교 육 학 석 사 학 위 논 문

# 일차방정식 해결과정에서의
# 오류교정에 관한 연구

2021년 2월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

정 운 정

교 육 학 석 사 학 위 논 문

# 일차방정식 해결과정에서의 오류교정에 관한 연구

지도교수 서 종 진

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2021년 2월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

정 운 정

# 정운정의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2021년 2월 19일



주 심 이학박사 조 성 진 (인)

위 원 이학박사 우 창 화 (인)

위 원 교육학박사 서 종 진 (인)

# 목 차


표 목차 ······ ii

그림 목차 ······ iii

Abstract(in English) ······ iv

Ⅰ. 서론 ······ 1

1. 연구의 필요성과 목적 ······ 1

2. 연구문제 ······ 2

3. 연구의 제한점 ······ 3

Ⅱ. 이론적 배경 ······ 4

1. 오개념 ······ 4

2. 수학적 오류 ······ 6

Ⅲ. 연구 대상 및 방법 ······ 13

1. 연구 대상 ······ 13

2. 연구 방법 ······ 13

Ⅳ. 연구 자료 분석 및 결과 ······ 15

1. ‘일차식과 일차방정식’ 문제 해결과정에서의 오류 분석 및 교정 방안 ······ 15

2. ‘일차방정식의 활용’ 문제 해결과정에서의 오류 분석 및 교정 방안 ······ 28

Ⅴ. 결론 ······ 33

참고문헌 ······ 36

# 표 목차

<표 Ⅳ-1> 방정식과 항등식 관련 문제 해결과정에서의 오류………… 15
<표 Ⅳ-2> 등식의 성질을 이용한 문제 해결과정에서의 오류………… 17
<표 Ⅳ-3> <표 Ⅳ-2> 문항4의 풀이…………………………………………………… 19
<표 Ⅳ-4> 이항을 이용한 문제 해결과정에서의 오류…………………………… 19
<표 Ⅳ-5> 분배법칙을 이용한 문제 해결과정에서의 오류……………………21
<표 Ⅳ-6> 해가 0인 일차방정식 문제 해결과정에서의 오류………… 23
<표 Ⅳ-7> 특수한 해를 가지는 문제 해결과정에서의 오류……………… 24
<표 Ⅳ-8> 계수가 분수인 일차방정식 해결과정에서의 오류…………… 26
<표 Ⅳ-9> 나이 관련 문제 해결과정에서의 오류…………………………………… 28
<표 Ⅳ-10> 일 관련 문제 해결과정에서의 오류…………………………………… 29
<표 Ⅳ-11> 거리, 속력, 시간 관련 문제 해결과정에서의 오류……… 31

# 그림 목차

<그림 Ⅳ-1> 방정식과 항등식 관련 문제의 예 ···································· 16

<그림 Ⅳ-2> $0x=0$ 형태의 일차방정식의 해 ······································ 25

<그림 Ⅳ-3> $0x=b\,(b\neq 0)$ 형태의 일차방정식의 해 ···························· 26

A Study on the Error Correction in solving Linear Equation

Un Jeong Jeong

*Graduate School of Education*
*Pukyong National University*

## Abstract

This study investigated and analyzed error related data among the existing research data related to the contents of linear expressions and equations. Errors made in the problem solving process were investigated based on the investigated data to classify the types of errors based on mathematical concepts.

First, in the question for the distinction between a linear expression and a linear equation, there was an error of confusing the question of simplifying the linear expression and the problem of calculating the solution of the linear equation.

Second, in the question for the solution of a linear equation, there was an error of multiplying only the terms with fractional coefficients by the least common multiple and not the constant term.

Third, in the process of solving a linear equation using transposition, there were a type of error that did not change the sign and that involved calculation mistakes.

Fourth, in the process of expanding a linear expression using the distributive law, there was an error of multiplying only the x term by the factor and not the constant term.

Fifth, there were types of errors made by those who did not understand that multiplying a number by 0 results in 0 and could not solve a linear equation and those who did not understand that there is no solution for a linear equation in the form of $0x = b(b \neq 0)$.

Sixth, in the descriptive question, the subjects successfully constructed a

simultaneous linear equation using unknowns, x and y, however, made an error of presenting the x value as an answer while the y value was the answer required by the problem. There was also a type of error where the subject constructed one equation successfully but failed with the other equation in the process of constructing a simultaneous linear equation.

# Ⅰ. 서론

## 1.1 연구의 필요성과 목적

초등학생들은 주로 산술 문제나 직관을 통한 수학 학습을 한다. 그리고 중학생이 되면 문자를 사용한 식을 다루게 되면서 초기에는 수학 학습에 어려움을 겪게 되고, 문자를 사용한 식을 해결하는 과정에서 오류를 범하기도 한다. 이러한 오류가 적절한 시기에 교정이 이루어지지 않으면 다음 수학 학습에 많은 지장을 초래하고 수학 개념을 학습할 때 개념을 이해하기보다는 암기하여 문제를 해결하려는 경향도 일어날 것이다.

학생들이 문제 해결과정에서 보이는 오류들에 대해 Babbit(1990)은 계산 오류, 연산 오류, 잡다한 오류 그리고 시도하지 않은 오류로 분류하였다(정다희, 2011, 재인용). 신인숙(1996)은 문제 자료를 잘못 사용하는 오류, 문제 내용을 잘못 해석하는 오류, 정리 또는 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 문제에서 요구하지 않은 것을 답한 경우, 기술적인 오류, 풀이과정의 생략, 오류의 애매모호함의 일곱 가지 범주로 오류의 유형을 분류하였다.

학생들이 수학 개념을 잘 이해하고 응용할 수 있도록 지도하는 것은 중요하다. 또한, 학생 개개인이 어떠한 수학 개념을 이해하지 못하여 오류를 범하는지 면밀하게 분석하여 지도하여야 할 것이다. 또한 수학 문제해결 과정에서 범한 오류가 적절한 시기에 교정되어질 수 있도록 지도해 주어야 할 것이다. 오류를 교정하기 위해서는 오류를 범한 원인을 찾아야 한다. 어떠한 수학 개념을 이해하지 못하여 발생하였는지에 대하여 명확한 분석이

필요할 것이다. 현재 학습하고 있는 개념과 관련된 문제를 해결할 때 오류가 일어났을 경우에는 그 개념을 이해하지 못하여 오류가 일어났는지, 현재 학습한 수학 개념과 문제와 직접 관련된 하위 수학개념을 이해하지 못하여 오류를 범하였는지, 등 여러 가지를 고려하여 분석을 하여 교정하여야 할 것이다.

문자를 사용한 식이나 일차방정식을 해결하는 과정에서 일어날 수 있는 오류는 여러 가지가 있다. 단순한 계산 과정에서 일어나는 오류, 항등식과 방정식을 구별하지 못해서 일어나는 오류, 등식의 성질이나 이항의 개념을 이해하지 못하여 일어나는 오류 등 여러 가지를 고려할 수 있다. 본 연구에서는 2015 개정 수학과 교육과정 중 ‘문자와 식’ 영역에서 다루는 ‘식의 계산’, ‘일차 방정식과 일차 부등식’, ‘연립 일차 방정식’과 관련된 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류를 조사하여 유사한 형태의 오류 유형으로 분류하고 오류 교정 방안에 대하여 모색하였다.

## 1.2 연구문제

선행 연구되어 있는 논문의 자료를 활용하여 ‘문자와 식’ 단원에서 학생들의 문제 해결과정의 실제 예시를 중심으로 학생들의 오류를 수집하여 분석하고, 오류 유형에 따른 교정방법을 연구하기 위해 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1 중학교 수학의 ‘문자와 식’ 단원의 ‘문자의 사용과 식의 계산’, ‘일차 방정식의 풀이’, ‘일차 방정식의 활용’ 단원에서 각각의 문제 해

결과정에서 어떠한 오류 유형이 발생하는가?

