[UCI]I804:21031-200000223463

교 육 학 석 사 학 위 논 문

선형대수 교과목 학습지원에 관한 연구

2019년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 명 진

교 육 학 석 사 학 위 논 문

선형대수 교과목 학습지원에 관한 연구

지도교수 표 용 수

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2019년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 명 진

김명진의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2019년 8월 23일

주 심 이학박사 박 진 한 (인)

위 원 교육학박사 서 종 진 (인)

위 원 이학박사 표 용 수 (인)

목 차

표 목차

그림 목차

A STUDY ON THE LEARNING SUPPORT OF THE LINEAR ALGEBRA SUBJECT

Myeong Jin Kim

Graduate School of Education

Pukyong National University

Abstract

In this thesis, 144 students who took the linear algebra course at P University were selected as research subjects, first, a survey about conduction to see the perceptions and attitudes toward mathematics subjects, the correlation between the result and the achievement score of the linear algebra subject is analyzed.

Also, in the course of the linear algebra curriculum process, many students who thought that is difficult to do survey findings and problem solving, after have organized their learning about typical problems, student's understanding, notes of guidance and map processing, suggests a way to support the learning. In addition, we analyze the frequent errors in the midterm and final exams on where students are asked to answer.

Based on this result, we suggests the necessity of learning methods of the linear algebra course by using mathematics cafe operated by P University and analysis of error type for improvement of problem solving ability

Ⅰ. 서론

1.1 연구의 필요성 및 목적

수학적 지식은 매우 체계적이므로 대부분의 단원이 서로 관련성을 가지고 있고 또한, 단계적이므로 상위 단계의 개념을 학습할 때에는 기초 단계의 지식에 대한 이해가 필수적이다. 그럼에도 불구하고, 우리나라 수학교육은 기초개념에 대한 교육이 부족하고 문제풀이 위주의 교육을 함으로써 대부분의 학생들이 수학적 개념을 바탕으로 그것과 주어진 문제와의 관련성을 이해하려고 노력하는 것이 아니라, 단순 적용을 반복하는 학습에 치중하고 있다. 위와 같이 다른 개념과 적절히 융합되지 못한 지식은 그 개념을 활용하는 것이 쉽지 않으며 단순 암기된 지식은 장기간 기억되기 어렵다. 또한, 고등학교 과정에서 수학적 힘의 신장을 위한 교과지도를 하여야 함에도 불구하고 대학입시를 위한 단순 문제풀이 기능에 지도의 중심을 두고 있기 때문에 학생들의 사고력 및 창의력 신장이 저해되고 있다(윤대열, 2005).

대학의 이공계열 학과에서는 대부분 정보화시대에 필수적인 선형대수 교과목을 수강하도록 하고 있다. 그럼에도 불구하고, 고등학교 수학교육과정 개정에 따라 학습내용은 계속 축소되고 있다. 특히, 2009 개정 교육과정에서는 수학I에 편성되었던 행렬과 그 연산 및 연립일차방정식 등에 관한 내용이 일반 교과목에서 삭제되어, 대학에서 처음 접하는 선형대수 교과목 학습내용에 대해 수강학생들은 상당한 어려움을 느껴 학습을 포기하는 경우도 종종 있다. 따라서 교사는 이러한 학생들에게 관심을 기울여 그들이 스스로 학습할 수 있는 환경을 만들어 주어, 스스로 학습하는 태도를 갖게

함으로써 어렵게 느껴졌던 수학이 좀 더 재미있는 학습을 하도록 하여야할 것이다(이수열, 2005).

본 논문에서는 P대학에서 선형대수 교과목 수강학생들을 연구대상으로 효과적인 학습지원 방안을 제안하고자 한다. 이를 위하여, 강의개선을 위한 설문조사를 실시하여 그 결과와 선형대수 교과목 학업성취도와의 관련성을 알아보고, 학생들이 학습시 어려워하는 문제들을 조사하여 그 문제에 대한 학습지도 방법과 함께, 지필고사 답안작성에 대한 오류를 유형별로 분석해 보고자 한다.

1.2 연구의 제한점

이 논문의 연구결과는 P대학에서 선형대수 교과목을 수강하는 이공계열 학생들을 연구대상으로 하였기 때문에, 본 연구결과를 다른 타 대학의 이공계열 학생으로 일반화하기에는 어려움이 있을 수 있다. 즉, 각 대학의 교양 및 전공교육과정 운영 현황과 수강학생들의 기초학력 수준 및 교육시설 등을 포함한 교육환경이 서로 다를 수 있으므로, 연구결과를 교육여건과 학력수준이 다른 타 대학에 그대로 적용하는 것은 한계가 있을 수 있다.

1.3 선행연구 조사

본 연구와 관련된 대부분의 선행연구에서는 각 대학의 교양수학 교과목 운영 현황과 그 문제점에 대한 개선방안을 제시하고 있다. 김태수・김병수(2008)는 수준별 수업의 운영 결과를 분석하고, 그 결과를 토대로 수준별

수업에서의 발전을 위한 개선방안을 제시하였다. 그리고 김희진 외 2인(2011)은 기초수학 교과목에 대한 수준별 수업을 운영을 통해 효율적인 기초수학 학습지도 방안과 운영상의 유의점 등을 모색하였으며, 박준식・표용수(2013)는 기초수학 교과목에 대한 포트폴리오를 기반으로 학생들의 취득성적을 분석하고 기초수학 교과목 운영 방안에 대해 연구하였다. 신준국 외 2인(2014)은 성공적인 수준별 수업을 위한 교재의 변화와 효율적인 지도방안을 모색하였고 이를 기초학력부진 학생들에게 적용하였다. 아울러, 임연휘・표용수(2015)는 수학 기초학력 평가들 간의 상관관계를 분석하여 교양수학 교과목 학습지도에 활용하고자 하였다.

오류의 유형에 대한 선행연구에서 지식의 전개과정에서 범하는 오류에 대해 Radatz(1979)는 언어의 난이성, 공간정보 획득의 어려움, 사전 지식과 기술 습득 결여, 사고의 경직 또는 부정확한 연합, 관련 없는 법칙 또는 전략의 적용 등의 5가지로 구분하였으며, Movshovitz-Hadar 등(1987)은 고등학교 수학 졸업시험에서 범한 오류들을 잘못 사용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 논증되지 않은 해답, 기술적인 오류 등의 6가지로 분류하였다(재인용; 김범석, 2009).

Ⅱ. 이론적 배경

2.1 개별지도

가. 용어의 정의 및 사례

두산백과사전[1]에 의하면 개별지도는 개인의 능력·성격·환경 등을 고려하여 개별적으로 맞는 학습법을 지도하는 것이라고 정의한다. 학교에서는 다수의 학생을 대상으로 지도하기 때문에 효율적인 학습이 이루어지기 어려움으로 개별지도의 필요성이 주장되었다. 이를 구체화하여 나타난 학습지도법으로 위넷카플랜(Winnetka plan)[2]과 돌턴플랜(Dalton plan)[3]이 있다. 1919년 미국의 교육가 C. W. Washburne이 실시한 위넷카플랜은 각 학년의 교육내용을 2개 영역으로 나누어 그 중 모든 학생이 학습해야 할 지식과 기능으로 짜여 있는 필수교재에 대하여 학생이 각자의 능력에 따라 개별적으로 목표를 달성하면서 자유롭게 진도를 추진하는 교육법으로, 학습목표의 달성은 테스트에 의하여 검사하게 되며 달성하지 못한 때에는 학습을 처음부터 다시 하게 된다. 돌턴플랜은 1920년 미국의 교육가 H. Parkhurst가 시행하였다. 모든 교과를 2종으로 분류하여 오전에는 1종에 속하는 교과를, 오후에는 2종에 속하는 교과를 학습하는 것으로 되어있는데, 1종 교과의 교육법은 돌턴플랜을 바탕으로 한 것으로 학생들은 한 달 동안 부여받은 과제를 자신만의 학습계획에 따라 다음 달 과제가 할당되기

---

1) 두산백과사전, https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1057751&cid=40942&categoryId=31723
2) 두산백과사전, https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1131725&cid=40942&categoryId=31723
3) 두산백과사전, https://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1083839&ref=y&cid=40942&categoryId=31723

전까지 학습하여야한다. 이때, 담당교사는 조언자로서 필요에 따라 학습상의 지도나 조언을 해주고 학습은 학생이 자율적으로 한다. 이런 사례를 보았을 때, 학교에서 시행하는 집단지도에 개별지도를 병행한다면 학생들의 학습과 지식 향상에 도움을 줄 수 있을 것이다.

나. 개별지도의 필요성

학업성취도와 관련하여 개별지도가 필요한 이유는 수업을 듣는 학생들의 간의 지식수준이나 학습 환경에 있어서 개인차가 존재하기 때문이다. 학업성취도에서 개인차는 지능이나 성향의 차이와 연결된다. 더 높은 정신적인 능력, 가령 IQ테스트와 같은 것으로 증명된 학생들이나 더 성실한 학생은 학습 상황에서 매우 높은 성취를 보이는 경향이 있다(송승천, 2018). 따라서 그렇지 않은 학생들은 개별지도를 통하여 학습효과를 기대할 수 있을 것이다. 또한, 개별지도는 튜터링 프로그램으로서 대학에서 운영하고 있는데 대학들은 튜터링 프로그램을 통해 신입생들의 학력수준을 개선하고 중도탈락을 방지하며 동료들 간의 유대감을 강화시키고 궁극적으로 대학교육의 질적 향상을 이루고자 노력하고 있다(송윤희·김성환, 2012).

한편, 수학 기초학력이 매우 저조한 P대학의 이공계열 예비대학생 30명을 대상으로 개별지도가 수학 학업성취도와 수학에 대한 태도에 어떠한 영향을 미치는지를 알아본 결과, 실험 과정에서 개별지도 시간이 지날수록 학생들이 교수자 및 수업지원조교들과 친밀감을 느끼게 되고, 학생들이 잘 모르는 내용을 질문하는 과정에서 학생들과 교수자와의 의사소통이 점진적으로 많이 이루어졌다는 관점에서, 의미 있는 변화가 있었다(서종진·조승희, 2018). 기초 학력이 부진한 학생들의 경우, 학급에서 진단지도로 진행되는 일제수업으로는 학습내용에 대한 이해 부족으로 인해 그에 따른 문제를 해결하기 힘들다. 게다가 다른 교과목에 비해 난이도가 높고 학력차가

많이 나는 수학교과의 특성상 개별학습은 꼭 필요한 학습지도 방법으로 학습부진아들에겐 더욱더 다양한 수준의 개별학습이 진행되어야 한다(박미정, 2012). 또한, 한창훈(2011)은 개별지도는 학생의 학교교육에 대한 신뢰감과 의식 변화와 자신감을 줄 수 있는 가치 있는 교육방법이라고 주장하였다.

