



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교 육 학 석 사 학 위 논 문

개별지도를 통한 기초수학 교과목
학습지원에 관한 연구



2018년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

최 태 영

교 육 학 석 사 학 위 논 문

개별지도를 통한 기초수학 교과목
학습지원에 관한 연구

지도교수 표 용 수

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2018년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

최 태 영

최태영의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2018년 8월 24일



주 심 이학박사 박 진 한 (인)

위 원 교육학박사 서 종 진 (인)

위 원 이학박사 표 용 수 (인)

목 차

표 목차	iii
Abstract	iv
I. 서론	1
1.1 연구의 필요성 및 목적	1
1.2 학습지도의 정의	2
1.3 연구내용과 연구과제	2
1.4 연구의 제한점	3
II. 이론적 배경	4
2.1 수학과 교수·학습 방법	4
2.2 튜터링	6
2.3 선행연구 조사	7
III. 교양수학 교육과정 운영	10
3.1 기초수학 특강	10
3.2 수학 진단평가	12
3.3 수학과 카페	13
IV. 기초수학 학습지원 방안	15
4.1 단위별 주요 질문내용	15
4.2 벡터의 이해와 활용	16
4.3 수열과 무한급수	20
4.4 함수와 연속	23
4.5 미분법과 응용	26

4.6 적분법과 응용	30
V. 결론 및 제언	34
5.1 결론	34
5.2 제언	35
참고문헌	37
부록	39



표 목차

<표 III-1> 분반별 기초학력 진단평가 평균점수 및 이수현황	11
<표 III-2> 학년도별 수학 진단평가 응시율 및 합격률	12
<표 III-3> 교양수학 교과목별 수학카페 이용현황	13
<표 III-4> 수학카페 이용횟수에 따른 평균평점	14
<표 IV-1> 기초수학및연습 수강학생들의 주요 질문내용	15



A STUDY ON THE LEARNING SUPPORT OF THE BASIC MATHEMATICS CURRICULUM
THROUGH THE INDIVIDUAL TUITION

Tae Young Choi

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

The purpose of this study is to find out the difficult learning contents from the students who are attending basic mathematics curriculum and propose the effective learning supporting plans to improve the basic scholastic ability.

We analyzed the implementation results of the special lecture for the basic mathematics, the mathematics level assessments and the Mathematics Cafe which are conducted in the P-National University, and examined the difficult learning contents by unit from the Mathematics Cafe users who attended basic mathematics curriculum. And, considering the level of understanding and prior learning of the student on each question, we proposed ways to support learning to improve problem-solving ability with a complete understanding of the questions.

I. 서론

1.1 연구의 필요성 및 목적

다양한 대입전형제도의 도입으로 교양수학 교과목 수강학생들의 수학 기초학력 부진 및 심각한 학력 차는 대학의 교육과정 운영에 많은 어려움을 주고 있다. 이에 따라, P대학에서는 수학 기초학력이 부진한 이공계열 대학 입학예정자들의 문제해결력을 향상시키고 수학에 대한 자신감을 갖도록 하기 위하여, 일반계 고등학교 자연계열 학생들이 고등학교 과정에서 학습하는 수학 교과 내용으로 기초수학 특강을 시행하고 있다. 또한, 수학 진단평가를 시행하여 신입생들의 기초수학 학력을 평가하고, 일정 점수를 취득하지 못한 학생과 미응시자는 미적분학의 선수 교과목으로 기초수학및연습(3시간, 2학점)을 수강하도록 하고 있으며, 교양수학 교과목 수강학생들의 학습을 지원하기 위하여 정규학과와 계절학기 기간에 일대일 튜터링 방식의 교양수학 교과목 학습지원 프로그램인 수학카페를 운영하는 등 다양한 노력을 기울이고 있다.

여러 선행연구들에서는 교양수학 운영에 대한 문제점, 운영현황 및 개선방안 등에 대한 다양한 연구결과들을 제시하고 있는데, 본 연구에서는 P대학에 시행하고 있는 기초수학 특강, 수학 진단평가 및 수학카페 운영 등에 결과를 분석하고, 기초수학및연습 수강학생들이 수학카페에서 자주 질문하는 학습내용이나 문제풀이 등을 중심으로 그에 대한 학습지도 방안을 제시하고자 한다.

1.2 학습지도의 정의

교육심리학 용어사전¹⁾에서 학습지도는 학습이 잘 일어나도록 학습의 조건을 조성하는 것과 동일한 의미를 갖는다. Gagné에 의하면 학습의 외적 조건이란 수업의 절차를 말하는데, 이것은 학습자의 내적 학습과정을 안내하는 과정이어야 한다는 것이다. 여기서, 학습의 내적 과정이란 주의집중 획득, 목표의 고지, 사전학습 재생, 자료 제시, 학습안내, 수행유도, 피드백, 평가, 과지 및 전이 등을 말하는데, 본 논문에서의 학습지도는 학습의 내적 과정을 촉진하기 위한 제반 외적 활동을 의미한다.

1.3 연구내용과 연구과제

P대학에서는 교양수학 교과목 수강학생들의 학습지원을 위해, 수학과페를 운영하고 있다. 수학과페에는 계약조교와 교육대학원생 수업지원조교 등을 고정 배치하여, 교양수학 수강학생들의 학습내용에 대한 이해와 문제풀이 및 과제수행 등을 지원해주고 있다. 본 논문에서는 기초수학및연습 교과목 수강학생들이 수학과페를 방문하여 자주 질문하는 학습내용이나 문제풀이에 대한 학생의 이해도, 학습지도 내용 및 그 지도상의 유의점 등을 중심으로 연구하였다.

이 연구에서는 다음의 연구문제를 통하여, 기초수학및연습 교과목 수강학생들이 어려워하는 교과내용을 알아보고, 기초학력 향상을 위한 효율적 학습지도 방안을 제안하고자 한다.

1) 교육심리학 용어사전 (2000), 한국교육심리학회, 학지사,
<http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1945040&cid=41989&categoryId=41989>

첫째, 일대일 튜터링 방식의 교양수학 교과목 학습지원 프로그램으로 운영하고 있는 수학카페에서 기초수학및연습 교과목 수강학생들이 자주 질문하는 내용이나 문제풀이를 각 단원별로 정리하여 학생들의 수학적 환경을 알아본다.

둘째, 학생들의 질문내용에 대한 이해도 및 선행학습 등을 고려하여, 질문에 대한 정확한 이해와 함께 문제해결력을 향상시킬 수 있는 지도방안을 모색한다.

1.4 연구의 제한점

본 논문의 연구결과를 일반화하거나 활용할 때는 다음 사항이 고려되어야 할 것이다.

첫째, P대학 기초수학 교과목 수강학생들이 질문하는 학습내용이나 문제풀이 지도에 대한 연구이므로, 수강학생의 학력수준과 교육환경이 다른 타대학으로 일반화하기에는 약간의 어려움이 있을 수 있다.

둘째, 학생들의 의문사항에 대한 학습지원 과정에서 해당 학생의 선수학습 내용과 학력 수준은 물론, 수업지원조교의 경험과 역량에 따라 질문 내용에 대한 이해도는 차이가 있을 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

2.1 수학과 교수·학습 방법

수학과 교육과정(교과부, 2015)에는 전인교육이 중시되는 인간상 구현을 위해 각 교육의 목적에 따라 수학과 교수·학습 방법을 다음과 같이 제시하고 있다.

첫째, 수학과 수업은 학생의 능력과 수준 등을 고려하여 설명식 교수, 탐구 학습, 프로젝트 학습, 토의·토론 학습, 협력 학습, 매체 및 도구 활용 학습 등을 적절히 선택하여 적용하여야 한다.

둘째, 문제 해결 능력을 함양하기 위해서는 문제를 이해하고 해결 전략을 탐색하며 해결 과정을 실행하고 검증 및 반성하는 단계를 거치도록 하고, 균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 동료들과 협력하여 문제를 해결하도록 한다.

