 2006)을 참조하여 3D 포텐셜에너지 함수에 소개된 모든 변수들을 다음과 같이 추정한다.

$$\overline{\delta q}_{1} \quad l\hat{\varepsilon} \quad \overline{\delta q}_{\alpha} \quad (l^{2}/h)\hat{\varepsilon} \quad \gamma_{11} \quad h\kappa_{i} \quad \hat{\varepsilon}
\overline{\delta \psi}_{1} \quad (l^{2}/h^{2})\hat{\varepsilon} \quad \overline{\delta \psi}_{\alpha} \quad (l/h)\hat{\varepsilon}
F_{1} \quad \mu(1/l)\hat{\varepsilon} \quad F_{\alpha} \quad \mu(h/l^{2})\hat{\varepsilon}
Q_{1} \quad \mu(h/l)\hat{\varepsilon} \quad Q_{\alpha} \quad \mu(h/l^{2})\hat{\varepsilon}$$
(34)

여기서 μ 는 복합구조체를 구성하는 재료들에 대한 재료상수의 오더를 나타내며, 본 논문에서는 모든 재료는 동일한 오더를 갖는다고 가정한다.

l은 길이방향에 따른 변형의 특성 파장, h는 횡단면의 특성 크기, R은 범의 초기 비틀림과 굽힘의 특성 곡률지름을 나타낸다. 범으로 모델링되기 위하여 h/l 1와 h/R 1라는 특성을 가져야 한다. 여기서는 단순성을 위하여 R과 l이 같은 오더라고 가정한다.

3.1. 변동함수의 Zeroth-오더 근사화

식(34)에서 추정된 오더의 정의에 의하여 미지 변동함수의 Zeroth-오더 근사값이 계산될 때, 외력에 의한 가상 일은 작용하는 하중이 고차의 오더를 가지므로 Zeroth-오더 근사화에서는 무시할 수 있다. 따라서 식(29)의 전체 퍼텐셜에너지 함수는 변형에너지 항으로만 표현된다.

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{with} \quad \delta U = 0$$
 (35)

또는 간략하게 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \hat{\Pi} = 0 \quad \text{with} \quad \delta \mathcal{U} = 0$$
 (36)

그러므로 변동함수의 Zeroth-오더 근사화에 점근적으로 성립되는 단위길이당 1D 변형에너지의 최고차 항은 다음과 같다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega}^{0} = \left\langle \left(\Gamma_{h}w\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w\right) + 2\left(\Gamma_{h}w\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right) + \left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right) \right\rangle \tag{37}$$

일반적인 변분의 계산 과정을 식(37)에 적용함으로써, 변동함수가 1D 변 형률(ϵ)에 선형적인 종속관계임을 추정할 수 있다.

$$\delta \hat{\Pi}_{\Omega}^{0} = -(\Gamma_{h})^{T} D(\Gamma_{h} w) - (\Gamma_{h})^{T} D(\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon) = 0$$

$$= -(\Gamma_{h})^{T} D[(\Gamma_{h} w) + (\Gamma_{\varepsilon} \varepsilon)] = 0$$
(38)

이를 바탕으로 변동함수는 다음과 같이 표현된다.

$$w(x_1; y_1, y_2, y_3) = V(y_1, y_2, y_3)\varepsilon(x_1)$$
 (39)

이 때, V (또는 $V_{(j)}^{(i)}$, i=4, j=3)는 UC 내에서 정의되는 미시적 변동장으로 3×4 행렬이다.

식(39)를 포텐셜에너지의 변동함수에 대한 변분인 식(38)에 대입하면, 복잡한 UC 내의 기하학적 구조와 구성재료를 효과적이고 편리하게 처리할수 있도록 하는 수치해석 구현이 용이한 PDE 형태가 다음과 같이 유도된다.

$$(\Gamma_h)^T D[(\Gamma_h V_0) + (\Gamma_\varepsilon)] = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$
(40)

추가적으로 식(7)과 식(8)에서의 4가지 구속조건과 식(9)에서의 주기적 경계조건이 다음과 같은 방법으로 COMSOL에서 수치해석 구현이 쉽게 재 공식화 된다.

$$\left\langle V_{(j)}^{(i)} \right\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \left\langle V_{(2|3)}^{(i)} - V_{(3|2)}^{(i)} \right\rangle = 0$$
 (41)

그리고

$$V_{(j)}^{(i)}(d_1/2, y_2, y_3) = V_{(j)}^{(i)}(-d_1/2, y_2, y_3) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_e$$
(42)

식(40)의 PDE 문제를 식(41)과 식(42)의 구속조건과 경계조건을 이용하여 수치해석할 수 있는 코드를 통해 $V=V_0$ 를 계산하게 되며, 이를 식(37)에 재 대입함으로써 점근적으로 $\mu\hat{e}^2$ 의 오더까지 보정된 에너지 함수를 얻게된다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega}^{0} = \varepsilon^{T} \left\langle \left(\Gamma_{h}V_{0}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\right) + \left(\Gamma_{\varepsilon}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\right) \right\rangle \varepsilon = \varepsilon^{T} \overline{A}\varepsilon \tag{43}$$

여기서, \overline{A} 는 UC의 복잡한 기하학적 구조와 구성재료의 비균질성을 모두 고려한 1D 변형률의 4×4 강성 행렬을 나타낸다.

3.2. 변동함수의 First-오더 근사화

Zeroth-오더 근사화를 통하여 일반적인 범의 거시적 1D 변형률인 인장 변형률과 비틀림, 두 가지 굽힘과 관련된 기본 운동을 추정하는데 뛰어나다. 하지만 초기 비틀림과 굽힘에 의한 영향과 횡 전단변형의 영향을 예측하기 위해서는 더 높은 오더의 개선된 모델이 필요하다. 즉, 개선된 이론을 개발하기 위해 다음 차수의 고차 변동함수의 근사화가 먼저 개발되어야 한다. 우리는 변동함수에 대한 Zeroth-오더의 결과에 섭동(Peturb) 이론을 적용하여 높은 오더의 변동함수를 표현할 수 있다.

$$w = w_0 + \eta w_1 \quad \text{with} \quad w_0 = V_0 \varepsilon \tag{44}$$

식(44)을 식(17)에 대입하여 UC내의 First-오더의 변형에너지를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{cases}
\left[\Gamma_{h}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right]^{T}D\left[\Gamma_{h}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right]\right\}\left(1-\eta \chi_{R}\right) \\
+2\left\{+\eta\left[\left[\Gamma_{h}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right]^{T}D\left[\Gamma_{R}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right] \\
+\left[\Gamma_{h}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right]^{T}D\left[\Gamma_{L}\left(w_{0}'+\eta w_{1}'\right)\right]\right\} \\
+\left[\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right)^{T}D\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right)\right]\left(1+\eta \chi_{R}+\eta^{2}\chi_{R}^{2}\right) \\
+2\eta\left\{\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right)^{T}D\left[\Gamma_{R}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right]+\left\{\left(1+\eta \chi_{R}+\eta^{2}\chi_{R}^{2}\right)\right\} \\
\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right)^{T}D\left[\Gamma_{L}\left(w_{0}'+\eta w_{1}'\right)\right]\right\}\left(1+\eta \chi_{R}+\eta^{2}\chi_{R}^{2}\right) \\
+\eta^{2}\left\{\Gamma_{R}\left(w_{0}+\eta w_{1}\right)\right]^{T}D\left[\Gamma_{R}\left(w_{0}+\eta w_{1}'\right)\right] \\
+2\left[\Gamma_{L}\left(w_{0}'+\eta w_{1}'\right)\right]^{T}D\left[\Gamma_{L}\left(w_{0}'+\eta w_{1}'\right)\right]\right\}\left(1+\eta \chi_{R}+\eta^{2}\chi_{R}^{2}\right) \\
+\left[\Gamma_{L}\left(w_{0}'+\eta w_{1}'\right)\right]^{T}D\left[\Gamma_{L}\left(w_{0}'+\eta w_{1}'\right)\right]
\end{cases}$$

$$(45)$$

식(44)을 식(33)에 대입하여 작용하중에 의한 First-오더의 가상 일을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega \mathcal{W} = \omega \mathcal{W}_{e}^{*} + \omega \mathcal{W}_{s}^{*}$$

$$= \eta \left[\left\langle \left(w_{0} + \eta w_{1} \right)^{T} F_{e} \right\rangle + \int_{s} \left(w_{0} + \eta w_{1} \right)^{T} Q_{e} \sqrt{c} ds \right]$$

$$+ \eta^{2} \left(\left\langle \left(w_{0} + \eta w_{1} \right)^{T} F_{s} \right\rangle + \int_{s} \left(w_{0} + \eta w_{1} \right)^{T} Q_{s} \sqrt{c} ds \right)$$

$$(46)$$

식(45)와 식(46)을 다시 식(30)에 대입함으로 w_i 에 대한 First-오더까지 점 근적으로 근사화된 퍼텐셜에너지 함수의 주도항을 다음과 같이 얻을 수 있 다. First-오더 근사화에서 퍼텐셜에너지 함수는 점근적으로 $\mu(h/l+h/R)^2 \hat{\varepsilon}^2$ 오더까지 계산되고 그 이상의 고차 항은 제거된다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega}^{1} = \eta^{2} \left\langle \left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{1}\right) \right\rangle$$

$$+2\eta^{2} \left\langle \begin{bmatrix} \left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{0}\right) - \left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{0}\right) \chi_{R} \\ + \left(\Gamma_{hR}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{0}\right) + \left(\Gamma_{hR}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right) \\ + \left(\overline{\Gamma}_{R}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{0}\right) + \left(\overline{\Gamma}_{R}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon\right) \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$+2\eta^{2} \left[\left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{l}w_{0}'\right) - \left(\Gamma_{l}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{0}'\right) - \left(\Gamma_{l}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\varepsilon'\right) \right]$$

$$-2\eta^{2} \left(\left\langle \left(w_{1}\right)^{T} F_{e} \right\rangle + \int_{s} \left(w_{1}\right)^{T} Q_{e} \sqrt{c} ds \right)$$

$$(47)$$

Zeroth-오더 근사화에서 계산된 $w_0 = V_0 \varepsilon$ 를 식(47)에 대입하면 w_1 만을 미지 변동함수로 하는 퍼텐셜에너지 함수를 구할 수 있다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega}^{1} = \eta^{2} \left\langle \left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}w_{1}\right) \right\rangle$$

$$+2\eta^{2} \left\langle \begin{bmatrix} \left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{R}V_{0}\right) - \left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}V_{0}\right) \chi_{R} \\ + \left(\Gamma_{hR}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}V_{0}\right) + \left(\Gamma_{hR}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\right) \\ + \left(\overline{\Gamma}_{R}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}V_{0}\right) + \left(\overline{\Gamma}_{R}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\right) \end{bmatrix} \right\rangle \varepsilon$$

$$+2\eta^{2} \left[\left(\Gamma_{h}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{l}V_{0}\right) - \left(\Gamma_{l}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{h}V_{0}\right) - \left(\Gamma_{l}w_{1}\right)^{T} D\left(\Gamma_{\varepsilon}\right) \right] \varepsilon'$$

$$-2\eta^{2} \left(\left\langle \left(w_{1}\right)^{T} F_{e} \right\rangle + \int_{\varepsilon} \left(w_{1}\right)^{T} Q_{e} \sqrt{c} ds \right)$$

$$(48)$$

그리고 Zeroth-오더 근사화 과정과 동일한 방식으로 변분의 계산 과정을 식(48)에 동일하게 적용한다.

$$\delta\hat{\Pi}_{\Omega}^{1} = -(\Gamma_{h})^{T} D(\Gamma_{h} w_{1})$$

$$+ \begin{bmatrix} -(\Gamma_{h})^{T} D(\Gamma_{R} V_{0}) + (\Gamma_{h})^{T} D(\Gamma_{h} V_{0}) \chi_{R} \\ -(\Gamma_{hR})^{T} D(\Gamma_{h} V_{0}) - (\Gamma_{hR})^{T} D(\Gamma_{\varepsilon}) \\ +(\overline{\Gamma}_{R})^{T} D(\Gamma_{h} V_{0}) + (\overline{\Gamma}_{R})^{T} D(\Gamma_{\varepsilon}) \end{bmatrix} \varepsilon$$

$$+ \begin{bmatrix} -(\Gamma_{h})^{T} D(\Gamma_{l} V_{0}) - (\Gamma_{l})^{T} D(\Gamma_{h} V_{0}) - (\Gamma_{l})^{T} D(\Gamma_{\varepsilon}) \end{bmatrix} \varepsilon'$$

$$-(F_{e} + Q_{e})$$

$$= 0$$

$$(49)$$

이를 바탕으로 First-오더의 변동함수 (w_1) 가 ϵ 과 ϵ' , \textit{W}^*_e 에 선형적인 종 속관계임이 추정되고 다음과 같이 표현된다.

$$w_{1}(x_{1}; y_{1}, y_{2}, y_{3}) = V_{1S}(y_{1}, y_{2}, y_{3})\varepsilon'(x_{1}) + V_{1R}(y_{1}, y_{2}, y_{3})\varepsilon(x_{1})$$

$$-V_{1L}(x_{1}; y_{1}, y_{2}, y_{3})$$

$$= w_{1S} + w_{1R} + w_{1L}$$
(50)

여기서 V_{1S} (또는 $V_{1S(j)}^{(i)}$, i=4, j=3)와 V_{1R} (또는 $V_{1R(j)}^{(i)}$, i=4, j=3)은 3×4 행렬이며, V_{1L} (또는 $V_{1L(k)}$, k=3)은 3×1 행렬로써 UC 내에서 정의된 First-오더의 미시적 변동장을 나타낸다.

수치해석의 용이성을 위해 식(50)을 식(49)에 재 대입함으로써 식(49)는 First-오더의 변동함수(w_1)의 미시적 변동장을 계산하기 위한 다음과 같은 PDE가 유도된다. 여기에 필요한 4가지 구속조건과 주기적 경계조건을 적용함으로 변동함수에 대한 미소-역학 문제로 재 유도된다. 변동함수 내의 V_{1S} , V_{1R} , V_{1L} 는 독립변수로 고려하여, PDE 수식을 유도한다.