2.2 수학적 오류분석

가. 오류분석의 정의

특수교육학 용어사전[4]에 의하면, 오류분석이란 학생이 문제를 해결하는 과정이나 개념을 이해하는 과정에서 지속해서 보이는 오류의 유형이 무엇인지를 파악하는 것이다. 오류를 분석하기 위해서는 다양한 문제를 유형별로 풀이하도록 하여야 한다. 오류분석을 통해 학생들의 잘못된 전략을 찾아내고 적절한 교정방법을 적용할 수 있다. 본 논문에서의 오류는 선형대수 교과목 지필고사 답안작성 과정에서 나타난 것으로 한정하며, 수학적 오류를 수학 문제해결에서 그 문제에 적합한 수학의 용어, 기호, 식, 개념 원리 등을 사용하지 않았거나, 바르게 사용하지 않은 과정으로 정의한다(장민우·표용수, 2016)

나. 수학적 오류

대부분의 교사와 학생들은 수학적 오류를 수학 학습 과정에서 범하는 잘못된 계산이나 실수, 착각 등에 의해서 나타나는 것으로 수학적 오개념과

4) 특수교육학 용어사전, 국립특수교육원, 2009

동일한 의미로 사용하기도 한다(황정환, 2017). 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 다양한 오류를 범하며, 이러한 오류에 의하여 학생들은 그릇된 개념이 형성되고 그 결과, 학습목표에 이르지 못하게 된다. 따라서 학생들의 오류에 관한 분석은 학습과정을 분석하는데 있어서 중요한 부분이다. 학생들의 오류를 분석하여 교사들은 학생들의 지식의 구성과정과 이해 정도를 알 수 있도록 도와주어야 하고 학생들이 가지고 있는 오류를 개선하기 위한 지도방안도 모색하여야 한다(안종수, 2019). 오류는 발생빈도를 줄여나가야 할 대상이지만, 오류를 통해서 개념의 이해 정도를 파악할 수 있고 문제해결 전략을 수정하고 보완할 수 있으며 풀이과정에서의 습관을 분석할 수 있는 좋은 자료가 된다(송유진, 2017).

Radatz(1979)는 수학적 오류의 원인으로, 문제를 잘못 이해하는 오류, 개념에 대한 이해부족에 의한 오류, 공간적인 해석에 대한 어려움으로 발생하는 오류, 사고의 경직성이나 문제와 개념을 연결하는 과정에서 발생한 오류, 그리고 잘못된 전략이나 규칙의 사용에 의한 오류의 다섯 가지를 제시하였다. Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar(1987)는 고등학교 시험문항에서 발견된 학생들의 오류를, 잘못 해석된 언어, 자료의 잘못된 사용, 정리나 정의의 오용, 논리적으로 부적절한 추론, 논증되지 않은 풀이, 기술적 오류의 여섯 가지로 분류하였다. 한편, Babbit(1990)는 수학에 관한 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 오류의 형태에 관하여 연구하였다. 그는 초등학생들을 대상으로 한 연구에서, 오류의 유형을 복합적인 오류, 시도하지 않은 오류, 계산오류, 연산오류의 네 가지로 분류하였는데, 계산오류와 연산오류가 가장 빈번하였으며 복합적인 오류와 시도하지 않은 오류는 문제가 어려울수록 많이 나타났다고 한다(재인용; 안종수, 2019). Borasi (1996)는 오류의 긍정적인 역할을 주장하며 학생들의 수학적 오류와 오개념이 개념 성장의 발판으로서 사용될 수 있고 개념 성장은 다음의 두 가지

의미로 정리하였다. 먼저, 수학 학습 과정에서 학생의 수학적 오개념이나 오류는 새로운 수학적 지식과 인지갈등을 일으키고 조절되면서 기존 개념 구조를 개선하고 확장·재구성할 수 있으며, 다음으로 수학적 오개념이나 오류를 발판으로 새로운 수학적 개념을 탐구함으로써 학생들은 현재의 수준을 뛰어 넘는 수학적 지식의 습득을 할 수 있다고 하였다(재인용; 김부미, 2009).

Ⅲ. 선형대수 교과목 운영 실제

P대학에서는 선형대수 교과목을 교양수학 교과목으로 매학기 개설하여 다음 사항에 주안점을 두고 지도하고 있다.

3.1 선형대수 교과목 학습 내용

다음 <표 Ⅲ-1>은 선형대수 교과목의 주별 강의계획서이다. 교재는 <선형대수의 기초와 응용, 제3판>(부경대, 2016)을 사용하였으며, 중간고사 이전에는 벡터의 기본개념과 연립일차방정식의 해법, 행렬에 관한 내용을 중심으로, 그 이후는 기저와 차원, 선형변환, 행렬식과 그 성질, 고윳값과 고유벡터 및 유클리드 벡터의 직교를 중심으로 지도하고 있다.

<표 Ⅲ-1> 선형대수 교과목 강의계획서

주별	강 의 내 용	비 고
제 1주	교과목 소개, 벡터의 기하와 대수	문제풀이
제 2주	벡터의 길이와 각, 내적 및 외적	〃
제 3주	연립일차방정시과 해법	〃
제 4주	연립일차방정식의 응용, 생성집합과 일차독립	〃
제 5주	행렬과 연산	〃
제 6주	행렬대수, 역행렬	〃
제 7주	유클리드 벡터의 부분공간	〃
제 8주	연습, 중간시험	
제 9주	기저와 차원, 계수	문제풀이
제10주	선형변환의 소개, 표준표현행렬	〃
제11주	행렬식과 기본성질	〃
제12주	행렬식의 전개, 고윳값과 고유벡터	〃
제13주	행렬의 닮음과 대각화, 응용	〃
제14주	Euclid 벡터의 직교	〃
제15주	연습, 기말시험	

3.2 학습지도 및 평가기준

선형대수에서 담당교수는 매시간 수업의 주제를 명확하게 설명하며, 학생들이 수업내용을 쉽게 이해하도록 구체적인 예를 이용하여 일반화나 추상적인 개념을 지도하였다. 또한, 지필고사 준비를 위한 과제와 함께, 인터넷 기반의 Webwork 과제를 부여하였다. 아울러, 수학카페를 통해 학생들이 스스로 풀이하지 못하는 문제나 제대로 이해하지 못한 학습내용을 해결하는데 도움을 받도록 하였다. Webwork는 미국 Rochester대학에서 개발한 물리학 및 수학 교과에 대한 인터넷을 바탕으로한 과제물 관리 시스템이다. Webwork 시스템 활용과제의 장점으로는 ① 동일한 유형의 서로 다른 문제가 개별 학생에게 할당되고, ② 문제풀이에 대한 정답 여부를 실시간으로 확인할 수 있으며, ③ 정답을 입력할 때까지 과제 수행이 반복적으로 가능하고, ④ 온라인 시스템이기 때문에 시간과 공간의 장애를 받지 않을 뿐만 아니라, ⑤ 자동화 시스템으로 인한 과제물 관리의 편리함 등을 들 수 있다.

선형대수 교과목의 성적은 다음 <표 Ⅲ-2>의 평가방법에 의해, 대학에서 정한 상대평가 기준에 따라 평가하고 있다. 참고로, P대학의 교양과목에 대한 상대평가 기준에 따르면, A^+, A^0, B^+, B^0는 수강인원의 70%이하로 평가하되 A^+와 A^0는 25% 이하이어야 하며, D^+, D^0 및 F는 10% 이상을 필히 평가하여야 한다.

<표 Ⅲ-2> 선형대수 교과목 성적 평가방법

중간고사	기말고사	과제물	출 결	합 계
40 %	40 %	10 %	10 %	100 %

3.3 수학카페 운영

P대학에서는 교양수학 교과목 수강학생들의 학업성취도 고양과 수학 문제해결 능력 향상을 위하여 수학카페를 설치하여 운영하고 있다. 수강과목 학습내용과 관련하여 질문이 있는 학생은 수학카페를 방문하여, 대학원생 수업지원조교로부터 교양수학 학습에 대한 지원을 받도록 하고 있다. 연구자는 2017학년도와 2018학년도에 수학카페 운영책임자로 근무하였다.

다음 <표 Ⅲ-3>은 2017학년도와 2018학년도 선형대수 교과목 수강학생들의 수학카페 이용현황을 나타낸 것이다. 표에서 이용비율(이용횟수/수강인원)은 소수점 둘째자리에서 반올림하였다. 표에서 보는바와 같이, 2017학년도 선형대수 수강학생들의 수학카페 1학기 이용비율은 155.5%, 2학기 이용비율은 257.1%이고 2018학년도 1학기 이용비율은 145.6%, 2학기 이용비율은 166.0%이었다. 이로부터 다수의 학생들은 수학카페를 이용하여 교양수학의 학습내용과 관련된 의문사항을 해결하거나, 기초학력 부진에 대한 도움을 받고 있음을 알 수 있다.

<표 Ⅲ-3> 최근 2년간 선형대수 수강학생 수학카페 이용현황

학년도 및 학기	수강인원(명)	이용횟수(회)	이용비율(%)
2017학년도 1학기	874	1,359	155.5
2017학년도 2학기	245	630	257.1
2018학년도 1학기	983	1,431	145.6
2018학년도 2학기	247	410	166.0
계	2,349	3,830	163.0

또한, <표 Ⅲ-4>는 2017학년도 및 2018학년도 1학기 선형대수 교과목

수강학생들의 수학카페 월별 이용현황을 나타낸 것이다. 표에서 중간고사와 기말고사 시험기간이 속해있는 4월과 6월에 수학카페 이용학생이 편중되어 있음을 알 수 있다. 이는 학생들이 수학카페 이용이 시험 준비를 포함한 선형대수 교과목 학습에 많은 도움이 된다는 반증을 나타낸다고 할 수 있을 것이다.

<표 Ⅲ-4> 선형대수 수강학생 수학카페 월별 이용현황

학년도 및 학기	수강인원(명)	3월	4월	5월	6월	계
2017학년도 1학기	874	98	342	173	746	1,359
2018학년도 1학기	983	102	379	297	653	1,431

Ⅳ. 설문조사 결과 및 학업성취도 분석

선형대수 교과목 수강학생들의 수학 교과에 대한 인식과 태도, 수학적 배경 등이 학업성적에 어떠한 영향을 미치는지를 알아보기 위하여 설문조사(부록 참조)를 실시하였다. 설문조사는 2017학년도 2학기 선형대수 교과목 개설학급 중에서 학력수준과 전공학과 등을 고려하여 3학급을 선정하여 144명을 대상으로 실시하였다. 이들 중에서 일반계 고등학교 자연계열 졸업생이 전체의 92.4%인 133명, 인문계열 10명, 특수고 1명이었다. 또한, 대학수학능력시험에서 수학 가형에 응시한 학생은 112명, 나형 응시자는 32명이었다. 즉, 설문조사에 참여한 학생 대부분은 일반계 고등학교 자연계열을 졸업한 수학 가형 응시자이었다.

4.1 수학 교과에 대한 인식과 태도

다음 <표 Ⅳ-1>은 설문조사 참여 학생들이 수학에 대한 인식과 태도를 묻는 문항에 대한 응답 결과를 나타낸 것이다. 표에서의 평균은 ‘아주 그렇다’ 5점, ‘그렇다’ 4점, ‘보통이다’ 3점, ‘그렇지 않다’ 2점, ‘전혀 그렇지 않다’는 1점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것으로 소수 셋째자리에서 반올림하였다. 표에서와 같이, 학생들은 “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다”에서는 ‘아주 그렇다’와 ‘그렇다’에 81.9%인 118명이 답하였으나, “수학에 흥미를 가지고 있다”와 “수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다”에서는 각각 52.1%인 75명, 39.6%인 57명이 답하여 수학학습에 대한 흥미가 부족하고 수학 시험에 대해 부담감을 느끼고 있는 것으로 나타났다. 특히, “수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다”고 답한 학생은 41명에 불과하였다.

<표 Ⅳ-1> 수학에 대한 인식과 태도에 대한 설문조사 결과

문항	내 용	아주 그렇다	그렇다	보통 이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다	평균
1	나는 수학문제를 해결하고 나면, 기분이 좋아진다.	29	89	20	5	1	3.97
2	나는 수학에 흥미를 가지고 있다.	17	58	49	19	1	3.49
3	수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.	13	44	48	33	6	3.17
4	나는 수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.	12	29	71	31	1	3.13
5	나는 수학 문제를 풀려고 하면, 긴장하게 된다.	8	49	34	40	13	2.99
6	문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.	16	58	53	16	1	3.50

그리고 다음 <표 Ⅳ-2>는 수강학생들의 수학에 대한 인식과 태도에 따른 선형대수 교과목의 취득성적을 나타낸 것이다. 표에서의 성적은 A^+는 4.5점, A^0는 4,0점, B^+는 3.5점, B^0는 3.0점, C^+는 2.5점, C^0는 2.0점, D^+는 1.5점, D^0는 1.0점, F는 0점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것이다.

