교 육 학 석 사 학 위 논 문

미적분학 교과목에 대한 효율적 학습지원 방안

2019년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

이 수 민

교 육 학 석 사 학 위 논 문

미적분학 교과목에 대한 효율적 학습지원 방안

지도교수 표 용 수

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2019년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

이 수 민

이수민의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2019년 8월 23일

주 심 이학박사 조 성 진 (인)

위 원 교육학박사 서 종 진 (인)

위 원 이학박사 표 용 수 (인)

목 차

표 목차

그림 목차

THE EFFECTIVE LEARNING SUPPORT METHOD OF THE CALCULUS SUBJECT

Su Mim Lee

Graduate School of Education

Pukyong National University

Abstract

The purpose of this study is to propose an effective learning support method for improving the mathematics basic education ability of the students of the calculus course based on the teaching method of the liberal arts curriculum which is being implemented by P University.

In this study, we examined the correlation between students' perception of mathematics subject and attitude, and their mathematical background and academic performance, and analyzed types of errors in the descriptive sentence of the written test. Based on these finding, we proposed an efficient learning support method for the calculus subject.

Ⅰ. 서론

현대는 산업기술과 산업자본 중심의 산업사회에서 정보통신기술과 인적자본 중심의 지식기반 정보화 사회로 변화되면서 보다 다양한 지식과 함께, 기존의 사실적인 지식을 아는 것에서 방법을 알고, 문제해결 방법을 논리적으로 판단하고 규명할 수 있는 비판적 지식을 요구하고 있다. 이에 따라, 대학의 교양교육과정도 과거의 일률적이고 획일적인 틀에서 벗어나, 산업현실과 사회적 수요에 부합하는 전공분야별 특성 및 연계성을 고려한 다양한 형태로 변화되어야 한다. 이러한 측면에서, 이공계열 학생들의 전공분야와 직무수행에 필요한 기본소양 및 기초능력 함양을 위한 대학 차원의 교육과정 개발 및 학습법 개선을 위한 연구가 절실히 요구되고 있다.

1.1 연구의 필요성과 목적

현대 수학은 무정의 용어, 정의, 논리적 규칙에 따르는 연역적 공리 체계와 위계구조로 이루어져 있어 예비지식이 없이는 수학적 개념을 이해하기 어렵다(Swadener & Soedjadi, 1988). Sam과 Ernest(1977)는 이러한 수학을 가르치는 수학교육의 가치로 인식론적 가치, 사회·문화적 가치, 개인적 가치가 있다고 규정하였다. 여기서 말하는 인식론적 가치는 수학 교수·학습의 이론적 측면에 대한 가치이며, 사회·문화적 가치는 사회를 위한 수학교육의 인류 책무를 가리키고, 개인적 가치로는 개별적 학습자로서 영향받는 호기심, 인내심, 창의성 등의 가치를 말한다. 수학 교사는 이러한 수학교육의 가치를 인식하고 효율적으로 학습을 지도할 것인지에 대해 깊이 생각해보아야 한다. (재인용; 김창일·전영주, 2014)

수학 교과는 수학의 원리, 법칙, 개념을 이해하여 다양한 주변 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 합리적으로 해결하고 논리적으로 사고하는 능력과 태도를 기르는 학문이다. 수학 학습을 통해 학생들은 수학 구조의 아름다움과 수학의 규칙성을 음미할 수 있다. 또한 수학의 기능과 지식을 충분히 잘 이용하여 수학 문제뿐만 아니라 다른 교과의 문제와 실생활 문제를 창의적으로 해결할 수 있다. 더 나아가 세계 민주시민으로서 갖추어야 할 민주적 소통 능력과 합리적 의사 결정 능력을 함양할 수 있다(교과부, 2015).

각 대학에서는 고등학교 학생부 성적과 대학수학능력시험(이하 수능고사라 함) 성적을 토대로 다양한 대학입학 전형제도를 도입하여 시행하고 있다. 특히, 교차지원 허용에 따른 수강학생 간의 심각한 학력 차는 대학 교양수학 교육과정 운영에 상당한 어려움을 주고 있어, 많은 대학에서는 대입제도 개선과 교육과정 변경 등에 많은 노력을 기울이고 있다. 실례로, 일부 대학에서는 방학을 이용하여 미적분학 보충수업을 실시하기도 하고, 수학 기초학력 평가를 시행하여 기준을 통과하지 못한 학생들에게는 미적분학의 선수과목으로 기초수학 교과목을 수강하도록 하고 있다(김재웅, 2012).

본 논문에서는 P대학에서 미적분학을 수강하는 이공계열 학생들을 대상으로 효율적인 학습지원 방안을 마련해 보고자 한다. 이를 위하여 강의개선을 위한 설문조사를 실시하여 그 결과와 함께 학업성취도를 분석해보고, 학생들이 학습과정에서 어려워하는 문제들을 분석하여 구체적 문제에 대한 지도상의 유의점과 함께 지필고사 서술형 문항의 문제풀이에 대한 오류 유형을 찾아보고자한다.

1.2 연구내용

본 논문에서는 미적분학 교과목 수강하는 학생들을 대상으로, 학생들의 수학 교과에 대한 인식과 태도 및 수학적 배경 등이 학업성적에 미치는 영향과 지필고사 서술형 문항에 대한 문제풀이 과정에서 나타난 오류 유형은 무엇이며, 유형에 따른 학습지원 개선방안은 무엇인지에 대해 연구하였다.

1.3 연구의 제한점

P대학에서 미적분학 교과목을 수강하는 학생들을 연구대상으로 하였기 때문에 연구결과를 모든 대학의 이공계열 학생으로 일반화하는 데에는 다음과 같은 문제점이 있을 수 있다.

첫째, 각 대학 수강학생들의 기초학력 수준, 교양 및 전공교육과정 운영현황, 교육 시설 등을 포함한 교육 환경이 서로 다를 수 있으므로, 학력수준과 교육여건이 다른 타 대학에 그대로 적용하는 것은 한계가 있다.

둘째, 미적분학 교과목에서는 담당교수에 따라 평가문제가 상이하고 상대평가를 시행하고 있기 때문에, 학생들의 학업성취도를 일률적으로 평가하기에는 어려움이 있을 수 있다.

셋째, 지필고사 답안 작성에 대한 오류 유형을 연구자의 주관적 관점에서 분류하였기 때문에, 동일한 문제풀이에 대해 다른 형태의 오류 유형으로 분류될 수도 있다.

Ⅱ. 연구 배경

2.1. 대학생들의 기초학력 부진

교육학 용어사전[1]에 의하면 기초학력이란 어떤 교육을 받는데 기초적으로 필요한 학습능력을 뜻한다. 어떤 과제를 학습하는데 직접적으로 요구되는 학습능력이 아니라 여러 가지 과제를 학습하는 데 포괄적으로 요구되는 일반적 학습능력을 말한다.

수시모집에 따른 다양한 특별전형과 교차지원 허용 등의 대입전형제도의 도입으로 수학 기초학력 부진 및 학생들 간의 학력 차가 크게 나타나고 있다. 이는 우리사회의 대학교육의 대중화, 보편화와 함께, 과거에 비하여 훨씬 준비가 덜 된 학생들이 대학에 진학하게 되면서 대부분의 대학이 안고 있는 공통된 문제가 되었다. 이에 따라, 각 대학에서는 학생들의 기초학력 수준을 평가하여 학업 능력이 부진한 학생들을 위한 학습지도 방안을 다양하게 모색하여 시행하고 있다.

대학 교양수학은 이공계열 학생들이 전공영역을 성공적으로 이수하기 위한 필수 교과이나 많은 학생들은 수학 기초학력이 부족하여 학습에 상당한 어려움을 느끼고 있다. P대학에서는 수학 기초학력 향상을 위해서, 입학예정자를 대상으로 기초수학특강을 시행하고 수학진단평가를 매년 2월에 실시하여, 기초학력이 부진한 학생에 대해서는 미적분학 교과목의 선수과목으로 기초수학및연습(3시간, 2학점)을 수강하도록 하고 있다. 또한, 교양수학 교과목 수강학생들의 학습을 지원하기 위하여 일대일 학습지도 형식의 수학카페를 운영하는 등 다양한 노력을 하고 있다. 실제로, 기초수학특강에

1) 교육학 용어사전 (2011), 서울대학교 교육연구소, 하우동설, https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=510268&cid=50306&categoryId=50306

참여한 학생들과 미참여 학생들을 대상으로 미적분학 교과목의 성취도를 분석한 결과, 기초수학특강에 참여한 학생들의 성적이 미참여 학생들에 비해 약간 낮게 평가되었으나, 대학수학능력시험 수학영역 취득 성적의 평균 등급을 고려할 경우 기초수학특강에 참여한 학생들이 미참여 학생들에 비하여 수학 기초학력이 더 향상된 것으로 나타났다(박준식·표용수, 2013).