연구문제 2 연구문제 1.에서 연구한 오류 유형에 따른 교정방안은 어떤 것이 있는가?

## 1.3 연구의 제한점

본 연구에서는 선행된 연구자료 중 연구자가 채택한 본 연구와 관련된 일부의 자료만을 활용하여 연구하였기 때문에 모든 학생에게 일반화하기에 제한점을 가진다.

# Ⅱ. 이론적 배경

## 2.1. 오개념

‘오류’에 대한 사전적 정의를 국립국어원의 표준국어대사전에서 찾아보면 첫 번째 뜻이 “그릇되어 이치에 맞지 않는 일”이고 두 번째의 뜻이 “사유의 혼한, 감정적인 동기 때문에 논리적 규칙을 소홀히 함으로써 저지르게 되는 바르지 못한 추리”라고 설명되어 있다. 또한 김부미(2006)의 연구에서는 수학적 오류를 “수학 학습을 할 때, 학생의 오개념에 의해서 체계적으로 나타나는 학습 과정과 결과”라고 정의하고 있다.

Norman(1996)은 실수를 착오와 오류로 구분하여 의미를 설명하였다. 착오는 목표와 행위를 알맞게 연결하였으나 자신이 의도했던 행위를 성공하지 못하여 자신이 원했던 목표를 이루지 못하는 경우이다. 이는 외적인 요인들에 의해 결정되는 경우가 많다(Sternberg, 1996; 이성은, 2013, 재인용).

오개념은 학습자가 어떠한 개념을 만들어 나가는 과정에서 발생하는 것으로, 이는 체계적으로 발생하는 오류의 원인이 된다. 다시 말하면 오개념은 해당 개념에 대해 정확하게 이해하지 못하거나, 해당 개념에 관한 예시를 정확하게 분류하지 못하고 다르게 분류하거나, 서로 다른 개념과 혼동하거나, 개념과 개념 사이의 위계 관계가 적당하지 않거나, 해당 개념을 과대 또는 과소화 하여 일반화하는 것으로 볼 수 있다. 이러한 오개념은 주

로 학생들이 새로운 개념을 배우거나, 학습자가 기존에 가지고 있던 선행 지식이 알맞지 않은 경우 또는 새로운 개념과 바르게 이어지지 않을 때 발생한다. 수학 교수·학습에서 발생하는 오개념은 학습자가 수학에서 배우고 사용하는 개념과 그 뜻을 다르게 이해하거나 잘못 사용하는 개념으로 볼 수 있다. 이는 다섯 가지로 나누어 볼 수 있는데, 첫째, 직관과 형식 차에 의한 오개념이다. 이는 직관적 수학과 공리적 수학에서 발생하는 개념에 대한 차이에서 발생한다. 둘째, 경험적 언어와 수학적 언어의 미분화에 의한 오개념이다. 이는 일상 언어와 수학 언어가 같은 말을 쓰고 있지만 의미는 다를 때 발생한다. 셋째, 사고양식에 관한 오개념이다. 이는 무비판적인 귀납법의 사용이나 부적절한 연역추리 등의 추론과정에서 발생한다. 넷째, 수학에서 사용하는 여러 가지 법칙을 오해하는 경우에 오개념이 생길 수 있다. 마지막으로는 수학에서만 예외적으로 사용되는 관습을 학습자가 받아들이지 못한 경우에 발생한다. 학생들이 오개념을 가지고 있다면 개념을 이해한 뒤 일반화, 비판적인 사고, 창의력 등의 상위 학습과정으로 나아가는데 있어 많은 제약이 따른다. 또한 학습자가 가지는 오개념은 깊이 내면화되어 있다. 따라서 학습자의 개념 이해를 돕기 위한 방안으로서 오개념의 특성을 파악하는 것이 중요하다(최나영, 2001).

## 2.2. 수학적 오류

### 가. 오류의 원인

수학 문제해결 과정과 결과는 모두 중요하다. 결과에만 치중할 경우 학생들의 사고활동이나 과정에서 일어나는 실수나 오류를 간과할 수 있으므로 과정과 결과를 모두 중요시해야 한다. 문제해결 과정에서 오류가 일어나더라도 그 결과가 올바른 경우와 올바르지 않은 경우가 있다. 과정에서 오류가 발생하였을 경우에는 결과에 관계없이 그 오류를 교정하여야 할 것이다. 그러므로 수학 문제해결 과정에서 일어나는 오류를 지도하기 위한 다양한 연구가 이루어져 왔다. 또한 교사는 학생들의 오류를 교정할 때 효율성을 고려하여 학생 개개인에 적합한 지도방법을 사용하여야 할 것이다.

초기 연구에서는 주로 산술적 계산 과정에서 일어나는 오류에 관심을 두고 연구가 이루어져 왔다. 그러나 산술적 계산 과정에서 범하는 오류 이외의 다양한 원인에 의한 오류가 발생하는 것을 발견하게 됨으로써 오류의 유형이나 원인 등에 대한 다양한 연구가 진행되어 왔다. 그럼에도 불구하고 학생들이 범하는 오류를 명확하게 찾고 분류하는 일은 매우 어려운 일이다.

Radatz(1979)는 오류에 대해 정확하게 분류하고 등급을 나누는 것은 쉽지 않다고 하였다. 왜냐하면 오류의 원인들은 서로 간에 연결되어 작용하기 때문에 같은 문제에서 같은 오류가 일어나지 않을 수도 있고 다른 문제에서도 비슷한 오류가 일어날 수 있기 때문이다. 따라서 그는 오류의 원인

을 찾고 명확하게 분류하거나 위계를 설정하는 것은 어려운 일이나 수학 과제에 포함되어 있는 정보를 처리하고 재생산에 사용되는 메커니즘을 조사함으로써 수학 학습 과정에서 일어나는 오류의 원인을 찾을 수 있다고 주장한다(오혜경, 2008; 홍선주, 2013, 재인용).

문제해결 과정을 평가하여 학생을 지도하기 위해서는 해결 과정에서의 오류를 찾고 분석하는 것이 중요하다. 이러한 오류는 과정적 지식의 형태로 특정한 조건을 만족할 경우 무의식적, 자동적으로 사용되고, 자연 현상을 직접적으로 해석하므로 안전성이 있지만 관찰 결과를 지나치게 일반화 시키는 경향도 있다. Anderson에 따르면 성장기부터 형성된 인과적 경험 형태에 어떤 대상의 원인이 적용되면, 어떤 결과를 낳으므로 기존에 형성된 인과적 경험 형태로 인하여 획득된 개념은 쉽게 바뀌지 않는다(Anderson, 1986; Newell, 1972; Mcclosky, 1983; 한상일, 2013, 재인용). 또한 오류는 우연한 것이 아니며, 오류 발생의 원인은 여러 곳에서 찾을 수 있으나 그 원인은 기본적인 개념에 관한 오개념의 결과로, 어떤 수학적 개념을 이해하고 문제해결 과정에서 결함 있는 절차의 사용이나 유사 논리에 의해 일어나며, 학생들을 지도하는 교사의 오개념에서도 일어날 수 있다(Movshovitz, 1987; Zasalavsky, 1987; Brousseau, 1986; 최나영, 2001, 재인용).

오류는 학습에 있어서 학생들이 더 좋은 방향으로 나아가기 위한 것으로서 사용되어야 한다. 따라서 학생들이 범하는 오류에 대해 그 원인을 학생들의 무지로 돌려 학생들이 이를 부끄러워하는 마음으로 인하여 오류를 감추도록 두지 않고 오히려 오류를 이해하고, 이를 활용하여 학생들이 한걸음 더 나아가도록 해야 한다(Skemp, 1987; 이병옥·안병곤, 2008 재인용).