<표 Ⅳ-2> 수학에 대한 인식과 태도에 따른 선형대수 취득 성적

문항	내 용	아주 그렇다	그렇다	보통 이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 수학문제를 해결하고 나면, 기분이 좋아진다.	3.46	3.12	2.25	2.60	3.50
2	나는 수학에 흥미를 가지고 있다.	3.73	3.24	2.69	2.81	3.50
3	수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.	2.61	2.80	3.04	3.42	4.00
4	나는 수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.	3.50	3.06	3.13	2.72	2.50
5	나는 수학 문제를 풀려고 하면, 긴장하게 된다.	3.18	2.85	3.07	3.31	2.92
6	문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.	3.12	3.27	2.86	2.87	2.50

전체 학생이 취득한 평균평점은 3.29이었으며. <표 Ⅳ-2>에서와 같이, 수학문제를 해결할 때에 느끼는 성취감과 보람을 목표로 하여 흥미를 가지고 자신감을 가지는 학생들의 취득성적은 높았으며, 시험을 어렵게 느끼며 수학문제에 대한 자신감과 흥미가 부족한 학생들은 상대적으로 성적이 낮았다.

다음 <표 Ⅳ-3>은 통계프로그램 SPSS 23을 이용하여, 연구대상 학생 144명의 수학 교과에 대한 인식 및 태도와 선형대수 교과목 취득성적간의 상관관계를 구한 결과이다. 표에 따르면, 문항 1인 “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다”와 문항 2인 “수학에 흥미를 가지고 있다”에서는 유의수준 1%범위에서, 문항 4인 “수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다”는 유의수준 5%범위에서 선형대수 교과목 취득성적과 통계적으로 유의한 양의 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 반면에, 문항 3인 “수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다”에서는 유의수준 1%범위에서 취득성적과 유의한 음의 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 이는 수학 시험이 항상 어렵다고 생각하는 학생들의 취득성적이 낮았음을 의미한다. 한편, 문항 5인 “수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다”와 문항 6인 “문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다”는 선형대수 교과목 취득성적과는 특별한 상관관계가 없는 것으로 나타났다.

<표 Ⅳ-3> 수학에 대한 인식 및 태도와 선형대수 성적간의 상관관계

구분	문항 1	문항 2	문항 3	문항 4	문항 5	문항 6
Pearson 상관계수	.272**	.269**	-.290**	.164*	-.084	.140
유의확률 (양측)	.001	.001	.000	.049	.315	.094
** 상관관계가 0.01 수준에서 유의합니다(양측).						
* 상관관계가 0.05 수준에서 유의합니다(양측).						

또한, 복수응답을 허용한 선형대수 교과목 학습에서 어려움을 묻는 문항에서는 기초개념 이해 부족 61명(42.4%), 증명문제 50명(34.7%), 문제풀이 계산 실수 67명(46.5%), 문제에 대한 이해부족 35명, 선행학습 부족 22명과 학습량 과다 26명 등의 순으로 답하였다. 실제로, 선형대수 수강학생들은 대부분 고등학교 자연계열 출신이나 대학에 처음으로 배우는 개념에 대한 이해와 익숙하지 않은 증명문제와 복잡한 계산에 대해 어려움을 겪는 것으로 보인다.

4.2 학습내용별 수강학생 이해도

다음 <표 Ⅳ-4>는 선형대수 교과목 세부 학습내용별 이해도에 대한 수강학생들의 응답 결과를 나타낸 것이다.

<표 Ⅳ-4> 학습내용 이해에 대한 설문조사 결과

세부 학습내용	잘 이해하고 있다	이해하고 있는 편이다	보통이다	조금 이해하고 있다	거의 이해하지 못한다	평균 (총계)
벡터의 개념, 유클리드 벡터의 연산	54	60	23	6	1	4.11
공간벡터와 그 활용 (직선·평면방정식)	34	60	33	16	1	3.76
연립일차방정식	55	69	16	3	1	4.20
행렬과 연산	50	72	14	6	2	4.12
행렬식(역행렬)	43	67	25	7	2	3.98
유클리드 벡터공간과 부분공간	12	43	51	31	7	3.15
벡터공간의 기저 (일차독립, 생성)	11	40	45	40	8	3.04
고윳값과 고유벡터, 행렬의 대각화	30	60	30	16	8	3.61
선형변환	16	41	51	24	12	3.17

<표 Ⅳ-4>에서의 평균은 ‘잘 이해하고 있다’ 5점, ‘이해하고 있는 편이다’ 4점, ‘보통이다’ 3점, ‘조금 이해하고 있다’ 2점, ‘전혀 이해하지 못한다’는 1점으로 평가하여 그 점수를 평균한 것으로 소수 셋째자리에서 반올림하였다. 전체 학습내용에 대한 평균은 3.69점이었다. 표에서와 같이, 고등학교 수학교육과정에서 일부 내용에 대해 학습한 벡터의 개념, 유클리드 벡터의 연산, 공간벡터와 그 활용, 연립일차방정식 등은 다른 학습내용에 비해 잘 이해하고 있는 것으로 나타났으나, 처음 접하는 학습내용인 행렬식, 유클리드 벡터공간과 부분공간, 벡터공간의 기저, 고유값과 고유벡터, 행렬의 대각화, 선형변환 등에 대해서는 많은 학생들은 잘 이해하지 못한다고 답하였다.

4.3 학생들이 어려워하는 학습내용

다음 <표 Ⅳ-5>는 선형대수 수강학생들이 문제풀이 과정이나 학습내용에서 어려웠다고 답한 내용들을 세부 학습내용별로 나타낸 것으로, ( )는 응답자 수이다. 대부분의 학생들은 대학에서 처음 접하는 수학용어나 기초개념에 대한 이해 및 문제풀이 과정 등에 어려움을 느끼고 있으며, 계산이 복잡한 문제의 경우 풀이과정에서 실수가 많으며 관련 정리나 공식을 정확히 적용하지 못하는 경우도 종종 있는 것으로 나타났다.

<표 Ⅳ-5> 학생들이 어려워하는 선형대수 학습내용

세부 학습내용	학습내용이나 문제풀이 과정에서 어려웠던 내용
벡터의 기본개념과 연산	
공간벡터와 그 활용(내적, 벡터적, 직선과 평면방정식)	공간벡터에 대한 이해와 문제풀이(7) 내적과 벡터적의 개념(2)
연립일차방정식	가우스(-조르단) 소거법에 대한 이해(10)

행렬과 연산	LU 분해와 적용문제(5), 기본행연산 과정에서의 계산 실수(4), 크레머 공식 이해(2)
행렬식(역행렬)	역행렬 구하기(24), 행렬식의 성질 이해(2)
유클리드 벡터공간, 부분공간	부분공간 개념(22), 유클리드 공간, 영공간의 개념(6)
벡터공간의 기저 (일차독립, 생성)	기저에 대한 개념(29), 일차독립과 일차종속 구별(11) 차원의 이해(5), 새 용어가 많아 정의를 혼동함(2)
고윳값과 고유벡터, 대각화	대각화 가능의 개념과 활용(8) , 계산이 복잡함(11)
선형변환	선형변환의 개념(6)

4.4 강의평가 결과

다음 <표 Ⅳ-6>은 강의 종료 후, 수강학생들을 대상으로 온라인을 통해 대학본부에서 시행한 선형대수 교과목 강의평가 결과를 나타낸 것이다. 강의평가에는 147명이 참여하였으며, 표에서의 평균은 항목별로 '매우 그렇다' 5점, '그렇다' 4점, '보통이다' 3점, '그렇지 않다' 2점, '매우 그렇지 않다'는 1점으로 평가하여 그 평균점수를 나타낸 것이다.

<표 Ⅳ-6> 선형대수 교과목 강의평가 결과

항목	평균	전체 평균
1. 학습준비와 수강태도	4.58	4.36
2. 수업내용 평가	4.53	4.38
2-① 강의목표와 명확성	4.52	-
2-② 강의의 충실성	4.75	-
2-③ 평가의 공정성	4.50	-
2-④ 지적능력 향상성	4.36	-
2-⑤ 강의운영의 적절성	4.51	-
3. 강의만족도	4.41	4.21

수강학생들의 강의평가 평균은 교양과목의 전체 평균점수에 비해 약간 높았지만, 수학 교과라는 측면에서는 상당히 양호한 것으로 평가한다. 실제로. 수강학생들의 강의만족도 4.41는 전체 평균 4.21에 비해 높았으며 수업내용 평가에서의 평균점수 4.53도 전체 평균 4.38보다 높았다. 이러한 결과는 강의를 시작할 때 수업시간의 주제를 명확히 제시하고, 처음 접하는 학습내용에 대해서는 구체적인 예를 이용하여 이해를 돕고 문제풀이를 통해 그 개념을 쉽게 적용할 수 있도록 반복하여 지도하였기 때문이다. 또한, 인터넷을 바탕으로한 Webwork 과제 수행과 수학카페 이용은 학습내용의 이해에 많은 도움이 되었던 것으로 나타났다.

다음의 <표 Ⅳ-7>은 수학카페 이용횟수에 따른 선형대수 교과목 취득성적을 평균평점으로 나타낸 것이다. 표에 따르면, 선형대수 교과목 취득성적은 다양한 요소에 의해서 결정되지만 P대학에서 운영하고 있는 수학카페는 학생들의 학업성취도 향상에 도움을 주고 있음을 보여준다.

<표 Ⅳ-7> 수학카페 이용횟수에 따른 선형대수 취득 성적

방문횟수	0	1회	2회	3-4회	5회 이상	계
대상인원	102	17	14	33	79	245
평균평점	2.57	3.18	2.93	3.38	3.28	2.97

4.5 수업에 대한 건의사항

선형대수 수업에 대한 건의사항에서 수강학생들은 처음 배우는 내용이 대부분이고 학습량이 많으므로 수업의 속도가 빨라서 이해하기에 시간이 부족함(8명), 필기할 것이 너무 많고 문제에 대한 풀이 해설이 자세하면 좋겠음(4명), 수업방식에 대해 변화가 필요하다(6명), 행렬이 교육과정에 없어

서 이해가 힘들다(1명), 학습량이 너무 많으므로 줄여주면 좋겠음(3명) 등의 순으로 응답하였다. 강의실에 대해서도 수업을 듣는 학생인원이 강의실에 비해 많아서 강의실이 좁다(7명)는 의견이 많았다. 사실, 선형대수 교과목은 자연계열 학생이 한 학기 강의로 이해하기에는 새로운 내용이 많고 학습내용이 다양하고 학습량이 많기 때문에 어려움이 있었을 것으로 판단한다.

교재에 대해서는 내용이 어려우며, 공부하는 범위가 넓으므로 교재를 바꾸었으면 함(7명), 교재의 연습문제에 대한 완전한 풀이과정을 수록하면 좋겠다(5명), 교재의 심화 내용에 대한 예시 문제가 적고 풀이과정의 생략이 많음(2명), 등의 의견이 있었다. 연습문제에 대해서는 정답만 수록하고 학생들의 자발적인 문제풀이와 연습을 위해 완전한 풀이는 수록하지 않았으며, 행렬이 주요한 내용으로 다루지만 고등학교 교육과정에서 사라짐에 따라 학습함에 있어서 이해력이 부족한 경우 학습내용에 대한 어려움을 호소하고 있는 것으로 보인다.