2.2 용어의 정의

교육학 용어사전[2]에는 오류를 '논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 외견상 바르게 보이면서 틀린 추리'라고 정의하고 있으며, 두산백과[3]에서는 '사고의 내용과 대상이 일치하지 않는 사유판단'으로 정의한다. 또한, 철학사전[4]에서는 오류를 '허위' 또는 '참이 아닌 것을 참이라 간주하는 것'을 말하며, 참이 아닌 것과 같은 의미로 사용된다. 본 논문에서의 오류는 서술형 문제풀이 과정에서 나타난 것으로 제한하며, 풀이를 시도하지 않았거나 풀이 과정이 논리적이지 못하는 등 모든 경우를 포함한다. 따라서 우리는 수학적 오류를 수학 문제해결에서 그 문제에 맞는 수학의 용어, 기호, 식, 개념 원리 등을 사용하지 않았거나, 바르게 사용하지 않은 과정으로 정의한다(장민우·표용수, 2016).

2) 교육학 용어사전 (2011), 서울대학교 교육연구소, 하우동설,
https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=511612&cid=42126&categoryId=42126

3) 두산백과,
https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1127993&cid=40942&categoryId=31530

4) 철학사전 (2009), 철학사전편찬위원회 외 30인, 중원문화,
https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=388361&cid=41978&categoryId=41985

2.3 선행연구 고찰

본 연구내용과 관련된 대부분의 선행연구에서는 각 대학의 교양수학 교과목 운영 현황과 그 문제점에 대한 개선방안을 제시하고 있다. 김태수・김병수(2008)는 대학수학의 수준별 수업 결과를 분석하고 대학수학 지도에 대한 방안을 제시하였으며, 구인숙(2009)은 이공계열 대학 신입생들의 수학적 배경이 대학에서 기초수학 교과목 학습에 어떤 영향을 미치는가에 대해 조사하였다. 그리고 김희진・표용수(2011)는 기초수학 교과목에 대한 수준별 수업을 통해 효율적인 교수-학습지도 방안을 모색하였으며, 박준식・표용수(2013)는 기초수학 교과목에 대한 맞춤식 수준별 수업 진행, 강의평가 결과 및 포트폴리오 분석을 기반으로 기초수학 교과목 운영 방안에 대해 연구하였다. 신준국 외 2인(2014)은 교재의 재구성, 수행평가 및 진단평가지, 수업일지 등의 자료를 개발하여 기초학력이 부진한 학생들의 수업에 적용하였다. 아울러, 임연휘・표용수(2015)는 수학 기초학력을 평가한 자료들 간의 상관관계를 분석하여 교양수학 교과목 학습지도에 활용하고자 하였다.

오류 유형에 대한 선행연구에서, 지식의 전개과정에서 범하는 오류에 대해 Radatz(1979)는 언어의 난이성, 공간정보 획득의 어려움, 사전 지식과 기술 습득 결여, 사고의 경직 또는 부정확한 연합, 관련 없는 법칙 또는 전략의 적용 등의 5가지로 구분하였으며, Movshovitz-Hadar 등(1987)은 고등학교 수학 졸업시험에서 범한 오류들을 잘못 사용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 논증되지 않은 해답, 기술적인 오류 등의 6가지로 분류하였다(재인용; 김범석, 2009). 또한, Movshovitz-Hadar 등(1987)은 이스라엘 고등학생들이 졸업시험에서 반복적으로 보이는 경험적인 오류 유형을 ① 잘못 사용된 자

료, ② 잘못 해석된 언어, ③ 논리적으로 부적절한 추론, ④ 왜곡된 정의나 정리, ⑤ 확인하지 않은 해답, ⑥ 기술적인 오류 등으로 분류하였다(재인용; 최영아, 2001).

Ⅲ. 미적분학 교과목 운영 실제

P대학에서는 미적분학 교과목을 매학기 개설하여 다음 사항에 주안점을 두고 지도하고 있다.

3.1 미적분학 교과목 학습 내용

다음 <표 Ⅲ-1>은 미적분학 교과목의 강의계획서로 주별 강의내용을 나타낸 것이다. 교재는 <이공계를 위한 미분적분학, 제3판>(부경대, 2016)을 사용하였으며, 중간고사 이전에는 집합과 함수에 대한 기본개념과 함수의 연속과 미분, 부정적분에 관한 내용을 중심으로, 그 이후는 정적분과 그 성질을 상세히 다룬 다음, 무한급수를 학습하고 다변수함수의 편미분법과 이중적분의 계산 및 응용문제에 대해 지도하였다.

<표 Ⅲ-1> 미적분학 교과목 강의계획서

주별	강 의 내 용	비 고
제 1주	집합, 함수, 초월함수	
제 2주	수열의 극한, 함수의 극한	연습문제 풀이
제 3주	함수의 연속	〃
제 4주	미분계수와 도함수, 미분법의 기본정리, 초월함수의 미분법	〃
제 5주	고계도함수, 평균값의 정리, 부정형의 극한과 근삿값, 함수의 증감과 극값	〃
제 6주	부정적분, 부정적분의 계산	〃
제 7주	유리함수와 무리함수의 부정적분	〃
제 8주	중간고사	
제 9주	정적분의 정의, 정적분의 성질, 정적분의 계산, 이상적분, 정적분의 활용	연습문제 풀이
제10주	무한급수의 수렴과 성질, 급수의 수렴판정법	〃

제11주	멱급수, 멱급수 전개	〃
제12주	다변수함수, 극한과 연속	〃
제13주	편도함수, 고계편도함수	〃
제14주	이중적분의 정의, 비사각영역에서의 이중적분, 이중적분의 응용	〃
제15주	기말고사	

3.2 학습지도 및 평가기준

미적분학 교과목 담당교수는 매시간 수업의 주제를 명확히 설명하며, 구체적인 예를 통하여 추상적인 개념이나 일반화에 자연스럽게 접근할 수 있도록 지도하여 학생들이 수업내용을 쉽게 이해하도록 하고자 하였다. 또한, 중간고사와 기말고사 준비를 위한 과제와 함께, 교재에 수록된 연습문제 풀이 과제를 매주 부여하였다. 아울러, 수학카페를 이용하여 학생들이 제대로 이해하지 못한 학습내용이나 스스로 풀이하지 못하는 문제를 해결하는데 도움을 받도록 하였다.

미적분학 교과목의 성적은 다음 <표 Ⅲ-2>의 평가방법에 의해, 대학에서 정한 상대평가 기준에 따라 평가하였다. 참고로, P대학의 교양과목에 대한 상대평가 기준에 따르면, A^+, A^0, B^+, B^0는 수강인원의 70%이하로 평가하되 A^+와 A^0는 25% 이하이어야 하며, D^+, D^0 및 F는 10% 이상을 필히 평가하여야 한다.

<표 Ⅲ-2> 미적분학 성적 평가방법

중간고사	기말고사	과제물	출 결	합 계
35 %	35 %	20 %	10 %	100 %

3.3 수학카페 운영

P대학에서는 교양수학 교과목인 기초수학및연습, 미적분학, 선형대수 및 경영수학입문 등을 수강하는 학생들의 수학 문제해결 능력 향상과 학업성취도 고양을 위하여 수학카페를 설치하여 운영하고 있다. 수강과목의 학습내용과 관련하여 질문이 있는 학생은 수학카페를 자유로이 방문하여, 대학원생 수업지원조교로부터 학업에 대한 도움을 받도록 하고 있다.

다음 <표 Ⅲ-3>은 2017학년도 1, 2학기 미적분학 교과목 수강학생의 수학카페 이용현황을 나타낸 것으로, 표에서의 이용비율(이용횟수/수강인원)은 소수점 둘째자리에서 반올림하였다. 표에서 보는바와 같이, 2017학년도 미적분학 수강학생들의 수학카페 이용비율은 138.9%로 조사되었다. 다수의 학생들은 수학카페를 이용하여 교양수학의 학습내용에 대한 의문사항을 해결하거나, 선행학습에 대한 부족한 부분을 보충하고 있다.