(1) V_{1S}에 대한 PDE 수식 :

$$\left[\Gamma_{h}\right]^{T} \left\{ D\left(\left[\Gamma_{h}V_{1S}\right] + \left[\Gamma_{l}V_{0}\right]\right) \right\} + \left[\Gamma_{l}\right]^{T} \left\{ D\left(\left[\Gamma_{h}V_{0}\right] + \left[\Gamma_{\varepsilon}\right]\right) \right\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$V_{1S(j)}^{(i)} \left(d_{1}/2, y_{2}, y_{3}\right) = V_{1S(j)}^{(i)} \left(-d_{1}/2, y_{2}, y_{3}\right) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_{e}$$

$$\left\langle V_{1S(j)}^{(i)} \right\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \left\langle V_{1S(2/3)}^{(i)} - V_{1S(3/2)}^{(i)} \right\rangle = 0$$
(51)

(2) V_{1R}에 대한 PDE 수식 :

$$\left[\Gamma_{h}\right]^{T} \left\{ D\left(\left[\Gamma_{h}V_{1R}\right] + \left[\Gamma_{R}V_{0}\right] - \left[\Gamma_{h}V_{0}\right]\chi_{R}\right) \right\}
+ \left[\Gamma_{hR}\right]^{T} \left\{ D\left(\left[\Gamma_{h}V_{0}\right] + \left[\Gamma_{\varepsilon}\right]\right) \right\} - \left[\overline{\Gamma}_{R}\right]^{T} \left\{ D\left(\left[\Gamma_{h}V_{0}\right] + \left[\Gamma_{\varepsilon}\right]\right) \right\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega
V_{1R(j)}^{(i)} \left(d_{1}/2, y_{2}, y_{3}\right) = V_{1R(j)}^{(i)} \left(-d_{1}/2, y_{2}, y_{3}\right) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_{e}
\left\langle V_{1R(j)}^{(i)} \right\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \left\langle V_{1R(2/3)}^{(i)} - V_{1R(3/2)}^{(i)} \right\rangle = 0$$
(52)

(3) V_{1L}에 대한 PDE 수식 :

$$\left[\Gamma_{h}\right]^{T} D\left(\left[\Gamma_{h} V_{1L}\right]\right) = F_{e} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad D\left(\left[\Gamma_{h} V_{1L}\right]\right) = Q_{e} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_{s}$$

$$V_{1L(k)}\left(x_{1}; d_{1}/2, y_{2}, y_{3}\right) = V_{1L(k)}\left(x_{1}; -d_{1}/2, y_{2}, y_{3}\right) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_{e}$$

$$\left\langle V_{1L(k)} \right\rangle = 0 \quad \text{and} \quad \left\langle V_{1L(2/3)} - V_{1L(3/2)} \right\rangle = 0$$
(53)

식(51)과 식(52), 식(53)을 이용하여 First-오더의 미시적 변동장을 계산할 수 있으며, 계산된 변동장을 식(45)와 식(46)에 대입함으로써 $\mu(h/l+h/R)^2 \hat{\varepsilon}^2$ 오더까지 근사화된 전체 포텐셜에너지를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega}^{1} = \varepsilon^{T} \overline{A}_{R} \varepsilon + 2\varepsilon^{T} \overline{B}_{R} \varepsilon' + \varepsilon'^{T} \overline{C} \varepsilon' + 2\varepsilon^{T} \overline{D} \varepsilon'' - 2\varepsilon^{T} \overline{F}_{\varepsilon R} - 2\varepsilon'^{T} \overline{F}_{\varepsilon'}$$
 (54)

여기서

$$\overline{A}_{R} = \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right)^{T} D \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right\} \right\rangle \\
+ \eta \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{\varepsilon} \right]^{T} D \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] - \left[\Gamma_{n} V_{0} \right]^{T} D \left[\Gamma_{n} V_{0} \right] \right) \chi_{R} + 2 \left(\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right)^{T} D \left[\Gamma_{n} V_{0} \right] \right\} \right\rangle \\
+ \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{\varepsilon} \right]^{T} D \left[\Gamma_{R} V_{0} \right] - \left[\Gamma_{n} V_{0} \right]^{T} D \left[\Gamma_{k} V_{1R} \right] \right) \chi_{R} + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right]^{T} D \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \chi_{R}^{2} \right\} \right\rangle \\
+ \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1R} \right] + \left(\left[\Gamma_{n} V_{1R} \right] + \left[\Gamma_{n} V_{0} \right] \right)^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{0} \right] \right\} \right\rangle \\
+ \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1R} \right] + \left(\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \chi_{R} \right)^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{0} \right] \right\} \right\rangle \\
+ \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1R} \right] + \frac{1}{2} \left(\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right)^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{0} \right] \right\} \right\rangle \\
+ \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{n} V_{1S} \right] + \frac{1}{2} \left[\Gamma_{n} V_{1R} \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{0} \right] \right\} \right\rangle \\
+ \frac{1}{2} \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] - \left[\Gamma_{n} V_{0} \right] \chi_{R} \right]^{T} D \left[\Gamma_{n} V_{1S} \right] + \left[\Gamma_{r} V_{0} \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{0} \right] \right\rangle \right\rangle \\
\bar{C} = \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1S} \right] \right\} \right\rangle \\
\bar{D} = \eta^{2} \left\langle \left\{ \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1S} \right] \right\} \right\rangle \\
\bar{F}_{\varepsilon R} = \eta \left\{ \left\langle \left[\left[V_{0} \right]^{T} F_{\varepsilon} \right\} + \int_{\varepsilon} \left[V_{0} \right]^{T} Q_{\varepsilon} \sqrt{c} ds \right\} \right\} \\
+ \left\langle \left[\left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1L} \right] \right\rangle \\
+ \frac{1}{2} \left(\left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right)^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1L} \right] \right\rangle \\
+ \frac{1}{2} \left(\left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right)^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1L} \right] \right\rangle \\
+ \left\langle \left[\left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1L} \right] \right\rangle \\
+ \left\langle \left[\left[\left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\Gamma_{\varepsilon} \right] \right] \right]^{T} D \left[\Gamma_{r} V_{1L} \right] \right\rangle \\
+ \left\langle \left[\left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] + \left[\left[\Gamma_{n} V_{0} \right] \right] \right] \left[\left[\left[\Gamma_{n} V_{1L} \right] \right] \right\rangle \right\rangle \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{2} \left\{ \left[\left[\left[\left[V_{0} \right] \right] \right] \left[\left[\left[V_{n} \right] \right] \left[\left[\left[\left[V_{n} \right] \right] \right] \left[\left[\left[\left[V_{n} \right] \right] \right] \left[$$

3.3. 일반화된 Timoshenko 빔 모델로의 변환

식(54)은 고유 매개변수인 η 와 h/l의 미소성을 바탕으로 VAM을 통해 $\mu(h/l+h/R)^2 \hat{\epsilon}^2$ 오더까지 구한 전체 포텐셜 에너지 함수이다. 이러한 에너지 함수는 x_1 을 항으로 하는 1D 빔 모델로 표현될 수 있으며, 이 1D 빔 모델을 사용하여 복합구조체의 거시적인 기계적 거동이 분석되면, 수학적 관점으로 일정 수준의 정확성을 가진 구조해석 결과를 얻게 된다. 하지만, 일반적으로 사용되는 1D 빔 경계조건이 제안된 모델에서 적용될 때, 1D 빔 변형률의 미분 항들로 인하여 필요 이상의 수치해석적 복잡성을 가지고, 미분 항들의 불명확한 물리적 의미로 공학적 관점에서 사용하기에 제안된 모델은 실용적이지는 않다. 따라서 Timoshenko 빔과 같은 정확성과 실용성을 동시에 충족시키는 1D 빔 모델로의 변환 과정이 필요하다. 일반화된 Timoshenko 빔 모델은 다음과 같다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega} = \varepsilon_{t}^{T} \overline{X} \varepsilon_{t} + 2\varepsilon_{t}^{T} \overline{Y} \gamma_{s} + \gamma_{s}^{T} \overline{G} \gamma_{s} - 2\varepsilon_{t}^{T} \overline{F}_{\varepsilon t} - 2\gamma_{s}^{T} \overline{F}_{\gamma s}$$

$$(56)$$

여기서, $\varepsilon_{t} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{*} & \kappa_{1}^{*} & \kappa_{2}^{*} & \kappa_{3}^{*} \end{bmatrix}^{T}$ 이고, $\gamma_{s} = \begin{bmatrix} 2\gamma_{12}^{*} & 2\gamma_{13}^{*} \end{bmatrix}^{T}$ 는 횡 전단 변형과 관련된 새로운 자유도이다. 3D 빔 운동학에서 횡 전단 변형을 고려하기 위해 새로운 좌표 \mathbf{B}_{i} 를 도입한다.

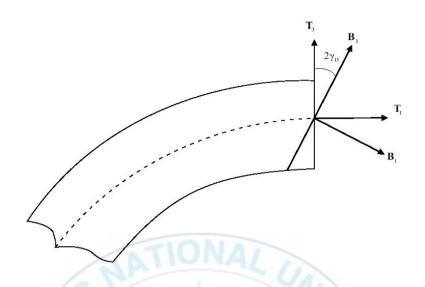


Figure 7 Coordinate system used for Transverse Shear Formulation

이 단위벡터(\mathbf{B}_i)는 기존 단위벡터(\mathbf{T}_i)와 달리 변형된 빔의 기준선과 반드시 평행할 필요는 없다.

 \mathbf{T}_i 와 \mathbf{B}_i 사이의 관계를 표현하기 위해 $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^* & 2\gamma_{12}^* & 2\gamma_{13}^* \end{bmatrix}^T$ 와 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\alpha = -\tilde{e}_1 \gamma$ 를 도입하여 \mathbf{T}_i 와 \mathbf{B}_i 사이의 관계를 다음과 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases}
\mathbf{B}_{1} \\
\mathbf{B}_{2} \\
\mathbf{B}_{3}
\end{cases} = (\Delta - \tilde{\alpha}) \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{1} \\
\mathbf{T}_{2} \\
\mathbf{T}_{3}
\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & -2\gamma_{12}^{*} & -2\gamma_{13}^{*} \\
2\gamma_{12}^{*} & 1 & 0 \\
2\gamma_{13}^{*} & 0 & 1
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{1} \\
\mathbf{T}_{2} \\
\mathbf{T}_{3}
\end{Bmatrix} = C^{BT} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{1} \\
\mathbf{T}_{2} \\
\mathbf{T}_{3}
\end{Bmatrix}$$
(57)

따라서, $2\gamma_{1\alpha}^*$ 을 포함하는 새로운 개선된 1D 변형률은 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{R}' = (1 + \gamma_{11})\mathbf{T}_1 = (1 + \gamma_{11}^*)\mathbf{B}_1 + 2\gamma_{1\alpha}^*\mathbf{B}_{\alpha}$$

$$\tag{58}$$

그리고

$$\mathbf{B}'_{i} = \mathbf{K}^{*} \times \mathbf{B}_{i} \text{ with } \mathbf{K}^{*} = \mathbf{k} + \kappa^{*}$$
 (59)

Timoshenko 빔 모델로 전체 포텐셜 에너지 함수를 변환하기 위해서 기존 문헌에서 표현된 1D 변형률(ε)과 개선된 변형률(ε , 와 γ_s)사이 운동학적 관계를 먼저 표현하여야 한다.

두 서로 다른 변형률 사이의 관계를 표현하기 위해 식(6)의 \mathbf{b}_i 와 \mathbf{T}_i 의 관계를 표현한 것과 같이 변형 전의 단위벡터 \mathbf{b}_i 와 변형 후의 단위벡터 \mathbf{B}_i 사이의 관계를 다음과 같이 단위벡터의 회전으로 표현한다.

$$\mathbf{B}_{i} = \mathbf{C}^{Bb} \cdot \mathbf{b}_{i} = C_{ij}^{Bb} \mathbf{b}_{j} \quad \text{with} \quad C_{ij}^{Bb} = \mathbf{B}_{i} \cdot \mathbf{b}_{j}$$
 (60)

여기서 $\mathbf{C}^{Bb} = C_{ij}^{Bb} \mathbf{b}_{j} \mathbf{b}_{i}$ 로 회전텐서를 표시하고, C_{ij}^{Bb} 는 회전텐서에 부합

하는 방향코사인 행렬이다.

식(60)의 양변을 x_1 에 대하여 미분함으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{B}_{i}^{\prime} = \left(C^{Bb}\right)^{\prime} \mathbf{b}_{i} + C^{Bb} \mathbf{b}_{i}^{\prime} \tag{61}$$

여기서

$$\mathbf{b}_{i}' = k_{j} \mathbf{b}_{j} \times \mathbf{b}_{i} \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{b}_{i} \tag{62}$$

식(62)를 간단히 다음과 같이 행렬로 표현할 수 있다.

식(63)를 식(61)에 대입하여 식(60)을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1}^{\prime} & \mathbf{B}_{2}^{\prime} & \mathbf{B}_{3}^{\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1}^{\prime} & \mathbf{b}_{2}^{\prime} & \mathbf{b}_{3}^{\prime} \end{bmatrix} C^{bB} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1} & \mathbf{b}_{2} & \mathbf{b}_{3} \end{bmatrix} (C^{bB})^{\prime}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1} & \mathbf{b}_{2} & \mathbf{b}_{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}C^{bB} + (C^{bB})^{\prime} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} & \mathbf{B}_{2} & \mathbf{B}_{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{Bb}\tilde{k}C^{bB} + C^{Bb}(C^{bB})^{\prime} \end{bmatrix}$$
(64)

식(59)을 행렬로 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1}^{\prime} & \mathbf{B}_{2}^{\prime} & \mathbf{B}_{3}^{\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} & \mathbf{B}_{2} & \mathbf{B}_{3} \end{bmatrix} (\tilde{k} + \tilde{\kappa}^{*})$$
(65)

우리는 식(64)와 식(65)가 서로 같음을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{k} + \tilde{\kappa}^* = C^{Bb}\tilde{k}C^{bB} + C^{Bb}\left(C^{bB}\right)' = C^{Bb}\tilde{k}C^{bB} - \left(C^{Bb}\right)'C^{bB}$$

$$\tag{66}$$

여기서 식(66)은 단위벡터 \mathbf{b}_i 와 단위벡터 \mathbf{B}_i 사이에 단위벡터 \mathbf{T}_i 로 변환하는 과정을 추가하여 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\tilde{k} + \tilde{\kappa}^* = C^{BT} C^{Tb} \tilde{k} C^{bT} C^{TB} - (C^{BT} C^{Tb})' C^{bT} C^{TB}$$

$$= C^{BT} C^{Tb} \tilde{k} C^{bT} C^{TB} - (C^{BT})' C^{TB} - C^{BT} (C^{Tb})' C^{bT} C^{TB}$$
(67)

식(10)을 이용하여 단위벡터 \mathbf{B}_i 에 대하여 구한 것과 같이 단위벡터 \mathbf{T}_i 에 대하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\tilde{k} + \tilde{\kappa} = C^{Tb}\tilde{k}C^{bT} + C^{Tb}\left(C^{bT}\right)' = C^{Tb}\tilde{k}C^{bT} - \left(C^{Tb}\right)'C^{bT}$$

$$\tag{68}$$

식(68)을 식(67)에 대체함으로 우리는 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{k} + \tilde{\kappa}^* = \tilde{\alpha}' C^{TB} + (\Delta - \tilde{\alpha}) (\tilde{k} + \tilde{\kappa}) (\Delta + \tilde{\alpha})
= \tilde{\alpha}' (\Delta + \tilde{\alpha}) + (\Delta - \tilde{\alpha}) (\tilde{k} + \tilde{\kappa}) (\Delta + \tilde{\alpha})$$
(69)

변형률의 미소성에 의하여 고차 오더를 제거하면 우리는 식(69)의 관계식을 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\tilde{\kappa}^* = \tilde{\alpha}' + \tilde{\kappa} + \tilde{k}\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}\tilde{k} \tag{70}$$

 $\tilde{k}\tilde{\alpha}-\tilde{\alpha}\tilde{k}=\tilde{k}\alpha$ 라는 텐서의 연산관계식을 이용하여 우리는 식(70)을 다음 과 같이 표현할 수 있다.

$$\kappa^* = \alpha' + \kappa + \tilde{k}\alpha \tag{71}$$

따라서 식(58)과 결합하여 우리는 기존 문헌의 1D 변형률(ε)과 개선된 변형률(ε , 와 γ_s)사이 운동학적 관계를 다음과 같이 얻게 된다.

$$\begin{cases}
\gamma_{11} \\
\kappa_{1} \\
\kappa_{2} \\
\kappa_{3}
\end{cases} = \begin{cases}
\gamma_{11}^{*} \\
\kappa_{1}^{*} \\
\kappa_{2}^{*} \\
\kappa_{3}^{*}
\end{cases} + \overline{Q}\gamma'_{s} + P\gamma_{s} \implies \varepsilon = \varepsilon_{t} + \overline{Q}\gamma'_{s} + P\gamma_{s}$$
(72)

여기서 행렬 $ar{Q}$ 와 P는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix}$$
(73)

식(72)에서 $\gamma_{11} = \gamma_{11}^* \Big|_{2\gamma_{1\alpha}=0}$ 이고 $\kappa_{11} = \kappa_{11}^* \Big|_{2\gamma_{1\alpha}=0}$ 임을 알 수 있다.