시험 및 과제에 대해서는 시험문제에 나오는 행렬 계산 과정이 복잡하기 때문에 계산 과정이 간단한 것으로 내주었으면 함(3명), 과제에 대한 풀이와 개별과제를 더 내주어 개념을 확장시키는데 도움이 되었으면 함(6명), 시험 범위와 과제의 양이 너무 많음(5명) 등으로 나타났다.

Ⅴ. 선형대수 학습지원 방안

다음의 <표 Ⅴ-1>은 수학카페를 이용한 선형대수 교과목 수강학생들이 자주 질문하는 내용들을 세부 학습내용별로 정리한 것이다. 이를 바탕으로 단원별로 학생들의 주요 질문들을 정리해보고, 주요 질문들에 대한 학습지도 방안에 대하여 제시할 것이다. 먼저, 제1장 벡터의 이해와 활용에서는 학생들이 내적에 대한 공식을 이해하고 있으나 이를 적용하는 과정에서 사영의 개념을 잘 알지 못하여 점과 직선 또는 평면 사이의 거리를 구하는 문제를 어려워하였다. 제2장 연립일차방정식에서는 가우스 소거법과 가우스 조르단 소거법으로 해를 구하는 방법과 두 방법의 차이점을 잘 구별하지 못하였다. 제3장 행렬과 연산에서는 기본행렬의 정의에 대하여 정확히 이해하지 못하였고 LU분해를 활용하여 연립일차방정식의 해를 구하는 문제를 잘 해결하지 못하였다. 제4장 행렬식에서는 행렬식 계산과 행렬식을 이용하여 역행렬을 구하는 문제를 잘 해결하지 못하였고, 제5장 벡터공간의 기본개념에서는 일차독립과 일차종속을 구별하는 것과 기저와 차원의 정의 등 새로운 개념들에 대한 이해가 부족하였다. 제6장 고윳값과 고유벡터에서는 고윳값과 고유벡터를 구하는 과정에 대한 이해가 부족하여 행렬의 대각화를 활용한 행렬의 거듭제곱을 구하는 문제를 해결하는데 어려움이 있었다. 그리고 제7장 선형변환과 행렬표현에서는 선형변환의 정의를 이해하지 못하여 표준 표현행렬을 구하지 못하고 이후 기저의 변경과 관련한 문제를 잘 해결하지 못하였다. 제8장 직교에서는 정규직교 기저를 구하는 문제와 행렬의 QR분해를 구하여 문제를 해결하는 과정을 이해하지 못하였다.

다음의 <표 Ⅴ-1>은 학생들이 어려워하고 잘 이해하지 못하는 주요 내용들을 단원별로 나타낸 것이다.

<표 Ⅴ-1> 수학카페에서 학생들이 자주 질문하는 선형대수 학습내용

단원명	주요 질문 내용
벡터의 이해와 활용	-내적을 활용하여 스칼라사영과 벡터사영의 공식을 유도하는 방법 -점과 직선(평면) 사이의 거리 구하는 문제 -벡터적의 정의와 평면에 적용하는 문제
연립일차방정식	-연립일차방정식의 해의 형태를 구하는 문제 -가우스 소거법과 가우스 조르단 소거법의 차이점 -벡터의 생성에 대한 개념과 생성을 구하는 문제
행렬과 연산	-정칙행렬의 정의와 그것과 관련된 증명문제 -기본행렬의 정의와 기본행렬을 구하는 문제 -LU분해를 활용한 연립일차방정식의 해법 -행동치를 활용한 역행렬을 구하는 문제
행렬식	-행렬식의 정의와 행렬식을 계산하는 문제 -행렬식의 성질을 증명하는 문제 -행렬식을 이용하여 역행렬을 구하는 문제 -크레머 공식을 이용한 연립일차방정식의 해법
벡터공간의 기본개념	-영공간을 구하는 문제 -열공간에 속하는 것을 판단하는 문제 -일차독립과 일차종속의 차이점 -기저와 차원의 정의 -계수를 활용하여 행렬을 판단하는 문제
고윳값과 고유벡터	-행렬의 고윳값과 고유벡터를 구하는 문제 -행렬의 대각화를 이용하여 행렬의 거듭제곱을 구하는 문제
선형변환과 행렬표현	-주어진 변환이 선형변환임을 증명하는 문제 -표준 표현행렬을 구하는 문제 -순서기저의 변경에 따른 표현행렬을 구하는 문제와 기저의 변경에 대한 좌표변환 행렬을 구하는 문제
직교	-열공간에 대한 정규직교 기저를 구하는 문제 -행렬의 QR분해를 구하는 문제

수학카페를 이용하는 학생들이 자주 질문하는 문제풀이나 학습내용 중에

서 세부 학습내용별로 일부를 선정하여 학생의 이해도, 학습지도 내용 및 지도상의 문제점 등을 중심으로 다음과 같이 학습지원 방안을 제시한다.

5.1 벡터의 이해와 활용

[질문 1-1] $Q(2,1,1)$에서 $x+2y+2z=1$에 내린 수선의 발 H의 좌표와 점과 평면 사이의 최단거리를 구하여라.

(학생의 이해도) 사영을 활용하여 공간상의 문제를 해결하는 방법을 모르지만 사영의 공식은 알고 있음

(학습지도 내용)

[방법 ①] 점 Q를 지나고 평면의 법선벡터 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$와 평행인 직선의 대칭방정식은 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$이고, 이 직선의 매개변수방정식은 $x=t+2$, $y=2t+1, z=2t+1$이다. 수선의 발 H는 $(t+2,\ 2t+1,\ 2t+1)$이고 평면 위의 점이므로, 대입을 해보면 $t=-\frac{5}{9}$이고 따라서 수선의 발은 $H=\left(\frac{13}{9},\ -\frac{1}{9},\ -\frac{1}{9}\right)$이다. 점과 평면 사이의 최단거리는 점 Q와 점H 사이의 거리이므로 점과 점사이의 거리 공식을 활용하면 $\overline{QH}=\frac{5}{3}$이다.

[방법 ②] 평면위의 점 $P_0=(1,0,0)$에 대해 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$는 평면의 법선벡터이므로, Q에서 평면까지의 거리 d는 법선벡터 $\boldsymbol{n}$위로의 $Q-P_0$의 스칼라사영의 절댓값이다. 따라서 최단거리는

$$d=\left|\frac{(Q-P_0)\cdot\ \boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}\right|=\left|\frac{(1,1,1)\cdot\ (1,2,2)}{3}\right|=\frac{5}{3}$$

이고 수선의 발 H에 대하여 $\overrightarrow{HQ}=Q-H$ 이므로 $H=(a,\,b,\,c)$라고 하자. 이때, $\overrightarrow{HQ}$는 법선벡터 n위로의 $\overrightarrow{P_0Q}$의 벡터사영이므로 벡터사영 공식을 이용하여 구해

보면 $\left(\frac{(1,1,1)\cdot\ (1,2,2)}{(1,2,2)\cdot\ (1,2,2)}\right)(1,2,2)$ 에 의하여 $\left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$이고 이것은 $Q-H$와 같으므로 $(2,\ 1,\ 1)-(a,\ b,\ c)=\left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$이고 따라서 H=$\left(\frac{13}{9},-\frac{1}{9},-\frac{1}{9}\right)$이다.

(지도상의 유의점) 공간상의 문제는 그림을 통하여 문제 상황에 대한 이해를 먼저 시킨다. 주어진 문제는 점과 평면 사이의 거리를 구하는 문제이므로 문제풀이는 두 가지 방법이 존재한다는 것을 알려 준다. 문제 유형에 따라 한 가지 방법만 알고 있을 경우 해결하지 못하는 학생들이 많기 때문에 점과 점사의 거리를 활용하여 거리를 구하는 방법과 사영을 활용하여 구하는 방법을 알려준다. 첫 번째 방법은 점과 점사이의 거리 구하는 공식을 이용하여 문제를 해결하는 방법이다. 이 방법을 이용하여 설명을 할 시 직선의 임의의 한 점을 구하는 경우 직선의 매개변수 방정식을 이용하여 구한다는 점을 알려주어야 하며 직선과 평면이 만나므로 대입하여 점을 구할 수 있다는 것을 그림을 통해 이해를 시켜야 한다. 두 번째 방법은 평면위의 임의의 한 점을 이용하여 벡터를 만들어 주고 그 벡터가 평면의 법선벡터 위로 사영을 할 경우 주어진 점과 수선의 발을 지나는 벡터가 됨을 설명을 한다. 사영 공식을 모를 경우 우선 벡터사영 공식부터 설명을 해주어야 하며 알고 있을 경우 공식을 이용하여 문제를 해결하면 된다.

[질문 1-2] 두 직선 $l_1 : \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{3}$, $l_2 : \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{1}$ 가 같은 평면위에 있지 않음을 보여라.

(학생의 이해도) 문제에 대한 이해가 부족하고 두 직선이 평면을 결정하는 조건에 대해 잘 알지 못함

(학습지도 내용)

두 직선의 방향벡터 $d_1=(1,\ 2,\ 3)$, $d_2=(2,\ -1,\ 1)$ 에 대하여 평행하거나 한 점

에서 안 만나는 경우 꼬인 위치가 되므로 같은 평면위에 있지 않게 된다. 먼저 두 직선이 평행한가에 대하여 알아보면 $d_1 // d_2 \Leftrightarrow (1, 2, 3) = k(2, -1, 1)$ 만족하는 k가 존재해야 하는데 계산을 해보면 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하지 않는다. 그리고 한 점에서 만나는 경우 l_1의 임의의 점은 $(t+2, 2t-1, 3t-1)$로 표현 되는데 l_1과 l_2가 만난다면 l_1의 임의의 점을 l_2식에 대입하였을 때 t의 값이 존재하면 그것이 교점이 되는데 만족하는 t의 값이 없으므로 두 직선은 만나지 않는다. 따라서 평행하지 않고 만나지 않는 두 직선은 꼬인 위치이므로 두 직선은 다른 평면 위에 있다.

(지도상의 유의점) 두 직선이 평면을 결정하는 조건을 먼저 알려주고 수업 시간에 배운 두 직선의 위치 관계는 평행한 경우와 한 점에서 만나는 경우에 대해서 다루었으므로 두 직선이 평행하지 않음과 한 점에서 만나지 않는다는 것을 증명함으로써 두 직선이 꼬인 위치임을 증명할 수 있음을 알려 준다.

5.2 연립일차방정식

[질문 2-1] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right)$에서 무수히 많은 해를 가질 조건과 불능이기 위한 조건을 구하여라.

(학생의 이해도) 기본행변환에 대한 개념을 잘 알지 못하거나, 기본행변환을 시행한 결과를 제대로 해석하지 못함

(학습지도 내용)

먼저, 기본행변환을 적용하여 주어진 행렬을 다음과 같이 행사다리꼴 모양으로 변형시키도록 한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 4 & | & 3 \\ 1 & 3 & a & | & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & | & b-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & | & b-4 \end{pmatrix}$$

에서 해를 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$라면 각 행이 뜻하는 의미는 연립일차방정식이 된다. 특히, 마지막 행은 $(a-5)x_3 = b-4$이므로 무수히 많은 해를 가지려면 $a=5$이고 $b=4$이다. 그리고 $b \neq 4$이면 좌변은 0이나 우변은 그렇지 않기에 해가 없으므로, 불능의 조건은 $a=5,\ b\neq 4$ 이다.