셋째, 추론 능력을 함양하기 위해서는 관찰과 탐구 상황에서 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 의거하여 정당화할 수 있도록 하고, 개념, 원리, 법칙의 도출 과정과 절차를 논리적으로 수행하도록 한다.

넷째, 창의·융합 능력을 함양하기 위해서는 의미 있는 새로운 아이디어를 산출할 수 있는 수학적 과제를 제공하고, 주어진 문제를 여러 방법으로 해결한 다음 서로 비교하여 더 효율적인 방법을 찾도록 한다.

다섯째, 의사소통 능력을 함양하기 위해서는 수학적 표현을 정확히 이해하고 사용할 수 있도록 하며, 수학 학습 과정과 결과를 다른 사람과 효율

적으로 의사소통할 수 있도록 한다.

여섯째, 정보 처리 능력을 함양하기 위해서는 실생활 또는 수학적 문제 상황에서 적합한 자료를 수집하고, 목적에 맞게 정리, 분석하여 평가하며, 분석한 정보를 수학적 문제 상황에 적합하게 활용할 수 있도록 하고, 적절한 교구의 활용 및 탐구 활동을 통해 수학적 개념과 원리를 이해하도록 지도한다.

일곱째, 태도 및 실천 능력을 함양하기 위해서는 수학을 생활 주변, 사회 및 자연 현상 등과 연관하여 지도함으로써 수학의 필요성과 유용성은 물론, 그 역할과 가치를 인식할 수 있도록 한다.

여덟째, 학생의 사고를 촉진시킬 수 있는 다양한 발문을 통해 상호작용이 활발한 환경을 구축하여 학생의 능동적 수업 참여를 독려하고, 학생의 인지 발달과 경험을 고려한 발문에 대한 학생들의 반응 결과를 의미 있게 처리한다.

아홉째, 수준별 수업을 진행하고자 하는 경우, 한 학급 내에서 개인차를 고려한 소집단을 구성하거나 수준별 학급을 구성한다. 수준별 집단을 구성하는 경우, 학생의 개인 능력과 수준, 적성은 물론, 학교의 교육환경도 고려되어야 하며, 수준별 수업은 학습 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 진행하여야 한다.

2.2 튜터링

가. Vygotsky의 근접발달영역

튜터링의 이론적 근거는 Vygotsky의 근접발달영역에서 찾아볼 수 있다. 근접발달영역은 학습자 스스로 문제를 해결할 수 없지만 성인의 안내 또는 친구와 협동을 통해 성공적으로 문제를 해결할 수 있는 영역을 의미한다. 따라서 근접발달영역에 의하면 튜터링 활동을 통해 학습자는 자신보다 앞선 학습자의 도움을 통해 보다 어려운 과제에 대한 학습을 효과적으로 성취할 수 있다(Cheng & Ku, 2009; 송윤희·김성환, 2012, 재인용).

나. 튜터의 정의와 역할

튜터의 사전적 정의는 가정교사 또는 개인 지도교사를 의미하여, 대학의 개별 지도교사를 가리키기도 한다. 튜터제도는 14세기경 영국 옥스퍼드대학과 케임브리지대학에서 시작되어 여러 대학으로 확산되었다. 각 대학에서는 교수조직과는 별도로 졸업생 또는 대학원생 등을 튜터로 정하여 학생들의 연구·수강계획·학생생활 등에 대한 상담이나 지도를 담당하도록 하였다. 주 1회 이상, 일대일 지도를 원칙으로 하였으나, 최근에는 학생 수의 증가로 복수의 학생을 동시에 지도하기도 한다. 지도를 담당한 튜터는 전문가 입장에서 학생의 학습·연구는 물론, 학생생활 전반에 대해 지도하고 조언하도록 하고 있다²⁾(정미연·표용수, 2012).

Harris(1980)는 튜터의 역할에 대해 코치(coach), 해설자(commentator),

2) doopedia 두산백과(2010), http://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/do?_method=view&MAS_IDX=101013000757932

상담자(counselor)로 구분하고 있다(이성아, 2011, 재인용). 즉, 튜터의 역할은 ‘학습자들을 인격적 차원에서 인식하여 학습자들이 해야 할 일들을 대신 해주는 것이 아니라 학습자 스스로 일할 수 있도록 조언하며, 문제를 해결할 수 있는 방향을 제시하는 것이 아니라 문제해결 방법을 스스로 찾을 수 있도록 도와주는 것’이라 할 수 있다.

다. 튜터링 프로그램

국내·외의 여러 대학에서는 교양기초 교과목을 중심으로 교수학습센터나 교육개발센터 등에서 튜터링 프로그램을 운영하고 있다. 국내대학에서는 주로 튜터 1명에 다수의 튜티로 프로그램이 진행되고 있는 반면, 국외대학에서는 튜터와 튜티 간의 일대일 튜터링 방식도 보편적으로 활용하고 있다(이성아, 2011). 대학들은 튜터링 프로그램을 통해 신입생들의 학력수준을 개선하고 중도탈락을 방지하며 동료들 간의 유대감을 강화시키고 궁극적으로 대학교육의 질적 향상을 이루고자 노력하고 있다(송윤희·김성환, 2012).

2.3 선행연구 조사

본 논문의 성공적인 연구 수행을 위해 다음의 선행연구들을 조사하고 분석하였다.

김태수·김병수(2008)는 대학수학의 수준별 수업의 진행 상황과 그 결과를 분석하고 그에 대한 방안을 제시하였으며, 신준국 등(2014)은 고등학교 수학과 학습 부진학생의 학력을 향상시키기 위한 지도방안을 모색하였고 박준식·표용수(2013)는 기초수학 교과목의 수준별 맞춤형 수업 진행과 강

의평가 및 강의 포트폴리오 분석하여 기초수학 교과목 운영 방안을 연구하였다.

또한, 표용수·박준식(2010)은 대학수학 기초학력 부진학생을 위한 기초수학 지도 방안을 제시하였다. 임연휘·표용수(2015)는 수학 기초학력 평가들간의 상관관계를 분석하여 교양수학 교과목의 학습지도 방안을 연구하였고, 표용수·서종진(2011)은 특별 개인지도, 수학카페 운영, Webwork 시스템 활용 등을 토대로 기초수학을 운영하고 수준별 학습지도를 위한 기초수학 학습지도 지침을 제안하였다. 그리고 표용수 등(2010)은 교양수학 교과목의 효율적인 교수-학습지도 방법을 다음과 같이 안내하고 있다.

- ① 강의 첫 시간에 학생실태 설문조사 및 기초학력 진단평가를 실시하고, 학습에 관련된 강의계획과 진행방법에 대하여 자세히 설명한다.
- ② 전시 학습의 복습과 본시 강의에 대한 전반적인 내용을 설명한다.
- ③ 간단한 문제의 풀이로 학생의 수업 참여를 유도한다.
- ④ 다양한 예제를 제시하여 수학의 필요성과 중요성을 인지하게 한다.
- ⑤ 교과내용에 대한 이해와 문제해결력 향상을 위하여 수학카페 방문을 권장한다.
- ⑥ 서술형 문제의 풀이를 통하여 수학의 사고력과 표현방법에 대하여 주지시켜서 각종 지필고사에 대비하도록 한다.
- ⑦ 수학용어에 대한 영어표현과 전반적인 교과내용의 이해를 높일 수 있도록 인터넷 기반의 Webwork 활용과제를 수준별로 부여한다.

황정환(2017)은 수학 기초학력이 부진한 대학 입학예정자를 대학으로 시행하는 기초수학 교과목의 효율적 학습지도 방안을 제시하였고 김희진 등(2011)은 기초학력이 부진한 대학 입학예정자들을 대상으로 기초수학 특강을 수준별로 학급을 편성하여 운영하고 그 결과를 토대로 효율적 기초수학

학습지도 방안과 수준별 학급운영에 대한 유의점 및 개선방안을 연구하였다.



Ⅲ. 교양수학 교육과정 운영

여기서는 P대학에서 효율적인 교양수학 교육과정 운영을 위해 시행하고 있는 기초수학 특강, 수학 진단평가 및 수학카페 운영 등을 소개하고, 그 결과를 분석하였다.