앞에서 유도된 운동학 관계와 힘의 평형방정식을 이용하여 식(54)에서의 전체 포텐셜 에너지를 일반적인 Timoshenko 빔 모델로 변환하여 보자.

기존 문헌 (Hodges, 1990a)에 근거하여 분포된 힘이 없는 초기 비틀림과 굽힘을 가진 빔에 대한 비선형 1D 평형방정식이 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\mathbf{F'} + \tilde{\mathbf{K}}^* \mathbf{F} = 0$$

$$\mathbf{M'} + \tilde{\mathbf{K}}^* \mathbf{M} + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}) \mathbf{F} = 0$$
(74)

여기서 $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^* & 2\gamma_{12}^* & 2\gamma_{13}^* \end{bmatrix}^T$ 이다. 그리고 \mathbf{F} 는 단위벡터 \mathbf{B}_i 에서 횡단면 응력 벡터의 행렬이다. 그리고 \mathbf{M} 은 단위벡터 \mathbf{B}_i 에서 횡단면 모멘트 벡터의 행렬이다.

평형방정식을 사용하는 목적은 이 차의 점근적으로 보정된 포텐셜 에너지를 Timoshenko 모델의 형태로 변환하는 것이기 때문에 작용하는 하중과 관성력은 모두 무시된다. 점근적 해석에서 $\mu\epsilon^3$ 과 $\mu\epsilon^3(l/h)^3$ 의 고차 오더는 변형률 에너지에서 무시된다. 따라서, 평형방정식에서 비선형 항들은 $(h/l)^2$ 의 오더까지 점근적으로 보정된 변형에너지에 영향을 주지 않는다. 단지 선형 방정식은 일반화된 Timoshenko 모델을 만들기 위한 목적으로 사용된다. 식(74)에서 고차 오더의 비선형 항들을 제거함으로 다음과 같이 쓰여진다.

$$\begin{bmatrix} F_{2}' \\ F_{3}' \end{bmatrix} + D_{1} \begin{bmatrix} F_{2} \\ F_{3} \end{bmatrix} + D_{2} \begin{bmatrix} F_{1} \\ M_{1} \\ M_{2} \\ M_{3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_{1}' \\ M_{1}' \\ M_{2}' \\ M_{3}' \end{bmatrix} + D_{3} \begin{bmatrix} F_{1} \\ M_{1} \\ M_{2} \\ M_{3} \end{bmatrix} + D_{4} \begin{bmatrix} F_{2} \\ F_{3} \end{bmatrix} = 0$$
(75)

여기서

$$D_{1} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{1} \\ k_{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{2} = \begin{bmatrix} k_{3} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{3} & k_{2} \\ 0 & k_{3} & 0 & -k_{3} \\ 0 & -k_{2} & k_{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{4} = \overline{Q} - D_{2}^{T}$$

$$(76)$$

 $2\omega\hat{\Pi}_{\Omega}=arepsilon_{\iota}^{T}ar{X}arepsilon_{\iota}+2arepsilon_{\iota}^{T}ar{Y}\gamma_{s}+\gamma_{s}^{T}ar{G}\gamma_{s}$ 을 사용하여 식(75)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(\omega \hat{\Pi}_{\Omega}\right)}{\partial \left(2\gamma_{12}\right)} \\ \frac{\partial \left(\omega \hat{\Pi}_{\Omega}\right)}{\partial \left(2\gamma_{13}\right)} \end{bmatrix} = \overline{Y}^T \varepsilon_t + \overline{G} \gamma_s$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_2' \\ F_3' \end{bmatrix} = \overline{Y}^T \varepsilon_t' + \overline{G} \gamma_s' = -D_1 \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} - D_2 \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$
(77)

$$\begin{bmatrix}
F_{1} \\
M_{1} \\
M_{2} \\
M_{3}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial(\omega\hat{\Pi}_{\Omega})}{\partial(2\gamma_{11})} \\
\frac{\partial(\omega\hat{\Pi}_{\Omega})}{\partial(\kappa_{1})} \\
\frac{\partial(\omega\hat{\Pi}_{\Omega})}{\partial(\kappa_{2})} \\
\frac{\partial(\omega\hat{\Pi}_{\Omega})}{\partial(\kappa_{3})}
\end{bmatrix} = \bar{X}\varepsilon_{t} + \bar{Y}\gamma_{s}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}
F'_{1} \\
M'_{1} \\
M'_{2} \\
M'_{3}
\end{bmatrix} = \bar{X}\varepsilon'_{t} + \bar{Y}\gamma'_{s} = -D_{3}\begin{bmatrix}
F_{1} \\
M_{1} \\
M_{2} \\
M_{3}
\end{bmatrix} - D_{4}\begin{bmatrix}F_{2} \\
F_{3}\end{bmatrix}$$
(78)

식(77)과 식(78)를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
F_{1} \\
M_{1} \\
M_{2} \\
M_{3} \\
F_{2} \\
F_{3}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\bar{X} & \bar{Y} \\
\bar{Y}^{T} & G
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
\varepsilon_{t} \\
\gamma_{s}
\end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix}
F'_{1} \\
M'_{1} \\
M'_{2} \\
M'_{3} \\
F'_{2} \\
F'_{3}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\bar{X} & \bar{Y} \\
\bar{Y}^{T} & G
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
\varepsilon'_{t} \\
\gamma'_{s}
\end{bmatrix} \tag{79}$$

식(75)와 식(79)를 사용하여 다음과 같이 변형률의 미분 항을 표현할 수

있다.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t' \\ \gamma_s' \end{bmatrix} = -[\mathfrak{R}] \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \gamma_s \end{bmatrix} \tag{80}$$

여기서

$$\begin{bmatrix} \Re \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Re]_{11} & [\Re]_{12} \\ [\Re]_{21} & [\Re]_{22} \end{bmatrix}
 = \begin{bmatrix} -N^{-1}A_4 & -N^{-1}A_3 \\ \overline{G}^{-1}(\overline{Y}^T N^{-1}A_4 + D_1 \overline{Y}^T + D_2 \overline{X}) & \overline{G}^{-1}(\overline{Y}^T N^{-1}A_3 + D_1 \overline{G} + D_2 \overline{Y}) \end{bmatrix}$$
(81)

$$\begin{cases}
A_{3} = \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{1} - D_{4}\right)\overline{G} + \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{2} - D_{3}\right)\overline{Y} \\
= -\overline{Q}\overline{G} + \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{1} + D_{2}^{T}\right)\overline{G} + \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{2} - D_{3}\right)\overline{Y}
\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}
A_{4} = A_{3}\overline{G}^{-1}\overline{Y}^{T} + \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{2} - D_{3}\right)N \\
= -\overline{Q}\overline{Y}^{T} + \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{1} - D_{2}^{T}\right)\overline{Y}^{T} + \left(\overline{Y}\overline{G}^{-1}D_{2} - D_{3}\right)\overline{X}
\end{cases}$$

$$(82)$$

$$N = \overline{X} - \overline{Y}\overline{G}^{-1}\overline{Y}^{T}$$

식(72)와 식(80)으로부터 ε 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varepsilon = \left(\Delta_4 - \overline{Q}[\mathfrak{R}]_{21}\right)\varepsilon_t + \left(P - \overline{Q}[\mathfrak{R}]_{22}\right)\gamma_s \equiv \alpha\varepsilon_t + \beta\gamma_s \tag{83}$$

식(83)의 양변을 x_1 에 대하여 미분하면 다음과 같이 ε' 에 대한 표현을 얻을 수 있다.

$$\varepsilon' = \alpha \varepsilon_t' + \beta \gamma_s' = -\left(\alpha \left[\Re\right]_{11} + \beta \left[\Re\right]_{21}\right) \varepsilon_t - \left(\alpha \left[\Re\right]_{12} + \beta \left[\Re\right]_{22}\right) \gamma_s$$

$$\equiv \alpha' \varepsilon_t + \beta' \gamma_s$$
(84)

lpha'과 eta'은 lpha와 eta의 미분이 아니고 위 방정식으로부터 정의된 새로운 부호이다.

 ε'' 은 역시 위와 같이 식(84)를 미분을 취하면 간단히 유도될 수 있다.

$$\varepsilon'' = \alpha \varepsilon_t'' + \beta \gamma_s'' = (\alpha [\mathfrak{R}_2]_{11} + \beta [\mathfrak{R}_2]_{21}) \varepsilon_t + (\alpha [\mathfrak{R}_2]_{12} + \beta [\mathfrak{R}_2]_{22}) \gamma_s$$

$$\equiv \alpha'' \varepsilon_t + \beta'' \gamma_s$$
(85)

 ε 과 ε' , ε'' 로 표현된 평형방정식을 식(54)의 전체 포텐셜 에너지에 대체하고 식(56)의 일반화된 Timoshenko 빔 모델과 비교하여 강성 행렬을 다음과 같이 구한다.

$$\overline{G} = \left[\overline{Q}^T \overline{A}_R^{-1} \left(\overline{C} - \overline{B}_R^T \overline{A}_R^{-1} \overline{B}_R \right) \overline{A}_R^{-1} \overline{Q} \right]^{-1}
\overline{Y} = \overline{B}_R^T \overline{A}_R^{-1} \overline{Q} \overline{G}
\overline{X} = \overline{A}_R + \overline{Y} \overline{G}^{-1} \overline{Y}^T$$
(86)

그리고 나머지 항인 하중 관계 항들은 식(54)와 식(56)을 비교함으로서 다음과 같이 구한다.

$$\overline{F}_{\varepsilon_{t}} = \alpha^{T} \overline{F}_{\varepsilon R} + \alpha^{T} \overline{F}_{\varepsilon'} \quad \text{and} \quad \overline{F}_{\gamma_{s}} = \beta^{T} \overline{F}_{\varepsilon R} + \beta^{T} \overline{F}_{\varepsilon'}$$
 (87)

여기서

$$\alpha = \Delta_{4} + \overline{Q}\overline{G}^{-1} \left(\overline{Y}^{T} \overline{A}_{R}^{-1} \overline{Q} \overline{Y}^{T} \right)$$

$$\beta = \overline{Q}\overline{G}^{-1} \left(\overline{Y}^{T} \overline{A}_{R}^{-1} \overline{Q} \overline{G} \right)$$

$$\alpha' = -\alpha \left(\overline{A}_{R}^{-1} \overline{Q} \overline{Y}^{T} \right) + \beta \left[\overline{G}^{-1} \left(\overline{Y}^{T} \overline{A}_{R}^{-1} \overline{Q} \overline{Y}^{T} \right) \right]$$

$$\beta' = -\alpha \left(\overline{A}_{R}^{-1} \overline{Q} \overline{G} \right) + \beta \left[\overline{G}^{-1} \left(\overline{Y}^{T} \overline{A}_{R}^{-1} \overline{Q} \overline{G} \right) \right]$$
(88)

여기서 Δ_4 는 4×4 단위행렬이다.

일반화된 Timoshenko 빔 모델의 전체 포텐셜 에너지는 명확한 행렬 형식으로 다시 표현할 수 있다.

$$2\omega\hat{\Pi}_{\Omega} = \varepsilon_t^{\ T} \overline{X} \varepsilon_t + 2\varepsilon_t^{\ T} \overline{Y} \gamma_s + \gamma_s^{\ T} \overline{G} \gamma_s - 2\varepsilon_t^{\ T} \overline{F}_{\varepsilon t} - 2\gamma_s^{\ T} \overline{F}_{\gamma s}$$

$$= \begin{cases} \gamma_{11}^{*} \\ 2\gamma_{12}^{*} \\ 2\gamma_{13}^{*} \\ \gamma_{1}^{*} \\ \kappa_{1}^{*} \\ \kappa_{3}^{*} \end{cases} \begin{cases} \overline{X}_{11} & \overline{Y}_{12} & \overline{X}_{12} & \overline{X}_{13} & \overline{X}_{14} \\ \overline{Y}_{11} & \overline{G}_{11} & \overline{G}_{12} & \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{31} & \overline{Y}_{41} \\ \overline{Y}_{12} & \overline{G}_{21} & \overline{G}_{22} & \overline{Y}_{22} & \overline{Y}_{32} & \overline{Y}_{42} \\ \overline{X}_{12} & \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} & \overline{X}_{22} & \overline{X}_{23} & \overline{X}_{24} \\ \overline{X}_{13} & \overline{Y}_{31} & \overline{Y}_{32} & \overline{X}_{32} & \overline{X}_{33} & \overline{X}_{34} \\ \overline{X}_{14} & \overline{Y}_{41} & \overline{Y}_{42} & \overline{X}_{42} & \overline{X}_{43} & \overline{X}_{44} \end{cases} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{*} \\ \gamma_{11}^{*} \\ 2\gamma_{12}^{*} \\ 2\gamma_{13}^{*} \\ \kappa_{1}^{*} \\ \kappa_{2}^{*} \\ \kappa_{3}^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1} \\ \mathcal{F}_{2} \\ \mathcal{F}_{3} \\ \mathcal{M}_{1} \\ \mathcal{M}_{2} \\ \mathcal{M}_{3} \end{cases}$$

$$(89)$$

이것은 양변을 변형률로 미분을 취하면 다음의 1D 구조 구성 모델로 나타난다.

$$\begin{cases}
F \\
M
\end{cases} = \begin{bmatrix}
\overline{X}_{11} & \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} & \overline{X}_{12} & \overline{X}_{13} & \overline{X}_{14} \\
\overline{Y}_{11} & \overline{G}_{11} & \overline{G}_{12} & \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{31} & \overline{Y}_{41} \\
\overline{Y}_{12} & \overline{G}_{21} & \overline{G}_{22} & \overline{Y}_{22} & \overline{Y}_{32} & \overline{Y}_{42} \\
\overline{X}_{12} & \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} & \overline{X}_{22} & \overline{X}_{23} & \overline{X}_{24} \\
\overline{X}_{13} & \overline{Y}_{31} & \overline{Y}_{32} & \overline{X}_{32} & \overline{X}_{33} & \overline{X}_{34} \\
\overline{X}_{14} & \overline{Y}_{41} & \overline{Y}_{42} & \overline{X}_{42} & \overline{X}_{43} & \overline{X}_{44}
\end{bmatrix} \begin{cases}
\gamma^* \\
\kappa^* \end{cases} - \begin{cases}
\mathcal{F}_a \\
\mathcal{M}_a
\end{cases}$$
(90)

여기서 $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}^T$ 는 힘에 의한 변형률인 $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^* & 2\gamma_{12}^* & 2\gamma_{13}^* \end{bmatrix}^T$ 에 부합하는 응력 결과이고, $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}^T$ 는 모멘트에 의한 변형률인 $\kappa^* = \begin{bmatrix} \kappa_1^* & \kappa_2^* & \kappa_3^* \end{bmatrix}^T$ 에 부합하는 응력 결과이다.

 $\mathcal{F}_a = [\mathcal{F}_1 \quad \mathcal{F}_2 \quad \mathcal{F}_3]^T$ 는 힘에 의한 변형률에 부합하는 하중 관련 항이고, $\mathcal{M}_a = [\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \mathcal{M}_3]^T$ 는 모멘트에 의한 변형률에 부합하는 하중 관련 항이다.