<표 Ⅲ-3> 미적분학 수강학생 수학카페 이용현황

학기	수강인원(명)	이용횟수(회)	이용비율(%)
1학기	137	141	102.9
2학기	1,448	2,061	142.3
계	1,585	2,202	138.9

Ⅳ. 연구대상 및 절차

4.1 연구대상 및 절차

본 연구에서는 P대학에서 2017학년도 2학기, 미적분학을 수강한 1,448명 중에서 소속 단과대학과 학력수준 등을 고려하여 5학급 195명을 연구대상 선정하였다. 이들의 수학 교과에 대한 인식과 태도 및 수학적 배경 등과 학업성적 간의 상관관계 분석을 통하여, 미적분학 교과목 수강학생들을 위한 효과적인 학습지원 방안을 찾아보고자 하였다. 또한, 미적분학 교과목 학습지원 개선을 위한 자료로 활용하기 위하여, 지필고사 서술형 문항의 오류 유형을 분석하였다.

4.2 연구도구 및 분석방법

이 본문에서는 미적분학 교과목을 수강하여 유효학점을 취득한 195명을 대상으로 수학교과에 대한 인식과 태도, 세부 학습내용별 이해도, 수강학생들이 어려워하는 학습내용, 강의평가 설문조사 결과 및 미적분학 수업에 대한 건의사항 등을 통하여 효율적 미적분학 교과목 학습지원 방안과 운영에 대한 유의점 및 그 개선방안을 제안하였다. 또한, 연구대상 학생 195명의 수학 교과에 대한 인식 및 태도와 미적분학 교과목 취득성적간의 상관관계를 통계프로그램 SPSS를 사용하여 서로간의 어떠한 영향이 있는지 알아보았다.

그리고 미적분학 교과목 수강학생들이 자주 질문하는 내용들을 세부 학

습내용별로 어떤 것이 있는지 알아보고, 일부를 선정하여 그에 대한 학습 지원 방안을 제시하였다. 아울러, 미적분학 교과목 지필고사의 서술형 문항에 대한 풀이과정에서 연구대상 학생들이 어떤 유형의 오류를 범하고 있는지를 조사하였다. Movshovitz-Hadar 등(1987)의 오류 유형 분류에 기초하여 김옥경(1991)이 분류한 오류 유형을 이용하여, ① 오용된 자료, ② 잘못 해석된 언어, ③ 논리적으로 부적절한 추론, ④ 곡해된 정리 또는 정의, ⑤ 요구되지 않은 해답, ⑥ 기술적인 오류, ⑦ 풀이과정의 생략 등으로 오류 유형을 구분하였다. 하나의 문제 풀이 과정에서 나타난 오류 유형이 다수인 경우는 연구자의 주관적인 판단에 따라 가장 핵심이 된다고 생각하는 유형으로 분류하였다.

Ⅴ. 설문조사 및 학업성취도 분석

본 연구에서는 먼저, 연구대상 학생들의 수학 교과에 대한 인식과 태도 및 수학적 배경 등이 학업성적에 미치는 영향을 알아보기 위하여 미적분학 교수-학습법 개선을 위한 설문조사(부록 참조)를 실시하였다. 설문조사에는 수강학생 195명이 참여하였는데, 이들 중에서 일반계 고등학교 인문계열 졸업생이 18명, 자연계열이 전체의 89.7%인 175명, 전문계 또는 특수고 출신 학생은 2명이었다. 또한, 대학수학능력시험에서 수학 가형에 응시한 학생은 151명, 나형 43명, 미응시는 1명이었다. 즉, 수강학생들은 대부분은 일반계 고등학교 자연계열을 졸업한 수학 가형 응시자이었다.

5.1 수학 교과에 대한 인식과 태도

다음 <표 Ⅴ-1>은 설문조사에 참여한 학생들이 수학에 대한 인식과 태도를 묻는 문항에 응답한 결과를 정리한 것이다. 표에서의 평균은 ‘아주 그렇다’ 5점, ‘그렇다’ 4점, ‘보통이다’ 3점, ‘그렇지 않다’ 2점, ‘전혀 그렇지 않다’는 1점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것으로 소수 셋째자리에서 반올림하였다. 표에서와 같이, 학생들은 “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.”에서는 ‘아주 그렇다’와 ‘그렇다’에 69.2%인 135명이 답하였으나, “수학에 흥미를 가지고 있다.”와 “문제를 풀기 위해서 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.”에서는 각각 43.6%인 85명, 36.4%인 71명이 답하여 수학 학습에 대한 흥미와 문제해결에 대한 노력은 부족한 것으로 나타났다. 특히, “수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.”고 답한 학생은 31.3%인 61명에 불과하였다.

<표 V-1> 수학에 대한 인식과 태도에 대한 설문조사 결과

문항	내 용	아주 그렇다	그렇다	보통 이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다	평균
1	나는 수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.	43	92	40	15	5	3.78
2	나는 수학에 흥미를 가지고 있다.	28	57	70	33	7	3.34
3	수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.	20	69	64	36	6	3.31
4	나는 수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.	13	48	86	42	6	3.10
5	나는 수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다.	17	52	61	52	13	3.04
6	문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.	19	52	89	33	2	3.27

그리고 다음 <표 V-2>는 수강학생들의 수학에 대한 인식과 태도에 따른 미적분학 교과목의 취득성적을 나타낸 것이다.

<표 V-2> 수학에 대한 인식과 태도에 따른 미적분학 취득 성적

문항	내 용	아주 그렇다	그렇다	보통 이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.	3.43	3.34	2.94	2.90	2.80
2	나는 수학에 흥미를 가지고 있다.	3.52	3.33	3.24	2.86	2.86
3	수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.	2.58	3.15	3.26	3.74	2.92
4	나는 수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.	2.85	3.45	3.35	2.93	2.67
5	나는 수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다.	3.03	3.18	3.25	3.32	3.23
6	문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.	2.66	3.39	3.33	3.00	3.50

<표 V-2>의 성적은 A^+는 4.5점, A^0는 4.0점, B^+는 3.5점, B^0는 3.0점, C^+는 2.5점, C^0는 2.0점, D^+는 1.5점, D^0는 1.0점, F는 0점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것이다. 전체 학생이 취득한 평균평점은 3.29이었다.

다음 <표 Ⅴ-3>은 통계프로그램 SPSS 23을 이용하여, 연구대상 학생들의 수학 교과에 대한 인식 및 태도와 미적분학 교과목 취득성적간의 상관관계를 구한 결과이다. 표에 따르면, 문항 1인 “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.”와 문항 2인 “수학에 흥미를 가지고 있다.”는 유의수준 1%범위에서 미적분학 교과목 취득성적과 통계적으로 유의한 양의 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 반면에, 문항 3인 “수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.”에서는 유의수준 1%범위에서 취득성적과 유의한 음의 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 이는 수학 시험이 항상 어렵다고 생각하는 학생들의 취득성적이 낮았음을 의미한다. 한편, 문항 4인 “수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.”와 문항 5인 “수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다.”와 문항 6인 “문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.”는 미적분학 교과목 취득성적과는 특별한 상관관계가 없는 것으로 나타났다.

<표 Ⅴ-3> 수학에 대한 인식 및 태도와 미적분학 성적간의 상관관계

구분	문항 1	문항 2	문항 3	문항 4	문항 5	문항 6
Pearson 상관계수	.208**	.208**	-.254**	.119	-.070	-.040
유의확률 (양측)	.003	.003	.000	.099	.328	.575
** 상관관계가 0.01 수준에서 유의합니다(양측).						
* 상관관계가 0.05 수준에서 유의합니다(양측).						

또한, 미적분학 교과목 학습에서 어려움을 묻는 문항(복수응답 가능)에서는 증명문제 94명(48.2%), 기초개념 이해 부족 70명(35.9%), 문제에 대한 이해 부족 64명(32.8%), 문제풀이 계산 실수 56명, 학습량 과다 34명과 선행학습 부족 23명 등의 순으로 답하였다. 실제로, 연구대상 학생들은 수학에 대한 기초개념 이해가 많이 부족한 것으로 나타났고, 익숙하지 않은 증명문제에 대해 어려움을 느끼고 있었다.