(지도상의 유의점) 일차방정식 $ax=b$를 예로 들어 해의 결정 조건을 자세히 설명한다. $ax=b$가 유일한 해를 가지기 위한 조건은 $a\neq 0$이고 이때 해는 $x=\dfrac{b}{a}$이다. 무수히 많은 해를 가지기 위한 조건은 $a=0, b=0$이고 불능이기 위한 조건은 $a=0,\ b\neq 0$이다. 따라서 이 조건에 따라 마지막 행을 식으로 나타내어 풀어주면 무수히 많은 해를 가질 조건과 불능일 조건을 구할 수 있다. 또한, 유일한 해를 가질 조건에 대한 문제를 풀게 하여 학생의 이해도를 점검한다.

[질문 2-2] Gauss 소거법과 Gauss-Jordan 소거법의 차이

(학생의 이해도) 행사다리꼴과 기약행사다리꼴의 형태를 이해하지 못하여 두 소거법의 차이를 정확히 알지 못함

(학습지도 내용) Gauss 소거법을 연립일차방정식을 “더 간단한 형태”로 만드는 기계적인 방법으로 설명한다.

① 유한한 단계에 끝이 나는가? = 가장 간단한 형태는 무엇인가?

② 최종 결과가 원하는 것인가? = 연립방정식의 해가 바뀌지 않게 변형하는 방법은 무엇인가?

①에 대한 해답: 같은 해를 갖는 (기약) 행사다리꼴을 구한다.

②에 대한 해답: 연립방정식을 푸는 과정을 관찰하여 얻을 수 있는 연산

(기본행연산)이다. 연립일차방정식의 해를 구하는 과정을 보통 사용하는 방법대로 식을 적절히 변형하여 문자를 하나씩 소거해 나가는 것과 그 과정을 계수만 늘어놓고 진행한 것을 함께 비교하여 설명한다.

(지도상의 유의점) Gauss 소거법은 기본행변환 3가지 방법을 적절히 사용하며 행렬을 변화시키며 보다 간단한 행렬로 변형하는 방법이고 이때, 선행변수를 기준으로 아래쪽 행의 성분을 0으로 만들며 진행하게 된다. 이후 아래 행부터 해석하여 해를 구해주면 된다. Gauss Jordan 소거법은 Gauss 소거법에 추가적인 요소가 두 가지가 적용 되는데, 선행변수의 계수는 항상 1이어야 하고, 둘째는 각 행에서 선행변수를 제외한 나머지 열의 성분이 모두 역시 0이 되어야 한다. 이런 과정을 문제를 직접 풀어주며 설명을 해주고 이후 학생이 직접 풀이를 해보도록 이해도를 점검한다.

[질문 2-3] 세 공간벡터 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$는 $\mathbb{R}^3$를 생성하지 않음을 보여라.

(학생의 이해도) 생성에 대한 개념 이해 부족으로 문제해결을 어려워함

(학습지도 내용) $\mathbb{R}^3$의 임의의 벡터 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$에 대해서

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

라 두고, Gauss소거법으로 풀어보자.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c-b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-c+4b \end{pmatrix}$$

로부터, $a-c+4b \neq 0$인 경우는 해를 갖지 않으므로 생성할 수 없다. 즉, 세 벡터는 평면 $x+4y-z=0$만을 생성한다.

(지도상의 유의점) 한 벡터가 다른 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 있을 때 그 벡터가 다른 벡터들에 의하여 생성된다고 한다. 여기서 일차결합으로 나타낼 수 있기 위해서는 각 벡터들에 곱해지는 상수가 존재해야 하며 이것을 예를 들어 설명하여 개념이해를 먼저 시킨다. 그리고 생성을 묻는 문제는 두 가지 종류가 가장 많은데 하나는 공간전체의 생성여부에 관한 문제이고 또 다른 하나는 어떤 벡터를 생성하는가에 대한 문제이다. 위의 문제는 전자에 속하며 이 문제의 경우 가우스소거법을 통해 사다리꼴로 변형된 행렬의 마지막 행을 나타내는 일차방정식이 좌변은 0이지만 우변은 $a-c+4b$이다. $a-c+4b$는 a, b, c가 임의의 상수이므로 0이 아닌 값이 될 수 있고 따라서 $\mathbb{R}^3$의 벡터 중에는 일차결합으로 표현할 수 없는 벡터들이 존재한다. 따라서 주어진 벡터들은 $\mathbb{R}^3$에 속하는 모든 벡터를 생성하지 않는다. 위의 문제가 만약 후자의 문제에 속한다면 $a-c+4b=0$를 만족하는 a, b, c에 대해서 일차결합이 가능하므로, 이 문제의 세 벡터는 평면 $x-z+4y=0$를 생성한다.

5.3 행렬과 연산

[질문 3-1] 정사각행렬의 LU분해에 대해 설명하여라.
(학생의 이해도) LU분해의 개념과 구하는 방법을 잘 알지 못함
(학습지도 내용) LU분해는 $A=LU$를 만족하는 하삼각행렬 L과 상삼각행렬 U를 구하여 정사각행렬을 두 삼각행렬의 곱으로 나타낼 수 있음을 의미한다. 여기서, U는 주어진 행렬 A를 기본행변환을 사용하여 상삼각행렬로 변환시킨 상삼각행렬이다. 이때, 두 행을 서로 바꾸는 기본행변환은 적용할 없음을 그 이유와 함께 설명해준다. 그리고 하삼각행렬 L은 A에서 U로 변환시키는 과정에서 사용한 모든 기본행렬들의 곱의 역행렬이다.

이울러, 주어진 연립일차방정식 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$에 대하여 $A=LU$를 만족하는 하

삼각행렬 L과 상삼각행렬 U를 먼저 계산하였다면, $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$라고 두고 $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$를 만족하는 $\boldsymbol{y}$를 구한 다음, $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$를 계산함으로서 연립일차방정식의 해 $\boldsymbol{x}$를 결과적으로 구할 수 있다.

(지도상의 유의점) LU분해는 Gauss 소거법과 함께 연립일차방정식의 해를 구하는 한 방법임을 알려주고, 두 삼각행렬의 곱으로 표현하였을 때 이후에 공부하는 행렬식의 계산 등에도 유용하게 사용될 수 있음을 강조한다.

5.4 행렬식

[질문 4-1] 행렬식 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ca & ab \\ b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \end{vmatrix}$을 구하여라.

(학생의 이해도) 행렬식의 성질을 잘 이해하지 못하여, 행렬식을 정확히 구하지 못함

(학습지도 내용) 이 문제에서는 여인수 전개로 행렬식을 구하려는 시도를 학생들이 많이 하고 있으나, 결과 식이 복잡하여 인수분해하여 간단히 정리하는 것이 쉽지 않다. 따라서 다음과 같이 행렬식의 성질을 이용하여 문제를 해결하도록 지도한다.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ca & ab \\ b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{bc}\begin{vmatrix} abc & b^2c & bc^2 \\ bc & ca & ab \\ b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{bc}\begin{vmatrix} abc & -bc(a-b) & bc(c-a) \\ bc & c(a-b) & -b(c-a) \\ b^2c^2 & c^2(a+b)(a-b) & -b^2(c+a)(c-a) \end{vmatrix} \\
&= -bc(a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -b & c \\ bc & (a+b)c & -(a+c)b \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= -bc(a-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -b-a & c+a \\ 0 & ac & -ab \end{vmatrix}$$

$$= -bc(a-b)(c-a)\{(c-a)(-ab)-ac(c+a)\}$$

$$= -abc(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(지도상의 유의점) 행렬식은 정의에 따라 여인수 전개로 구하거나 행렬식의 성질을 이용하여 구할 수 있다. 질문하는 학생들 중에는 행렬식의 성질을 제대로 이용하지 못하는 경우가 많으므로, 행렬식의 성질을 예를 들며 설명해야 한다. 특히, 정사각행렬의 행렬식 계산에서 자주 사용되는 다음의 성질은 강조한다.

① 임의의 두 행(또는 열)을 바꾼 행렬의 행렬식은 부호가 바뀐다.

② 한 행(또는 열)에 0아닌 상수 c를 곱하면, 행렬식도 c배가 된다.

③ 두 행(또는 열)의 성분이 모두 같은 행렬의 행렬식은 0이다.

④ 행렬의 한 행에 다른 행을 상수배하여 더하여도, 행렬식은 같다.

[질문 4-2] 정사각행렬 A의 역행렬을 구하는 방법을 설명하여라.

(학생의 이해도) 주어진 행렬의 역행렬을 구하지 못하지만, 기본행렬과 행렬식에 대한 개념은 알고 있음

(지도내용 및 유의점) 정사각행렬의 역행렬은 기본행렬을 왼쪽에 곱하는 방법, 즉 기본행변환을 이용하는 방법과 행렬식 및 수반행렬을 이용하여 구하는 방법으로 크게 나누어진다. 여기서, 수반행렬은 A의 여인수를 성분으로 하는 행렬의 전치행렬인데, 이 수반행렬에 A의 행렬식의 역수를 곱하면 A의 역행렬이 된다. 이는 A의 수반행렬과 A의 곱이 행렬식과 단위행렬의 곱이 되기 때문이다.

(지도상의 유의점) 역행렬을 구하는 경우, 기본행변환을 활용하는 방법이 효과적이지만, 행렬식을 이용하는 방법도 유용하다. 이로부터, 몇 가지 조

건이 따르는 제한적인 연립일차방정식의 해를 쉽게 구하는 Cramer 공식을 쉽게 유도할 수 있음을 예와 함께 자세히 설명해준다.

5.5 벡터공간의 기본개념

[질문 5-1] $S=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\right\}$는 $\mathbb{R}^2$의 부분공간인가?

(학생의 이해도) 부분공간의 개념을 잘 이해하지 못함

(학습지도 내용) 이 경우는 S가 평면 $\mathbb{R}^2$부분공간이 아니라는 전제로, 부분공간의 조건을 만족하지 않는 반례를 들어 설명해준다.

예로, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$ 이지만, 두 벡터의 합은

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S$$

이므로, S는 $\mathbb{R}^2$의 부분공간이 아니다.

(지도상의 유의점) 주어진 부분집합이 벡터공간의 부분공간이 되는지를 알아보는 문제는 부분공간이 될 조건을 만족하는지 확인하면 된다. 즉, 주어진 부분집합이 영백터를 포함하고 있는지와 덧셈과 스칼라배에 대해 닫혀있는지를 확인하여야 한다. 이들 중에서 어느 하나라도 만족하지 않는 반례가 있으면 부분공간이 아님을 주지시킨다.

[질문 5-2] $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 일 때, 영공간 $N(A)$를 구하여라.

(학생의 이해도) 영공간의 정의를 알지 못하여 문제를 해결하지 못함

(학습지도 내용) Gauss-Jordan 소거법으로 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$의 해를 구하기 위해 기본행연산을 적용하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

가 된다. 따라서 자유변수 x_3, x_4를 $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta$라 두면, $x_1 = -5\alpha - 4\beta$, $x_3 = 2\alpha$이므로 구하려는 해 $\boldsymbol{x}$는

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5\alpha - 4\beta \\ 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\text{단, } \alpha, \beta \text{는 임의의 실수})$$

이다. 그러므로 $N(A) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \text{는 실수} \right\}$ 이다.

(지도상의 유의점) 영공간은 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 만족하는 해들로 이루어진 집합으로 한 부분공간이 된다. 즉, 행렬 A의 영공간은 일차연립방정식 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 해집합을 의미한다.

[질문 5-3] 일차독립과 일차종속을 구별하여 설명하여라.

(학생의 이해도) 일차독립과 일차종속을 생성의 개념과 연결하여 이해하지 못하기 때문에 그 차이를 잘 알지 못함.