제4장 3D 복원 관계

차원 축소을 통하여 얻어진 3D 미소 복합구조체 모델의 실효적 강성행렬은 1D 빔 모델의 해석을 위해 요구되는 구조 구성 관계식을 제공한다. 이 구조 구성 관계식을 적용하여 1D 빔 모델로부터 거시적인 기계적 거동을 예측하게 된다. 이렇게 구한 1D 빔 해석 결과를 이용하여 3D 미소 복합구조체에 대한 미소 역학적 거동을 예측하게 된다. 이 때 1D 빔 모델을통해 계산된 기계적 거동은 다시 3D의 변위장과 변형률장, 응력장으로 복원하기 위해 복원 관계식이 필요하게 된다.

복원 관계식은 1D 빔 모델의 기계적 거동과 3D 미소 복합구조체 모델의 3D 변동함수를 통합하여 만들어 진다.

미소 영역 내의 3D 변위장은 식(4)와 식(5)의 3D 미소 복합구조체의 변형 전 위치벡터와 변형 후 위치벡터를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{U}_{3d} = \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{R} - \mathbf{r} + x_{\alpha} \left(\mathbf{B}_{\alpha} - \mathbf{b}_{\alpha} \right) + w_{i} \mathbf{B}_{i}$$
(91)

또한, 3D 변형률 장(Γ)은 식(14)으로부터 복원된다.

$$\Gamma = -\left(\Gamma_{h}V_{1L} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\eta\Gamma_{R}V_{1L} + \Gamma_{I}V_{1L}'\right]\right)$$

$$+\left(\left(\Gamma_{h}(V_{0} + V_{1S}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\Gamma_{\varepsilon} + \eta\Gamma_{R}(V_{0} + V_{1S})\right]\right)\varepsilon$$

$$+\left(\Gamma_{h}V_{1R} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\eta\Gamma_{R}V_{1R} + \Gamma_{I}(V_{0} + V_{1S})\right]\right)\varepsilon'$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{I}V_{1R}\varepsilon''$$

$$= -\left(\Gamma_{h}V_{1L} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\eta\Gamma_{R}V_{1L} + \Gamma_{I}V_{1L}'\right]\right)$$

$$+\left(\left(\Gamma_{h}(V_{0} + V_{1S}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\Gamma_{\varepsilon} + \eta\Gamma_{R}(V_{0} + V_{1S})\right]\right)\left(\varepsilon_{I} + \overline{Q}\gamma_{S}' + P\gamma_{S}\right)$$

$$+\left(\Gamma_{h}V_{1R} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\eta\Gamma_{R}V_{1R} + \Gamma_{I}(V_{0} + V_{1S})\right]\right)\left(\varepsilon_{I}' + \overline{Q}\gamma_{S}'' + P\gamma_{S}'\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma_{I}V_{1R}\left(\varepsilon_{I}'' + \overline{Q}\gamma_{S}'''' + P\gamma_{S}''\right)_{t}$$
(92)

여기서 ε_{t} 와 γ_{t} 는 1D 빔 해석으로부터 얻어진 아는 값이므로 $\varepsilon=\varepsilon_{t}+ar{Q}\gamma_{s}'+P\gamma_{s}$ 라는 운동관계식에 따라 ε 은 ε_{t} 와 γ_{t} , 그들의 미분 항으로 표현할 수 있다. 우리는 Timoshenko 빔에서의 응력과 그 미분을 1D 빔 평형방정식으로부터 구할 수 있기 때문에 응력을 항으로 하는 복원관계를 표현하는 것이 더 쉽다. S_{R} 이 일반화된 Timoshenko 빔의 강성 행렬이라고 하면, 구성법칙은 다음과 같이 재 정리된다.

$$\grave{O}_R = S_R^{-1} F_R + \mathcal{E} \tag{93}$$

여기서

 $\grave{o}_{\!\scriptscriptstyle R} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 2\gamma_{12} & 2\gamma_{13} & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{bmatrix}^T$ 과 $F_{\scriptscriptstyle R} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}^T$, ε 은 단위격자 분석에서 작용하는 하중에 의한 변형률을 나타내며, $\varepsilon = S_{\scriptscriptstyle R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_3 & \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 & \mathcal{M}_3 \end{bmatrix}^T$ 이다.

 F_R 의 미분은 1D의 비선형 평형방정식 (Hodges, 2006)으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$F_R' = -R_R F_R - \phi = -\begin{bmatrix} \tilde{K} & O_3 \\ \tilde{e}_1 + \tilde{\gamma} & \tilde{K} \end{bmatrix} F_R - \phi \tag{94}$$

여기서 $\phi = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3]$ 는 \mathbf{B}_i 기저에서 분포된 1D 작용하 중과 관성력이다. 그리고 $\tilde{\gamma}$ 는 미소 변형률 항으로 무시될 수 있다. 식(94) 를 다시 미분하므로써 다음과 같이 구하여 진다.

$$F_R'' = -R_R' F_R - R_R F_R' - \phi' = -\left(R_R^2 - R_R'\right) F_R + R_R \phi - \phi' \tag{95}$$

식(94)와 식(95)를 식(93)에 대입함으로 일반화된 Timoshenko 변형률을 다

음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{O}_R' &= S_R^{-1} F_R' + \mathcal{E}' \\
\dot{O}_R'' &= S_R^{-1} F_R'' + \mathcal{E}''
\end{aligned} \tag{96}$$

구하여진 Timoshenko 변형률을 식(92)에 대입하므로 3D 변형률 장을 얻을 수 있다. 여기서 1D 분석으로부터 3D 변형률 장을 복원하기 위해 요구되는 정보는 1D에서의 하중과 응력 결과값이다.

마지막으로 기존 3D 응력 장(σ)은 기본적인 응력과 변형률과의 관계식을 통하여 구할 수 있다.

$$\sigma = D\Gamma \tag{97}$$

본 논문에서 소개한 초기 굽힘과 비틀림을 포함한 단위격자에 대한 해석 모델을 검증하기 위하여 상용프로그램인 COMSOL을 사용하였다. COMSOL에는 해석 모델을 구현하기 위해 필요한 기하구조 모델링과 경계조건의 구현 등의 기능들을 포함하고 있어 모델링하고 해석하기 용이하다.

제5장 검증 및 결과

이 논문에서의 모델링은 RSE 기반의 다중스케일 모델링 방식으로 모델링되었으며, 초기 비틀림과 굽힘을 가지는 빔의 축을 따라 주기적으로 반복되는 단위격자를 가지는 구조물에 대하여 그 모델링의 정확성과 실용성을 검증하기 위해 기존 문헌에서 사용되었던 예제를 사용하였고, 상용FEA 프로그램의 결과 값과 비교하였다. 먼저 초기 비틀림과 굽힘이 없는미소 차원에서 서로 다른 기하구조와 재료 특성을 가지는 비균질의 복잡한단위격자에 대하여 기존 방식과 제안된 모델을 사용하여 비교하였다. 그리고 두 번째로 초기 비틀림과 굽힘이 있는 빔에 대하여 기존 문헌과의 비교를 통해 제안된 모델이 기존 문헌의 값과 얼마나 잘 일치하는지를 확인하였다. 세번째로 초기 굽힘을 가지며 복잡한 기하구조와 서로 다른 재료로구성된 단위격자로 이루어진 10 UCs의 비균질의 복합구조체 빔에 대하여 제안된 모델과 상용 프로그램의 해석결과를 비교해 봄으로써 제안된 이론을 평가하였다. 마지막으로 제안된 모델를 이용하여 다양한 기하구조의 변경을 통하여 만들어지는 단위격자 내의 변동장의 변화와 Timoshenko 빔의 1D 6 x 6 강성 행렬의 변화를 비교하여 보았다.

5.1. 초기 굽힘이 없는 복합 구조체의 강성행렬 비교

초기 굽힘이 없는 복합 구조체에 대하여 기존 문헌과의 결과를 비교함으로 k값이 적용되지 않은 상태의 모델의 적합성을 확인하였다. 여기서 사용한 예는 Dai와 Zhang의 연구 (2009)에서 사용된 주기적 횡단면 변수를 가지는 세 가지 샌드위치 빔을 사용하여 비교하였다. 사용된 재료는 서로 다른 두 종류의 등방성 재료를 사용하였으며, 그 재료 상수는 다음 Table 1과 같다.

Table 1 The Properties of Unit Cell with Square Core

| Core Properties | E_c | 3.5 [GPa] | Face Properties | E_f | 70 [GPa] |
|--------------------|-------|-----------|--------------------|-------|----------|
| | v_c | 0.34 | | v_f | 0.34 |

5.1.1 사각 코어를 가진 복합구조체 빔에 대한 단위격자

서로 다른 재료로 이루어진 사각 코어를 가진 복합구조체 샌드위치 빔을 사용하였으며, 그 기하학적 형상은 Figure 8과 같다. 그리고, 기하학적 변수는 Table 2와 같다.

Table 2 The Geometrical Variables of Unit Cell with Square Core (Unit: m)

| Variable | b | d | h | t | a |
|----------|-----|-----|-----|-----|---|
| Value | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 0.1 | 1 |

사각 코어를 가진 샌드위치 빔의 단위격자에 대하여 제안된 모델을 적용하여 해석한 결과는 다음 Table 3과 같으며, 기존 문헌과 비교한 결과 최대 4% 정도의 차이를 보임을 알 수 있었다.

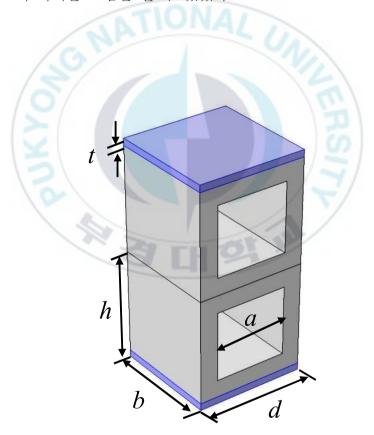


Figure 8 Unit Cell for Sandwich Beam with Square Cores

Table 3 The Effective Properties of Sandwich Beam with Square Core(× 1010)

| Stiffness | Unit | Dai and Zhang (2009) | The Present approach |
|-----------------------------------|----------------------------|--|----------------------|
| \bar{X}_{11} | [N] | | 2.662 |
| \overline{G}_{11} | $[N \cdot m]$ | $0.863 \text{ (with } k_2 = 1.2 \text{)}$ | 0.830 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 22}$ | $[N \cdot m]$ | | 0.057 |
| $ar{X}_{22}$ | $[N \cdot m^2]$ | | 0.744 |
| $ar{X}_{33}$ | $\left[N \cdot m^2\right]$ | 5.532 | 5.578 |
| $ar{X}_{44}$ | $[N \cdot m^2]$ | HA | 0.499 |

5.1.2 90° 회전된 사각 코어를 가진 빔에 대한 단위격자

90°로 회전된 사각 코어를 상하로 4개 가진 복합구조체 샌드위치 빔에 대한 단위격자를 사용하여 비교하여 보았다. 그 기하학적 형상은

Figure 9와 같으며, 기하학적 변수는 Table 4와 같다.

Table 4 The Geometrical Variables of Unit Cell with 90° Square Core (Unit: m)

| Variable | b | d | h | t | a |
|----------|-----|-----|-----|-----|---|
| Value | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 0.1 | 1 |

복합구조체 범의 단위격자에 대하여 제안된 모델을 적용하여 해석한 결

과의 강성값은 다음 Table 5와 같으며, 기존 문헌과 비교한 결과는 최대 8%이내로 잘 일치함을 보였다.

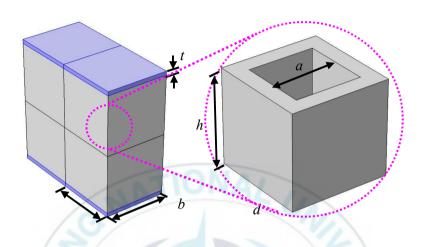


Figure 9 Unit Cell for Sandwich Beam with Square Cores

Table 5 The Effective Properties of Unit Cell with 90°Square Core(× 1010)

| Stiffness | Unit | Dai and Zhang (2009) | The Present approach |
|-----------------------------------|-----------------|---------------------------|----------------------|
| \bar{X}_{11} | [N] | 9 41 | 5.385 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[N \cdot m]$ | 1.358 (with $k_2 = 1.2$) | 1.357 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 22}$ | $[N \cdot m]$ | | 0.471 |
| $ar{X}_{22}$ | $[N \cdot m^2]$ | | 1.590 |
| $ar{X}_{33}$ | $[N \cdot m^2]$ | 10.221 | 11.022 |
| $ar{X}_{44}$ | $[N \cdot m^2]$ | | 4.248 |

두 모델을 이용하여 기존 문헌 (Dai & Zhang, 2009)과 제안된 모델을 비교하여보았으며, 비교한 결과 기존의 연구에 비해 90°된 사각 코어를 가진 복합구조체에서 약 8% 정도의 차이를 보였다. 그러나 Dai와 Zhang의 연구는 해석적 공식에 의해서 굽힘과 전단 강성(\overline{X}_{33} 과 \overline{G}_{11}) 만을 제공하며 전단 강성의 보정을 위하여 보정계수 k를 사용한다. 하지만 해석된 결과 Table에서 보여주는 것과 같이 제안된 모델은 k라는 보정계수의 가정없이 COMSOL를 이용하여 해석을 수행하였으며 대부분의 일반적인 재료들에 대하여 6×6 강성 행렬(\overline{X} , \overline{Y} , \overline{G})로 표현되는 모든 공학적 범의 상수들을 평가할 수 있다.

5.2. 초기 굽힘이 있는 복합 구조체의 강성행렬 비교

초기 굽힘이 있는 복합 구조체에 대하여 제안된 모델을 사용한 해석 결과를 검증하기 위해 2002년 wenbin, et al. (2002)의 VABS(Variational Asymtotic Beam Section Analysis)를 검증하기 위해 사용한 예제를 사용하였다. Wenbin et al.이 사용한 예 중에서 사각 등단면과 초기 굽힘 $(k \neq 0)$ 이 있는 사각 단면에 대하여 강성 값을 비교하였다. 제안된 모델은 등단면 사각 단위격자와 초기 굽힘이 있는 사각 단위격자로 모델링을 수행

하였다. 사용된 재료는 단일의 등방성 재료를 사용하였으며, 재료 상수와 기하학적 변수는 다음의 Table 6과 Table 7에 나타나 있다.

Table 6 The Properties of Unit Cell with Square Section

| Material Properties | E | 2.6×10^7 [psi] | |
|---------------------|---|-------------------------|--|
| Waterial Froperties | v | 0.3 | |

Table 7 The Geometrical Variables of Unit Cell with Square Section (Unit: in)

| Variable | b | h | k_2 | |
|----------|-----|-----|----------------|-----|
| Value | 0.5 | 0.5 | Prismatic 0.05 | 0.1 |

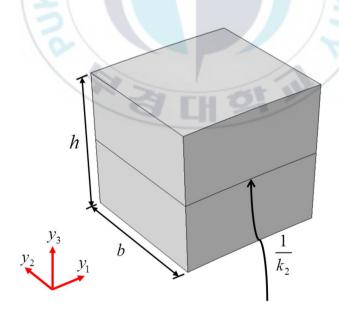


Figure 10 Unit Cell for Square Section Beam with Initial Curvature($k_2 \neq 0$)

본 연구에서 제안된 모델의 등단면 사각 단위격자에 대한 결과 값은 Table 8에 나타나 있으며, 해석 공식에 의한 계산 결과와 잘 일치함을 볼수 있다.