5.2 세부 학습내용별 학생의 이해도

다음 <표 V-4>은 미적분학 교과목 세부 학습내용별 이해도에 대한 학생들의 응답 결과를 나타낸 것이다. 표에서의 평균은 '잘 이해하고 있다' 5점, '이해하고 있는 편이다' 4점, '보통이다' 3점, '조금 이해하고 있다' 2점, '전혀 이해하지 못한다'는 1점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것으로 소수 셋째자리에서 반올림하였다. 전체 학습내용에 대한 평균은 3.28점이었다. 표에서와 같이, 고등학교 수학교육과정에서 일부 내용에 대해 학습한 집합, 극한과 연속, 함수의 미분법과 적분법 등은 비교적 이해하고 있는 것으로 나타났으나, 대학에서 처음 접하는 다변수함수와 편미분법, 무한급수와 멱급수, 이중적분 등에 대해서는 한 학기 동안 공부하였음에도 다수의 학생들은 잘 이해하지 못하고 있다고 답하였다.

<표 V-4> 학습내용 이해에 대한 설문조사 결과

세부 학습내용	잘 이해하고 있다	이해하고 있는 편이다	보통이다	조금 이해하고 있다	거의 이해하지 못한다	평균
집합, 극한과 연속	32	94	54	12	3	3.72
함수의 미분법	35	108	43	6	3	3.85
미분법의 응용	25	82	66	17	5	3.54
부정적분	32	75	60	23	5	3.54
정적분과 그 응용	22	59	61	38	15	3.18
무한급수와 멱급수	9	37	72	57	20	2.78
다변수함수와 편미분법	14	43	57	52	29	2.80
이중적분, 반복적분과 응용	15	46	59	44	31	2.85

5.3 학생들이 어려워하는 학습내용

다음의 <표 V-5>는 미적분학 교과목 수강학생들이 학습내용이나 문제풀이 과정에서 어렵다고 응답한 내용을 세부 학습내용별로 나타낸 것으로, (   )는 응답자 수이다. 표에 따르면, 학생들은 대체로 대학에서 처음 접하는 수학용어나 기초개념 및 문제풀이 등에 어려움을 느끼고 있으며, 계산이 복잡한 문제와 관련 정리나 공식을 제대로 적용하지 못하는 경우도 있는 것으로 나타났다.

<표 V-5> 학생들이 어려워하는 학습내용

세부 학습내용	학습내용이나 문제풀이 과정에서 어려웠던 내용
집합, 극한과 연속	극한과 연속에 대한 형식적 정의(6)
함수의 미분법	삼각함수의 미분법(2), 음함수 미분법(1), 역함수 미분법(2) 로그미분법(1), 고계도함수 계산(1)
미분법의 응용	평균값 정리의 활용(2), 함수의 극값 구하기(1)
부정적분	부분적분법(1), 유리함수, 무리함수 적분과 삼각치환법(4)
정적분과 그 응용	정적분의 범위 결정(1), 입체의 부피 계산(3), 이상적분에 대한 이해(2)
무한급수와 멱급수	비교판정법의 비교대상(2), 적절한 판정법 활용(2) Taylor 다항식 이해(1)
다변수함수와 편미분법	다변수함수의 극한과 연속(2), 편미분법에 대한 이해(3) 편미분법 계산 부족(1)
이중적분	이중적분에서의 범위 결정(5), 적분의 변수변환(3)

5.4 강의평가 결과

다음 <표 V-6>은 강의 종료 후, 수강학생들을 대상으로 온라인을 통해 대학본부에서 시행한 미적분학 교과목 강의평가 결과를 나타낸 것이다. 강

의평가에는 연구대상 학생 195명이 모두 참여하였으며, 표에서의 평균은 항목별로 '매우 그렇다' 5점, '그렇다' 4점, '보통이다' 3점, '그렇지 않다' 2점, '매우 그렇지 않다'는 1점으로 평가하여, 그 평균점수를 나타낸 것이다.

<표 V-6> 미적분학 교과목 강의평가 결과

항 목	평균	전체 평균
1. 학습준비와 수강태도	4.17	4.36
2. 수업내용 평가	4.30	4.38
2-① 강의목표의 명확성	4.24	-
2-② 강의의 충실성	4.65	-
2-③ 평가의 공정성	4.29	-
2-④ 지적능력 향상성	4.07	-
2-⑤ 강의운영의 적절성	4.27	-
3. 강의만족도	4.07	4.21

학생들의 강의평가 평균은 교양과목의 전체 평균점수에 비해 약간 낮은 편이지만, 이공계열 학생이 어려워하는 수학 교과라는 측면에서는 양호한 것으로 평가한다. 실제로. 수강학생들의 강의만족도 4.07는 전체 평균 4.21에 비해 부족하였지만, 수업내용 평가에서의 평균점수 4.30는 전체 평균 4.38과 거의 비슷하였다. 이러한 결과는 강의를 시작할 때 본 수업시간의 주제를 명확히 설명하고, 처음 접하는 학습내용에 대해서는 구체적인 예와 문제풀이를 통해 그 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 반복하여 지도하였기 때문으로 생각한다. 또한, 인터넷 기반의 Webwork 과제 수행과 수학카페 이용도 수업내용의 이해에 많은 도움이 되었던 것으로 나타났다.

다음의 <표 V-7>은 수학카페 이용횟수에 따른 미적분학 교과목 취득성적을 평균평점으로 나타낸 것이다. 표에 따르면, 미적분학 교과목 취득성적은 다양한 요인에 의해서 결정되지만 수학카페 운영은 학생들의 학업성취

도 향상에 많은 도움을 주고 있음을 보여준다. 한 학기 동안 수학카페를 가장 많이 이용한 학생은 3명이 각각 11회, 13회, 15회를 이용하였다.

<표 V-7> 수학카페 이용횟수에 따른 취득 성적

이용횟수	0회	1회	2회	3-4회	5회 이상	계
대상인원	64	14	32	62	23	195
평균평점	2.82	3.54	3.30	3.31	3.85	3.23

5.5 미적분학 수업에 대한 건의사항

미적분학 수업에 대한 건의사항에서 학생들은 학습량이 너무 많고 처음 배우는 내용이 대부분으로, 강의 속도가 빠르다(15명), 후반부의 학습내용이 어려워 자세한 반복 설명 필요하다(10명), 기초가 부족하여 학습에 어려움이 많다(3명), 중간고사에 비해 기말고사 범위가 많아 시험 준비가 어렵다(2명) 등의 순으로 응답하였다. 사실, 미적분학 교과목은 한 학기 강의로는 그 내용이 다양하고 학습량이 많으며, 새로운 내용이 많아 학습에 어려움이 있었을 것으로 판단한다.

교재에 대해서는 내용이 어려우며, 교재의 연습문제에 대한 완전한 풀이과정을 수록하면 좋겠다(7명), 교재의 일부 내용에 대한 수정・보완이 필요하다(4명), 고등학교 수학교육과정에서 배우지 않은 내용이 많다(2명), 교재의 기초개념에 대한 설명이 부족하다(2명) 등의 의견이 있었다. 이 중에서 연습문제에 대해 정답만 교재에 수록한 것은 학생 스스로 문제를 풀이하도록 독려하기 위함이며, 고등학교 수학교육과정 개정에 따라 지속적으로 교재를 수정・보완하고 있음을 제대로 인지하지 못한 답변도 있었다.

Ⅵ. 미적분학 학습지원 및 오류 유형 분석

다음의 <표 Ⅵ-1>은 수학카페를 이용한 미적분학 교과목 수강학생들이 자주 질문하는 내용들을 세부 학습내용별로 정리한 것이다. 이를 토대로. 학생들의 질문에 대한 학습지원 방안과 미적분학 교과목 지필고사 서술형 문항에서 학생들이 자주 범하는 오답의 오류 유형을 분석하였다.

<표 Ⅵ-1> 수학카페에서 학생들이 자주 질문하는 학습내용

세부 학습내용	수학카페 이용학생들의 질문 내용
집합, 극한과 연속	극한과 연속의 정의
함수의 미분법	삼각함수의 미분법, 역함수 미분법
미분법의 응용	평균값 정리의 활용문제
부정적분	삼각치환법, 유리함수 무리함수 적분법
정적분과 그 응용	평면도형의 넓이, 입체도형의 부피 계산
무한급수와 멱급수	급수의 다양한 수렴판정법, Taylor 다항식 이해
다변수함수와 편미분법	다변수함수의 정의, 다변수함수의 극한과 연속 편미분에 대한 이해, 편미분 계산
이중적분	이중적분의 계산, 극좌표를 이용한 이중적분의 계산

6.1 질문내용에 대한 학습지원

수학카페를 이용하는 학생들이 자주 질문하는 학습내용이나 문제풀이 중에서 일부를 선정하여 그에 대한 학습지원 방법을 다음과 같이 제시한다.