오류에 적절하게 대처하기 위해서 가장 먼저 해야 하는 것은 그것이 어디에서 비롯된 것인지 확인하는 것이다. 그러나 겉으로 드러나는 학생의 오류만으로는 그것을 쉽게 판단하기 힘들다(오혜경, 2008).

학생들이 범하는 오류의 원인에 대해서 학자들 마다 여러 가지로 분류하고 있다. 수학 개념 이해에 있어서 오류를 범하는 경우와 교사의 지도 과정에서 일어나는 결과 그리고 절차상의 바르지 못한 인식에 의한 오개념, 문제해결 과정에서 학생 자신만의 방법을 사용함으로써 일어나는 네 가지 오류로 분류할 수 있다(Breaussean, 1986; 이호철, 2005, 재인용).

Leinhardt, Zaslavsky와 Stein(1990)의 수학적 오류의 원인에 대한 분류는 다음과 같다. 첫째, 오류는 핵심적으로 옳은 개념을 과도하게 일반화한 결과로서 발생될 수 있다. 둘째, 오류는 일상지식이나 경험으로부터 발생될 수 있다. 셋째, 오류는 논리적 직관에 의해 발생될 수 있다. 넷째, 오류는 부적절한 교수-학습의 결과로 나타날 수 있다(이성은, 2013, 재인용).

내적요인과 외적요인 두 가지로 분류하기도 한다. 아동들이 지각하는 특성에 따른 요인과 논리적 추론에서 일어나는 특성인 내적요인과 교과서에 제시된 내용이나 교수·학습활동에서 교사와 학생들 간에 일어나는 오개념 형성, 그리고 언어의 모호성으로 인한 외적요인이 그것이다(최윤경, 2003; 전태환, 2016, 재인용).

## 나. 오류 유형의 분류

학생들의 문제 해결과정에서의 오류에 대하여 정확하게 분류하는 것은 쉬운 일이 아니지만 선행 연구를 살펴보면, Radatz(1979)은 정보처리 이론을 기초로 하여 5가지 오류의 범주를 제안하였다. 첫 번째는 언어의 어려움으로 인한 오류, 두 번째는 공간적 정보를 얻기 어려움으로 인한 오류, 세 번째는 문제 해결과정에서 반드시 필요한 기술이나 사실 또는 개념이 부족하거나 숙련되지 않음으로 인한 오류, 네 번째는 사고가 경직되거나 바르지 못한 결합에 따른 오류이며, 마지막 다섯째는 관련 없는 규칙이나 전략의 응용으로 인하여 발생한 오류이다.

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky와 Inbar(1987)은 이스라엘 고등학교 학생들을 대상으로 수학 졸업시험에서 발생한 오류의 공통점에 대해 분석하여 다음과 같이 여섯 가지로 분류하였다. 첫 번째는 “잘못 이용된 자료”이다. 이는 학생들이 문제 해결을 위해 사용한 자료와 주어진 자료가 일치하지 않아 오류가 생긴 경우이다. 두 번째는 “문제 내용을 잘못 해석하는 오류”이다. 이는 학생들이 문제를 풀이하는 과정에서 문제 내용을 해석하고 수학적 사실들을 이용하여 자료를 처리함에 있어서 오류를 범한 경우이다. 세 번째는 “논리적으로 부적절한 추론”이다. 이는 잘못된 추론을 다루거나 특수한 내용은 포함하지 않는 등의 논리적인 결점에서 생긴 오류이다. 네 번째는 “곡해된 정리나 정의”이다. 이는 특별하고 동일시 할 수 있는 원리, 규칙, 정리 또는 정의에 대한 왜곡을 다루는 경우에 생긴 오류이다. 다섯 번째는 “논증되지 않는 해답”이다. 이는 학생들의 문제 해결과정에서의 각 단계들이 바르게 풀이되어 있지만 학생들이 최종적으로 제출한 답이 문제에 대한 확인을 하지 않음으로 인해 문제에서 요구한 답이 아닌 것을 제출

한 경우이다. 마지막으로 여섯 번째는 “기술적인 오류”이다. 이는 계산과정에서의 오류, 제시된 표나 자료에서 조건을 잘못 끌어내는데 있어서의 오류, 대수 기호를 다루는데 있어서의 오류 등을 말한다(홍선주, 2013, 재인용). 또한 김옥경(1991)은 Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, 와 Inbar(1987)의 여섯 가지 오류 분석 모델에 “풀이과정의 생략”과 “오류의 애매 모호성”을 추가하여 여덟 가지로 오류 모델을 분석하였다.

Babbit(1990)은 문제 해결과정에 대한 연구에서 오류에 대해 네 가지로 분류하였다. 첫 번째는 계산 오류, 두 번째는 연산 오류, 세 번째는 잡다한 오류, 마지막으로 시도하지 않은 오류이다(정다희, 2011, 재인용).

오세경(1996)은 G.Polya의 4단계 문제해결과정인 첫 번째 단계인 ‘문제의 이해단계’에서 일어날 수 있는 오류를 미지의 것을 모르는 경우와 조건은 충분한지 여부를 모르는 경우, 그림으로 그리지 못하는 경우와 조건을 수식화 하지 못하는 네 가지 경우로 나누었다. 두 번째 단계인 ‘계획의 작성’ 단계에서 일어날 수 있는 오류를 전에 풀어본 다른 문제와 연결하여 생각하지 못하는 경우와 문제 풀이에 사용될 정의나 정리를 모르는 경우, 그리고 자료나 조건을 모두 사용하지 않는 세 가지 경우로 나누었다. 세 번째 단계인 ‘계획의 실행’단계에서 일어날 수 있는 오류를 어떻게 풀어야 할지 몰라서 난감해 하는 경우, 자료나 조건에 의한 식이 잘못된 경우, 문제 풀이 단계 설정이 옳지 않은 경우, 그리고 간단한 계산상의 오류를 범하는 네 가지로 나누었다. 마지막으로 네 번째 단계인 ‘반성의 단계’에서 일어날 수 있는 오류를 결과 점검을 하지 않는 경우, 다른 풀이 방법이 있는지 점검하지 않는 경우, 그리고 결과나 방법을 다른 문제에 활용하지 못하는 세 가지 경우로 나누었다(홍선주, 2013, 재인용).

1996년 신인숙은 Movshovitz-Hadar가 분류한 잘못 사용된 자료, 문제 내용에 대한 잘못된 해석, 논리적으로 부적절한 추론, 왜곡된 정의나 정리, 검증되지 않은 해답, 기술적인 오류의 여섯 가지 범주를 참고하여 중학생들을 대상으로 한 연구에서 “문제 자료를 잘못 사용하는 오류”, “문제 내용을 잘못 해석하는 오류”, “정리 또는 정의를 부적절하게 사용하는 오류”, “문제에서 요구하지 않은 것을 답한 경우”, “기술적인 오류”, “풀이과정의 생략”, “오류의 애매모호함”의 일곱 가지 범주로 오류의 유형을 분류하였다.

류한영(1999)은 방정식 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 범하는 오류를 조사 및 분석하여 다섯 가지로 분류하였다. 첫 번째는 “기본 지식의 결여에서 오는 오류”이다. 이는 문제와 관련된 기본 지식이 없거나 표현이 잘못된 경우로 식을 잘못 세우는 경우이다. 두 번째는 “조건을 잘 사용하지 못하는 오류”이다. 이는 주어진 전제 조건을 잘못 이해한 경우나 활용을 잘하지 못하여 발생하는 오류이다. 세 번째는 “등식의 미숙에 따른 오류”이다. 이는 문장제 문제해결 과정에서 상등 관계식을 잘못 세우는 경우이다. 네 번째는 “애매한 오류”이다. 이는 문제 풀이과정이 애매모호하거나 학생들의 의도를 정확히 알 수 없는 경우이다. 다섯 번째는 “실수나 부주의로 인한 오류”이다, 이는 실수 또는 부주의로 보는 것이 타당한 경우이다(김봉진, 2018, 재인용).