3.1 기초수학 특강

기초수학 특강은 교육환경 변화에 따른 수학교과에 대한 심각한 학력 차를 해소함과 동시에 학생들의 기초학력 향상으로 전공교과에 대한 흥미 유발과 자신감을 부여하기 위하여, 수시모집 합격자(수능고사 수학 가형 3등급 이내는 제외)로부터 수강신청을 받아 운영하고 있다. 2017년의 경우, 1월 초부터 2월 초까지 15일간 진행하였다. 각 분반은 기초학력 진단평가 성적 및 수강학생의 의견(초급반 신청)을 고려하여 7개의 수준별 학급을 편성하여 운영하였다. 이들 학급의 기초학력 진단평가 평균점수와 C^0 이상의 성적을 취득한 기초수학 특강 이수자 현황은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

표에 따르면, 이수인원은 전체 수강인원 173명의 79.2%인 137명이었으며, 미이수인원 36명은 모두 중도에 학업을 포기한 학생으로 나타났다. 그리고 이수자 중에서 A^+ 또는 A^0 학점을 취득한 학생은 36명, B^+ 또는 B^0 학점을 취득한 학생은 70명이었다. 실제로, 중·상위 분반에서는 이수학생 대부분이 B^0 이상의 성적을 취득하였으나, 하위 분반에서는 상당수 학생이 B^0 이상의 성적을 취득하지 못하였다. 특히, 6분반과 7분반에서는 단 한명

도 A^0 이상의 성적을 취득하지 못하여 15일간의 수업만으로 기초학력 향상에는 한계가 있음을 확인할 수 있었다.

초급반인 7반의 경우, 2명의 수업지원조교를 배정하여 학습내용을 축소하면서 매일 4시간 이상의 수업과 문제풀이를 진행하고 수강학생들도 열심히 수업에 임하였음에도 성적평가에 미치는 효과는 미미한 것으로 나타났다. 이는 수업이전의 수학 기초학력이 현저히 부진한 것에 기인하고 있는 것으로 평가하며, 수강학생 스스로는 수학에 대한 관심과 자신감을 갖는 좋은 기회가 되었다고 답하였다.

<표 Ⅲ-1> 분반별 기초학력 진단평가 평균점수 및 이수현황

분반		1분반	2분반	3분반	4분반	5분반	6분반	7분반	전체
수강인원		27	27	25	25	23	23	23	173
진단평가 평균점수		78.1	61.1	48.2	42.3	33.8	24.7	6.8	43.5
평균	가형	4.4	5.1	5.4	4.8	5.6	6.0	7.3	5.2
등급	나형	-	2.0	2.7	2.9	3.4	3.6	5.5	3.6
이수인원		25	22	23	16	18	19	14	137
이수율(%)		92.6	81.5	92.0	64.0	78.3	82.6	60.9	79.2

기초수학 특강 수강학생의 기초수학 특강 강의개선을 위한 설문조사 결과에 따르면, 수준별 학급편성에 따른 맞춤형 학습지도, 발표수업, 과제물 부여 및 대학원생 조교를 통한 문제풀이 등으로 대부분의 학생들은 수학에 대한 관심과 자신감을 갖게 된 것으로 나타났다. 그러함에도, 대학의 오리엔테이션, 재학 중인 고등학교 졸업식 등에 따른 수업결손과 학습의욕 부진 등으로 인한 중도포기 학생에 대한 대책 수립이 요구된다.

3.2 수학 진단평가

2017년 수학 진단평가는 이공계열 입학예정자 전체를 대상으로, 각기 다른 유형의 문제로 2월 중순에 4일간 시행하였다. 다만, 수능고사 수학 가형 성적이 3등급 이내이거나 기초수학 특강에서 B^0 이상의 성적을 취득한 학생은 수학 진단평가 응시를 면제하고 있다. 대상인원 1,939명중에서 873명이 응시하여 수학 진단평가 응시율은 45.0%이었으며, 미적분학 수강학과과의 응시율은 49.1%로 나타났다.

수학 진단평가 합격자 기준은 학과 교수회의에서 미적분영역(43~45만점) 점수가 20점 이상이면서 전체 평가점수(100점 만점)가 45점 이상이거나, 미적분영역 점수가 15~19점이면서 전체 평가점수가 50점 이상으로 결정하였다. 다음 표는 지난 5년간 수학 진단평가 응시율과 합격률을 나타낸 것으로, 합격률은 수학 진단평가 응시자 대비 합격자 수를 배분율로 소수점 둘째자리에서 반올림하였다.

<표 Ⅲ-2> 학년도별 수학 진단평가 응시율 및 합격률

학년도	'13학년도	'14학년도	'15학년도	'16학년도	'17학년도
응시율	73.7	67.5	61.7	61.5	45.0
합격률	58.6	56.6	55.4	47.1	51.4

<표 Ⅲ-2>에서와 같이, 수학 진단평가 응시율이 매년 감소하고 있으며, 2017년의 경우는 그 응시율이 학과별로 많은 차이를 보이면서 급감하였다. 금년의 경우, 고등학교 졸업일자와 수학 진단평가 응시일자가 일부 중복되긴 하였으나, 4일간 시행되는 기간 중에 언제라도 응시하도록 적극 홍보하였기 때문에 응시율 급감의 요인은 아닐 것으로 판단하고 있다. 따라서 소속 학과 조교선생님의 적극적인 협조와 홍보가 요청되며, 낮은 응시율을 감안하여 향후에는 4일간 시행한 수학 진단평가를 3일간으로 축소하는 방

안도 검토하고 있다. 수학 진단평가 시행결과에 따라, 2017년 1학기에는 기초수학및연습 교과목 수강대상자 1,129명을 수준별로 34개 학급으로 편성하였으며, 기타 학급 5개 학급과 함께 39개의 학급으로 운영하였다.

3.3 수학카페

P대학에서는 기초수학및연습, 미적분학, 선형대수 및 경영수학입문 등의 교양수학 교과목을 수강하는 학생들의 수학 문제해결력 향상과 학업성취도 고양을 위하여, 일대일 튜터링 방식의 교양수학 교과목 학습지원 프로그램으로 수학카페를 운영하고 있다. 수학카페에는 계약조교, 교육대학원생 수업지원조교 및 학과 배정 교육지원 장학생 등을 고정 배치하여 수학카페를 방문하는 학생들의 질문에 대한 답변과 과제수행 지도 등으로 교양수학 교과목 학습을 지원하고 있다.

다음 표는 2017학년도 1, 2학기 교양수학 교과목 수강학생들의 수학카페 이용현황을 나타낸 것이다. 이용비율은 (이용횟수/수강인원)의 백분율로 소수점 둘째자리에서 반올림하였다.

<표 Ⅲ-3> 교양수학 교과목별 수학카페 이용현황

과목명	1학기			2학기		
	학급수	수강인원	이용비율	학급수	수강인원	이용비율
기초수학및연습	39	1,243	234.7	4	125	78.4
미적분학	6	137	102.9	36	1,448	142.3
미적분학(1)	8	210	163.3	-	-	-
미적분학(2)	-	-	-	7	237	118.1
선형대수	20	874	155.5	5	245	257.1
경영수학입문	3	137	194.2	2	105	153.3
합계	73	2,601	193.2	54	2,160	149.5

<표 III-3>에서와 같이 2017학년도 1학기 및 2학기, 교양수학 교과목 수강학생 전체에 대한 수학카페 이용비율은 각각 193.2%와 149.5%로 나타났는데, 기말고사가 실시되는 6월과 12월의 수학카페 이용횟수는 각각 전체의 60.5%와 47.8%로 수학카페 이용 편중현상은 심각하였다.