[질문 1] 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=1$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}$를 구하여라.

(학생의 이해도) 식을 변형하는 방법을 잘 도출하지 못함

(지원내용 및 유의점) 미분의 정의에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(a+3h)-f(a)\}+f(a)-f(a-2h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \\ &= 3f'(a)+2f'(a)=5\end{aligned}$$

이다. 먼저 미분의 정의를 상세히 설명하고, 이와 같은 문제의 유형과 유사한 예들을 소개하여 이해를 돕도록 한다.

[질문 2] $x, y\in\mathbb{R}$에 대하여 $|\sin x-\sin y|\le |x-y|$임을 평균값의 정리를 이용하여 증명하여라.

(학생의 이해도) 평균값 정리를 적용방법을 잘 알지 못함

(지원내용 및 유의점) $x = y$이면 $0\le 0$으로 주어진 부등식을 만족하므로, $x\neq y$일 때. $\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le 1$이 성립함을 증명하면 된다. 한편, 함수 $f(x)=\sin x$는 구간 $[y, x]$ $(y<x)$에서 평균값 정리의 가정을 만족하므로

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \cos c$$

를 만족하는 c $(y<c<x)$가 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right| = |\cos c|\le 1$$

이다. 문제풀이에 앞서 평균값 정리에 대해 상세히 설명하고, 문제의 유형에 따라 어떻게 평균값 정리를 적용해야하는지를 설명한다.

[질문 3] 치환적분법과 부분적분법에 대해 설명하여라.

(학생의 이해도) 치환적분법과 부분적분법에 대한 이해와 그 활용에 익숙하지 못함

(지원내용 및 유의점) $g(x)=u$로 치환하면 $g'(x)dx=du$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$$

로 변형하여 적분하는 방법을 치환적분법이라 한다. 그리고 $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능하면

$$\{f(x)g(x)\}'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

이므로, 양변을 x에 관해 적분하면

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

이다. 이를 이용한 적분 방법을 부분적분법이라 한다. 이들은 부정적분을 구하는데 자주 사용되는 유용한 방법임을 언급하고, 특히 치환적분법에서는 원래의 변수로 반드시 돌려놓아야 함을 강조한다. 더불어 문제의 유형에 따라 어떤 적분법을 적용해야하는지를 안내한다.

[질문 4] 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$의 수렴반경과 수렴역을 구하여라.

(학생의 이해도) 멱급수의 수렴역, 수렴반경의 정의에 대한 이해가 부족하며 그 활용에 익숙하지 못함.

(지원내용 및 유의점) 주어진 멱급수에서 수열의 일반항을 $a_n=(-1)^n\frac{x^n}{n}$이라 두면

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=1$$

이므로, 수렴반경은 1이다. 따라서 $|x|<1$이면 주어진 멱급수는 수렴하고, $|x|>1$일 때는 발산한다. $x=1$이면 주어진 멱급수는 $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$ 이므

로, 교대급수판정법에 의해서 수렴한다. 또한 $x=-1$인 경우, 대응하는 멱급수가 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 이므로 주어진 멱급수는 발산한다. 따라서 수렴역은 $-1<x\leq 1$이다. 문제풀이에 앞서 멱급수의 수렴역과 수렴반경의 정의를 자세히 설명하고, 수렴반경을 만족하는 경계점에 대해서 별도로 다루어야 함을 강조한다. 아울러, 유사한 예들을 소개하여 이해를 돕도록 한다.

[질문 5] 가로와 세로의 길이가 $3m/\sec, 2m/\sec$의 속도로 커지는 직사각형의 도형이 있다. 가로와 세로의 길이가 각각 $10m, 15m$일 때, 이 도형의 넓이가 커지는 속도를 구하여라.
(학생의 이해도) 여러 가지 변수로부터 식을 세우는 것에 대한 어려움과 편미분에 대한 이해가 부족함
(지원내용 및 유의점) x, y, S, t를 각각 가로, 세로, 넓이 및 시간을 나타내는 변수라 하자. 여기서

$$x=10,\ y=15,\ \frac{dx}{dt}=3,\ \frac{dy}{dt}=2$$

일 때, $\frac{dS}{dt}$를 구하는 문제이다. 한편, $S=xy$이므로

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}=3y+2x$$

이다. 따라서 $x=10, y=15$일 때, $\frac{dS}{dt}=3\cdot 15+2\cdot 10=65$이므로, 주어진 도형의 넓이는 $65m^2/\sec$의 속도로 증가한다. 넓이 및 시간을 나타내는 변수에 대한 활용에 대해 자세히 언급하고, 그밖에 자주 사용하는 변수들의 의미에 대해서도 소개한다. 또한 이변수함수는 물론, 일반적인 다변수 함수의 편미분에 대해서도 설명한다.

[질문 6] $D=\{(x,y)\,|\,y\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$일 때, 이중적분 $\iint_D \sin(x^2)dxdy$를 구하여라.

(학생의 이해도) 이중적분 계산이 어려운 경우, 적분 순서와 구간을 변경하여 간단히 구할 수 있음을 이해하지 못함

(지원내용 및 유의점) 주어진 이중적분의 범위는

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$$

로 나타낼 수 있으므로, 구하려는 값은

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_y^1 \sin x^2 dx\,dy &= \iint_D \sin x^2 dxdy\\ &=\int_0^1\int_0^x \sin x^2 dy\,dx\\ &=\int_0^1 \left[y\sin x^2\right]_0^x dx=\left[-\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1)\end{aligned}$$

이다. 그래프를 이용하여, 적분 순서 및 구간 변경에 대해 자세히 설명하고 유사한 예들을 소개하여 이해를 돕도록 한다.

6.2 서술형 문항에 대한 오류 유형 분석

여기서는 미적분학 교과목의 중간고사와 기말고사에서 수강학생들이 자주 범하는 오답에 대한 오류를 오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적적한 추론, 곡해된 정리 또는 정의, 요구되지 않은 해답, 기술적인 오류, 풀이과정의 생략의 7가지 유형으로 분류하고, 그에 적합한 학습지원 방안을 찾아보고자 하였다.

가. 오용된 자료의 예

다음 <그림 Ⅵ-1>은 오용된 자료의 예시이다. 왼쪽에 제시된 학생의 답안은 문제에서 요구하는 넓이를 구하는 풀이 과정에서 관련 없는 π를 곱하여 계산하였고, 오른쪽 답안을 작성한 학생은 문제에 주어진 $\sin^{-1}(xy)$의 미분을 구하지 못하여 $\cos(xy)$라 두고 문제를 풀이한 것으로 보인다.

다음 식으로 주어지는 사이클로이드의 한 호와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라. $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$	다음에 주어진 함수의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라. $\sin^{-1}(xy) + y = 0$
$dx = (1-\cos\theta)\,d\theta$ $r=1$ $\pi\int_0^{2\pi} y\,dx$ $= \pi\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\,d\theta$ $\quad \frac{1+\cos 2x}{2}$ $= \pi\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\,d\theta$ $= \pi\left[\theta - 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$ $= \pi(2\pi + \pi) = 3\pi^2$	$\cos(xy) + y = 0$ $-\sin(xy)\cdot\left(y + \frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$ $(1-\sin(xy))\frac{dy}{dx} = \sin(xy)\cdot y$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(xy)\cdot y}{1-\sin(xy)}$

<그림 Ⅵ-1> 오용된 자료의 예시

이들은 문제와 관련된 기초개념을 완전히 이해하지 못한 경우이다. 이들에게는 기초개념부터 자세히 설명해야 하며, 그와 유사한 예들을 소개하여 문제에 어떻게 활용되는지 알려주어야 한다.

나. 잘못 해석된 언어의 예

다음 <그림 Ⅵ-2>는 잘못 해석된 언어의 예를 나타낸 것이다. 왼쪽 답안을 작성한 학생은 문제에서 주어진 수학적 용어인 중간값 정리를 평균값 정리로 잘못 해석하여 문제를 풀이한 경우이고, 오른쪽 답안을 작성한 학생은 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 풀지 않고, 바로 미분공식을 사용하는 오류를 범하였다.