김윤영(2003)은 일차방정식 풀이과정에서 나타나는 오류를 조사하기 위해 중학교 2학년 학생들을 대상으로 한 연구에서 실행적 오류, 구조적 오류로 범주화하여 실행적 오류는 “주어진 연산의 우선 선택 오류”, “수치 연산 오류”, “생략 오류”로 분류하고, 구조적 오류는 “대수적 변형 오류”,

“개념적 오류”, “대수 조작 규칙 오류”로 분류하였다.

# Ⅲ. 연구 대상 및 방법

## 3.1. 연구 대상

본 연구에서는 중학교의 ‘문자와 식’ 단원에서 발생하는 학생들의 문제 해결과정에서의 오류에 관련된 선행 연구물을 연구대상으로 설정하였다. 또한 해당 연구물 중에서도 ‘문자의 사용’, ‘식의 값’, ‘일차식의 계산’, ‘방정식과 그 해’, ‘등식의 성질’, ‘일차방정식의 풀이’, ‘일차방정식의 활용’ 단원의 문제 해결과정에서의 예시를 중심 연구대상으로 설정하였다.

## 3.2. 연구 방법

첫째, 국회도서관에서 제공하는 선행 연구 자료들 중에서 문자의 사용과 일차방정식에 관련된 자료를 바탕으로 연구대상을 조사하였다.

둘째, 중학생을 대상으로 한 선행 연구 자료를 이용하여 학생들의 문제 해결과정에서 나타나는 오류 유형을 분석하였다.

셋째, 분석한 자료를 ‘문자의 사용과 식의 계산’, ‘일차방정식의 풀이’, ‘일차방정식의 활용’ 단원을 중심으로 분류하였다.

넷째, 오류의 내용을 분석하여 개념이해의 오류, 풀이과정에서의 오류,

미해결 오류, 모호한 오류, 부주의로 인한 오류 등으로 분류하였다.

다섯째, 오류를 교정할 수 있는 방안을 제시하였다.

# Ⅳ.연구 자료 분석 및 결과

## 4.1. ‘일차식과 일차방정식’ 문제 해결과정에서의 오류 분석 및 교정 방안

### 가. 일차식과 일차방정식

일차식과 일차방정식 문제 해결 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> 일차식과 일차방정식 관련 문제 해결과정에서의 오류([24])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 식 $\frac{2x+1}{5}-\frac{x-7}{2}$ 을 간단히 하여라. | 개념 이해의 오류 |
| 2 | 일차방정식 $\frac{3x+1}{4}=\frac{x-5}{2}$ 을 풀어라. | |

<표 Ⅳ-1>의 문항1을 풀이한 학생은 주어진 일차식 $\frac{2x+1}{5}-\frac{x-7}{2}$을 간단히 하는 문제를 일차방정식 $\frac{2x+1}{5}-\frac{x-7}{2}=0$에서 $x$의 값을 구하는 문제

로 혼동하여 $x$의 값을 구하는 오류를 보였다. <표 Ⅳ-1>의 문항2를 풀이한 학생도 문항1(<표 Ⅳ-1>)을 풀이한 학생과 유사한 오류를 보였는데, 이 학생은 일차방정식 $\frac{3x+1}{4}=\frac{x-5}{2}$에서 $x$의 값을 구하는 문제를 일차식을 간단히 하는 문제로 잘못 인식하여 $\frac{3x+1}{4}+\frac{x-5}{2}$을 통분을 이용하여 $\frac{3x+1}{4}+\frac{x-5}{2}=\frac{3x+1}{4}+\frac{2x-10}{4}=\frac{5x-9}{4}$로 해결하는 오류를 보였다. 이러한 오류를 보인 학생들은 식과 방정식의 정의를 정확하게 이해하지 못하여 문자식을 간단히 하는 문제와 방정식의 해를 구하는 문제를 혼동하였다. 즉 식과 방정식을 구별하지 못하여 생긴 오류이다. 이러한 학생들의 오류를 교정하기 위해서는 다양하고 복잡하지 않은 간단한 식을 예로 들어 항등식과 방정식에 대한 정의를 다시 설명해주어야 한다. 그 후에 <그림 Ⅳ-1>과 같이 여러 가지 식과 방정식을 제시한 후 주어진 식이 항등식인지 방정식인지 구별할 수 있는지 확인하여야 한다. 이러한 기본유형의 문제에 익숙해지면 그 후에 <표 Ⅳ-1>의 문항1, 문항2와 유사한 문제를 해결할 수 있도록 지도하여야 한다.

**Q.** 다음의 식을 보고 일차방정식인지 아닌지 구분하시오.

| | | |
|---|---|---|
| ㄱ. $7x=x+12$ | ㄴ. $2x=8$ | ㄷ. $3(x-1)=3x-3$ |
| ㄹ. $x+5=5+x$ | ㅁ. $3x+1=10$ | ㅂ. $x-7x=-6x$ |
| ㅅ. $2(x-5)=2x-10$ | ㅇ. $8x-x=x$ | |

<그림 Ⅳ-1> 일차방정식 관련 문제의 예

## 나. 등식의 성질

등식의 성질을 이용하여 일차방정식 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-2>).

**<표 Ⅳ-2> 등식의 성질을 이용한 문제 해결과정에서의 오류**([3],[7],[25])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{x+3}{3}=1+\dfrac{x-1}{4}$ 에서 $x$의 값을 구하라. | 등식의 성질에 대한 이해 부족 |
| 2 | $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{x}{2}+1$ 에서 $x$의 값을 구하라. | |
| 3 | 일차방정식 $0.2x-3=0.5x$ 을 풀어라. | |
| 4 | 일차방정식 $\dfrac{x}{4}=A-\dfrac{x}{3}$ 의 해가 $x=-2$일 때, $A$의 값을 구하라. | |

문항1(<표 Ⅳ-2>)의 $\dfrac{x+3}{3}=1+\dfrac{x-1}{4}$에서 양 변에 최소공배수 12를 곱하면 $12\left(\dfrac{x+3}{3}\right)=12\left(1+\dfrac{x-1}{4}\right)$이 되고 이를 약분하면 $4(x+3)=12+3(x-1)$이 된다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 좌변에 4를 곱하고, 우변의 상수항에는 12를 곱하지 않고 분수가 있는 항에만 3을 곱하여 $4(x+3)=1+3(x-1)$와 같이 해결하였다. 문항2와 문항3도 같은 오류를 범하였다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 일차방정식(예를 들어

$x+1=3$)의 기본유형과 같은 예시를 들어 등식의 성질을 이용하여 일차방정식의 해를 구하는 과정을 지도한 후에 학생 스스로 문제를 해결도록 하고, 만약 오류가 있을 경우 자기평가를 통한 문제해결 과정에서의 오류를 찾을 수 있도록 지도한다. 그리고 등식의 성질을 이용하여 일차방정식의 해를 구하는 기본유형의 문제에 익숙해지면 다음으로 '<표 Ⅳ-2>의 문항1, 문항2, 문항3'와 같은 유형의 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

특히, 문항4(<표 Ⅳ-2>)의 풀이에서 양 변에 최소공배수 12을 곱하여 통분하면 $3x=12A-4x$이고 이 일차방정식에 주어진 해 $x=-2$을 대입하면 $-6=12A+8$이 된다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 통분하는 과정이 생략되어 있고, 주어진 해를 대입하는 연산을 동시에 진행하였다. 이러한 과정에서 우변의 상수항에 $x=-2$을 대입하면서 곱셈에 실수를 범하여 $-6=12A+2$와 같이 해결하였다. 이 학생은 등식의 성질에 대해서는 이해하고 있으나 풀이과정을 생략함으로 인해 사칙연산에서 실수를 범하였다. 이러한 학생들의 오류를 교정하기 위해서는 $x+1=3$와 같은 간단한 방정식의 해를 등식의 성질에 의해 구하도록 지도한 후에 학생이 정확하게 이해한 것을 확인한다. 다음으로 $\frac{x-1}{5}=\frac{x}{2}+1$와 같은 문항을 최소공배수를 양 변에 곱하여 해결하도록 지도하고 아래 <표 Ⅳ-3>형태로 해결하는 과정을 반복하여 학습할 수 있도록 지도할 필요성이 있다.