다음 <표 III-4>는 2017학년도 1학기 수학카페 이용횟수에 따른 기초수학및연습 교과목 평균평점과 2학기 미적분학 교과목 평균평점을 나타낸 것이다. 표에서 평균평점은 A^+ 는 4.5점, A^0 는 4.0점, B^+ 는 3.5점, B^0 는 3.0점, C^+ 는 2.5점, C^0 는 2.0점, D^+ 는 1.5점, D^0 는 1.0점, F 는 0점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것이다. 참고로 P대학의 교양과목 상대평가 기준은 A^+ , A^0 , B^+ , B^0 는 수강인원의 70%이하로 하되 A^+ 와 A^0 는 25%이하이어야 하며, D^+ , D^0 및 F 는 10%이상을 필히 평가하도록 하고 있다. 다만, 기초수학및연습 교과목은 수강학생 전체를 대상으로 동일한 기준에 의해 절대평가를 시행하고 있다.

<표 III-4> 수학카페 이용횟수에 따른 평균평점

이용횟수	학생 수	기초수학및연습 평균평점	학생 수	미적분학 평균평점
0	230	1.63	598	2.74
1	81	2.59	309	3.19
2	139	3.04	169	3.24
3회 이상	793	3.47	372	3.45
전체	1,243	3.02	1,448	3.07

<표 III-4>에 따르면, 수학카페 이용횟수와 기초수학및연습과 미적분학 교과목 취득성적의 평균평점은 유의한 상관관계가 있음을 알 수 있다. 이로써, 수학카페 이용횟수는 교양수학 교과목 성적향상에 주요 요인으로 작용하였음을 알 수 있다.

IV. 기초수학 학습지원 방안

여기서는 2017학년도 1학기, 기초수학및연습 교과목 수강학생들이 어려워하는 질문 내용을 단원별로 정리하고, 빈도수가 높은 질문에 대해서 학생의 이해도, 학습지도 내용 및 지도상의 유의점 등을 중심으로 구체적인 학습지원 방안을 제시하였다. 연구자는 P대학의 수학카페 계약조교로 1년간 근무하면서 교양수학 학습지도 자료집(부경대, 2018) 작성의 기초를 마련하였다.

4.1 단원별 주요 질문내용

다음 <표 IV-1>은 수학카페 이용학생들이 자주 질문하는 학습내용이나 과제 및 문제풀이 등을 단원별로 나타낸 것이다.

<표 IV-1> 기초수학및연습 수강학생들의 주요 질문내용

단원명	주요 질문내용
벡터의 이해와 활용	- 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각을 구하는 문제 - 매개변수로 나타내어진 방정식을 이용하여 수선의 발을 구하는 문제 - 내적으로 점과 평면 사이의 거리를 구하는 문제
수열과 무한급수	- 등비수열을 이용한 원리합계 문제 - 특별한 규칙을 가진 무한급수 문제 - 등차수열을 이용한 극한 문제
함수와 연속	- 단사, 전사함수의 차이점 - 조임정리를 이용하는 문제 - 특이한 형태의 역함수를 구하는 문제

	- 삼각함수의 성질을 이용한 문제 - 연속임을 증명하는 문제
미분법과 응용	- 정의를 이용하여 도함수를 구하는 문제 - 미분계수를 이용하여 극한을 구하는 문제 - 로그미분법과 음함수 미분법에 관련된 문제 - 평균값 정리에 대한 이해 - 극값을 구하는 문제
적분법과 응용	- 구분구적법으로 정적분을 구하는 문제 - 치환적분법, 부분적분법과 유리함수 적분법 - 둘러싸인 도형의 넓이, 단면적을 이용한 입체 - 도형의 부피와 회전체의 부피를 구하는 문제

4.2 벡터의 이해와 활용

[질문 1] 좌표공간의 두 점 $A(1, 2, 3)$, $B(4, 6, 2)$ 와 xy 평면 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

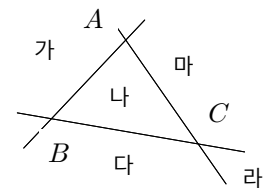
(학생의 이해도) 점 A 를 xy 평면에 대칭시켜 풀이하는 방법을 쉽게 생각하지 못함

(학습지도 내용) xy 평면에 대한 $A(1, 2, 3)$ 의 대칭점 $A_0(1, 2, -3)$ 에 대해서 $\overline{AP} = \overline{A_0P}$ 이므로, $\overline{A_0B}$ 는 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 된다. 따라서 구하려는 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 다음과 같다.

$$\overline{A_0B} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2 + (2+3)^2} = 5\sqrt{2}$$

(지도상의 유의점) $\overline{AP} = \overline{A_0P}$ 이고 $\overline{A_0B}$ 가 왜 최소가 되는지를 자세히 설명한다.

[질문 2] 오른쪽 그림과 같이 세 직선의 교점을 각각



A, B, C 라 할 때, $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = 4\overrightarrow{PC}$ 를 만족하는 점 P 가 속하는 영역을 구하여라.

(학생의 이해도) 두 점의 내분과 외분을 문제에서 적절히 활용하지 못함

(학습지도 내용) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}$ 이므로

$$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CP} + 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CP} = 4\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = 4\overrightarrow{PC} + 3\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$$

이다. 이는 $3\left(\frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{1+2}\right) = \overrightarrow{PC}$ 로 나타낼 수 있고, 따라서 $\overrightarrow{PC}$ 는 $\overrightarrow{CA}$ 와 $\overrightarrow{CB}$ 를 2:1로 내분하는 벡터의 3배이다. 그러므로 P 는 (라)영역에 존재한다.

(지도상의 유의점) 그림을 그려 해당 벡터가 어떻게 (라)에 존재하는지를 설명한다.

[질문 3] 두 벡터 a, b 가 $|a+b| = 11$, $|a-b| = 7$ 일 때, 이들의 내적 $a \cdot b$ 를 구하여라.

(학생의 이해도) 벡터 크기와 내적과의 관계를 정확히 이해하지 못함

(학습지도 내용) $|a+b|^2 = (a+b) \cdot (a+b)$

$$= |a|^2 + 2(a \cdot b) + |b|^2 = 121$$

이고

$$|a-b|^2 = (a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 - 2(a \cdot b) + |b|^2 = 49$$

이므로

$$|a+b|^2 - |a-b|^2 = 4(a \cdot b) = 72 \text{이다. 따라서 } a \cdot b = 18 \text{이다.}$$

(지도상의 유의점) $a \cdot a = |a|^2$ 임을 설명한다.

[질문 4] 벡터의 내적을 이용하여, 마름모 $ABCD$ 의 두 대각선 AC 와 BD 는 서로 수직임을 보여라.

(학생의 이해도) 대체로 증문제제를 어려워하여 회피하려는 학생이 많고, 증명방법을 잘 모르고 있음

(학습지도 내용) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ 라 두면

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{DC} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

이다. 따라서

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\mathbf{b} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2$$

이다. 마름모의 네 변의 크기는 모두 같으므로 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 이다. 즉, 두 벡터는 수직이다.

(지도상의 유의점) 마름모를 그려 두 대각선이 어떻게 표현되는 벡터인지를 설명하고, 내적이 0임을 보인다.

[질문 5] 두 단위벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 일 때, 두 벡터 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.

(학생의 이해도) 내적 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 는 비교적 쉽게 구하고 있으나, 그 이후의 풀이과정은 잘 마무리 하지 못함

(학습지도 내용) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이고

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = 1 + 1 + 1 = 3, \\ |-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2 &= (-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + 4|\mathbf{b}|^2 = 1 - 2 + 4 = 3 \end{aligned}$$

로부터, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{3}$ 이고 $|-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ 이다. 따라서 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 가 이루는 각을 θ 라 두면

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a} + 2\mathbf{b})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}| |-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

이므로, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이다.

(지도상의 유의점) 두 벡터의 크기와 내적을 이용하여, 두 벡터가 이루는

각을 구하는 방법을 여러 예제를 통해 설명한다.

[질문 6] 평면 $\pi: 2x - 3y - z + 9 = 0$ 에 관한 점 $P(-3, 4, 5)$ 의 대칭점의 좌표를 구하여라.