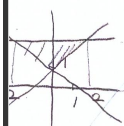
방정식 $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x=0$은 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 사이에 적어도 하나의 실근을 가짐을 사이값 정리를 써서 증명하여라.	$f(x)=\frac{1-x}{2+x}$일 때, 미분계수의 정의를 이용하여, $f'(2)$를 구하여라.
$f(x)=(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x$라 하면 $f(x)$는 $[0,\frac{\pi}{2}]$에서 연속 $(0,\frac{\pi}{2})$에서 미분가능함으로 평균값 정리 조건을 만족한다. 따라서 $f(0)=-1+0<0$ $f(\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi^2}{4}-1)\cdot 0+\sqrt{2}>0$ 임으로 $(0,\frac{\pi}{2})$ 사이에 적어도 하나의 실근을 가진다.	$f'(x)=\frac{-(2+x)-(1-x)}{(2+x)^2}=\frac{-2-x-1+x}{(2+x)^2}=\frac{-3}{(2+x)^2}$ $f'(2)=\frac{-3}{(4)^2}=\frac{-3}{16}$

<그림 Ⅵ-2> 잘못 해석된 언어의 예시

이러한 경우는 두 학생 모두 각 문제에서 제시된 정리 및 정의에 대한 기초개념에 대한 이해가 부족한 경우이다. 이들에게는 반복지도와 다양한 문제의 연습을 통해 개념을 충분히 이해하고 활용할 수 있도록 지도하여야 할 것이다.

다. 논리적으로 부적절한 추론의 예

다음의 <그림 VI-3>, <그림 VI-4>는 논리적으로 부적절한 추론의 예시이다. 세 답안은 모두 문제에서 주어진 영역을 잘못 유도된 영역을 이용하여 풀이하였다. 이중적분 단원 중 적분의 영역을 정하는 문제에서 가장 많이 나타나는 실수이기도 하다. 실제로, 이 부분은 학생들이 수학카페에서 질문한 내용 중 높은 비율을 차지하였다. 이 경우는 반복적분의 영역을 정확히 이해하고 설정할 수 있도록 그래프를 이용하여, 적분 순서 및 구간 변경에 대해 자세히 설명해야할 것이다. 또한, 많은 학생들이 어려워하는 부분인 만큼 충분히 유사한 문제들을 연습할 기회를 주어야할 것이다.

세 직선 $y=-x+1$, $y=x+1$, $y=3$에 의해 둘러싸인 유계인 닫힌 영역 D상에서 이변수함수 $f(x,y)=2x-y^2$의 이중적분을 구하여라.	$x^2+y^2=9$와 $y+z=9$, $z=0$에 의해 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라.
 $\int_{-2}^{2}\int_{1}^{3}(2x-y^2)\,dy\,dx$ $=\int_{-2}^{2}\left[2yx-\frac{1}{3}y^3\right]_1^3 dx$ $\quad -9+\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$ $=\int_{-2}^{2}\left((6x-9)-(2x-\frac{1}{3})\right)dx$ $=\int_{-2}^{2}(4x-\frac{26}{3})\,dx$ $=\left[2x^2-\frac{26}{3}x\right]_{-2}^{2}$ $=2(4-4)-\frac{26}{3}(2+2)$ $=-\frac{26}{3}\times 4=\frac{-104}{3}$	$z=9-y$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ $=9-r\sin\theta$ $\quad 0\le r\le 3$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3(9-r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$ $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3(9r-r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta$ $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3\sin\theta\right]_0^3 d\theta$ $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{81}{2}-9\sin\theta\right)d\theta$ $=\left[\frac{81}{2}\theta+9\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ $=\frac{81}{2}\pi$

<그림 VI-3> 논리적으로 부적절한 추론의 예시(1)

적분순서를 바꾸어 $\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)dydx$를 구하여라.

$$\begin{pmatrix} x \le y \le \sqrt{\pi} \\ 0 \le x \le \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \Downarrow \begin{pmatrix} y \le x \le \sqrt{\pi} \\ 0 \le y \le \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \sin(y^2)$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_y^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[x\sin(y^2)\right]_y^{\sqrt{\pi}} dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}\sin y^2 - y\sin y^2 \, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin y^2(\sqrt{\pi} - y)\, dy$$

$$= \left[-\frac{1}{2y}\cos y^2(\sqrt{\pi}-y)\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2y}\cos y^2\, dy$$

$$= \left[-\frac{1}{2y}\cos y^2(\sqrt{\pi}-y)\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \left[\frac{1}{4y^2}\sin y^2\right]_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$= 0 + 0 - 0 - 0 = \boxed{0}$$

<그림 VI-4> 논리적으로 부적절한 추론의 예시(2)

라. 곡해된 정리 혹은 정의의 예

다음 <그림 VI-5>는 곡해된 정리 혹은 정의의 예를 나타낸 것이다. 왼쪽 답안을 작성한 학생은 $\epsilon-\delta$논법으로 함수의 극한에 대한 정의를 제대로 이해하지 못하고 문제를 풀이하였고, 오른쪽 답안을 작성한 학생은 평균값 정리에 대해 완전히 이해하지 못하여 문제에 정리를 올바르게 적용하지 못하는 경우이다.

$\epsilon-\delta$의 형식적인 정의를 이용하여, $\lim_{x\to 3}(4x+2)=14$임을 증명하여라.	평균값의 정리를 이용하여, $x>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라. $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$
$\forall\varepsilon>0.$ $\lvert x-3\rvert<\delta \to \lvert 4x+2-14\rvert$ $=\lvert 4x-12\rvert$ $=4\lvert x-3\rvert<4\delta<\varepsilon$ $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$	$f(x)$를 $\ln x$라 두면 $f(x)$는 $[x, x+1]$에서 연속 $(x, x+1)$에서 미분가능이다. 따라서 $f(x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{\ln(x+1)-\ln x}{1}$ $\frac{1}{x+1}<f'(x)<\frac{1}{x}$ $\therefore \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)+\ln x<\frac{1}{x}$ 이다.

<그림 VI-5> 곡해된 정리 혹은 정의의 예시

수학에서는 다양한 정의와 정리에 대한 정확한 개념 이해가 필수적이기 때문에, 학생들이 이를 명확히 인지할 수 있도록 관심을 가지고 지도하여야 할 것이다.

마. 요구되지 않은 해답의 예

다음 <그림 VI-6>은 요구되지 않은 해답의 예를 나타낸 것이다. 왼쪽은 답안을 작성하기 직전까지 맥크로니 급수를 구하려는 문제풀이 과정은 옳지만 문제가 요구하는 해답을 적지 못했다. 오른쪽 답안도 마찬가지로 Leibniz정리를 적용하려 하였지만 문제가 요구하는 해답을 적지 못했다.

$\frac{1}{1-x}$ $(\lvert x\rvert < 1)$을 맥크로니 급수로 전개하여라.	함수 $f(x)=x^3e^{kx}$(k는 상수)의 n계 도함수를 Leibniz 정리를 이용하여 구하여라.
[0,x] 연속 (0,x) 미분가능 $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ $+$	$f(x)=x^3e^{kx}$ $f'(x)=3x^2e^{kx}+kx^3e^{kx}$ $f''(x)=6xe^{kx}+3x^2e^{kx}+k3x^2e^{kx}+kx^3e^{kx}$ $f^{(3)}(x)=6e^{kx}+6xe^{kx}+6xe^{kx}+3kx^2e^{kx}$ $+6xke^{kx}+3k^2x^2e^{kx}+3x^2k^2e^{kx}$ $+x^3k^3e^{kx}$ $f^{(n)}(x)=$

<그림 VI-6> 요구되지 않은 해답의 예시(1)

다음 <그림 VI-7> 역시 요구되지 않은 해답의 예시이다.