(학습지도 내용) 벡터들에 대한 일차독립과 일차종속은 벡터들의 일차결합이 영벡터가 될 수 있는 상수의 조건에 따라 결정된다. 즉, 주어진 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$에 대하여, $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$인 경우, 상수 c_i가 모두 0이면 이들 벡터들은 일차독립이라고 하고, 상수 $c_1, c_2, \cdots, c_n$중에서 일부가 0아닌 해를 가질 수 있으면 일차종속이라 정의한다. 실제로, 한 벡터가 나머지 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 있으면 그들은 일차종속인 벡터들이고, 그렇지 않으면 일차독립이다.

예로, 세 벡터가 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$으로 나타낼 수 있

으므로, 이들은 일차종속인 벡터들이다. 그러나 한 벡터를 제외한 두 벡터 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$은 서로를 일차결합으로 나타낼 수 없으므로 일차독립이다.

때로는 주어진 각 벡터들을 열벡터 또는 행벡터로 나타내어 정사각행렬로 주어지는 경우, 행렬식이 0이 아니면 일차독립이고, 행렬식이 0이면 일차종속이라는 성질로부터 일차독립과 일차종속 여부를 판정할 수 있다.

(지도상의 유의점) 일차독립과 일차종속을 판정하는 방법들을 자세히 설명하여 상황에 따라 적절히 활용할 수 있도록 지도하여야 한다. 아울러, 이후에 소개되는 기저 및 차원과 연관하여 설명하면 개념 이해에 도움이 될 것이다.

5.6 고윳값과 고유벡터

[질문 6-1] $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$의 대각화를 이용하여, A^{2016}과 A^{2017}을 구하여라.

(학생의 이해도) 행렬의 대각화에 대해서는 일부 이해하고 있으나, 이를 이용하여 행렬의 거듭 곱을 간단히 구하는 방법은 알지 못함

(학습지도 내용) 먼저, 행렬의 특성방정식으로부터 고윳값을 구한 다음, 그들에 대응되는 고유벡터를 계산하여 대각화 가능여부를 알아본다.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -3-\lambda & -3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)^2 = 0$$

로부터, A의 고윳값은 $\lambda=0,\ -1$(중근)이고, 이들 고윳값에 대응하는 고유벡터를 구하면, 세 개의 일차독립인 고유벡터가 존재함을 알 수 있다. 따라서 A의 대각화 행렬 S와 대각행렬 D를 계산하여 다음을 구할 수 있다.

$$A^{2016} = SD^{2016}S^{-1} = SDS^{-1} = A,$$

$$A^{2017} = SD^{2017}S^{-1} = SD^2S^{-1} = -SDS^{-1} = -A$$

(지도상의 유의점) 대각화 관련 문제에서는 학생의 이해도에 따라 달리 설명해준다. 개념을 이해하고 있는 학생에게는 잘못된 풀이를 중심으로 확인하면서 직접 풀이를 도와준다. 고윳값과 고유벡터를 정확히 계산하지 못한 경우는 고윳값에 대한 개념 설명과 함께 풀이 과정을 설명해준다. 이때, 고유벡터는 영벡터가 아님을 주지시킨다.

5.7 선형변환과 행렬표현

[질문 7-1] 다음과 같이 정의된 두 선형변환 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$와 $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$에 대하여, $S \circ T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$를 구하여라.

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 + y_3 \\ 3y_2 - y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

(학생의 이해도) 선형변환의 개념을 잘 이해하지 못하고 표준표현행렬을 구하지 못하기 때문에, 두 선형변환의 합성함수 풀이에 어려움이 있음

(지도내용 및 유의점) 여기서는 두 선형변환에 대한 합성함수의 표준표현행렬을 구하면 된다. 따라서 주어진 선형변환 T와 S의 표준표현행렬을 먼저 구하도록 한다. T의 표준표현행렬을 A라 하면, 평면 $\mathbb{R}^2$에 속하는 벡터 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$에 대해서 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$를 만족해야하므로 A는 3×2행렬이어야 한다.

이때, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$라 두고 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$를 만족하는 표준표현

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\3&4\end{pmatrix}$를 구한다. 같은 방법으로, S의 표준표현행렬 B는 벡터 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$에 대해서 $S(\boldsymbol{y})=B\boldsymbol{y}$를 만족하여야 하므로, $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$을 구할 수 있다. 따라서 선형변환 $S\circ T$의 표준표현행렬 BA는 다음과 같다.

$$BA=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\3&-7\\6&3\end{pmatrix}$$

한편, 각 선형변환에 대한 표준표현행렬은 정의역에 속하는 표준기저의 상에 의해 쉽게 구할 수 있다. 예로, $\mathbb{R}^3$의 표준기저 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$에 대하여 선형변환의 선형성을 이용하면

$$\begin{aligned}S(\boldsymbol{y})&=S(y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2+y_3\boldsymbol{e}_3)\\&=(S(\boldsymbol{e}_1)\,S(\boldsymbol{e}_2)\,S(\boldsymbol{e}_3))\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(S(\boldsymbol{e}_1)\,S(\boldsymbol{e}_2)\,S(\boldsymbol{e}_3))\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

이므로, S의 표준표현행렬 B는 $B=(S(\boldsymbol{e}_1)\ S(\boldsymbol{e}_2)\ S(\boldsymbol{e}_3))$로 주어진다.

(지도상의 유의점) 선형변환의 표준표현행렬을 구하는 방법과 그로 인해 선형변환과 행렬은 일대일로 대응될 수 있음을 설명을 해준다. 또한, 두 선형변환의 합성함수의 표준표현행렬은 두 표준표현행렬의 곱으로 주어짐을 주지시킨다.

Ⅵ. 지필고사 오류 유형 분석

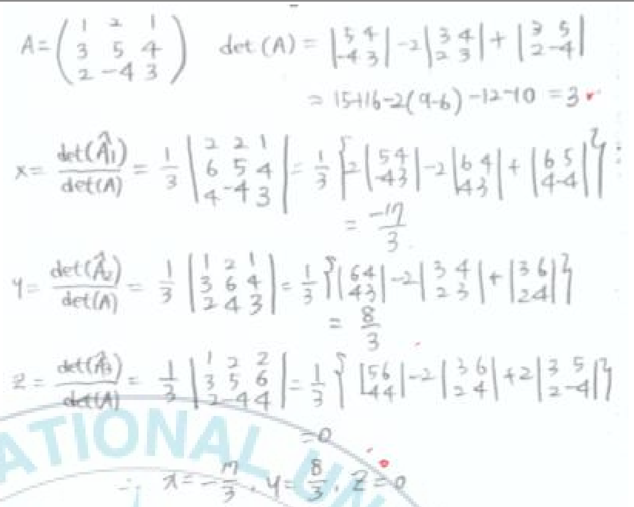
선형대수 교과목 수강학생들이 중간고사와 기말고사에서 자주 범하는 오답의 유형을 기술적 오류, 잘못 해석된 언어, 정리나 정의에 대한 이해 부족 및 잘못된 적용, 논리적으로 부적절한 추론, 논증되지 않은 풀이로 구분하여 분석하였다. 이러한 유형 분석은 선형대수 교과목 수강학생들의 효과적인 학습지원에 좋은 자료가 될 것이다.

6.1 기술적 오류

다음은 기술적 오류의 예시들이다. <그림 Ⅵ-1>은 벡터를 상수배하는 경우 성분 모두에 상수를 곱해야함에도 x성분만 상수배하고 y성분에는 곱하지 않았다. 그리고 <그림 Ⅵ-2>는 Cramer공식을 알고 있으나 행렬식 계산과정에서 실수를 하였다. 계산을 정확히 하기 위해서는 다양한 문제를 많이 풀어야하며 계산과정을 점검하는 자세가 필요할 것이다.

지필고사 문제	학생 답안
벡터 $\boldsymbol{a}=(4,8), \boldsymbol{b}=(6,12)$ 가 주어져 있다. 다음을 만족하는 벡터 $\boldsymbol{x}$를 구하여라. $x+2a-b=3(x+a)-4a+2b$	$x+2a-b=3x+3a-4a+2b$ $2x=3a-3b=3(a-b)$ $=3((4,8)-(6,12))$ $=3(-2,-4)$ $=(-6,-4)$ $2x=(-6,-4)$, $x=(-3,-2)$

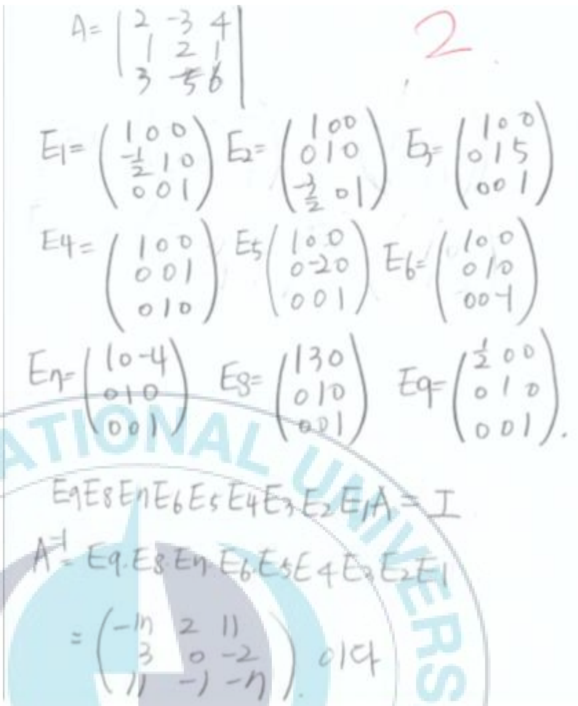
<그림 Ⅵ-1> 기술적 오류 예시(1)

지필고사 문제	학생 답안
Cramer공식을 써서 다음 연립 일차방정식의 해를 구하여라. $\begin{cases} x+2y+\ \ z=2 \\ 3x+5y+4z=6 \\ 2x-4y+3z=4 \end{cases}$	

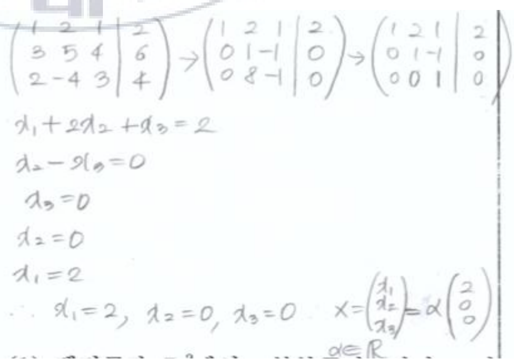
<그림 Ⅵ-2> 기술적 오류 예시(2)

6.2 잘못 해석된 언어

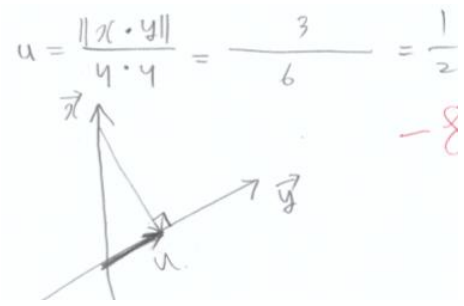
다음은 잘못 해석된 언어의 예시들이다. <그림 Ⅵ-3>은 문제에서 수반행렬을 구한 다음, 수반행렬을 이용하여 역행렬을 구하라고 하였으나 수반행렬을 구하지 않고 기본행렬을 이용하여 역행렬을 구하는 방법을 사용하였다. 그리고 <그림 Ⅵ-4>는 Cramer 공식으로 해를 구하여야 하지만 학생의 답안에서는 가우스 소거법을 이용하여 해를 구하고 있다. <그림 Ⅵ-5>는 스칼라사영과 벡터사영을 모두 구해야 하는데 스칼라사영만 공식을 이용하여 구하였다.