(학생의 이해도) 도형에 관한 문제에서는 문제풀이에 대한 계획단계에서부터 상당한 어려움을 느끼고 있음

(학습지도 내용) 평면의 법선벡터 $\mathbf{n} = (2, -3, -1)$ 이고, 이는 P 에서 내린 수선의 방정식의 방향벡터이다. 따라서 수선의 방향벡터는 $\mathbf{d} = (2, -3, -1)$, 점 $P = (-3, 4, 5)$ 를 지나는 매개변수방정식은

$$x = 2t - 3, y = -3t + 4, z = -t + 5$$

이고, 평면 π 위의 수선의 발 H 는 평면위의 위치하므로

$$2(2t - 3) - 3(-3t + 4) - (-t + 5) + 9 = 0$$

을 만족한다. 따라서 $t = 1$ 이므로 $H = (-1, 1, 4)$ 이다. 한편, 구하려는 대칭점을 $P_2 = (a, b, c)$ 라 두면, H 는 P 와 대칭점 P_2 사이의 이분점이므로

$$(-1, 1, 4) = \left(\frac{-3+a}{2}, \frac{4+b}{2}, \frac{5+c}{2} \right)$$

에서 $a = 1, b = -2, c = 3$ 이고, $P_2 = (1, -2, 3)$ 이다.

(지도상의 유의점) 그래프를 그려 수직인 직선의 방정식과 수선의 발을 구하는 방법을 이해하도록 지도한다.

[질문 7] 점 $Q(2, 1, 1)$ 에서 평면 $x + 2y + 2z = 1$ 에 이르는 거리를 구하여라.

(학생의 이해도) 점과 직선 또는 점과 평면 사이의 거리를 구하는 문제를 어려워하는 학생이 많음

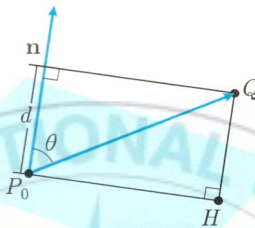
(학습지도 내용) 평면을 지나는 점 P 를 간단히 $P(1, 0, 0)$ 으로 택하면 구하려는 거리는 $d = \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\| \cos\theta$ 이고, 평면의 법선벡터 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 를 이

용하면

$$(Q - P) \cdot n = |Q - P| \cdot |n| \cos \theta$$

$$\text{즉, } d = \frac{(Q - P) \cdot n}{|n|} = \frac{1 + 2 + 2}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{5}{3} \text{ 이다.}$$

(지도상의 유의점) 공식을 무조건 적용하기 보다는 공식 자체를 이해하여 적용할 수 있도록 지도한다.



4.3 수열과 무한급수

[질문 1] 계차수열에 대해 설명하여라.

(학생의 이해도) 계차수열의 정의와 계차수열의 일반항 구하는 법을 잘 이해하지 못함

(학습지도 내용) 수열 $\{a_n\}$ 에서 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)을 항으로 하는 새로운 수열 $\{b_n\}$ 을 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이라고 한다. 이때, 계차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 다음과 같다.

$$a_n = \begin{cases} a_1 & (n = 1) \\ a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k & (n \geq 2) \end{cases}$$

(지도상의 유의점) 원수열의 일반항 a_n 과 계차수열의 일반항 b_n 의 차이에 대해 정확히 설명한다.

[질문 2] 연이율 r 의 복리로 매년 초에 a 원씩 저금한다면, n 년 후 연말까지의 적립금의 원리합계를 구하여라.

(학생의 이해도) 원리합계의 의미를 잘 이해하지 못함

(학습지도 내용) 첫 해에 적립한 a 원의 n 년 후의 원리합계는 $a(1+r)^n$ 원이고, 그 다음 해의 a 원의 원리합계는 $a(1+r)^{n-1}$ 이다.
이와 같이 n 년 동안 적립한 금액의 원리합계를 나열하면

$$a(1+r), a(1+r)^2, \dots, a(1+r)^n$$

이고, 따라서 금액의 총합 S_n 원은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

(지도상의 유의점) 매년 초의 원리합계뿐만 아니라 매년 말의 원리합계에 대해서도 구별하여 설명한다.

[질문 3] 급수 $(1-1) - (1-1) + \dots$ 을 구하여라.

(학생의 이해도) 무한대까지 이어지는 급수의 합을 이해하지 못함

(학습지도 내용) 부분합 $S_1 = (1-1) = 0$
 $S_2 = (1-1) - (1-1) = 0$
 $S_3 = (1-1) - (1-1) + (1-1) = 0$
 $\vdots$

이므로, 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 은 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ 이다.

(지도상의 유의점) 부분합 S_n 이라는 새로운 수열의 극한값이 문제가 요구하는 급수가 된다는 점을 지도한다.

[질문 4] 수열 $1, 11, 111, 1111, \dots$ 의 첫째항부터 n 항까지의 합을 구하여라.

(학생의 이해도) 문제풀이 계획을 제대로 세우지 못하여 시도조차 못하는 경우 또는 풀이를 잘못하는 경우가 많음

(학습지도 내용) $a_1 = \frac{1}{9}(10 - 1), a_2 = \frac{1}{9}(10^2 - 1), \dots, a_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$ 로 표

현할 수 있으므로 $S_n = \frac{1}{9}(10 + 10^2 + \dots + 10^n - n) = \frac{1}{9}\left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right)$

(지도상의 유의점) 수열의 항을 $a_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$ 의 형태로 나타냄을 설명한다.

[질문 5] 올해 초, 은행에서 2,400만원을 빌려, 금년 말부터 매년 일정한 금액을 갚아 12회에 모두 상환하려고 한다. 이때, 한 번에 얼마씩 갚으면 되는가?, 단 대출금과 적금의 연이율은 모두 6%로 1년마다 복리로 하고, $(1.06)^{12}$ 은 2.012로 계산한다.

(학생의 이해도) 원리합계의 의미와 문제풀이에 어떻게 적용할지를 잘 이해하지 못함

(학습지도 내용) 원금 2,400만원에 대한 12년 후의 원리합계는

$$2400(1.06)^{12} = 2400(2.012) = 4828.8 \text{ (만원)}$$

이다. 매년 말에 일정한 금액 a 원을 갚은 다음 마지막에 a 원을 갚는 경우, 대출금을 모두 상환하게 되므로 12년 동안 상환한 원리합계를 나열하면

$$a(1.06)^{11}, a(1.06)^{10}, \dots, a$$

이다. 따라서 상환한 원리합계는

$$S = a + a(1.06) + \dots + a(1.06)^{11} = \frac{a(1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1} = \frac{a(1.012)}{0.06}$$

이고, $\frac{a(1.012)}{0.06} = 4828.8$ 에서 구하려는 금액은

$$a = \frac{4828.8(0.06)}{1.012} \text{ (만원)}$$

(지도상의 유의점) 원리합계와 등차수열의 합을 구하는 방법에 대해 자세히 설명한다.

[질문 6] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ 을 구하여라.

(학생의 이해도) 분수식으로 주어진 식의 합을 잘 구하지 못함

(학습지도 내용) 분자를 수열의 합을 사용하여 $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 고치면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

(지도상의 유의점) 수열의 합을 구하는 방법을 설명한다.

4.4 함수와 연속

[질문 1] 단사함수, 전사함수, 전단사함수를 구별하여 설명하여라.

(학생의 이해도) 각 함수의 차이점을 정확히 이해하지 못함

(학습지도 내용) 함수 $f: A \rightarrow B$ 에 대하여

(1) 단사함수는 임의의 $x_1, x_2 \in A$ 에 대해서, $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수이다. 즉, $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 를 만족하는 함수이다.

(2) 전사함수는 $f(A) = B$ 인 함수로, 임의의 $y \in B$ 에 대해 $y = f(x)$ 를 만족하는 $x \in A$ 가 항상 존재한다.

(3) 전단사함수는 단사이면서 동시에 전사인 함수이다.

(지도상의 유의점) 각 함수의 반례를 통해 이들 함수에 대한 이해를 돕는다.

[질문 2] 삼각함수에 대한 기초개념

(학생의 이해도) 삼각함수의 기초개념에 대한 이해 부족

(학습지도 내용) 삼각함수 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 는 물론, $y = \csc x, y = \sec x, y = \cot x$ 등에 대한 기본 성질과 그래프를 설명하고, 기본공식들을 이해시킨다.