다음 함수의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라. $y=\ln(\tan x+\sec x)$	다음 함수의 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라. $y=e^x\sinh x$
$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan x+\sec x}\times(\sec^2x+\sec x\tan x)$ $=\frac{\sec^2x+\sec x\tan x}{\tan x+\sec x}$	$\frac{dy}{dx}=e^x\sinh x+e^x\cosh x$ $=e^x(\sinh x+\cosh x)$

<그림 VI-7> 요구되지 않은 해답의 예시(2)

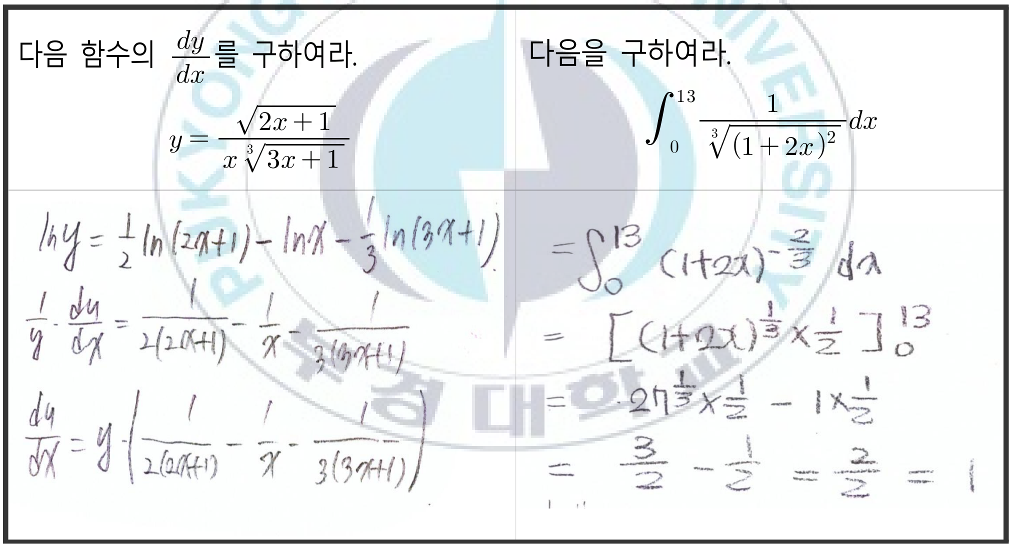
<그림 VI-7>의 답안 모두 문제에서 요구하는 해답을 적지 못하였다. 왼쪽 답안은 마지막 단계에서 약분을 하지 않았고, 오른쪽 답안도 마지막 단계에서 쌍곡함수를 지수함수로 바꾸지 않아 답안을 간단히 나타내지 못하

였다. 두 답안 모두 최종정리가 부족하여 문제가 요구하는 정답인지를 판별하지 않은 경우이다.

이러한 오류 유형에서는 주어진 문제가 요구하는 바가 무엇인지 정확히 파악하는 것이 우선되어야 하고, 해답을 정확히 작성하는 습관을 기르도록 지도하여야할 것이다.

바. 기술적인 오류의 예

다음의 <그림 Ⅵ-8>은 기술적인 오류의 예시로, 문제풀이 과정에서 계산상의 오류가 발생한 경우이다.



<그림 Ⅵ-8> 기술적인 오류의 예시(1)

다음의 <그림 Ⅵ-9> 역시 기술적인 오류의 예를 나타낸 것이다. 왼쪽 답안은 문제풀이 과정에 관한 전반적인 흐름은 알고 있으나 문제풀이 과정에서 이전 단계의 항목을 다음 단계에서 잘못 옮겨 적은 경우이고, 오른쪽 답안 역시 풀이 과정에서 등호를 생략하여 계산 실수에 의한 기술적인 오

류를 범한 것이라 판단된다.

다음을 구하여라. $$\int_0^{13} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}dx$$	$f(x)=\frac{1-x}{2+x}$일 때, 미분계수의 정의를 이용하여, $f'(2)$를 구하여라.
$1+2x=t \rightarrow 2dx=dt$ $\int_1^{27} \frac{2}{t^{\frac{2}{3}}}dt = 2\int_1^{27} t^{-\frac{2}{3}}dt$ $=2\left[3t^{\frac{1}{3}}\right]_1^{27}=6(3-1)=12$(답)	$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1+h}{4+h}+\frac{1}{4}}{h}$ $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-4+4h+4+h}{4(4+h)}}{h}$ $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5h}{4(4+h)}}{h}$ $\lim_{h\to 0}\frac{5}{4(4+h)}=\frac{5}{16}$

<그림 VI-9> 기술적인 오류의 예시(2)

이러한 오류는 각종 평가시험에서 범하기 쉬운 오류이며, 가장 빈번한 오류 유형이다. 이와 같은 계산 실수를 줄이기 위해서는 평소에 서술형식의 다양한 문제들을 많이 연습하도록 지도해야할 것이다.

사. 풀이 과정이 생략된 예

다음 <그림 VI-10>은 풀이 과정을 생략한 예시이다. 이들은 풀이 과정은 생략한 채, 답만 기술하였다. 이러한 오류는 대부분 답을 구하는 정확한 과정은 모르지만, 문제 유형으로부터 답을 구하는 방법만 알고 있는 경우이다. 서술형 문항에서는 옳은 답을 작성하였음에도 불구하고, 풀이 과정이 정확하게 제시되지 않으면 오답으로 간주하므로 서술형 문제에 대한 연습이 반드시 필요하다.

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$가 수렴하기 위한 p의 범위를 구하여라.	이중적분 $\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$의 적분 순서를 바꾸면 $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$이다. a, b, c, d에 들어갈 적절한 값 또는 식을 각각 구하여라.
$p > 1.$	$a = \frac{x}{2}$ $b = \sqrt{x}$ $c = 0$ $d = 4.$

<그림 VI-10> 풀이 과정 생략의 예시

Ⅶ. 결론 및 제언

7.1 결론

본 논문에서는 P대학에서 미적분학 교과목을 수강하는 학생들을 대상으로, 학생들의 수학 교과에 대한 인식과 태도 및 수학적 배경 등이 학업성적에 미치는 영향을 알아보기 위하여 설문조사를 실시하고, 수학카페에서 자주 질문하는 내용들을 세부 학습내용별로 정리하여 일부 질문사항에 대한 학습지원 방법을 제시하고 지필고사에서 학생들이 작성한 오답을 오류유형에 따라 분류하였는데, 그 주요 연구결과는 다음과 같다.

첫째, 수학에 대한 인식과 태도에 대한 설문조사에서, 학생들은 “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.”와 “수학에 흥미를 가지고 있다.”에서 ‘아주 그렇다’와 ‘그렇다’에 응답한 학생은 각각 69.2%와 43.6%이었다. 그러나 “문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.”와 “수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.”고 답한 학생은 각각 36.4%와 31.3%에 불과하여, 수학 문제해결을 위한 노력과 자신감은 많이 부족한 것으로 나타났다.

둘째, 통계프로그램을 이용하여, 수학 교과에 대한 학생들의 인식 및 태도와 미적분학 교과목 취득성적간의 상관관계를 구한 결과, “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.”, “수학에 흥미를 가지고 있다.”, “수학 문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.” 및 “수학에 흥미를 가지고 있다.”와 “수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.”는 항목에서는 미적분학 성적과 통계적으로 유의한 상관관계가 있는 것으로 나타났으나, “수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다.”와 “문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각

한다.”는 항목은 미적분학 교과목 취득성적과 특별한 상관관계가 없는 것으로 나타났다.

셋째, 미적분학 교과목 학습의 어려움을 묻는 문항에서, 학생들은 증명문제, 기초개념 이해 부족, 문제내용에 대한 이해 부족, 문제풀이 계산 실수, 학습량 과다, 선행학습 부족 등의 순서로 답하였다. 실제로, 미적분학 교과목 수강학생들은 대부분 수학에 대한 기초개념에 대한 이해가 많이 부족한 것으로 나타났고, 익숙하지 않은 증명문제에 대해 어려움을 겪는 것으로 나타났다.

넷째, 미적분학 교과목 학습내용별 이해 정도에 대한 응답 결과, 집합, 극한과 연속, 함수의 미분법과 적분법 등은 비교적 이해하고 있다고 답하였으나, 다변수함수와 편미분법, 무한급수와 멱급수, 이중적분 등에 대해서는 한 학기 동안 수강하였음에도 다수의 학생들은 잘 이해하지 못하고 있다고 답하였다. 실제로, 다수의 학생들은 대학에서 처음 접하는 수학용어나 기초개념 및 계산이 복잡한 문제풀이 등에 대해 어려움을 느끼고 있었다.

다섯째, 미적분학 수강학생들의 강의평가 평균점수는 교양과목 전체 평균에 비해 낮았지만, 이공계열 학생들이 어려워하는 수학 교과라는 측면에서는 강의평가 점수는 양호한 편이라 평가한다. 실제로, 수강학생들의 강의만족도는 전체 평균에 비해 약간 낮았지만, 수업내용 평가에서는 전체 평균과 거의 비슷하였다. 이는 수업시간의 주제를 명확히 설명하고, 구체적인 예와 문제풀이를 통해 그 개념을 쉽게 이해할 수 있도록 반복하여 지도한 때문으로 생각한다. 또한, 수학카페 운영도 학업성취도 향상에 많은 도움을 준 것으로 나타났다.