Table 8 The Effective Properties of isotropic square cross-section(prismatic)

| Stiffness | Unit | Prismatic | The Present approach |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $ar{X}_{11}$ | [<i>lb</i>] | 0.650×10 ⁷ | 0.650×10 ⁷ |
| $ar{X}_{13}$ | $[lb \cdot in]$ | 0 | 0 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[lb \cdot in]$ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ |
| \overline{Y}_{21} | [lb·in] | 0 | 0 |
| $ar{ar{G}}_{22}$ | $[lb \cdot in]$ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ |
| b | $[lb \cdot in^2]$ | 0.879×10 ⁵ | 0.879×10 ⁵ |
| $ar{ar{X}}_{33}$ | $\boxed{\left[lb \cdot in^2\right]}$ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ |
| $ar{ar{X}}_{44}$ | $\boxed{\left[lb \cdot in^2\right]}$ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ |

초기 굽힘이 있는 경우는 $k_2=0.05$ 인 것과 $k_2=0.1$ 인 단위격자를 모델 링하여 제안된 방법으로 계산을 수행하였다. 계산된 강성 값의 결과는 Table 9와 Table 10에 나타나 있으며, 이전 연구 (YuW., HodgesH., VolovoiV., CesnikE., 2002)와 비교해 보았을 때 대부분의 강성 값에서 일치함을 보이며 초기 굽힘을 반영하는 전단-비틀림 결합인 \bar{Y}_{21} 과 인장-굽힘 결합인 \bar{X}_{13} 에서 초기 굽힘의 크기에 따라 비례하여 커짐을 볼 수 있었다. 그리고 제안된 방법으로 나온 결과값은 가정이 포함되지 않고 3D모델링을 통하여 얻어진 결과값으로 문헌에서의 결과값보다 더 실제에 가깝다고 할 수 있다.

Table 9 The Effective Properties of isotropic square cross-section with initial curvature($k_2 = 0.05$)

| Stiffness | Unit | Borri et al. (1992) | VABS (2002) | The Present approach |
|-----------------------------------|------------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| \bar{X}_{11} | [<i>lb</i>] | 0.650×10 ⁷ | 0.650×10 ⁷ | 0.650×10 ⁷ |
| $ar{X}_{13}$ | $[lb \cdot in]$ | -0.934×10^4 | -0.880×10^4 | -0.371×10^4 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[lb \cdot in]$ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ |
| \overline{Y}_{21} | $[lb \cdot in]$ | 0.218×10 ⁴ | -0.226×10 ⁴ | -0.069×10^4 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 22}$ | $[lb \cdot in]$ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ |
| $ar{X}_{22}$ | $\left[lb \cdot in^2\right]$ | 0.879×10 ⁵ | 0.879×10 ⁵ | 0.879×10 ⁵ |
| $ar{X}_{33}$ | $\left[lb \cdot in^2\right]$ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ |
| $ar{X}_{44}$ | $[lb \cdot in^2]$ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ |

Table 10 The Effective Properties of isotropic square cross-section with initial curvature($k_2 = 0.1$)

| Stiffness | Unit | Borri et al. (1992) | VABS (2002) | The Present approach |
|-----------------------------------|------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $ar{X}_{11}$ | [lb] | 0.650×10 ⁷ | 0.650×10 ⁷ | 0.650×10 ⁷ |
| $ar{X}_{13}$ | $[lb \cdot in]$ | -0.187×10 ⁵ | -0.176×10 ⁵ | -0.744×10^4 |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[lb \cdot in]$ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ |
| \overline{Y}_{21} | $[lb \cdot in]$ | 0.436×10 ⁴ | -0.452×10^4 | -0.138×10 ⁴ |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 22}$ | $[lb \cdot in]$ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ | 0.207×10 ⁷ |
| $ar{X}_{22}$ | $[lb \cdot in^2]$ | 0.879×10 ⁵ | 0.879×10 ⁵ | 0.879×10 ⁵ |
| $ar{ar{X}}_{33}$ | $\left[lb \cdot in^2\right]$ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ |
| $ar{ar{X}}_{44}$ | $[lb \cdot in^2]$ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ | 0.135×10 ⁶ |

5.3. 제안 모델과 Full 3D FEA와의 비교

여기서는 제시된 모델의 3D 복원을 통하여 얻어진 결과 응력값과 변위 값을 Full 3D FEA 결과 응력 값과 변위 값을 비교함으로서 3D 복원 능력에 대한 정확성를 평가해 보았다.

사용된 모델은 원형 홀이 있는 코어를 가진 단위격자를 사용하였으며, 서로 다른 두 종류의 등방성 재료를 사용하였다. 그 재료 상수는 다음 Table 11과 같다.

Table 11 The Properties of Unit Cell with Circle hole $(k_2 = 0.1)$

| Core | E_c | 3.5 [GPa] | Face | E_f | 70 [GPa] |
|------------|-------|-----------|------------|-------|----------|
| Properties | V_c | 0.34 | Properties | v_f | 0.34 |

단위격자 모델의 기하학적 형상은 Figure 11과 같으며, 길이 방향으로 초기 굽힘 $(k_2=0.1)$ 이 있다. 코어에는 지름 0.3m의 원형 홀을 두 개 가지고 있으며, 표면에 두께 0.1m의 스킨이 있는 형상이다. 형상에 대한 기하학적 변수는 Table 12와 같다.

제안된 모델의 복원 능력을 비교해 보기 위해 prismatic 범의 classical 모델과 refined 모델과 비교하였고, 제안된 모델에서의 Zeroth-오더 근사화에서 얻어진 classical 모델과 First-오더에서 얻어진 제안된 모델을 비교하였다. 그리고 Full 3D FEA와 비교를 하였다.

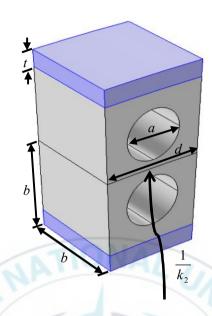


Figure 11 Unit Cell for Circle Holes($k_2 = 0.1$)

Table 12 The Geometrical Variables of Unit Cell with Circle Hole Cores (Unit: m)

| Variable | b | d | h | t | a | k_2 |
|----------|------|--------|------|-----|-----|-------|
| Value | 0.55 | 0.5236 | 0.55 | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

먼저 단위격자에 대한 Classical 모델과 제안된 모델의 강성을 비교하였다. Classical 모델에서는 초기 굽힘을 나타내는 \overline{A}_{13} 항이 나타지만 제안된모델에서는 횡전단변형과 초기 굽힘을 반영하는 항들이 추가적으로 나타남을 알 수 있다.

Table 13 The Comparison of Stiffness for Classical model and the Present Approach

| Stiffness | Unit | Classical Model | Stiffness | The Present approach |
|-----------------------------------|-----------------|------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| \overline{A}_{11} | [N] | 8.558×10 ⁹ | $ar{X}_{11}$ | 8.558×10° |
| \overline{A}_{13} | $[N \cdot m]$ | -0.407×10 ⁸ | $ar{X}_{13}$ | -0.407×10 ⁸ |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[N \cdot m]$ | | $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | 2.814×10° |
| \overline{Y}_{21} | $[N \cdot m]$ | INTION | \overline{Y}_{21} | -0.128×10 ⁸ |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 22}$ | $[N \cdot m]$ | 3 1 | $ar{G}_{22}$ | 2.771×10 ⁸ |
| \overline{A}_{22} | $[N \cdot m^2]$ | 0.458×10 ⁸ | b | 0.458×10 ⁸ |
| \overline{A}_{33} | $[N \cdot m^2]$ | 2.042×10° | $ar{X}_{33}$ | 2.042×10° |
| \overline{A}_{44} | $[N \cdot m^2]$ | 2.160×10 ⁸ | $ar{X}_{44}$ | 2.160×10 ⁸ |

제안된 모델을 통해 얻어진 결과의 정확성을 확인하기 위해,

Figure 12와 같이 원형 홀이 있는 코어를 가진 단위격자로 이루어진 복합 구조체 샌드위치 빔을 모델링하였으며, 단위격자의 수는 10개를 사용하였다. 하중 조건은 샌드위치 빔 상단 전체에 균일한 압력 100KPa이 작용하는 것으로 하였다. 그리고 경계조건으로 좌측 끝단은 6자유도 구속을 하였고, 우측 끝단은 자유단으로 하여 해석을 수행하였다.

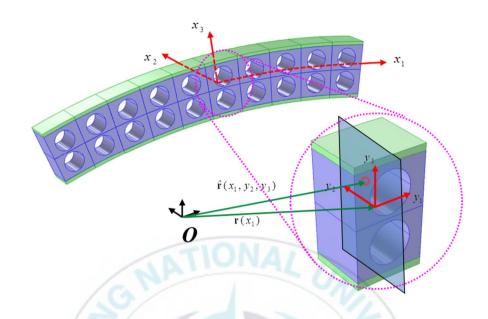


Figure 12 Sandwich Beam with Unit Cell including Circle Hole Cores

먼저 COMSOL을 활용하여 샌드위치 복합구조체 빔에 대한 Full 3D 모델링을 하였고, 모델에 하중과 경계조건을 부여하여 Full 3D FEA를 수행하였다.

Figure 13은 Full 3D FEA를 수행하기 전의 모델과 수행한 후의 변위장의 분포를 나타내고 있다. 제안된 모델의 3D 분석은 구하여진 단위격자의 6×6 강성 행렬을 이용하여 1D 해석을 수행하고 그 결과 값인 거시적 거동에 대한 값을 이용하여 3D 복원을 한다.

Figure 14는 단위격자의 유효한 구조구성 특성 행렬을 이용하여 1D 분석하고 3D 복원하는 과정을 보여주고 있다.

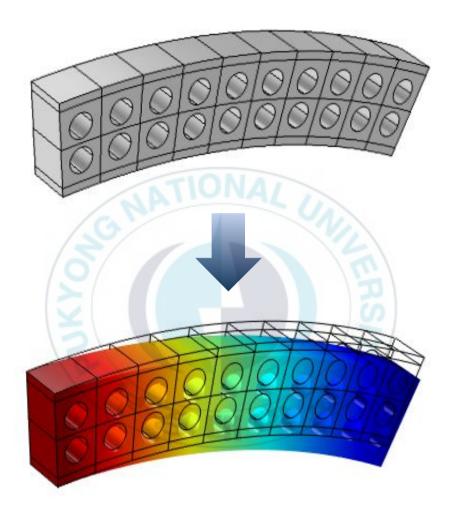


Figure 13 Full 3D FEA of Sandwich Beam with the 10 Unit Cell including Circle Hole Cores

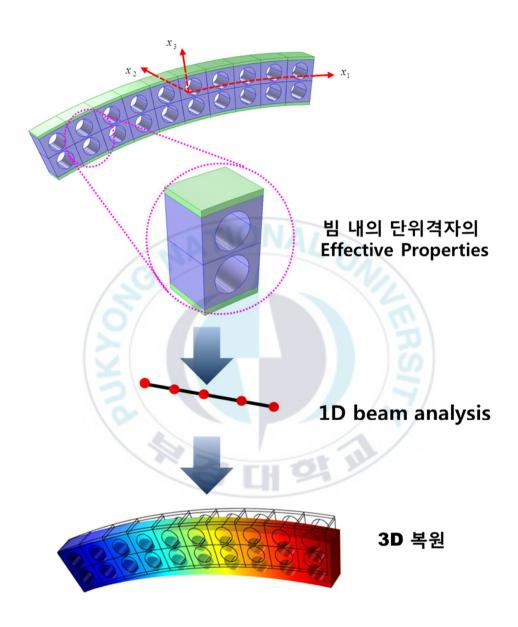


Figure 14 Full 3D Analysis Process for the present Approach

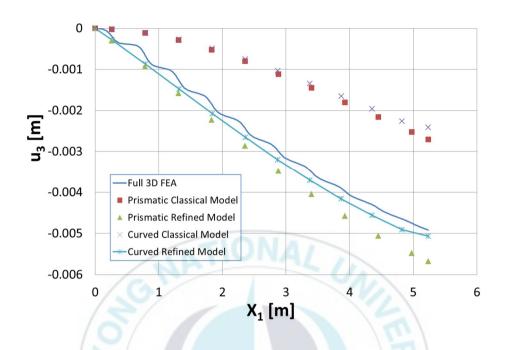


Figure 15 3D Displacement Distribution along the Beam Axis at $x_2 = x_3 = 0$ [m]

Figure 15는 Full 3D FEA와 Prismatic 모델, 제안된 모델(Curved Refined Model)의 변위 분포를 나타내는 그래프이다. Full 3D FEA와 제안된 모델은 약 5%의 차이를 보이는 반면, Prismatic Refined 모델과는 15%의 차이를 보였다. 그리고, Full 3D FEA와 Prismatic 클래식 모델/Curved 클래식 모델 사이에는 약 50%의 차이를 보였다. 따라서 초기 비틀림이나 굽힘이 있는 범의 경우 기존 모델에 비하여 제안된 모델로 해석한 경우가 에러가 10%정도 향상됨을 볼 수 있었다.

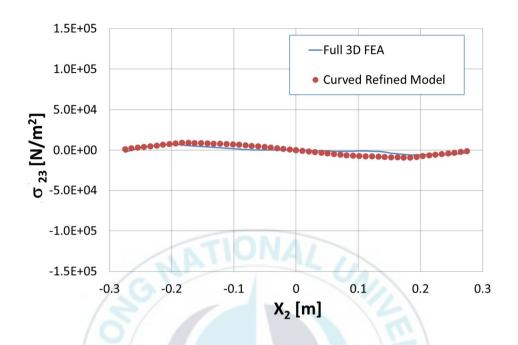


Figure 16 Distribution of σ_{23} along the Beam Thickness x_2 at $x_1 = 0.5236$ [m] and $x_3 = 0$ [m]

Full 3D FEA의 응력 해석 결과와 비교하기 위하여 범의 $x_1=0.5236~[\mathrm{m}]$ 지점에서 $x_3=0~[\mathrm{m}]$ 인 σ_{23} 과 $x_2=0~[\mathrm{m}]$ 인 σ_{11} 을 제안된 모델을 이용하여 응력 값을 복원하였다.

Figure 16과

Figure 17은 Full 3D FEA의 응력 값과 제안된 모델로부터 복원한 응력 값을 비교한 결과를 보여주고 있다. 여기서 실선은 Full 3D FEA의 결과를 나타내고 부호 표시는 제안된 단위격자 모델에 의해서 나온 결과이다.

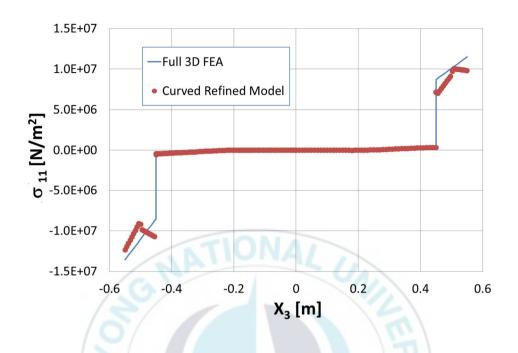


Figure 17 Distribution of σ_{11} along the Beam Height x_3 at $x_1=0.5236$ [m] and $x_2=0$ [m]

Figure 17에서 보여지는 것과 같이 두 재료 사이의 경계부에서 σ_{11} 이 단절되어 점프하는 것을 볼 수 있다. 이는 두 재료 사이의 큰 재료 상수 차이로 인하여 나타나는 것을 보여 준다.

Figure 16과

Figure 17에서 보여지는 것과 같이 복원된 응력값이 Full 3D FEA에 의해서 나온 결과와 비교하여 일부 에러를 포함하지만 잘 일치하여 나타남을 알 수 있었다.