(지도상의 유의점) 삼각비와 삼각함수의 기본 내용부터 설명한다.

[질문 3] $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 을 구하여라.

(학생의 이해도) 조임정리에 대한 이해가 부족함

(학습지도 내용) $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ 이므로, 양변에 x 를 곱한 $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

에서, $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 와 조임정리를 이용하면 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 이다.

(지도상의 유의점) 연속함수에서 조임정리에 대해 설명한다.

[질문 4] 함수 $y = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$ 의 역함수를 구하여라.

(학생의 이해도) 3^x 와 3^{-x} 을 명확히 구별하지 못함

(학습지도 내용) 먼저, x 와 y 를 서로 바꾸면 $x = \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$ 이고, 3^y 을 양변에 곱하여 정리하면 $(3^y)^2 - 2x3^y - 1 = 0$ 이다. 여기서, 근의 공식을 적용하면 $3^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$ 을 만족한다. 3^y 은 양수이므로 $3^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 이다. 이 식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면 구하려는 역함수는 다음과 같다.

$$y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(지도상의 유의점) 근의 공식과 3^{-y} 을 정리하는 방법 그리고 반대로

$y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 의 역함수를 구하는 방법도 같이 지도한다.

[질문 5] 함수 $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기와 최솟값 및 최댓값을 구하여라

(학생의 이해도) 삼각함수의 그래프를 잘 이해하지 못함

(학습지도 내용) $\tan$ 함수의 최솟값과 최댓값은 각각 $-\infty, \infty$ 이다. 그리고 주

어진 함수는 $y = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 이므로, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 의 $\frac{1}{2}$ 배인 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

(지도상의 유의점) $\tan$ 함수의 그래프를 그려서 설명한다.

[질문 6] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{2x}$ 의 극한값을 구하여라.

(학생의 이해도) 식을 제대로 변형하지 못하여 잘 알고 있는 극한을 적용하지 못하고 있음

(학습지도 내용) 한편, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

(지도상의 유의점) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 을 이용하여 극한을 구하는 문제임을 알도록 지도한다.

[질문 7] 함수 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ (단, a_i 는 상수)은 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 에서 연속임을 증명하여라.

(학생의 이해도) 연속함수에 대한 정의와 기본 성질을 정확히 이해하지 못함

(학습지도 내용) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이면

$$f(x) + g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

도 모두 $x = a$ 에서 연속이다. 한편, 다음 각 단항함수

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$$

은 실수 전체 영역에서 연속이므로, 그 합도 연속이다.

(지도상의 유의점) 연속함수에 대한 기본 성질을 같이 설명한다.

4.5 미분법과 응용

[질문 1] 함수 $f(x) = 2x^2 + 1$ 의 도함수를 정의에 의하여 구하여라.

(학생의 이해도) 도함수 정의에 따른 함수의 극한 계산력 부족

(학습지도 내용) 도함수의 정의에 의해, 구하려는 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + 1 - (2x^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = 4x \end{aligned}$$

(지도상의 유의점) 도함수 정의와 그 기하학적 의미를 설명한다.

[질문 2] $f'(1) = 3$ 일 때, 미분계수의 정의를 이용하여 다음 극한을 구하여라.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1+h^2)}{h}$$

(학생의 이해도) 미분계수의 개념을 정확히 알지 못함

(학습지도 내용) 문제에 주어진 식으로부터

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1+h^2)}{h} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2} \cdot h \\ &= 2f'(1) = 6 \end{aligned}$$

(지도상의 유의점) 미분계수에 대한 정확한 이해와 식을 적당한 형태로 변형시킬 수 있는 능력을 지도한다.

[질문 3] 두 함수 $y = x^x$ 와 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 을 미분하여라.

(학생의 이해도) 지수함수로 생각하여 양변에 $\ln$ 을 취하지 않고 미분하는

경우가 많음

(학습지도 내용) 이들 문제에서는 양변에 $\ln$ 을 취하여 미분하도록 지도한다.

$y = x^x$ 에서는 양변에 $\ln$ 을 취하면 $\ln y = x \ln x$ 이므로, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + 1$ 이다. 따라서 $\frac{dy}{dx} = x^x (\ln x + 1)$ 이다.

다음, $y = x^{\frac{1}{x}}$ 의 양변에 $\ln$ 을 취하면 $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$ 이므로, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x$ 에서 $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \ln x \right) = x^{\frac{1-2x}{x}} (1 - \ln x)$ 이다.

(지도상의 유의점) 지수가 상수가 아닌 변수임에 유의할 것을 지도하고 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α 는 실수)와 혼동하지 않도록 설명한다.

[질문 4] 평균값 정리를 이용하여, $x > 1$ 이면 $x - 1 < x \ln x$ 가 성립함을 증명하여라.

(학생의 이해도) 평균값 정리를 이용할 때, x 의 범위와 미분가능 함수 $f(x)$ 를 쉽게 구하지 못함

(학습지도 내용) $x > 1$ 이므로, 구간 $[1, x]$ 에서 함수 $y = \ln x$ 에 대해 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{\ln x}{x - 1} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

를 만족하는 c ($1 < c < x$)가 적어도 하나 존재한다. 즉, $x - 1 = c \ln x$ 를 만족한다. 한편, $c < x$ 이므로 $x - 1 < x \ln x$ 이다.

(지도상의 유의점) 평균값 정리가 성립하는 전제조건을 정확히 이해하도록 지도한다.

[질문 5] $0 < x < \pi$ 일 때, $\sin x > x \cos x$ 가 성립함을 증명하여라.

(학생의 이해도) 증명을 시도하는 방법을 잘 알지 못함

(학습지도 내용) $f(x) = \sin x - x \cos x$ 라 두면

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$$

이므로, 구간 $0 < x < \pi$ 에서 $f(x)$ 는 증가한다. 또한, $f(0) = 0$ 이므로, $0 < x$ 에서 $f(x) > 0$ 이다. 따라서 $\sin x - x \cos x > 0$ 을 만족한다.

(지도상의 유의점) 미분이 양수인 구간에서 증가함수임을 이해하도록 지도한다.

[질문 6] 부피가 $2\pi \text{cm}^3$ 인 원기둥에서 겉넓이가 최소가 되는 반지름의 길이와 높이를 구하여라.

(학생의 이해도) 조건으로부터 식 세우기를 어려워 함

(학습지도 내용) 밑면의 반지름을 x , 높이를 y 라 하면 부피 V 는

$$V = x^2 y \pi = 2\pi$$

이고, 따라서 $x^2 y = 2$ 이다. 이때, 원기둥의 겉넓이

$$f(x) = (2x^2 + 2xy)\pi = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

에서 $f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$ 이므로, $f'(1) = 0$ 이다. 따라서 $x = 1, y = 2$ 이다.

(지도상의 유의점) 부피와 겉넓이를 구하는 식을 세워보도록 설명한다.

[질문 7] 직선 $y = mx$ 를 원점을 중심으로 -45° 회전하여 얻은 직선이 곡선 $y = \ln x$ 에 접할 때, 상수 m 을 구하여라.

(학생의 이해도) $y = mx$ 을 회전한 직선의 기울기를 잘 구하지 못함

(학습지도 내용) $y = mx$ 를 -45° 회전한 직선을 $y = m'x$, $m = \tan \theta$ 라 하면

$$m' = \tan(\theta - 45^\circ) = \frac{\tan \theta - \tan 45^\circ}{1 + \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{m - 1}{m + 1} \text{이다.}$$
 이때, 접점 $(t, \ln t)$ 에서의

접선의 방정식은 $y = \frac{1}{t}(x - t) + \ln t$ 이다. 또한, 이 직선은 원점을 지나므로

$t = e$ 이고 $m' = \frac{1}{e}$ 이다. 따라서 $\frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{e}$, 즉 $m = \frac{e+1}{e-1}$ 이다.

(지도상의 유의점) $m = \tan \theta$ 라 두면 $m' = \tan(\theta - 45^\circ)$ 임과 삼각함수의 가법 정리를 설명한다.