<표 Ⅳ-3> <표 Ⅳ-2> 문항4의 풀이

| 문제 | 일차방정식 $\frac{x}{4} = A - \frac{x}{3}$의 해가 $x = -2$일 때, $A$의 값을 구하라. |
|---|---|
| 답 | 등식의 성질을 이용하여 양 변에 12를 곱하면<br>$\frac{x}{4} \times 12 = \left(A - \frac{x}{3}\right) \times 12$<br>$3x = 12A - 4x$이다.<br>등식의 성질을 이용하여 양 변에 $4x$을 더하면<br>$3x + 4x = 12A - 4x + 4x$<br>$7x = 12A$이다.<br>주어진 조건에서 $x = -2$이므로,<br>$A = \frac{7}{12} \times (-12) = -\frac{7}{6}$이다. |

## 다. 이항

<표 Ⅳ-4> 이항을 이용한 문제 해결과정에서의 오류([3],[7],[11])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 일차방정식 $4(x-1) = 2x + 8$을 풀어라. | 부호의 오류 |
| 2 | 일차방정식 $2.5y - 0.7 = 1.4y + 0.3$의 해를 구하시오. | |
| 3 | 일차방정식 $0.5x - 0.8x = 3(0.2x - 1)$의 해를 구하시오. | 사칙연산 오류 |

위의 <표 Ⅳ-4>는 이항을 이용한 일차방정식 문제 해결 과정에서 범하는 오류의 예시를 나타낸 것이다.

문항1(<표 Ⅳ-4>)에서 주어진 방정식 $4(x-1)=2x+8$의 $x$의 값을 구하기 위해 좌변을 분배법칙을 이용하여 전개하면 $4x-4=2x+8$이고 우변의 $x$항을 좌변으로, 좌변의 상수항을 우변으로 이항하면 $4x-2x=8+4$이다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 우변의 $x$항을 좌변으로 이항하는 과정에서 부호를 바꾸지 않고 $4x+2x=8+4$로 풀이하였다. 문항2(<표 Ⅳ-4>)도 같은 오류를 범하였다. 이러한 학생들은 $x$항 또는 상수항을 이항할 때 그 항의 부호가 바뀐다는 것에 대한 개념을 이해하지 못했기 때문에 오류를 보였다. 그러므로 학생들이 이항에 대한 개념을 이해하기 위해서는 우선 등식의 성질에 대한 이해가 먼저 필요하다. 따라서 간단한 방정식(예를 들어 $x+2=3x+1$)을 이용하여 양 변에 같은 수를 더하거나, 빼거나, 곱하거나, 나누어도 등식이 성립함을 먼저 보여주고 등식의 성질에 대해 정확하게 이해할 수 있도록 지도한다. 그 후에 이를 이용하여 식을 간단히 하는 방법을 지도한 후에 이항할 때 부호가 바뀌는 것을 학생이 직접 확인할 수 있도록 하고 이를 자유롭게 활용할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

문항3(<표 Ⅳ-4>)의 경우 $x$항의 소수인 계수를 양변에 10을 곱하여 자연수로 바꾸면 $5x-8=30(0.2x-1)$이고 우변을 정리하면 $5x-8=6x-30$이다. 그리고 이항을 이용하여 방정식을 간단히 하면 $5x-6x=-8-30$이므로 $-x=-38$이므로 $x=38$이다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 이러한 식의 중간 풀이과정 $5x-6x=-8-30$을 생략하고 $5x-8=6x-30$을 $-x=38$로 계산하는 오류를 보였다. 이 학생은 위의 <표 Ⅳ-4>의 문항1, 문항2와 유사한 이항하는 과정에서 부호에 오류를 보임과 동시에 풀이과정의 중간식

을 생략하여 학생 스스로가 풀이과정을 놓치는 오류를 동시에 가지고 있다. 이와 같은 오류를 교정하기 위해서는 위에서 설명한 <표 Ⅳ-4>의 문항1, 문항2의 이항할 때 부호가 바뀌는 것에 대한 오류 교정 방법을 사용함과 동시에 학생이 문제를 풀이할 때 풀이과정을 생략하지 않고 차례대로 쓸 수 있도록 주의하여야 함을 지도할 필요가 있다.

## 라. 분배법칙

분배법칙을 이용한 문제 해결 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-5>).

**<표 Ⅳ-5> 분배법칙을 이용한 문제 해결과정에서의 오류**([3],[6],[8],[11])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 일차방정식 $-4x+2=-3(x-1)+5$을 풀어라. | 분배법칙 과정에서 연산 실수 |
| 2 | 일차방정식 $3(x+1)=5x-3$에서 $x$의 값을 구하여라. | |
| 3 | 일차방정식 $-3(3x-5)=x+5$의 해를 구하여라. | 분배법칙 과정에서 부호 실수 |
| 4 | 일차방정식 $5(x-3)-8(x-2)=7$을 풀어라. | |

<표 Ⅳ-5>의 문항1에서 분배법칙을 이용하여 우변을 전개하면 $-3(x-1)+5=-3x+3+5=-3x+8$이다. 그러나 학생의 문제 해결과정에서 $x$항에는 인수 $-3$을 곱하였으나 상수항에는 인수 $-3$을 곱하지 않아 $-3(x-1)+5=-3x-1+5=-3x+4$로 해결하였다. <표 Ⅳ-5>의 문항2도 같은 오류를 보였다. 좌변을 분배법칙을 이용하여 전개하면 $3(x+1)=3x+3$이지만 학생은 $x$항에만 인수 3을 곱하고 상수 1에는 곱하지 않아 $3(x+1)=3x+1$로 해결하였다. 이러한 학생들의 오류 교정을 위해서는 분배법칙과 관련된 간단한 식, 즉 $3(x+2)$, $2(x-4)$와 유사한 문항을 학생들에게 제시하여 해결할 수 있는지 조사를 하고 만약, 해결하지 못하는 경우에는 먼저 분배법칙을 예를 들어 설명을 하고 $3(x+2)$, $2(x-4)$와 유사한 문항에 분배법칙을 잘 활용할 수 있도록 지도한 후에 간단한 일차방정식 $2x+3=4$와 유사한 문항들을 해결하도록 한 후에 위 <표 Ⅳ-5>의 문항1, 문항2와 같은 유형을 해결할 수 있도록 지도할 필요성이 있다.