지금까지 Full 3D FEA와 클래식 모델, 제안된 모델을 비교해 보았다. 초기 굽힘을 포함한 샌드위치 빔의 거시적 거동 분석을 수행하는데 있어서 클래식 모델에 비하여 제안된 모델이 월등히 뛰어나며, Prismatic 개선된모델에 비하여는 개선되었음을 보여주었다. 그리고 Full 3D FEA와 비교하여서는 큰 차이 없이 일치함을 알 수 있다. 따라서 단위격자의 수가 많이들어나거나 초기 개발 단계에서 반복된 설계 변경에 따라 새롭게 모델링을수행해야 하는 상황에서 Full 3D FEA는 많은 시간을 필요로 한다. 반면에제안된모델은 복합구조체의 단위격자에 대한모델링을수행하는데만시간이 소요되며,이후 1D 빔 해석시에는단 몇 초의시간만 소요된다.결론적으로 초기 굽힘을 가진 빔 형상의 구조체를 분석하는데 있어 본 연구에서 소개하는모델이 기존 Full 3D FEA 보다 정확성에서 손실을 최소화하고 경제성과 실용성에서 뛰어남을 알 수 있었다.

5.4. 기하구조 변화에 따른 변동함수와 강성 행렬의 비교

앞 절에서 제안된 모델에 대하여 기존 문헌의 결과와 비교함으로서 모델의 정확성과 실용성을 평가하여 보았다. 여기서는 다양한 단위격자의 기하구조의 변경에 따라서 변동함수의 변동장를 나타내어 보고 기하형상의 변화에 따라 강성 행렬이 어떻게 변화하는지를 비교하여 보았다. 사용한 단위격자는 세가지 종류를 사용하였으며, 두께 변화 및 홀 변화를 통하여 변화하는 양상을 보았다. 단위격자에 사용된 재료는 앞 절에서 검증을 위해 사용한 재료 중 하나이며, 서로 다른 두 종류의 등방성 재료를 사용하였다. 그 재료 상수는 다음 Table 14와 같다.

Table 14 The Properties of Unit Cells

| Core | E_c | 3.5 [GPa] | Face | E_f | 70 [GPa] |
|------------|-------|-----------|------------|-------|----------|
| Properties | v_c | 0.34 | Properties | v_f | 0.34 |

5.4.1 원형 홀이 있는 코어를 가진 단위격자

원형 홀이 있는 코어를 가진 단위격자를 사용하였으며, 홀 크기의 변화에 따른 강성 행렬를 비교하여 보았다. 단위격자의 형상은

Figure 18과 같으며, 그 기하학적 변수는 Table 15에 나타나 있다.

Table 15 The Geometrical Variables of Unit Cell with Circle Hole Cores (Unit: m)

| Variable | b | d | h | t | 8 | ì | k_2 |
|----------|------|--------|------|-----|-----|------|-------|
| Value | 0.55 | 0.5236 | 0.55 | 0.1 | 0.3 | 0.15 | 0.1 |

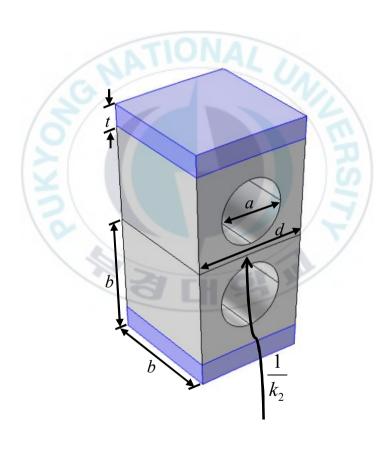


Figure 18 Unit Cell with Circle Hole Core ($k_2 = 0.1$)

Figure 19~Figure 30은 초기 굽힘 $k_2=0.1$ 을 가진 단위격자에 대한 변동장을 나타내고 있으며, Zeroth-오더 근사화에서 계산된 $V_{0(j)}^{(i)}$ 중 $V_{0(j)}^{(l)}$ 를 Figure 19~ Figure 22에 보여주고 있고, First-오더 근사화에서 계산된 $V_{1S(j)}^{(i)}$ 와 $V_{1R(j)}^{(i)}$ 중 $V_{1R(j)}^{(l)}$ 는 Figure 23~Figure 30에서 보여주고 있다.



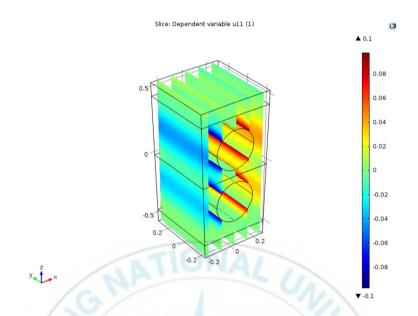


Figure 19 Warping Field of $V_{0(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

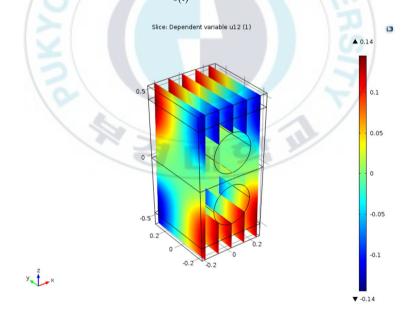


Figure 20 Warping Field of $V_{0(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

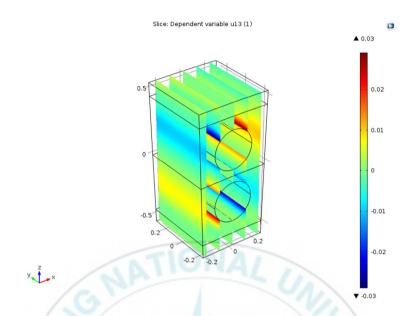


Figure 21 Warping Field of $V_{0(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

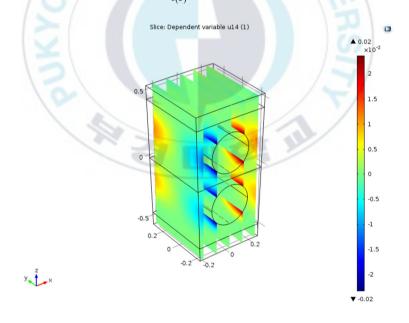


Figure 22 Warping Field of $V_{0(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

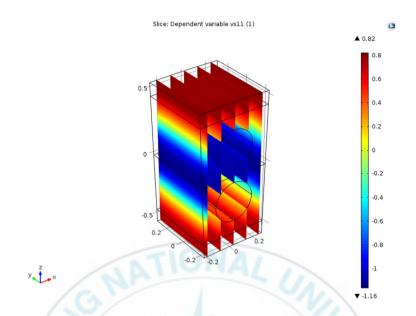


Figure 23 Warping Field of $V_{1S(1)}^{(1)}$ vs11 for Unit cell with Circle Hole Core

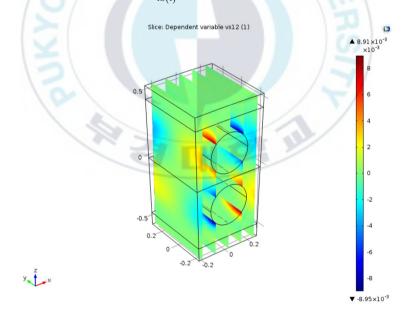


Figure 24 Warping Field of $V_{1S(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

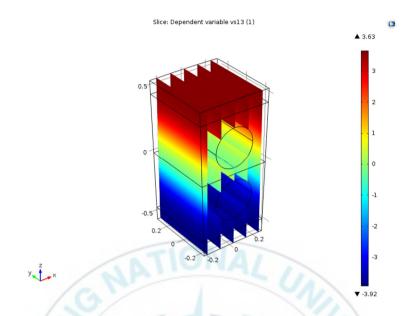


Figure 25 Warping Field of $V_{1S(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

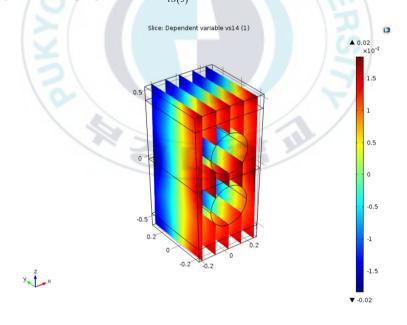


Figure 26 Warping Field of $V_{1S(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

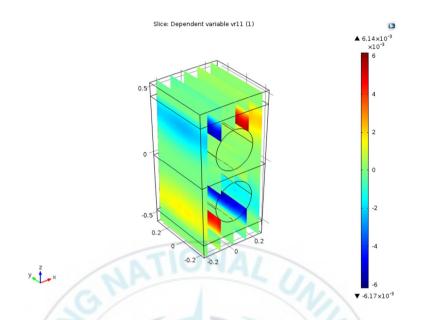


Figure 27 Warping Field of $V_{1R(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

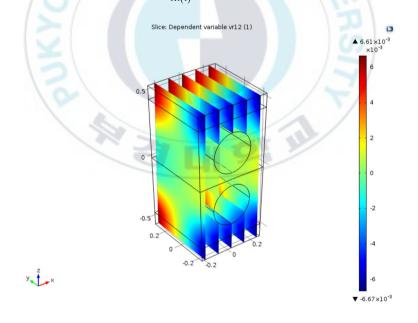


Figure 28 Warping Field of $V_{1R(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

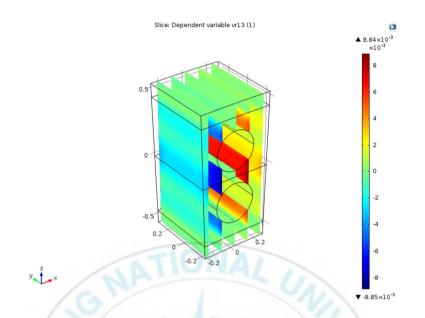


Figure 29 Warping Field of $V_{1R(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

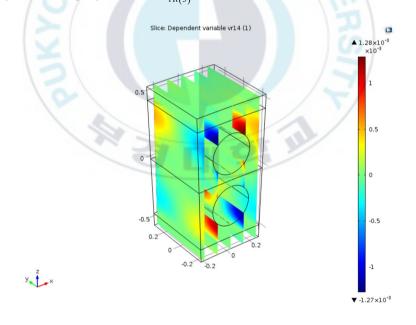


Figure 30 Warping Field of $V_{1R(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Circle Hole Core

Table 16은 단위격자의 홀 크기 변화에 따른 강성을 나타내고 있다. 인장 - 곱힘 결합을 나타내는 강성인 \bar{X}_{13} 과 횡전단변형률 γ_{13} 의 강성인 \bar{G}_{22} , 비틀림을 나타내는 강성인 \bar{X}_{22} 에서 홀 크기에 따라 비례하여 커짐을 볼 수 있었다.

Table 16 The Comparision of Effective Properties according to Circle Hole Size

| Stiffness | Unit | The Circle Hole Size [m] | | | | |
|-----------------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------|--|--|--|
| | | r = 0.3 | r = 0.15 | | | |
| $ar{X}_{11}$ | [lb] | 8.558×10 ⁹ | 9.274×10 ⁹ | | | |
| $ar{X}_{13}$ | $[lb \cdot in]$ | -4.071×10 ⁷ | -8.103×10 ⁷ | | | |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[lb \cdot in]$ | 2.814×10 ⁹ | 3.292×10 ⁹ | | | |
| \overline{Y}_{21} | $[lb \cdot in]$ | -1.283×10 ⁷ | -1.645×10 ⁷ | | | |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 22}$ | $[lb \cdot in]$ | 2.771×10 ⁸ | 7.018×10 ⁸ | | | |
| $ar{X}_{22}$ | $\left[lb \cdot in^2\right]$ | 4.582×10 ⁷ | 8.899×10 ⁷ | | | |
| $ar{X}_{33}$ | $[lb \cdot in^2]$ | 2.042×10 ⁹ | 2.128×10 ⁹ | | | |
| d | $[lb \cdot in^2]$ | 2.160×10 ⁸ | 2.350×10 ⁸ | | | |

5.4.2 사각 박스형 코어를 가진 단위격자

사각 박스형 코어를 가진 단위격자를 사용하였으며, 코어의 두께 변화에 따른 강성 행렬를 비교하여 보았다. 단위격자의 형상은

Figure 31과 같으며, 그 기하학적 변수는 Table 17에 나타나 있다.

Table 17 The Geometrical Variables of Unit Cell with Circle Hole Cores (Unit: m)

| Variable | b | d | h | t_1 | t | 2 | k_2 |
|----------|------|-------|------|-------|-----|-----|-------|
| Value | 0.55 | 1.237 | 0.55 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |

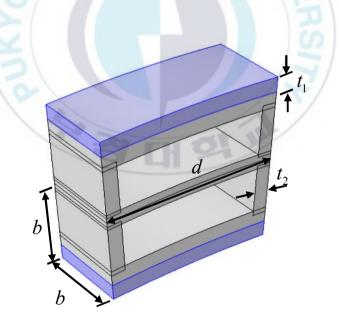


Figure 31 Unit Cell with Square Box Core ($k_2 = 0.1$)

Figure 32~Figure 43은 초기 굽힘 $k_2=0.1$ 을 가진 단위격자에 대한 변동장을 나타내고 있으며, Zeroth-오더 근사화에서 계산된 $V_{0(j)}^{(i)}$ 중 $V_{0(j)}^{(l)}$ 를 Figure 32~ Figure 35에 보여주고 있고, First-오더 근사화에서 계산된 $V_{1S(j)}^{(i)}$ 와 $V_{1R(j)}^{(i)}$ 중 $V_{1R(j)}^{(l)}$ 를 Figure 36~Figure 43에서 보여주고 있다.