지필고사 문제	학생 답안
다음 행렬의 수반행렬을 구하고 수반행렬을 이용하여 역행렬을 구하여라. $$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 6\end{pmatrix}$$	

<그림 VI-3> 잘못 해석된 언어 예시(1)

지필고사 문제	학생 답안
Cramer 공식을 써서 다음 연립 일차방정식의 해를 구하여라. $$\begin{cases} x+2y+z=2\\ 3x+5y+4z=6\\ 2x-4y+3z=4\end{cases}$$	

<그림 VI-4> 잘못 해석된 언어 예시(2)

지필고사 문제	학생 답안
두 벡터 $\boldsymbol{x}=(2,-1,1)$, $\boldsymbol{y}=(1,-2,-1)$에 대하여 $\boldsymbol{y}$ 위로의 $\boldsymbol{x}$의 스칼라 사영 u와 벡터사영 $\boldsymbol{v}$를 각각 구하여라.	

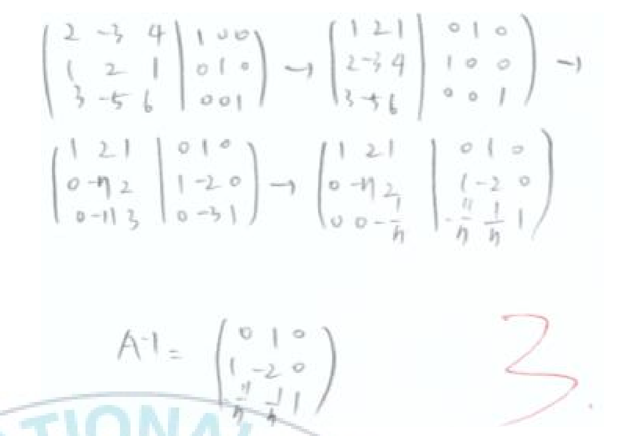
<그림 VI-5> 잘못 해석된 언어 예시(3)

6.3 정리와 정의에 대한 이해 부족

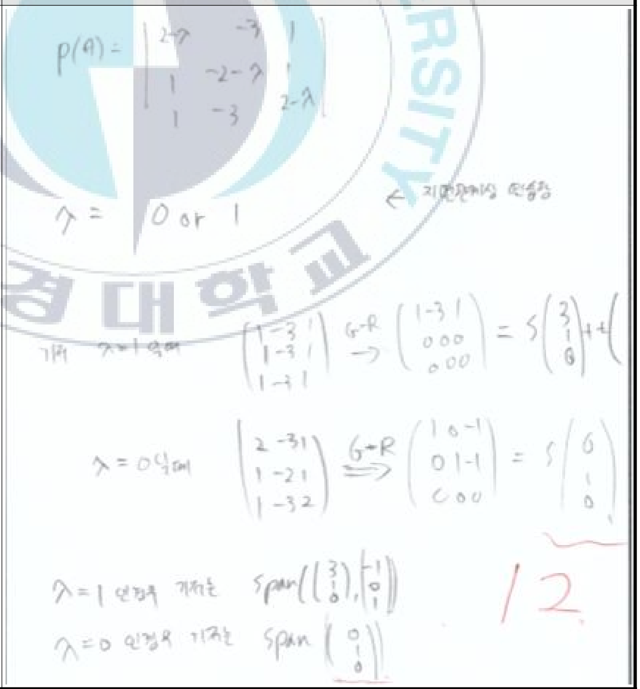
다음은 정리와 정의에 대한 이해 부족에 따른 오답의 예시들이다. <그림 VI-6>의 행렬식 계산에서는 두 행의 위치를 서로 바꾸면 행렬식의 부호가 바뀌는 것을 간과하여 오답이 되었다. 그리고 <그림 VI-7>은 기본행렬을 이용하여 역행렬을 계산하는 문제인데, 주어진 행렬을 단위행렬이 될 때까지 기본행연산을 시행하여야함에도 삼각행렬이 될 때까지 시행하여 역행렬을 제대로 구하지 못하였다. 이는 역행렬을 구하는 방법에 대한 이해 부족에서 나타난 오답으로 판단된다.

지필고사 문제	학생 답안
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = 3$일 때, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2i & -2j & -2k \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$를 구하여라.	

<그림 VI-6> 개념에 대한 이해 부족 예시(1)

지필고사 문제	학생 답안
기본행렬을 이용하여, 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하여라.	

<그림 VI-7> 개념에 대한 이해 부족 예시(2)

지필고사 문제	학생 답안
행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여, A의 특성다항식, 고윳값과 고유공간의 기저를 각각 구하여라.	

<그림 VI-8> 개념에 대한 이해 부족 예시(3)

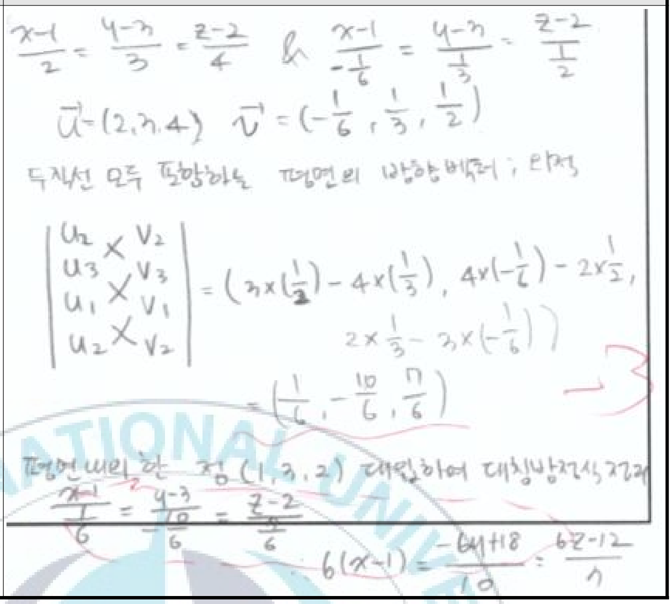
또한, <그림 Ⅵ-8>은 고윳값을 계산하는 방법에 대해서 알고는 있지만 고유공간을 구하는 과정에서 해를 구하는 방법에 대한 이해가 부족하여 오답이 발생하였다. 이러한 경우, 정리나 정의에 대한 자세한 설명과 함께 관련된 여러 예제를 풀이하며 충분한 연습이 이루어지도록 지도하여야 한다. 비슷한 용어에 대해서는 그 차이점을 자세히 설명해주어야 할 것이다.

6.4 정리와 정의에 대한 잘못된 적용

다음은 문제풀이 과정에서 정리와 정의를 잘못된 적용한 예시들이다. <그림 Ⅵ-9>는 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각을 구하는 과정에서, 두 벡터의 내적을 절댓값을 취하여 구함으로 코사인 값의 부호가 바뀌어 오답이 되었다. 그리고 <그림 Ⅵ-10>은 평면의 법선벡터와 평면이 지나는 한 점은 구하였으나, 평면의 방정식을 구하는 과정에서 평면의 방정식이 아닌 직선의 방정식을 구하여 오답이 발생하였다. 선형대수 교과목에는 새로 접하는 다양한 정의와 정리가 있으므로, 그 의미를 정확히 이해하도록 반복하여 지도하여야할 것이다.

지필고사 문제	학생 답안
두 벡터 $\boldsymbol{u} = (-1, 1, -1, -1)$와 $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4, 2)$가 이루는 각을 구하여라.	$\dfrac{(\lvert -1+2-4-2 \rvert)}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{(1)^2+(2)^2+(4)^2+(2)^2}} = \dfrac{\lvert -5 \rvert}{2\times 5} = +\dfrac{1}{2} = \cos\theta \quad \therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

<그림 Ⅵ-9> 잘못된 적용 예시(1)

지필고사 문제	학생 답안
두 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{4}$ 와 $-6x+6=3y-9=2z-4$ 를 동시에 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.	

<그림 VI-10> 잘못된 적용 예시(2)

6.5 논증되지 않은 풀이

다음은 논증되지 않은 풀이에 관한 예시들이다. <그림 VI-11>의 답안은 역행렬을 구하는 방법은 잘 알고 있으나, 수반행렬을 구하는 과정이 구체적으로 제시되어 있지 않아 문제에서 요구한 풀이 방법을 정확히 사용하였다고 보기는 어렵다. <그림 VI-12>는 풀이 과정은 정확하나 점과 직선까지의 거리를 구하는 과정을 생략하고 답을 구하려다가 실수를 범하였다. 주어진 문제에 대해 논리적이지 않는 풀이로 답을 구하거나 계산과정을 생략하거나 마지막에 검산을 하지 않는 습관은 오답을 양산할 수밖에 없다. 따라서 문제를 정확히 이해하고 정확한 계산과 함께 최종적으로 문제에서 요구한 답이 맞는지 점검하는 자세를 갖도록 지도할 필요가 있다.

지필고사 문제	학생 답안
행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$에 대하여, 수반행렬을 구하고, 수반행렬을 이용하여 역행렬을 구하여라.	$X=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ 이라 하면 $\det(X) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $= -1$ $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \mathrm{adj}(X)$ 이므로 5. $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -13 \\ -3 & 0 & 2 \\ -11 & -1 & 11 \end{pmatrix} = -1 \cdot \mathrm{adj}(X)$ $\mathrm{adj}(X) = \begin{pmatrix} -19 & -2 & 13 \\ 3 & 0 & -2 \\ 11 & 1 & -11 \end{pmatrix}$

<\그림 VI-11> 논증되지 않은 풀이 예시(1)

지필고사 문제	학생 답안
점 $P=[3,4,5]$에서 직선 $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+2}{3}$에 내린 (1) 수선의 발 H의 좌표와 (2) 점 P의 직선에 대한 대칭점의 좌표 (3) 점 P에서 직선까지의 거리를 구하여라.	$\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{3} = t$ $x=5t-2,\ y=4t+3,\ z=3t-2$ $\vec{PH} = (5t-5,\ 4t-1,\ 3t-7)$ $\vec{d}\cdot(5,4,3) = 25t-25+16t-4+9t-21=0$ $50t-50=0 \quad t=1$ H의 좌표 = (3, 7, 1) P와 대칭점 의 중점 : H (1) (3, 7, 1) (2) (3, 10, -3) (3) $d=10$

<그림 VI-12> 논증되지 않은 풀이 예시(2)

선형대수 교과목 수강학생들의 오답을 분석한 결과, 일부 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 간단한 계산 실수를 범하거나 문제에서 제시한 방법으로 풀이를 하지 못하였다. 그리고 기본개념이 부족하고 자신이 알고 있는 정리나 정의를 문제에 적용하는 과정에서 논리적이지 못하거나 부적절한 방법으로 문제를 풀이하였다. 때로는 개념에 대한 이해가 부족하여 풀이를 정확하게 하지 못하거나 어느 정도 이해는 하고 있으나 계산 실수를 범하는 경우도 종종 있었다.

Ⅶ. 결론 및 제언

7.1 결론

본 논문에서는 P대학에서 선형대수 교과목을 수강한 학생들을 대상으로, 수학 교과에 대한 인식과 태도, 수학적 배경 등이 학생들의 학업성적에 미치는 영향을 파악하기 위하여 설문조사를 실시하고 그 결과를 조사하였다. 그리고 수학카페에서 자주 질문하는 내용들을 단원별로 정리하여 의문사항에 대한 학습지원 방안을 제시하고 지필고사에서 학생들이 작성한 오답을 분석하였는데, 그 주요 연구결과는 다음과 같다.

첫째, 수학에 대한 인식과 태도에 대한 설문조사에서, “학생들은 수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다”에서 ‘아주 그렇다’와 ‘그렇다’에 응답한 학생은 81.7%로서 문제해결시 얻는 성취감과 보람을 학생들이 느끼고 있음을 알 수 있고 “수학에 흥미를 가지고 있다”와 “문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다”에서는 각각 52.1%와 51.4%로 나타났다. 그러나 “수학시험은 항상 어렵게 느껴진다”와 “수학문제를 풀이할 때 자신감이 있다” 및 “문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다”에서는 각각 39.6%와 28.5% 및 39.6%로서 수학문제에 대해 부담감을 느끼고 있고 자신감이 부족한 것으로 드러났다.