문항3(<표 Ⅳ-5>)은 문항1과 문항2(<표 Ⅳ-5>)와 유사한 오류를 보였다. 문항3(<표 Ⅳ-5>)의 좌변 $-3(3x-5)$을 분배법칙을 이용하여 전개하면 $-3(3x-5)=-9x+15$이다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 $-3(3x-5)=-9x-15$와 같이 음수인 인수와 음수인 상수항의 곱셈에서 부호처리에서 오류를 범하였다. <표 Ⅳ-5>의 문항4도 같은 오류를 보였다. 이런 유형의 오류는 수 × 양수 = 양수, 양수 × 음수 = 음수, 음수 × 양수 = 음수, 음수 × 음수 = 양수와 같이 양수와 음수의 곱셈에서 부호가 바뀌는 규칙에 대해 이해하지 못한 결과이다. 이러한 오류를 교정하기 위한 방안으로는, 양수와 음수의 곱에 대한 개념이해가 되어있는지 확인을 한 후 만약 부호가 다른 수의 곱에 대한 개념을 잘 이해하지 못하고 있을 경우에는 부호가 다른 수의 곱에 대한 간단한 예($3\times7$, $2\times(-5)$, $-5\times6$, $-3\times(-2)$ 등)를 들어 문제를 해결할

수 있도록 지도한 후에 문항3과 문항4(<표 Ⅳ-5>)를 해결하도록 지도하도록 하고, 부호가 다른 수의 곱에 대한 개념을 알고 있을 경우에는 곱셈 과정에서 실수를 한 것으로 실수를 범하지 않도록 주의하여 해결하도록 지도해야 할 것이다.

### 마. 해가 0인 일차방정식

해가 0인 일차방정식 문제 해결 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-6>).

**<표 Ⅳ-6> 해가 0인 일차방정식 문제 해결과정에서의 오류**([8],[11])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 일차방정식 $4x+3=2x+3$에서 $x$의 값을 구하시오. | 등식의 성질에 대한 이해 부족 |
| 2 | 일차방정식 $0.5(3t-2)=\frac{2t-3}{3}$에서 $x$의 값을 구하시오. | |

문항1(<표 Ⅳ-6>)에서 주어진 일차방정식 $4x+3=2x+3$을 이항을 이용하여 식을 정리하면 $4x-2x=3-3$이므로 $2x=0$이 된다. 따라서 $x=0$이 주어진 일차방정식의 해이다. 그러나 학생의 풀이과정을 살펴보면 $2x=0$으로 식을 간단히 정리하는 것은 잘 해결하였으나 정리된 식에서 등식의 성질을 이용하여 양 변을 2로 나누면 $2x\times\frac{1}{2}=0\times\frac{1}{2}$임을 이해하지 못하여 $2x=0$

이므로 해가 존재하지 않는다는 잘못된 풀이를 하였다.

또한 문항2(<표 Ⅳ-6>)를 해결하기 위해서는 우선 분수계수를 정리하기 위해 양변에 3을 곱하면 $3 \times 0.5(3t-2) = 3 \times \frac{2t-3}{3}$이고, 이를 정리하면 $4.5t-3 = 2t-3$이다. 이제 이항을 이용하여 식을 간단하게 정리하면 $2.5t = 0$이므로 $t = 0$이다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 등식의 성질을 활용하여 식을 간단하게 하여 $2.5t = 0$로 정리하였지만 여기에서 $t$의 값을 $t = 2.5$로 풀이하는 오류를 보였다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 어떤 수에 0을 곱하면 0이 된다는 것을 먼저 지도할 필요성이 있다.

## 바. 특수한 해를 가지는 일차방정식

특수한 해를 가지는 일차방정식 문제 해결 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-7>).

<표 Ⅳ-7> 특수한 해를 가지는 문제 해결과정에서의 오류([8])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 일차방정식 $9x+4 = 9(x+1)$의 해를 구하시오. | 등식의 성질에 대한 이해 부족 |

문항1(<표 Ⅳ-7>)은 <표 Ⅳ-6>의 문항 1,2와 유사한 오류를 보이지만, 주어진 일차방정식의 형태가 각각 다르다. 먼저 주어진 일차방정식의 우변을 분배법칙을 이용하여 전개하면 $9x+4 = 9x+9$이고 이항을 이용하여 식

을 정리하면 $0x=5$이므로 $x$의 값은 존재하지 않는다. 그러나 학생의 풀이 과정을 살펴보면 $0x=5$으로 식을 간단히 정리하는 것은 잘 해결하였으나 $x$의 값을 $x=0$으로 풀이하였다. 이 문항을 풀이한 학생은 <표 Ⅳ-6>의 문항2를 풀이한 학생과 다르게 어떤 수에 0을 곱하면 0이 된다는 것은 이해하고 있으나, $0x=b$을 만족하는 $x$의 값은 존재하지 않는다(불능)는 일차방정식의 성질을 이해하지 못하여 생긴 오류이다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 등식의 성질에 대한 이해가 충분히 되어있는지 확인한 후에 일차방정식의 해가 무수히 많은 경우($0x=0$, 부정)와 해가 없는 경우($0x=b\,(b\neq 0)$, 불능)에 대해 아래 <그림 Ⅳ-2>와 <그림 Ⅳ-3>와 같은 설명을 통해 지도한 다음 학생이 유사한 문제를 스스로 해결할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

주어진 방정식을 $ax=b$의 꼴로 고쳤을 때,

$ax=b$에서 $a=b$이고 $b=0$, 즉 $0\times x=0$의 꼴이면 **해가 무수히 많다.(해는 모든 수이다.)**

예를 들어, $2x-4=2(x-2)$을 만족시키는 $x$의 값을 구하면

$2x-4=2x-4$

$2x-2x=-4+4$

$2x-2x=-4+4$

$(2-2)x=-4+4$

$0\times x=0$

**모든 $x$값에 대하여 항상 양변이 모두 0이 된다. 따라서 해가 무수히 많다.**

<그림 Ⅳ-2> $0x=0$ 형태의 일차방정식의 해

주어진 방정식을 $ax=b$의 꼴로 고쳤을 때,

$ax=b$에서 $a=0$이고 $b\neq 0$, 즉 $0\times x=(0$ 아닌 상수)의 꼴이면 **해가 없다.**

예를 들어, $3x+7=3x+6$을 만족시키는 $x$의 값을 구하면

$3x-3x=6-7$

$(3-3)x=6-7$

$(3-3)x=-1$

$0\times x=-1$

**$x$의 어떤 값에 대해서도 좌변이 0, 우변이 $-1$이 된다. 따라서 해가 없다.**

<그림 Ⅳ-3> $0x=b\,(b\neq 0)$ **형태의 일차방정식의 해**

## 사. 계수가 분수인 일차방정식

일차식과 일차방정식 문제 해결 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-8>).

<표 Ⅳ-8> **계수가 분수인 일차방정식 해결과정에서의 오류**([8].[14])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 식 $\dfrac{3x+6}{6}-\dfrac{-9x+18}{9}$ 을 간단히 하여라. | 통분과 분배법칙 과정에서 연산 실수 |
| 2 | 방정식 $\dfrac{6}{5}x+2=\dfrac{3}{2}$ 을 풀어라. | 사칙연산 오류 |

<표 Ⅳ-8>의 문항1에서 좌변과 우변에 각각 3과 2를 곱하여 통분하면 $3\left(\frac{3x+6}{6}\right)-2\left(\frac{9x+18}{9}\right)$이 되고 이를 약분하면 $\frac{9x+18}{18}-\frac{-18x+36}{18}$이다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 첫 번째 항의 분자 $3x+6$에 3을 곱하는 과정에서 $3x$에는 3을 곱하였지만 상수 6에는 3이 아닌 2를 곱하는 연산 실수를 하여 $\frac{9x+9}{18}-\frac{-18x+36}{18}$와 같이 해결하였다. 이는 분배법칙 과정에서의 사칙연산 오류이다. 이러한 학생들의 오류 교정을 위해서는 $5(x+1)=5x+5$와 같이 상수항과 문자식의 곱을 분배법칙을 사용하여 정확하게 계산 할 수 있도록 지도한 후에 분모가 다르고 분자가 문자식인 분수의 통분을 해결할 수 있도록 단계적으로 지도해야 한다.