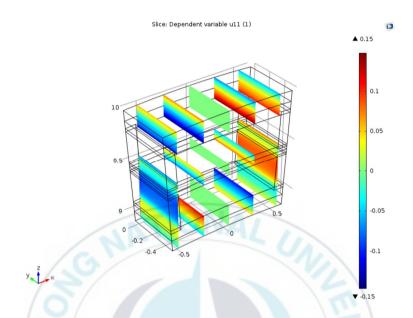


Figure 32 Warping Field of $V_{0(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

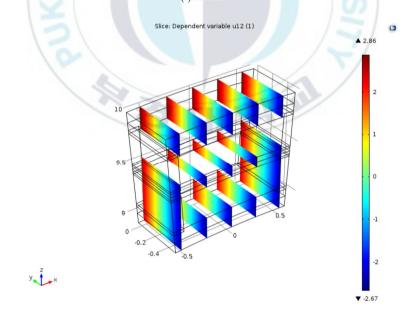


Figure 33 Warping Field of $V_{0(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

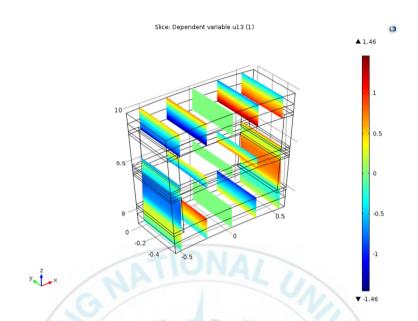


Figure 34 Warping Field of $V_{0(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

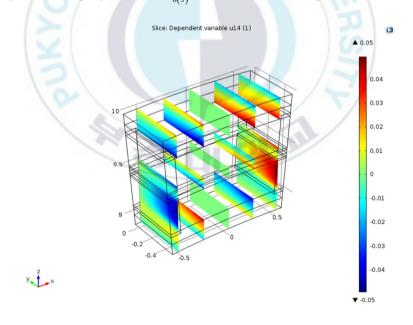


Figure 35 Warping Field of $V_{0(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

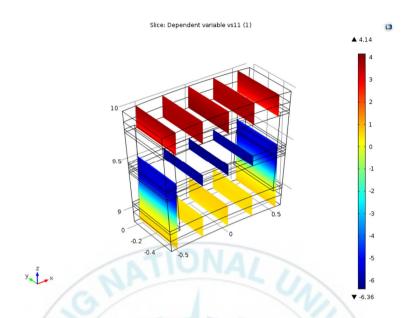


Figure 36 Warping Field of $V_{1S(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

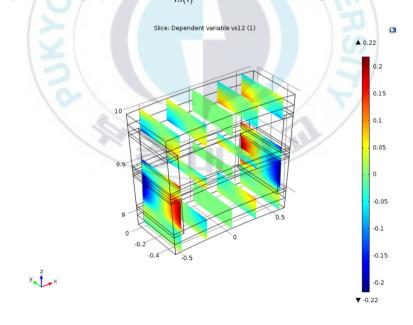


Figure 37 Warping Field of $V_{1S(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

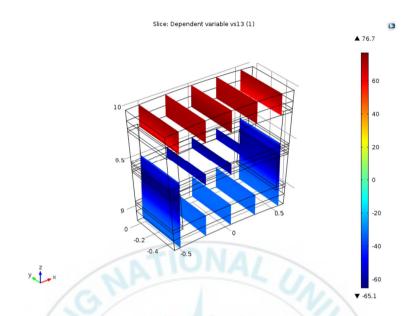


Figure 38 Warping Field of $V_{1S(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

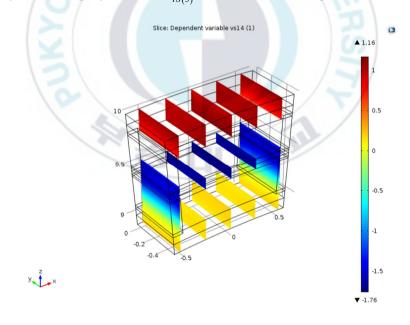


Figure 39 Warping Field of $V_{1S(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

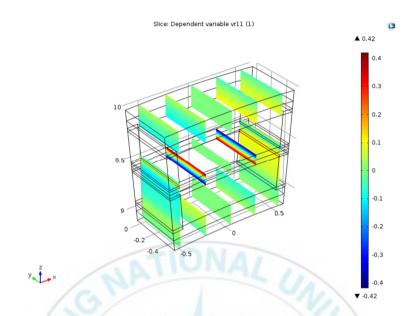


Figure 40 Warping Field of $V_{1R(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

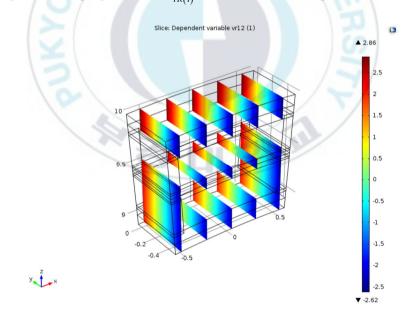


Figure 41 Warping Field of $V_{1R(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

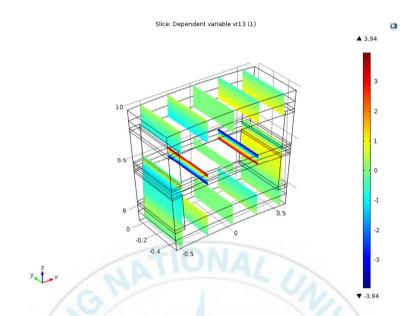


Figure 42 Warping Field of $V_{1R(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

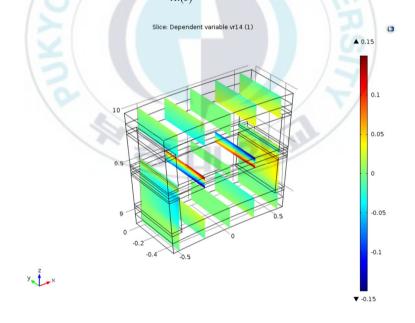


Figure 43 Warping Field of $V_{1R(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Square Box Core

Table 18은 단위격자의 코어 두께 변화에 따른 강성을 나타내고 있다. 사각 박스형의 코어를 가진 단위격자의 경우 코어의 두께 변화에 따라서 횡전단변형률 γ_{13} 의 강성인 \bar{G}_{22} 에만 영향을 주며 나머지 강성에는 크게 영향을 주지 않음을 나타내고 있다.

Table 18 The Comparision of Effective Properties according to Box Thickness Size

| Stiffness | Unit | The Box thickness Size [m] | | | | | |
|-----------------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------------|--|--|--|--|
| | | $t_1 = 0.1$ | $t_2 = 0.2$ | | | | |
| \bar{X}_{11} | [lb] | 1.676×10 ¹⁰ | 1.762×10 ¹⁰ | | | | |
| $ar{X}_{13}$ | $[lb \cdot in]$ | 1.592×10 ¹¹ | 1.674×10 ¹¹ | | | | |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[lb \cdot in]$ | 1.778×10 ¹⁰ | 2.256×10 ¹⁰ | | | | |
| \overline{Y}_{21} | $[lb \cdot in]$ | -3.681×10^{10} | -4.950×10 ¹⁰ | | | | |
| $ar{G}_{22}$ | $[lb \cdot in]$ | 1.057×10 ⁸ | 7.001×10 ⁸ | | | | |
| a | $[lb \cdot in^2]$ | 5.925×10 ¹¹ | 6.591×10 ¹¹ | | | | |
| $ar{X}_{33}$ | $[lb \cdot in^2]$ | 1.517×10 ¹² | 1.594×10 ¹² | | | | |
| \overline{X}_{34} | $[lb \cdot in]$ | 4.379×10 ¹⁰ | 4.603×10 ¹⁰ | | | | |
| d | $[lb \cdot in^2]$ | 1.686×10 ⁹ | 1.775×10 ⁹ | | | | |

5.4.3 경사지 사다리형 코어를 가진 단위격자

경사지 사다리형 코어를 가진 단위격자에 대하여 코어의 두께 변화에 따른 강성 행렬를 비교하여 보았다. 단위격자의 형상은

Figure 44와 같으며, 그 기하학적 변수는 Table 19에 나타나 있다.

Table 19 The Geometrical Variables of Unit Cell with Circle Hole Cores (Unit: m)

| Variable | b | d | h | t_1 | t_2 | k_2 |
|----------|------|--------|-----|-------|---------|-------|
| Value | 0.55 | 0.8247 | 1.1 | 0.1 | 0.1 0.2 | 0.1 |

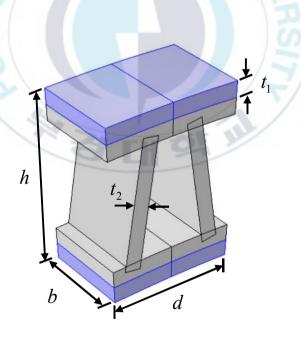


Figure 44 Unit Cell with Ladder Core ($k_2 = 0.1$)

Figure 45~Figure 56은 초기 굽힘 $k_2=0.1$ 을 가진 단위격자에 대한 변동장을 나타내고 있으며, Zeroth-오더 근사화에서 계산된 $V_{0(j)}^{(i)}$ 중 $V_{0(j)}^{(l)}$ 를 Figure 45~ Figure 48에 보여주고 있고, First-오더 근사화에서 계산된 $V_{1S(j)}^{(i)}$ 와 $V_{1R(j)}^{(i)}$ 중 $V_{1S(j)}^{(l)}$ 를 Figure 49~Figure 56에서 보여주고 있다.



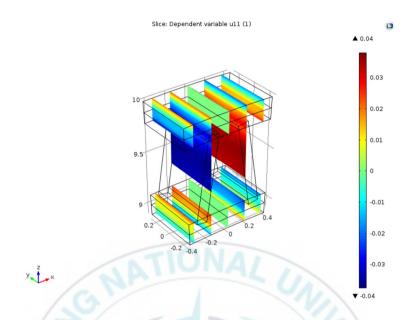


Figure 45 Warping Field of $V_{0(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

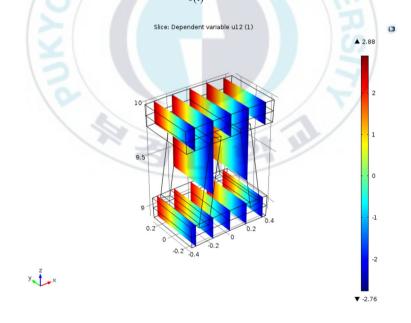


Figure 46 Warping Field of $V_{0(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

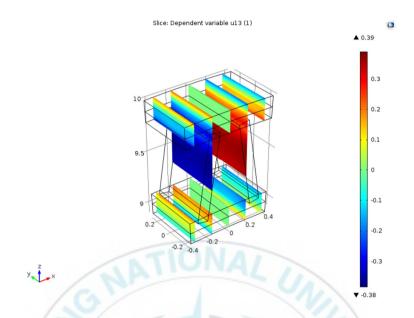


Figure 47 Warping Field of $V_{0(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

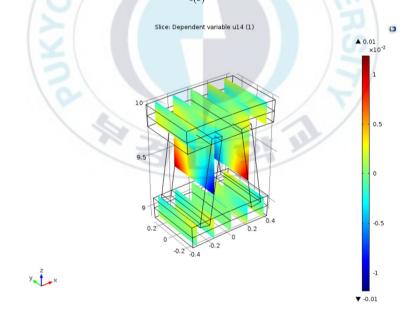


Figure 48 Warping Field of $V_{0(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

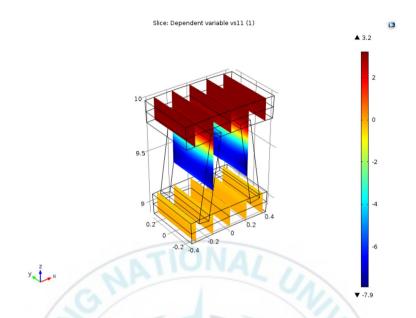


Figure 49 Warping Field of $V_{1S(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

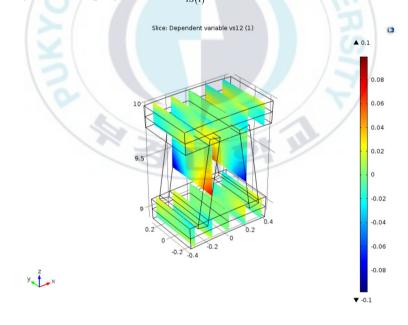


Figure 50 Warping Field of $V_{1S(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

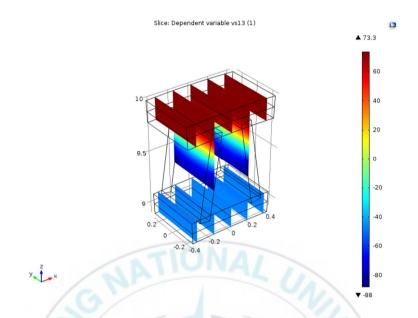


Figure 51 Warping Field of $V_{1S(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

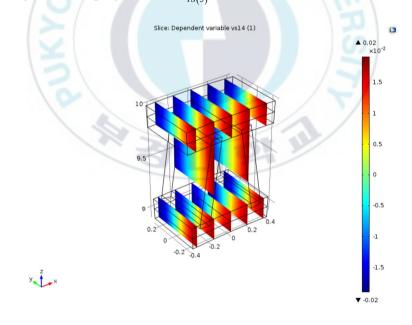


Figure 52 Warping Field of $V_{1S(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

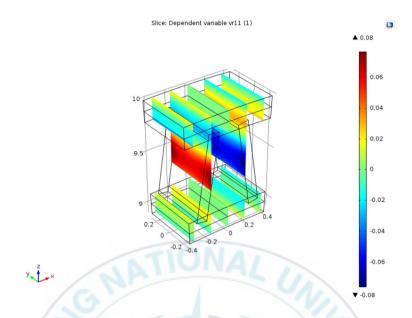


Figure 53 Warping Field of $V_{1R(1)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

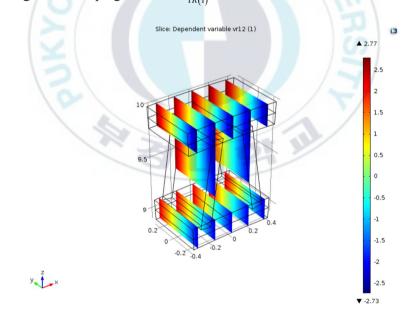


Figure 54 Warping Field of $V_{1R(2)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

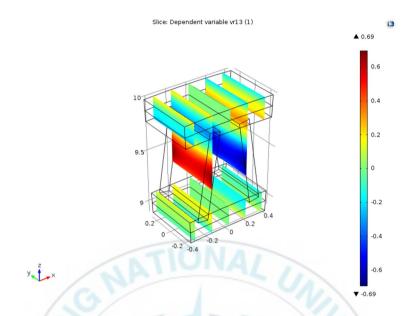


Figure 55 Warping Field of $V_{1R(3)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

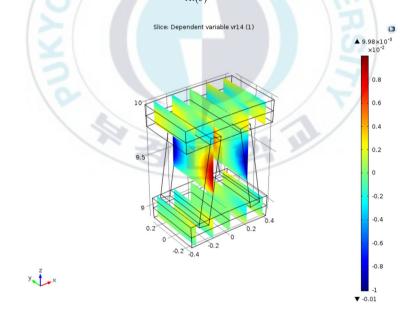


Figure 56 Warping Field of $V_{1R(4)}^{(1)}$ for Unit cell with Ladder Core

Table 20은 단위격자의 코어 두께 변화에 따른 강성을 나타내고 있다. 경사지 사다리형의 코어를 가진 단위격자의 경우 코어의 두께 변화에 따라서 강성에는 비례하지 않으며 일부 증가하는 수준의 변화만 나타남을 볼 수있었다.

Table 20 The Comparision of Effective Properties according to Ladder Thickness Size

| Stiffness | Unit | The Ladder thickness Size [m] | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------|--|--|
| | | $t_1 = 0.1$ | $t_2 = 0.2$ | | |
| $ar{X}_{11}$ | [lb] | 1.651×10 ¹⁰ | 1.761×10 ¹⁰ | | |
| $ar{X}_{13}$ | $[lb \cdot in]$ | 1.569×10 ¹¹ | 1.673×10 ¹¹ | | |
| $ar{G}_{\!\scriptscriptstyle 11}$ | $[lb \cdot in]$ | 1.829×10 ¹⁰ | 2.178×10 ¹⁰ | | |
| \overline{Y}_{21} | $[lb \cdot in]$ | -3.597×10 ¹⁰ | -4.056×10 ¹⁰ | | |
| $ar{G}_{22}$ | $[lb \cdot in]$ | 8.595×10 ⁷ | 5.308×10 ⁸ | | |
| $ar{ar{X}}_{22}$ | $\boxed{\left[lb \cdot in^2\right]}$ | 5.847×10 ¹¹ | 6.209×10 ¹¹ | | |
| $ar{X}_{33}$ | $\boxed{\left[lb \cdot in^2\right]}$ | 1.496×10 ¹² | 1.593×10 ¹² | | |
| $ar{ar{X}}_{44}$ | $\boxed{\left[lb \cdot in^2\right]}$ | 4.160×10 ⁸ | 4.438×10 ⁸ | | |

제6장 결 론

본 논문에서는 초기 비틀림/굽힘을 가지는 복합구조체의 복잡한 기계적 거동들을 예측하고 분석할 수 있는 새로운 미소 역학적 빔 모델을 제시하므로서 3D Full FEA 로만 수행이 가능하여 많은 계산 시간을 필요로 하는 복합구조체의 해석과정을 단순하고 빠르게 수행할 수 있게 하였다. 전개과정에서 변분 점근법(VAM)을 적용하였으며 단위격자의 에너지 함수에서 점근적으로 2차 오더까지 보정하여 초기 비틀림과 굽힘이 반영되게 하였다. 실제 헬기 블레이드와 같은 형상은 초기 비틀림과 굽힘이 존재하므로 이것을 반영한 모델링은 빔의 거시적 거동과 내부의 미시적 변형 상태를 잘 평가할 수 있게 해준다. 3D 단위격자의 실효적 특성값을 이용하여 1D 빔의거시적 해석을 수행하게 되며 그 결과를 이용하여 미소 변위와 변형률, 응력장을 복원관계를 이용하여 복원하게 된다.