둘째, 통계프로그램 SPSS 23을 이용하여, 수학 교과에 대한 학생들의 인식 및 태도와 선형대수 교과목 취득성적간의 상관관계를 구한 결과, “수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다”, “수학에 흥미를 가지고 있다”, “수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다”와 “수학 시험은 항상 어렵게 느껴

진다” 문항에서는 선형대수 교과목 취득성적과 통계적으로 유의한 상관관계가 있는 것으로 나타났으나, “수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다”와 “문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다”에서는 선형대수 성적과 특별한 상관관계가 없는 것으로 나타났다.

셋째, 선형대수 교과목 학습의 어려움을 묻는 문항에서, 학생들은 ‘문제풀이 계산 실수’, ‘기초개념 이해 부족’, ‘증명 문제’, ‘문제 내용 이해 부족’, ‘학습량 과다’, ‘선행학습 부족’ 등의 순서로 답하였다. 실제로, 선형대수 교과목 수강학생들은 기초개념 부족으로 상위개념 이해에 상당한 어려움을 느끼고 있으며 개념과 관련한 기본적인 문제풀이에 대한 이해가 부족하여 응용문제풀이에 어려움을 느끼는 것으로 나타났다.

넷째, 선형대수 교과목 학습내용별 이해 정도에 대한 응답 결과, 벡터의 기본개념, 유클리드 벡터의 연산, 공간벡터와 그 활용, 연립일차방정식 등은 이해하고 있다고 하였으나, 다수의 학생들은 행렬식, 벡터공간의 기저, 고윳값과 고유벡터, 행렬의 대각화, 선형변환 등에 대해서는 잘 이해하지 못하고 있다고 응답하였다. 학생들은 개념과 관련한 정의나 정리에 대한 이해가 부족하고 그것들을 문제에 적용하는 것과 계산이 복잡한 문제풀이 등에 대해 어려움을 느끼고 있었다.

다섯째, 지필고사에서 오답을 작성한 학생들은 비슷한 유형의 오류를 범하고 있었으며, 그 오류들은 문제에 주어진 지시어를 파악하지 않고 문제를 해결하려는 경우, 주어진 문제풀이에 적합한 방법을 사용하지 못해 풀이가 복잡해지거나 잘못된 경우, 문제풀이 과정이나 답을 도출하는 과정에서 계산 실수를 하는 경우, 수학적 개념이나 정리를 정확히 이해하지 못하는 경우, 논리 전개가 미흡한 경우, 또는 검산하지 않는 경우 등의 오답을 기술하였다.

7.2 제언

이러한 연구결과를 토대로, 효율적인 선형대수 교과목 학습지원 방안을 다음과 같이 제안한다.

첫째, 수강학생들의 수학 교과에 대한 흥미와 수학 문제풀이에 대한 자신감은 학업성적에 유의미한 영향을 끼치는 것으로 나타났다. 따라서 담당교수는 학생들의 학습 동기유발을 위한 다양한 교수법을 수업시간 활용하여야할 것이고, 수학 문제풀이에 대한 자신감을 갖도록 문제풀이 과정을 자세히 보여주고 그 과정에서 사용된 정리나 개념을 강조하며 다양한 문제를 풀이할 수 있는 기회를 제공해야할 것이다.

둘째, 선형대수의 학습내용은 처음 배우는 내용과 학습량이 많기 때문에, 주 3시간의 강의로는 학생들의 학습내용에 대한 질문에 응답하기 어렵고 연습문제나 과제의 풀이가 어려우므로, 1주에 1시간 이상의 질의응답 및 문제풀이 시간을 가지는 시간이 요청된다. 이 경우, 전시학습 내용에 대한 복습과 학습내용과 관련한 질의응답, 다양한 문제풀이 시간을 통해 개념을 충분히 이해한 후 그것을 활용할 수 있도록 지도하여야할 것이다.

셋째, 대학에서는 고등학교 수학교육과정 개정을 고려하여 각자의 전공분야에 필요한 내용으로 교과내용을 보완하여야할 것이고, 수강학생의 학력수준을 고려하여 학습수준을 조정하여야할 것이다. 특히, 처음 학습하는 내용들에 대해서는 개념이해와 응용 위주의 단순한 문제로 교체하고 계산이 지나치게 복잡한 문제는 지양하여야할 것이다.

넷째, 학생들이 자주 질문하는 문제나 학습내용에 대해서는 특별히 강조하여 지도하도록 한다. 이때, 문제에 대한 학생들의 이해도와 유의점을 고

려하여 학력수준에 적합한 방법을 택하여 지도하여야할 것이다. 또한, 개별지도 방식으로 운영하고 있는 수학카페는 교양수학 수강학생들의 학력향상에 많은 도움을 주고 있으므로, 개별지도를 포함한 이와 유사한 학습지원 체제가 확산되었으면 한다.

다섯째, 선형대수 교과목은 이공계열 학생들이 처음 배우는 내용들이 많으므로, 자세한 보충 설명을 통해 전공과 관련하여 어떻게 적용되고 활용되는지를 알려줌으로써 새로운 수학적 내용의 필요성을 강조하고, 또한, 지필고사 답안작성에서 학생들이 자주 범하는 오류를 유형별로 분석하여 선형대수 교과목 학습지도에 적극 활용하도록 한다.

참 고 문 헌

[1] 김범석 (2009), 공간도형의 문제해결과정에서 나타나는 수학적 오류 유형 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[2] 김부미 (2009), 수학적 오류를 활용한 개념 성장 학습 활동의 실제 적용 가능성 탐색, 13(2), 393-415.

[3] 김태수·김병수 (2008), 대학수학의 수준별 수업에 따른 대학 교양 수학 성취도 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 22(3), 369-382.

[4] 김희진 · 서종진 · 표용수 (2011), 대학 입학예정자를 위한 기초수학 수준별 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집, 14(3), 339-354.

[5] 박미정 (2012), 학업성취도가 낮은 학생들을 위한 효과적인 수학수업 방안 연구, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

[6] 박준식 · 표용수 (2013), 대학 입학예정자를 위한 기초수학특강의 학업성취도 분석, East Asian Math. J., 29(2), 395-409.

[7] 부경대 (2016), 선형대수의 기초와 응용, 제3판, 보성각.

[8] 서종진·조승희 (2018), 개별지도가 대학수학 기초학력 부진 학생들의 수학 학업성취도와 수학 태도에 미치는 영향, 한국학교수학회논문집, 21(3), 287-301.

[9] 송승천 (2018), 취미활동 및 개별지도에서 수학학습의 정의적 영역 변화 분석 연구, 동국대학교 교육대학원 석사학위논문.

[10] 송유진 (2017), 서술형 평가에서의 수학적 오류 분석과 그에 대한 지도 방안 연구, 인하대학교 교육대학원 석사학위논문.

[11] 송윤희·김성환 (2012), 대학 튜터링 프로그램이 수학 학습성과에 미치는 영향 -H대학교 사례를 중심으로-, 교과교육학연구 16(2), 441-459.

[12] 신준국・유상인・김양희 (2014), 수학 기초학력 미달자의 수준별 수업에서 효율적인 지도 방법, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 28(1), 81-96.

[13] 안종수 (2019), 서술형 답안 오류 분석 수업이 수학 학습에 미치는 영향, 학습자중심교과교육학회, 19(2), 139-169.

[14] 윤대열 (2005), 제 7차 교육과정하에서 수학교육의 문제점 연구 : 2005 학년도 대학수학능력모의평가를 바탕으로, 상명대학교 교육대학원 석사학위논문.

[15] 이수열 (2005), 자기주도적인 학습에 의한 수학과 학습 부진학생의 지도에 관한 연구, 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.

[16] 임연휘·표용수 (2015), 수학 기초학력 평가들 간의 상관관계 분석을 통한 교양수학 교과목 학습지도 방안, 한국학교수학회논문집, 18(3), 335-352.

[17] 장민우·표용수 (2016), 대학 신입생들의 수학 기초학력 평가들 간의 상관관계 및 오류 유형 분석, East Asian Math. J., 32(4), 501-518.

[18] 최태영 (2018), 개별지도를 통한 기초수학 교과목 학습지원에 관한 연구, 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.

[19] 한창훈 (2011), 인문계 고등학교 부진아를 위한 수학교육, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

[20] 황정환 (2017), 대학 입학예정자를 위한 기초수학 교과목 학습지도 방안, 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.

[21] Babbit, B. C. (1990), Error patterns in problem solving, Paper presented at the International Conference of the Council for Learning Disabilities, ED 338-500, 1-11.

[22] Borasi, R. (1996), Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors. Ablex Publishing Corporation.

[23] Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Shlomo, I. (1987), An empirical classification model for errors in high school mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, 18(1), 3-14.

[24] Radatz, H. (1979), Error analysis in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education, 10(3), 163-172.

[부록] 선형대수 교수-학습법 개선을 위한 설문조사

선형대수 수강학생 설문조사

이 설문지는 수강학생 여러분의 의견을 수렴하여, 선형대수 교과목 학습지도 및 수학카페 운영에 활용하고자 준비한 것입니다. 개인의 인적사항이나 개인별 설문조사 결과는 절대 공개하지 않으며 수학카페 운영자료 및 선형대수 학습지도를 위한 연구 자료로만 활용할 것입니다. 성실하게 응답해 주시기 바랍니다.

2017년 12월

분반		학번		학과		성명	

- 설문 내용 -

1. 출신 고등학교(또는 계열)는 다음 중 어느 것입니까?
   ① 일반계 인문계열 ② 일반계 자연계열 ③ 전문계 또는 특수고 ④ 기타(검정고시 등)

2. 대학수학능력시험 수학 응시유형은 무엇입니까?
   ① 가형 ② 나형 ③ 미응시

3. 수학 교과에 대한 인식과 태도(해당란에 O으로 표시)

문항	내 용	아주 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 수학문제를 해결하고 나면 기분이 좋아진다.					
2	나는 수학에 흥미를 가지고 있다.					
3	수학 시험은 항상 어렵게 느껴진다.					
4	나는 수학 문제를 풀이할 때 자신감이 있다.					
5	나는 수학 문제를 풀려고 하면 긴장하게 된다.					
6	문제를 풀기위해 여러 가지 수학적 방법을 생각한다.					

4. 선형대수 교과목 학습과정에서 어려움이 있었다면, 그 이유는 무엇이라고 생각합니까? (중복 응답 가능)
   ① 선행학습 부족 ② 기초개념 이해 부족 ③ 문제내용 이해 부족
   ④ 문제풀이 계산 실수 ⑤ 증명문제 ⑥ 학습량 과다
   ⑦ 기타( )

5. 선형대수 세부 학습내용에 대한 이해 (이해도에서는 해당란에 O으로 표시하고, 어려웠던 내에 대해서는 구체적으로 작성)

세부 학습내용	이해도					학습내용이나 문제풀이 과정에서 어려웠던 내용
	잘 이해하고 있다	이해하고 있는 편이다	보통이다	조금 이해하고 있다	거의 이해하지 못한다	
벡터의 개념, 유클리드 벡터의 연산						
공간벡터와 그 활용 (직선·평면방정식)						
연립일차방정식						
행렬과 연산						
행렬식(역행렬)						
유클리드 벡터공간과 부분공간						
벡터공간의 기저 (일차독립, 생성)						
고유값과 고유벡터, 행렬의 대각화						
선형변환						

6. 선형대수 수업에 대한 건의사항이 있으면, 다음 란에 적어주시기 바랍니다.