문항2(<표 Ⅳ-8>)을 해결하기 위해서 좌변의 상수항을 우변으로 이항하면 $\frac{6}{5}x=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$이고, 양 변을 $x$의 계수로 나누면 $\frac{6}{5}x\div\frac{6}{5}=-\frac{1}{2}\div\frac{6}{5}$이므로 $x=-\frac{3}{5}$이다. 그러나 학생의 풀이에서는 $\frac{6}{5}x=-\frac{1}{2}$에서 $\frac{6}{5}x$을 수와 문자의 곱이 아닌 덧셈으로 인지하는 오류를 범하여 양 변에 $\frac{6}{5}$을 빼는 연산 실수를 하여 $x=-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}$와 같이 풀이하였다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 등식의 성질에 대해 먼저 지도한 후에 이항에 대해 지도하여야 한다.

## 4.2. '일차방정식의 활용' 문제 해결과정에서의 오류 분석 및 교정 방안

### 가. 나이에 관련된 문제

일차방정식을 활용하여 나이에 관련된 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-9>).

<표 Ⅳ-9> 나이 관련 문제 해결과정에서의 오류([19])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 현재 이모의 나이는 지수의 나이의 2배이고, 8년 전에는 이모의 나이가 지수 나이의 6배였다고 한다. 현재 이모와 지수의 나이의 합을 구하여라. | 문제 이해의 오류 |

<표 Ⅳ-9>의 문항1을 풀이한 학생은 이모의 나이를 $x$, 지수의 나이를 $y$로 정하고 현재 이모의 나이는 지수의 나이의 2배라 하였으므로 $x$와 $y$의 관계식을 $x=2y$로 잘 표현하였다. 그러나 8년 전 이모의 나이가 지수 나이이의 6배였다는 내용을 $x-8=6(y-8)$이 아닌 $(x=6y)-8$과 같이 나타내었다. 이는 구문을 정확히 이해하지 못하여 생긴 오류이다. 이러한 오류를 교정하기 위해서는 학생이 주어진 문제를 읽는 과정에서 문제의 뜻을 정확하게 파악하고 구하려는 값을 미지수 $x$로 놓고 주어진 조건에 맞는 방정식을 세울 수 있도록 지도할 필요가 있다.

## 나. 일 관련 문제

일차방정식을 활용하여 일에 관련된 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-10>).

<표 Ⅳ-10> 일 관련 문제 해결과정에서의 오류([19])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
| --- | --- | --- |
| 1 | 수지와 민아가 함께 일을 하면 6일 만에 끝낼 수 있는 일을 수지가 3일 동안 하고, 나머지를 민아가 12일 동안 하여 끝냈다. 이 일을 민아가 혼자 하면 며칠이 걸리는지 구하여라. | 요구되지 않은 해답 |
| 2 | 남자 한 명이 6시간, 여자 한 명이 10시간 걸려서 끝낼 수 있는 일을 남녀 6명이 한 팀으로 일하여 끝냈더니 1시간이 걸렸다고 한다. 이 팀에는 여자가 몇 명 있는지 구하여라. | 미해결 오류 |

문항1(<표 Ⅳ-10>)을 풀이한 학생의 풀이과정을 살펴보면 수지가 하루에 할 수 있는 일의 양을 $x$, 민아가 하루에 할 수 있는 일의 양을 $y$로 문제에서 요구하는 조건에 맞게 미지수를 잘 설정하였다. 또한 이를 토대로 문제에서 주어진 함께 6일 만에 끝낼 수 있다는 조건과 수지가 3일 동안 일하고 나머지를 민아가 12일 동안 일하여 끝냈다는 조건을 이용하여 각각 식 $6x+6y=1$과 $3x+12y=1$을 잘 세운 것을 확인할 수 있다. 또한 두 식을 이용하여 미지수 $x$와 $y$의 값을 구하는 과정에서도 등식의 성질을 이용

하여 어려움 없이 잘 해결한 것을 연립방정식의 풀이를 통해 학생이 구한 $x$의 값을 통해 알 수 있다. 그러나 학생이 문제에서 요구하는 답인 민아가 혼자 하였을 때 걸리는 시간(일)을 구하지 않고 앞서 구한 $x$의 값만을 이용하여 답을 구한 오류, 즉 민아가 아닌 수지가 혼자 하였을 때 걸리는 시간(일)을 구하는 오류를 보였다. 이러한 학생들의 오류는 문제가 원하는 요구조건을 정확하게 확인하지 않고 먼저 구한 해를 답으로 혼동하여 요구되지 않은 답을 구하는 경우이다. 이러한 학생들의 오류 교정을 위해서는 <표 Ⅳ-9>의 문항1을 풀이한 학생과 마찬가지로 주어진 문제에서 구하고자 하는 답을 먼저 정확하게 알 수 있도록 지도할 필요성이 있다. 또한 문제를 해결한 후에 자신이 풀이한 답이 문제에서 구하고자 하는 답과 일치하는지 다시 한 번 확인하는 습관을 기를 수 있도록 지도해야 한다.

문항2(<표 Ⅳ-10>)에 대한 학생의 풀이과정을 살펴보면 남학생의 수를 $x$, 여학생의 수를 $y$로 문제에서 요구하는 조건에 맞게 미지수를 설정하였다. 또한 남학생과 여학생을 합하면 6명이라는 조건을 이용하여 일차방정식 $x+y=6$을 바르게 구하였다. 그러나 문제에서 남자 한 명이 6시간, 여자 한 명이 10시간 동안 끝낼 수 있는 일이라는 조건을 이용하면 남학생 한 명과 여학생 한 명이 한 시간 동안 할 수 있는 일의 양을 각각 $\frac{1}{6}$와 $\frac{1}{10}$이라 할 수 있으므로 식 $\frac{1}{6}x+\frac{1}{10}y=1$으로 나타낼 수 있다. 그러나 학생의 오류를 살펴보면 이를 $6x+10y=1$로 세운 것을 확인할 수 있다. 이러한 오류를 교정하기 위해서는 전체 일의 양을 1로 놓고 각자의 단위 시간 동안 할 수 있는 일의 양을 구한 다음 조건에 맞게 식을 세울 수 있도록 지도해야 한다.

## 다. 거리, 속력, 시간과 관련된 문제

일차방정식을 활용하여 거리, 속력, 시간에 관련된 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류의 예시는 다음과 같다(<표 Ⅳ-11>).

<표 Ⅳ-11> 거리, 속력, 시간 관련 문제 해결과정에서의 오류([19])

| 문항 | 문제 내용 | 오류 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 둘레의 길이가 6㎞인 공원의 둘레를 시속 8㎞로 뛰다가 3㎞로 걸었더니 이 공원을 한 바퀴 도는데 1시간 10분이 걸렸다. 이 때 뛰어간 거리를 구하여라. | 개념이해의 오류 |
| 2 | 등산을 하는데 올라갈 때는 시속 3㎞로 걷고, 내려올 때는 시속 4㎞로 걸어서 모두 4시간 30분이 걸렸다. 총 16㎞를 걸었다고 할 때, 올라간 거리를 구하여라. | 연산 오류 |

<표 Ⅳ-11>의 문항1에서 공원의 둘레가 6㎞이므로 시속 8㎞로 뛴 거리를 $x$, 시속 3㎞로 걸은 거리를 $6-x$㎞라고 하면, 뛰어갈 때 걸린 시간은 $\frac{x}{8}$시간, 걸어갈 때 걸린 시간은 $\frac{6-x}{3}$이다. 또한 공원을 한 바퀴 도는데 걸린 시간이 1시간 10분이고, 주어진 문제에서 속력의 시간단위가 분이 아닌 시 이므로 이를 이용하여 일차방정식을 세우면 $\frac{x}{8}+\frac{6-x}{3}=\frac{7}{6}$이 된다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 공원을 한 바퀴 도는데 걸린 시간을 $\frac{7}{6}$시간

이 아닌 70분으로 잘못 이해하여 일차방정식을 $\frac{x}{8}+\frac{6-x}{3}=70$로 세우는 오류를 보였다. 이는 주어진 문제에서 구하고자 하는 미지수 $x$을 잘 설정하였고 주어진 조건을 이용하여 일차방정식을 세우는 과정에서 시간과 분에 대한 개념이 모호하여 나타난 오류이다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 문제에서 나타낸 거리, 속력, 시간에 대한 개념을 정확하게 이해할 수 있도록 지도해야 할 필요성이 있다.