여섯째, 서술형 문항에 대한 오류 유형을 분석한 결과, 지필고사에서 오답을 작성한 학생들은 문제에 주어진 지시어를 정확히 파악하지 않고 문제

를 해결하려는 시도가 많았으며, 주어진 문제에 적합한 문제풀이 방법을 적용하지 못해 풀이가 난해하거나 완전히 다른 경우, 문제풀이 과정에서 계산 실수를 하는 경우, 정리 내용이나 수학적 개념을 정확히 이해하지 못하여 정답을 도출하지 못하거나 논리 전개가 미흡한 경우, 또는 계산 값이 문제의 조건에 부합하는지를 확인하지 않는 등으로 오류를 범하였다.

7.2 제언

이러한 연구결과를 토대로, 미적분학 교과목 학습지원 방안을 다음과 같이 제안한다.

첫째, 미적분학의 학습내용과 이공계열 학생들의 수학 기초학력을 고려할 때, 주 3시간의 강의로는 질문이나 과제 등에 대한 피드백이나 학습내용에 대한 연습문제 풀이가 어려우므로, 1시간 이상의 연습시간을 포함하여 주 4시간 이상의 강의 시간이 요청된다. 이 경우, 전시학습 내용에 대한 복습, 반복지도와 다양한 문제의 연습을 통해 개념을 충분히 이해하고 활용할 수 있도록 지도하여야할 것이다.

둘째, 수학 교과에 대한 수강학생들의 흥미와 성취감은 학업성적에 유의미한 영향을 미치는 것으로 나타났다. 따라서 담당교수는 수강 교과목의 중요성을 학생들에게 인식시키고 학습 동기유발을 위한 다양한 교수법을 활용하여야할 것이다.

셋째, 대학에서는 고등학교 수학교육과정 개정을 고려하여 전공분야에 필요한 내용으로, 수강학생의 학력수준을 고려하여 교과 내용을 수시로 보완하고 조정하여야할 것이다. 특히, 계산이 지나치게 복잡한 문제는 가급적 지양하고 개념이해와 응용 위주의 단순한 문제로 교체하여야할 것이다.

넷째, 학생들이 자주 질문하는 학습내용이나 문제를 선정하여, 문제에 대한 학생들의 이해도와 지도방볍 및 유의점 등을 기술한 자료집 등을 발간하여 학습지도에 적극 활용하도록 한다. 또한, 수학카페 운영은 교양수학 수강학생들의 학력향상에 많은 도움을 주고 있으므로, 개인지도를 포함한 이와 유사한 학습지원 체제가 확산되었으면 한다.

다섯째, 미적분학 교과목은 자연계열학생도 한 학기 강의로 이해하기에는 그 내용이 다양하고 학습량이 많으며, 이공계열 학생들이 대학에 입학하여 처음 접하는 개념들도 많으므로, 자세한 보충 설명과 함께 전공과 관련하여 어떻게 적용되고 활용되는지를 설명함으로써 새로운 수학적 내용의 필요성을 강조하고, 지필고사 답안에서의 여러 형태의 오답을 분석하여 교과 수업에서는 물론, 수학카페 등에서 학습지원 자료로 적극 활용하도록 한다.

여섯째, 미적분학 교과목의 지필고사는 서술형 문항으로만 출제되는데, 학생들은 문제에 주어진 지시어를 정확히 파악하여 논리적으로 문제를 해결하는 능력이 부족한 실정이다. 따라서 수업시간에 간단한 퀴즈문제를 제공하여 서술형 문항에 대한 답안 작성과 함께 학생들의 학습 정도를 수시로 파악하는 것도 필요할 것으로 생각한다.

참 고 문 헌

[1] 교과부 (2015), 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8].

[2] 구인숙 (2009), 이공계 신입생들의 수학적 배경이 대학 기초수학 학습에 미치는 영향, 경남대학교 대학원 박사학위논문.

[3] 김옥경 (1991), 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

[4] 김재웅 (2012), 이공계 대학 신입생의 수학 기초학력과 대학입시제도 관련 연구 -미적분학1 교과목을 중심으로-, 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

[5] 김창일·전영주 (2014), 예비 수학교사의 수학교육학 키워드 중심 학습 효과, 한국학교수학회 논문집 제17권 제4호, 493-506.

[6] 김태수·김병수 (2008), 대학수학의 수준별 수업에 따른 대학 교양 수학 성취도 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 22(3), 369-382.

[7] 김희진·표용수 (2011), 대학 입학예정자를 위한 기초수학 수준별 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집, 14(3), 339-354.

[8] 박준식·표용수 (2013), 대학 입학예정자를 위한 기초수학특강의 학업성취도 분석, East Asian Math J., 29(2), 395-409.

[9] 신준국·유상인·김양희 (2014), 수학 기초학력 미달자의 수준별 수업에서 효율적인 지도 방법, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 28(1), 81-96.

[10] 임연휘·표용수 (2015), 수학 기초학력 평가들 간의 상관관계 분석을

통한 교양수학 교과목 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집, 18(3), 335-352.

[11] 장민우·표용수 (2016), 대학 신입생들의 수학 기초학력 평가들 간의 상관관계 및 오류 유형분석, East Asian Math. J., 32(4), 501-518.

[12] 최영아 (2001), 고등학교 수학에서 수학적 오류의 분석과 분류에 대한 연구, 성신여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

[13] Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. &Shlomo, I. (1987), An empirical classification model for errors in high school mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, 18(1), 3-14.

[14] Radatz, H. (1979), Error analysis in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education, 10(3), 163-172.

[15] Sam, L. & Ernest, P. (1997), Values in Mathematics Education : What is Planned and What is Espoused? In Brirtish Society for Research into Learning Mathematics. Proceeding of the Day Conference held at University of Nottngham, 37-44.

[16] Swadener, M. & R. Soedjadi, R. (1988), Values, Mathematics Education and the Task Of Developing Pupils' Personalities : An Indonesian Perspective, Educational Studies In Mathematics. 19 (2), 193-208.

[부록] 미적분학 교수-학습법 개선을 위한 설문조사

미적분학 교과목 수강학생 설문조사

이 설문지는 수강학생 여러분의 의견을 수렴하여, 미적분학 교과목 학습지도 및 수학카페 운영에 활용하고자 준비한 것입니다. 개인의 인적사항이나 개인별 설문조사 결과는 절대 공개하지 않으며 수학카페 운영자료 및 미적분학 학습지도를 위한 연구 자료로만 활용할 것입니다. 성실하게 응답해 주시기 바랍니다.

2017년 12월

분반		학번		학과		성명	

- 설문 내용 -

1. 출신 고등학교(또는 계열)는 다음 중 어느 것입니까?
   ① 일반계 인문계열 ② 일반계 자연계열 ③ 전문계 또는 특수고 ④ 기타(검정고시 등)

2. 대학수학능력시험 수학 응시유형은 무엇입니까?
   ① 가형 ② 나형 ③ 미응시

3. 수학 교과에 대한 인식과 태도(해당란에 O으로 표시)

문항	내 용	아주 그렇다	그렇다	보통 이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.					
2	나는 수학에 흥미를 가지고 있다.					
3	수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.					
4	나는 수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.					
5	나는 수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다.					
6	문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.					

4. 미적분학 교과목 학습과정에서 어려움이 있었다면, 그 이유는 무엇이라고 생각합니까? (중복 응답 가능)
   ① 선행학습 부족 ② 기초개념 이해 부족 ③ 문제내용 이해 부족
   ④ 문제풀이 계산 실수 ⑤ 증명문제 ⑥ 학습량 과다
   ⑦ 기타( )

5. 미적분학 교과목 세부 학습내용에 대한 이해 (이해도에서는l 해당란에 O으로 표시하고, 어려웠던 내용에 대해서는 구체적으로 작성)

세부 학습내용	이해도					학습내용이나 문제풀이 과정에서 어려웠던 내용
	잘 이해하고 있다	이해하고 있는 편이다	보통이다	조금 이해하고 있다	거의 이해하지 못한다	
집합, 극한과 연속						
함수의 미분법						
미분법의 응용 (평균값 정리, 극값)						
부정적분(적분법)						
정적분과 그 응용 (넓이, 부피 등)						
무한급수와 멱급수 (급수판정법 등)						
다변수함수와 편미분법						
이중적분 (반복적분과 응용)						

6. 미적분학 교과목 수업에 대한 건의사항이 있으면, 다음 란에 적어주시기 바랍니다.