여기서는 미소 영역에서 실제적이고 복잡한 기하구조와 구성 재료을 다루기 위해 상용 해석 프로그램인 COMSOL를 사용하여 모델링을 구현하였다. 제안된 모델의 정확성과 실용성을 검증하기 위하여 기존 문헌에서 사용한 예들을 활용하여 검증하였다. 첫 번째로 등단면 단위격자를 사용하여기존 문헌과 비교하였으며 계산된 강성 값이 잘 일치함을 확인하였다. 하

지만 Dai와 Zhang의 연구는 해석적 공식에 의해서 굽힘과 전단 강성만을 제공하고 전단 강성의 보정을 위하여 보정계수 k를 사용하였다. 제안된 모델은 k라는 보정계수의 가정 없이 3D 모델링을 통하여 수행되었으며 대부분의 일반적인 재료들의 6×6 강성행렬로 표현되는 모든 공학적 범의 상수들을 평가할 수 있다. 두 번째로 굽힘이 있는 범의 단면에 대하여 기존 문헌 (YuW., HodgesH., VolovoiV., CesnikE., 2002)의 VABS에 의해 얻어진 강성 값과 비교하였으며, 강성 값이 일치함을 확인하였다. 제안된 모델 역시 기존 문헌에서의 결과 값과 마찬가지로 초기 굽힘을 반영하는 전단-비틀림결합인 \overline{Y}_{21} 과 인장-굽힘 결합인 \overline{X}_{13} 에서 초기 굽힘의 크기에 따라 비례하여 커짐을 볼 수 있었다. 하지만 제안된 방법으로 나온 결과값은 가정이 포함되지 않고 3D 모델링을 통하여 얻어진 결과값으로 문헌에서의 결과값 보다 더 실제에 가깝다고 함 수 있다.

마지막으로 Full 3D FEA의 결과값과 비교함으로 제안된 모델의 3D 복원 능력에 대한 정확성을 확인하였다. 여기서 3D로 복원된 변위 값이 최대 5%이내의 에러로 잘 일치함을 알 수 있다. 추가적으로 다양한 종류의단위격자를 활용하여 기하구조의 변화에 따른 계산된 강성 값이 어떻게 변화하는지를 확인하여 보았다.

결론적으로 제안된 모델은 초기 빔 설계 단계에서 초기 비틀림과 굽힘이 있는 복잡한 복합구조체 빔을 Full 3D FEA를 통해서 해석을 수행하고

설계에 반영하는 과정보다 3D 범의 단위격자를 이용하여 그의 구성 특성을 평가하고 이를 이용하여 1D 범 해석을 수행하는 과정이 시간적으로나경제적으로 더 효과적이라고 할 수 있다. 복잡한 초기 비틀림과 굽힘이 있는 3D 복합구조체의 탄성학적 문제를 정확성과 실용성을 절충한 새로운 단위격자모델의 해석방법을 제시하므로 초기 설계 단계에서 반복적으로 이루어지는 복합구조체의 설계/해석 과정을 효율적으로 수행할 수 있게 하였

다.

REFERENCE

- Aboudi, J. (1982). A continuum theory for fiber-reinforced elastic-visoplastic composites. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 20, No. 5, pp. 605-621.
- Aboudi, J. (1989). Micromechanical analysis of composites by the method of cells. Applied Mechanics Reviews, Vol. 42, No. 7, pp. 193-221.
- Accorsi, M. L., & Nemat-Nasser, S. (1986). Bounds on the overall elastic and instantaneous elastoplastic moduli of periodic comopsites. *Mechanics of Materials*, *Vol. 5*, *No.3*, pp. 209-220.
- Banerjee, B., & Adams, D. (2004). On predicting the effective elastic properties of polymer bonded explosive using the recursive cell method. *International Journal of Solids and Structures*, *Vol.41*, *No.2*, pp. 481-509.
- Bensoussan, A., J., L., & Papanicolaou, G. (1978). Asymptotic analysis for periodic structures. *Amsterdam: North-Holland*.
- Berdichevshy, V. (2009). Variational Principles of continuum Mechanics. *Springer Berlin*, *Vol.1-2*.
- Berdichevsky, V. (1979). Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells. *PMM*, *Vol.43*, *No.4*, pp. 644-687.
- Berdichevsky, V. L. (1979). Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells. *PMM*, *Vol. 43*, *No. 4*, pp. 664-687.

- Berdichevsky, V. L., Armanios, E. A., & Badir, A. M. (1992). Theory of anisotropic thin-walled closed-section beams. *Composites Engineering*, *Vol.2*, *No.5-7*, pp. 411-432.
- Borri, M., Ghiringhelli, G. L., & Merlini, T. (1992). Linear analysis of naturally curved and twisted anisotropic beams. *Composites Engineering*, *Vol.2*, *No.5-7*, pp. 433-456.
- Buannic, N., & Cartraud, P. (2000). Higher-order asymptotic model for a heterogeneous beam, including corrections due to end effects. *In Proceedings of the 41st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Atlanta, Geogia, AIAA-2000-1495*.
- Buannic, N., & Cartraud, P. (2001b). Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. II. Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *International Journal of Solids and Structures*, *Vol.38*, pp. 7163-7180.
- Buannic, N., & Catraud, P. (2001a). Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method. *International Journal* of Solids and Structures, Vol.38, pp. 7139-7161.
- Cartraud, P., & Messager, T. (2006). Computational homogenization of periodic beam-like structures. *Vol.43*, pp. 686-696. International Journal of Solids and Structures.
- Cesnik, C. E. (1994). Cross-sectional analysis of initial twisted and curved composite beams. *Ph. D. thesis, Aerospace Engineering, Geogia Institute of Technology.*

- Cesnik, C. E., & Hodges, D. H. (1994). Variational-asymptotical analysis of initially twisted and curved compsite beams. *International Journal for Engineering Analysis and Design, Vol. I, No. 2*, pp. 177-187.
- Cesnik, C. E., & Hodges, D. H. (1995). Stiffness constants for composite beams including large initial twist and curvature effects. *Applied Mechanics Reviews*, *Vol.48*, *No.11*, *Part 2*, pp. S61-S67.
- Cesnik, C. E., & Hodges, D. H. (1997). VABS: a new concept for composite rotor blade cross-sectional modeling. *Journal of the American Helicopter Society*, *Vol.42*, *No.1*, pp. 27-38.
- Charalambakis, N. (2010). Homogenization techniques and micromechanics. A survey and perspectives. *Applied Mechanics Reviews*, *Vol.63*, *No.3*, pp. 1-10.
- Dai, G., & Zhang, W. (2009). Cell size effects for vibration analysis and design of sandwich beams. *Acta Mechanica Sinica*, *Vol.25*, pp. 353-365.
- Danielson, D. A., & Hodges, D. H. (1987). Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 2, pp. 258-262.
- Dizy, J., & Palacios, R. (2013). Homogenisation of slender periodic composite structures. *International Journal of Solids and Structures* (pp. 1473-1481). Vol.50.
- Dvorak, G. (1979). Elastic-plastic behavior of fibrous composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 27*, pp. 51-72.
- Giavotto, V., Borri, M., Mantegazza, P., Ghiringhelli, G., Carmaschi, V., Maffoli, G.

- C., et al. (1983). Anisotropic beam theory and applications. *Computers and Structures*, *Vol.16*, *No.1-4*, pp. 403-413.
- Hashin, Z., & Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 10, pp. 343-352.
- Hill, R. (1965). Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials-III.
 Self-consistent model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 13, pp. 189-198.
- Hodges, D. H. (1990a). A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 26, No. 11, pp. 1253-1273.
- Hodges, D. H. (1990b). A review of composite rotor blade modeling. *AIAA Journal*, *Vol.28*, *No.3*, pp. 561-565.
- Hodges, D. H. (1999). Non-linear in-plane deformation and buckling of rings and high arches. *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.34, No.4, pp. 723-737.
- Hodges, D. H. (2006). Nonlinear Composite Beam Theory. AIAA.
- Hodges, D. H., & Dowell, E. H. (1974). Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. *Technical Note TN D-7818*, NASA.
- Hodges, D. H., Atilgan, A. R., Cesnik, C. E., & Fulton, M. V. (1992). On a simplified strain energy function for geometrically nonlinear behaviour of anisotropic

- beams. Composites Engineering, Vol.2, No.5-7, pp. 513-526.
- Hodges, D. H., Harursampath, D., Volovoi, V. V., & Cesnik, C. E. (1999). Nonclassical effects in non-linear analysis of anisotropic strips. *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.34, No.2, pp. 259-277.
- Hollister, S. J., & Kikuchi, N. (1992). A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Computational Mechanics*, Vol. 10, No. 7, pp. 73-95.
- Jonnalagadda, Y., & Whitcomb, J. (2011). Calculation of effective section properties for wind turbine blades. In: Proc. 52st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. AIAA, Colorado.
- Jung, S. N., Nagaraj, V. T., & Chopra, I. (1999). Assessment of composite rotor blade modeling techniques. *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 44, No. 3, pp. 188-205.
- Kalamkarov, A. L., Andrianov, I. V., & Danishevs'kyy, V. V. (2009). Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 62.
- Kanouté, P., Boso, D. P., Chaboche, L. J., & Schrefler, A. B. (2009). Multiscale methods for composites. Archives of Computational Methods in Engineering, Vol.16, pp. 31-75.
- Kennedy, G., & Martine, J. (2012). A homogenization-based theory for anisotropic beams with accurate through-section stress and strain prediction.

 International Journal of Solids and Structures, Vol. 49, pp. 54-72.

- Khatam, H., Drago, A. S., Prindera, M.-J., & Bansal, Y. (2009). Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: a critical review and emerging approaches. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 409, No. 5, pp. 349-478.
- Kim, C., & R., W. S. (1997). Thick-walled composite beam theory including 3-D elastic effects and torsional warping. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.34, No.31-32, pp. 4237-4259.
- Kim, J., & Wang, K. (2010). Vibration analysis of composite beams with end effects via the formal asymptotic method. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.132, p. 041003.
- Kohn, R., & Vogelius, M. (1984). A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *International journal of solids and structures*, Vol.20, No.4, pp. 333-355.
- Kolpakov, A. (1991). Calculation of the characteristics fo the thin elastic rods with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, *Vol.55*, *No.3*, pp. 358-365.
- Lee, C. Y., & Yu, W. (2011a). Homogenization and dimensional reduction of composite plates with in-plane heterogeneity. *International Journal of Solids* and Structures, Vol. 48, No. 10, pp. 1474-1484.
- Lee, C. Y., & Yu, W. (2011b). Variational asymptotic modeling of composite beams with spanwise heterogeneity. *Computers & Structures*, *Vol.89*, pp. 1503-1511.
- Lee, C. Y., Yu, W., & Hodges, D. H. (2014). Refined modeling of composite plates with in-plane heterogeneity. *ZAMM*, *Vol.94 No.1-2*, pp. 85-100.

- Lewiński, T. (1991). Effective models of composite periodic plates part I.

 Asymptotic solution. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 9, pp. 1155-1172.
- Love, A. E. (1944). A treatise on the mathematical theory of elasticity. *Dover Publications 4th. ed., New York,* .
- Milton, G. (2001). Theory of compsites. Cambridge University Press.
- Murakami, H., & Toledano, A. (1990). A High-order mixture homogenization of bilaminated composites. *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, No.2, pp. 388-396.
- Paley, M., & Aboudi, J. (1992). Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model. *Mechanics of Materials*, *Vol.14*, pp. 127-139.
- Petrov, E., & Geradin, M. (1998). Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids: Part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 165, pp. 43-92.
- Petrov, E., & Geradin, M. (1998). Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids: Part 2: Anisotropic and advanced beam models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 165, pp. 93-127.
- Popescu, B., & Hodges, D. H. (1999). Asymptotic treatment of the trapeze effect in finite element cross-sectional analysis of composite beams. *International Journal of Non-linear Mechanics*, *Vol.34*, *No.4*, pp. 709-721.

- Popescu, B., & Hodges, D. H. (1999). On asymptotically correct Timoshenko-like anisotropic beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, *Vol.37*, *No.3*, pp. 535-558.
- Popescu, B., Hodges, D. H., & Cesnik, C. E. (2000). Obliqueness effects in asymptotic cross-sectional analysis of composite beams. *Computers and Structures*, Vol. 76, No. 4, pp. 533-543.
- Rand, O. (2000). On the importance of cross-sectional warping in solid composite beams. *Composite Structures*, *Vol.49*, pp. 393-397.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration theory. *Berlin: Springer*.
- Sankar, B. V., & Marrey, R. V. (1997). Analytical method for micromechanics of the texile composites. *Composites Science and Technology*, *Vol.57*, pp. 703-713.
- Sun, C. T., & Vaidya, R. S. (1996). Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, Vol. 56, No. 2, pp. 171-179.
- Taufik, A., Barrau, J., & Lorin, F. (1999). Composite beam analysis with arbitrary cross section. *Composite Structures*, *Vol.44*, pp. 189-194.
- Trabucho, L., & Viano, J. (1996). Mathematical modelling of rods. Handbook of Numerical Analysis (5th edn.), North-Holland, Amsterdam, Vol.4, pp. 487-974.
- Vlasov, V. Z. (1961). Thin-walled elastic beams. *National Science Foundation and Department of Commerce*.

- Vlasov, V. Z. (1961). Thin-walled elastic beams. *National Science Foundation and Department of Commerce*.
- Volovoi, V. V., Hodges, D. H., Cesnik, C. E., & Popescu, B. (2001). Assessment of beam modeling methods for rotor blade applications. *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 33, No. 10-11, pp. 1099-1112.
- Volvovoi, V. V., & Hodges, D. H. (2000). Theory of anisotropic thin-walled beams. *Journal of Applied Mechanics*, (pp. 453-459).
- Williams, T. (2005). A two-dimensional, higher-order, elasticity-based micromechanics model. *International journal of solids and structures*, Vol. 42, pp. 1009-1038.
- Yu, W. (2002). Variational asymptotic modeling of composite dimensionally reducible structures. Ph. D. thesis, Aerospace Engineering, Geogia Institute of Technology.
- Yu, W. (2005). A variational-asymptotic cell method for periodically heterogeneous materials. In Processings of the 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. ASME, Orlando, florida.
- Yu, W. (2012). Unifying structural mechanics with micromechanics using the concept of representative structural element. *Proceedings of the American Society for Composites 27th Technical Conference, Arlington, Texas*, (pp. 1-3).
- Yu, W. (2013). Representative structural element: a new paradigm for multiscale structural modeling. 54th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference AIAA, Boston.

- Yu, W., & Tang, T. (2007). Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 3738-3755.
- Yu, W., Ho, J. C., & Hodges, D. H. (2012). Variational asymptotic beam beam sectional analysis an updated version. *International Journal of Engineering Science*, Vol.59, pp. 40-64.