[질문 8] $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 3$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(학생의 이해도) xy 를 곱하여 음함수 미분한다는 생각을 하지 못함

(학습지도 내용) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 3$ 의 양변에 xy 를 곱하면 $y^2 + x^2 = 3xy$ 이고, 양

변을 x 로 미분하면 $2yy' + 2x = 3(y + xy')$ 이므로 $y' = \frac{2x-3y}{3x-2y}$ 를 구한다.

(지도상의 유의점) 식을 간단히 정리한 후, 음함수 미분법을 소개한다.

[질문 9] 미분계수의 정의를 이용하여 다음 극한을 구하여라.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1+h^2)}{h} \quad (\text{단, } f'(1) = 3)$$

(학생의 이해도) 미분계수의 개념을 정확히 알지 못함

(학습지도 내용) 미분계수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1+h^2)}{h} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2} \cdot h \\ &= 2f'(1) = 6 \end{aligned}$$

(지도상의 유의점) 미분계수의 정확한 이해와 식을 적당한 형태로 변형시킬 수 있는 능력을 지도한다.

4.6 적분법과 응용

[질문 1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ 을 구하여라.

(학생의 이해도) 급수의 합을 정적분을 이용하여 구할 수 있음을 잘 이해하지 못함

(학습지도 내용) 구간 $[0, 1]$ 를 n 등분하면, 소구간의 길이는 $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln |1+x|]_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

(지도상의 유의점) 구분구적법 형태의 급수의 합을 정적분으로 구하는 방법을 설명한다.

[질문 2] 다음 부정적분을 구하여라.

$$(1) \int \cos^3 x \, dx \quad (2) \int \sec^2 x \tan x \, dx$$

(학생의 이해도) 치환적분법 적용에 대한 연습 부족

(학습지도 내용) (1) $\sin x = t$ 로 치환하면, $\cos x \, dx = dt$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int (1 - t^2) \, dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

(2) $\tan x = t$ 로 치환하면, $\sec^2 x \, dx = dt$ 이므로

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

부분적분법으로도 구할 수 있음을 보여준다.

(지도상의 유의점) 치환적분법의 활용 방법을 안내하고, 부분적분법으로도 주어진 부정적분을 구할 수 있음을 설명한다.

[질문 3] 다음을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^3 t f(t) dt$$

(학생의 이해도) $\int_1^3 t f(t) dt$ 를 치환하여 문제를 해결하는 방법을 알지 못함

(학습지도 내용) $\int_1^3 t f(t) dt = A$ 로 두면 $f(x) = \frac{1}{x} + A$ 이므로

$$A = \int_1^3 t \left(\frac{1}{t} + A \right) dt = \int_1^3 (1 + At) dt = \left[t + \frac{1}{2} A t^2 \right]_1^3 = 2 + 4A$$

이다. 따라서 $A = -\frac{2}{3}$ 이고 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{3}$ 이다.

(지도상의 유의점) 정적분 $\int_1^3 t f(t) dt$ 는 상수이므로, 적당한 값으로 두고 구할 수 있음을 설명한다.

[질문 4] $\int e^{ax} \cos bx dx$ 를 구하여라.

(학생의 이해도) 부분적분법을 두 번 시행하여야함을 제대로 알지 못함

(학습지도 내용) 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{b} e^{ax} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \right) \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx \end{aligned}$$

이므로

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b^2} (be^{ax} \sin bx + ae^{ax} \cos bx)$$

이다. 따라서 $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$ 를 구한다.

(지도상의 유의점) 경우에 따라, 부분적분법을 반복하여 적용해야함을 설명한다.

[질문 5] $\int \frac{3x}{x^2-9} dx$ 를 구하여라.

(학생의 이해도) 부분분수 분해를 이용한 부정적분법을 정확히 이해하지 못함

(학습지도 내용) $\frac{3x}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$ 라 두면 $A = B = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\int \frac{3x}{x^2-9} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2-9) + C$$

다른 방법으로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

을 이용하여 구할 수도 있다.

(지도상의 유의점) 부분분수를 이용한 적분법을 안내하고, 삼각치환법 등 다른 방법으로도 부정적분을 구할 수 있음을 지도한다.

[질문 6] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(학생의 이해도) 도형의 넓이를 정적분으로 구할 때 함수식과 구간을 어떻게 정할지를 어려워함

(학습지도 내용) 타원의 그래프를 그려보고 정적분으로 넓이를 구한다.

구하려는 도형의 넓이는 정적분 $2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{1-x^2} dx$ 를 구하면 된다.

(지도상의 유의점) 도형의 넓이를 정적분으로 쉽게 구할 수 있음과 삼각치환법을 설명한다.

[질문 7] 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 와 y 축으로 둘러싸인 도형을 x 축의 구간 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 에서 x 축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

(학생의 이해도) 회전체의 부피를 정적분을 이용하여 구하는 방법에 대한 이해 부족

(학습지도 내용) 먼저, 그래프와 계산을 통해 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 두 곡선이 교차함을 보인다. 따라서 구하려는 부피는

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

(지도상의 유의점) 회전체의 부피를 구하는 방법을 이해하도록 설명한다.

[질문 8] 밑면은 반지름이 a 인 원이고 밑면의 한 지름에 수직인 평면으로 잘랐을 때, 단면이 정사각형인 입체도형의 부피를 구하여라.

(학생의 이해도) 입체도형에 대한 이해가 부족하여, 원기둥으로 생각하기도 함

(학습지도 내용) $[0, a]$ 사이의 임의의 x 에서 절단한 정사각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{a^2 - x^2}$ 이므로, 그 넓이는 $4(a^2 - x^2)$ 이고 구하려는 입체의 부피는

$$V = \int_{-a}^a 4(a^2 - x^2) dx = 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3$$

(지도상의 유의점) 절단한 면이 정사각형이 아니라 원기둥으로 생각하는 경우가 있으므로, 이를 유의하여 지도한다.

V. 결론 및 제언

5.1 결론

본 논문에서는 먼저, P대학에 시행하고 있는 기초수학 특강 및 수학 진단평가, 수학카페 운영 등에 대한 결과를 분석하고, 특히 일대일 튜터링 방식의 교양수학 교과목 학습지원 프로그램으로 운영하고 있는 수학카페에서 기초수학및연습 교과목 수강학생들이 종종 질문하는 학습내용이나 문제풀이에 대한 학생의 이해도, 지도내용 및 그 지도상의 유의점 등을 중심으로 수학 기초학력 향상을 위한 효율적 학습지원 방안을 찾아보고자 하였으며, 그 연구결과는 다음과 같다.

첫째, 교양수학 교과목 수강학생 전체에 대한 2017학년도 수학카페 이용 비율은 1학기 193.2%, 2학기 149.5%로 많은 학생이 수학카페를 이용하였으며, 수학카페 이용횟수에 대한 기초수학및연습과 미적분학 교과목 성적의 평균평점을 조사한 결과, 수학카페 이용횟수는 교양수학 교과목 성적향상에 주요 요인으로 작용한 것으로 나타났다.

둘째, 기초수학및연습을 수강하는 학생들은 벡터의 이해와 활용 단원에서 벡터의 성질을 이용하여 크기를 구하거나 두 벡터가 이루는 각을 구하는 유형의 문제들을 어려워하였다. 그리고 매개변수로 표시된 직선의 방정식을 이용하여 수선의 발을 구하는 문제와 내적을 이용하여 점과 평면사이의 거리를 구하는 문제에 대해서도 이해가 부족하였다.

셋째, 수열과 무한급수 단원에서는 등비수열을 이용한 원리합계 문제, 특별한 규칙을 가진 무한급수 문제, 등차수열을 이용한 극한 문제 등을 어려워

위하였으며, 함수와 연속 단원에서는 단사, 전사함수의 차이점, 특이한 형태의 역함수를 구하는 문제, 삼각함수의 성질을 이용한 문제 및 연속을 증명하는 문제 등에 대해서도 정답을 쉽게 구하지 못하였다.

넷째, 미분법과 응용 단원에서는 도함수의 정의를 이용하여 도함수를 구하는 문제와 미분계수를 이용하여 극한을 구하는 문제, 로그미분법과 음함수 미분법을 이용한 문제 등 기본적인 미분법에 관련된 질문들이 많았으며, 평균값의 정리에 대한 이해, 극값을 구하는 문제 등에서도 이해가 부족하였다.

다섯째, 적분법과 응용 단원에서는 구분구적법으로 정적분을 구하는 문제, 치환적분법, 부분적분법과 유리함수 적분법 등과 관련된 문제들과 둘러싸인 도형의 넓이, 단면적을 이용한 입체도형의 부피와 회전체의 부피를 구하는 문제 등의 응용문제에 대해 어려워하였다.

5.2 제언

본 연구의 결과를 토대로, 수학카페에서 기초수학및연습 교과목 수강 학생들이 자주 질문하는 학습내용이나 문제풀이에 대한 효율적 학습지원을 위해 다음과 같이 제안한다.

첫째, 벡터의 이해와 활용 단원에서는, 학생들이 많이 질문하는 내적 관련 문제에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ 과 같은 내적의 성질을 먼저 설명한 다음, 문제풀이를 지도하면 좋을 것이다. 벡터를 이용한 단원이므로 수선의 발을 구하거나 점과 평면사이의 거리를 구하는 등 다수의 문제에서는 그림을 그려 설명하면 학습 내용을 이해하는데 많은 도움을 줄 것이다.

둘째, 수열과 무한급수 단원에서 학생들이 가장 어려워하는 부분이 원리 합계에 관한 문제로 정기적으로 입금한 돈에 대한 이자계산을 어떻게 구하는지 이해시켜야 한다. 그리고 특별한 규칙을 가지는 무한급수 문제는 상황에 따라 아이디어를 요구하는 문제가 많으므로, 다양한 유형의 문제들을 접하도록 하여 문제해결 능력을 향상시키도록 하여야 할 것이다.

셋째, 함수와 연속 단원에서는 여러 함수에 대한 정의와 연속에 대한 개념을 정확히 이해시키도록 한다. 특히, 많은 학생들은 삼각함수를 어려워하고 있는데, 호도법부터 삼각함수 정의와 함께 여러 공식들을 자세히 설명하고 삼각함수 그래프를 이용하여 관심과 흥미를 갖도록 하는 등 각별히 유의하여 지도하여야 할 것이다.

넷째, 미분법과 응용 단원에서는 미분계수와 도함수의 정의를 정확히 이해시키고, 그들이 갖는 기하학적 의미를 알도록 지도하여야 한다. 그리고 많은 학생들이 잘 이해하지 못하는 평균값 정리를 이용하는 문제에서는 미분가능 함수와 범위를 구하는 방법을 여러 예들을 소개하며 세심하게 지도할 필요가 있다.

다섯째, 적분법과 응용 단원에서는 구분구적법을 통해 정적분의 개념을 정확히 이해시키고, 부정적분과의 차이점과 그들 사이의 관련성에 대해 지도하여야 한다. 아울러, 정적분의 응용에 대한 문제에서는 주어진 영역을 시각적으로 나타내어 보여주면 학습내용 이해에 많은 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] 교과부 (2015), 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2015'74호 [별책 8].
- [2] 김태수·김병수 (2008), 대학수학의 수준별 수업에 따른 학업성취도 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 22(3), 369-382.
- [3] 김희진·서종진·표용수 (2011). 대학 입학예정자를 위한 기초수학 수준별 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집 14(3) 343-358.
- [4] 박준식·표용수 (2013), 대학 입학예정자를 위한 기초수학 특강의 학업성취도 분석, East Asian Math. J., 29(2), 395-409.
- [5] 부경대 (2018), 교양수학 학습지도 자료집, 부경대학교 응용수학과.
- [6] 송윤희·김성환 (2012). 대학 튜터링 프로그램이 수학 학습성과에 미치는 영향 -H대학교 사례를 중심으로-, 교과교육학연구 제16권 2호 (2012), 441-459.
- [7] 신준국·윤상인·김양희 (2014). 수학 기초학력 미달자의 수준별 수업에서 효율적인 지도 방법, 수학교육 논문집 28(1), 통권 57호 81-96.
- [8] 이성아 (2011). 대학의 기초수학 튜터 제도 연구. 아주대학교 석사학위논문.
- [9] 임연희·표용수 (2015), 수학 기초학력 평가들 간의 상관관계 분석을 통한 교양수학 교과목 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집, 18(3), 335-352.
- [10] 정미연·표용수 (2012). 개인지도가 대학 교양수학 학업성취도 및 수

- 학적 태도에 미치는 영향, East Asian Math. J., 28(4), 435-451.
- [11] 표용수·박준식 (2010) 대학수학 기초학력 부진학생을 위한 기초수학 지도 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 24(3), 279-296.
- [12] 표용수·조성진·정진문·박진한 (2010), 교양수학 교과목에 대한 효율적 교수-학습지도 방안, East Asian Math. J., 26(2), 319-336.
- [13] 표용수·서종진 (2011), 기초수학 운영에 관한 소고, 한국수학교육학회 제47회 전국수학교육연구대회 <수학교육연구 프로시딩>, 63-67.
- [14] 황정환 (2017). 대학 입학예정자를 위한 기초수학 교과목 학습지도 방안, 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.
- [15] Cheng, Y. & Ku, H. (2009). An investigation of the effects of reciprocal from the field. Educational Technology, 35(1), 22-30.

[부록]

기초수학 특강 기초학력 진단평가 문제

[단답형](각 5점)

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n$ 일 때, 일반항 a_n 을 구하여라.
2. $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{2k(k+1)}$ 을 구하여라.
3. $\sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=2}^m (k-1) \right) = 56$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2)$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n - 7}{4 + 3a_n}$ 을 구하여라.
5. 로그방정식 $\log_2 x = 3 - \log_2(x+2)$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.
6. 삼각함수 $y = 3\cos 2x + 1$ 의 주기와 최댓값을 구하여라.
7. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 을 만족할 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^3 - 1}$ 의 값을 구하여라.
8. 점 $A(1, 2, 3)$ 의 원점에 대한 대칭점을 P , yz 평면에 대한 대칭점을 Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.
9. 두 벡터 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 와 $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 가 이루는 각의 크기를 구하여라.
10. 점 $P(2, 1, -3)$ 를 지나고, 벡터 $\mathbf{n} = (2, -3, 4)$ 에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
11. 평면 $2x - y + az = 4$ 와 직선 $-x = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{2}$ 이 평행이 되도록 a 의 값을 정하여라.
12. 함수 $f(x) = x^3$ 에 대하여, x 의 값이 2에서 $2+h$ 까지 변할 때, 평균변화율이 3인 실수 h 의 값을 구하여라.
13. 함수 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & (x \leq 1) \\ \ln bx & (x > 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분가능일 상수 a, b 의 조건을 구하여라.
14. 함수 $f(x) = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + 1)$ 의 도함수를 구하여라.

15. 부정적분 $\int (x^2 + 2e^{2x}) dx$ 를 구하여라.

16. 직선 $y = x + 6$ 과 포물선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

[서술형](17~18번 각 6점, 19번 8점)

17. (1) 실수의 부분집합 A, B 에 대하여, 함수 $f : A \rightarrow B$ 가 $x = a$ 에서 연속임을 정의하여라. 여기서, A 는 $x = a$ 의 근방을 포함한다.

(2) 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 2) \\ 2x+1 & (x > 2) \end{cases}$ 는 $x = 2$ 에서 연속인지 아닌지를 답하고, 그 이유를 설명하여라.

18. (1) 실수의 부분집합 A, B 에 대하여, 함수 $f : A \rightarrow B$ 가 $x = a$ 에서 미분가능임을 정의하여라. 여기서, A 는 $x = a$ 의 근방을 포함한다.

(2) $f(x) = x^2$ 일 때, $x = 3$ 에서의 미분계수에 대해 설명하여라.

19. (1) 닫힌구간 $[a, b]$ 상에 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여, 정적분 $\int_a^b f(x) dx$ 를 정의하여라.

(2) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ 를 구하고, (3) 그 값의 의미를 설명하여라.