문항2(<표 Ⅳ-11>)의 풀이과정을 살펴보면 총 걸은 거리가 16㎞이므로 시속 3㎞로 올라간 거리를 $x$, 시속 4㎞로 내려온 거리를 $16-x$㎞라고 하면, 올라갈 때 걸린 시간은 $\frac{x}{3}$시간, 내려올 때 걸린 시간은 $\frac{16-x}{4}$이다. 또한 등산을 하는 데 걸린 시간이 총 4시간 30분 이므로 이를 이용하여 일차방정식을 세우면 $\frac{x}{3}+\frac{16-x}{4}=\frac{270}{60}$이 된다. 따라서 $\frac{20x}{60}+\frac{15(16-x)}{60}=\frac{270}{60}$이므로 $20x+15(16-x)=270$을 전개하면 $20x+240-15x=270$이다. 그러나 학생의 풀이과정에서는 $-15$을 풀이과정에서 생략하여 연산 오류를 보였다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 분배법칙을 이용하여 식을 전개할 때 괄호 안의 모든 문자항 또는 상수항에 분배법칙을 수행할 수 있도록 주의하여 지도할 필요가 있다.

# Ⅴ. 결론

학생들이 초등학교에서 주로 산술 문제나 직관을 통한 수학 학습을 하는 것과 달리 중학교에서는 문자를 사용한 식을 이용하여 문제를 해결한다. 이러한 학습을 하는 초기에는 문자의 사용이 익숙하지 않는 등의 여러 가지 이유로 많은 오류가 발생하게 된다. 교사의 눈으로 보면 단순하고 간단한 문제이지만 학생들은 다양한 형태의 오류를 보이게 된다. 문자를 사용하여 식을 세우고 이를 다루는 것은 여러 가지 문제를 해결하는 데 있어 중요한 기술이다. 그러므로 교사는 학생들이 수학을 교수·학습함에 있어서 학생들이 그 원리와 개념을 잘 이해하고 응용할 수 있도록 할 수 있는 효과적인 방법을 찾고, 이를 교수전략을 마련하는 데 참고하여야 한다. 따라서 본 연구에서는 중학교 1학년 학생들이 다루는 일차식과 일차방정식의 내용과 관련된 기존 연구 자료 중 오류와 관련된 자료를 조사하고 분석하였다. 또한 조사한 자료를 토대로 문제 해결과정에서 발생하는 오류를 조사하여 수학 개념을 기준으로 오류 유형을 분류하였다. 본 연구에서 학생들의 일차식 및 일차방정식 문제 해결과정에서의 오류와 이를 교정하기 위한 지도방안은 크게 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 일차식과 일차방정식을 구별하는 문제에서 일차식을 간단하게 하는 문제와 일차방정식의 해를 구하는 문제를 혼동하는 오류가 있었다. 이러한 경우에는 복잡하지 않은 간단한 일차식의 예시를 학생들에게 보여주고 식과 항등식과 방정식에 대한 정의를 다시 설명해준 다음, 학생

들이 기본유형의 문제를 해결할 수 있는지 확인한 후에 오류를 보인 문제를 다시 풀어볼 수 있도록 지도해야 한다.

둘째, 일차방정식의 해를 구하는 문제에서 계수가 분수인 항에만 최소공배수를 곱하고 상수항에는 곱하지 않는 오류가 나타났다. 이러한 오류를 교정하기 위해서는 통분에 대한 개념과 분배법칙에 대한 개념이 선행되어 있는지 먼저 확인한 후에 부족한 개념에 대하여 보충지도를 할 필요성이 있다.

셋째, 이항을 이용하여 일차방정식의 해를 구하는 과정에서는 부호를 바꾸지 않는 오류 유형, 그리고 계산 실수를 하는 오류 유형이 있었다. 이는 등식의 성질에 대한 이해하지 못해 생긴 오류이다. 이에 대한 지도를 위해서는 등식의 여러 가지 성질을 하나씩 정확하게 이해할 수 있도록 적당한 기본유형의 예시를 들어 일차방정식의 해를 구하는 과정을 지도한 후에 자기평가를 통하여 스스로 오류를 찾아내고 이를 수정할 수 있도록 지도해야 한다. 학생이 충분히 이해되었다면 같은 유형의 문제를 해결할 수 있도록 지도하되, 사칙연산이나 분배법칙 등에서 실수를 주의하도록 지도할 필요가 있다.

넷째, 분배법칙을 이용하여 일차식을 전개하는 과정에서는 $x$항에만 인수를 곱하고 상수항에는 곱하지 않는 오류가 있었다. 이러한 학생들을 지도하기 위해서는 적당한 기본유형의 예시를 들어 일차방정식의 해를 구하는 과정을 지도한 후에 자기평가를 통하여 스스로 오류를 찾아내고 이를 수정할 수 있도록 지도해야 한다. 학생이 충분히 이해되었다면 같은 유형의 문제를 해결할 수 있는지 유사한 문제를 풀이할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

다섯째, 어떤 수에 0을 곱하면 0이 된다는 것을 이해하지 못하여 일차방정식의 해를 구하지 못하거나, $0x=b(b\neq 0)$형태의 일차방정식의 해가 존재

하지 않는다는 성질을 이해하지 못하여 오류를 범한 유형이 있었다. 이러한 학생들의 오류 교정을 위해서는 $0x=0$, $0x=b\,(b\neq 0)$와 같은 특수한 형태의 일차방정식의 해를 구하는 경우 먼저 간단한 예시를 들어 등식의 성질을 이용하여 식을 정리한 후에, 어떤 수에 0을 곱하면 0이 됨을 이해할 수 있도록 하여야 한다.

여섯째, 서술형 문제에서 미지수 x와 y를 사용하여 연립일차방정식을 올바르게 구성하였다. 하지만, 문제에서 요구하는 것은 y값이지만 x값을 답으로 제시하여 오류가 일어난 경우가 나타났다. 그리고 일차연립방정식을 구성하는 과정에서 하나의 식은 잘 구하였지만 다른 하나의 식을 잘못 구한 오류가 있었다.

마지막으로, 일차방정식 문제 해결과정에서의 대부분의 오류는 등식의 성질에 대한 이해 부족과 문제 풀이 과정에서의 연산 실수에서 기인한다. 따라서 일차방정식의 풀이를 지도할 때 교사는 학생들이 등식의 성질에 대해 정확히 이해하고 이를 활용할 수 있도록 다양한 학습지도방안에 대해 고민해보아야 할 필요성이 있다.

# 참고문헌


[1] 교육과학기술부, 2015 개정 수학과 교육과정 [별책8].

[2] 국립국어원, 표준국어대사전

[3] 김미경(2007). 일차방정식에 대한 수학 학습 부진아의 오류 유형과 교정에 관한 연구. 공주대학교 교육대학원 석사학위논문.

[4] 김봉진(2018). 중학교 2학년 학생들의 수학에 대한 태도에 따른 일차방정식 오류유형. 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.

[5] 김부미(2006). 수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰. 이화여자대학교 박사학위논문.

[6] 김신규(2004). 대수방정식 풀이과정에서 발생하는 오류분석. 한신대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[7] 김세훈(2007). 일차방정식 풀이 과정에서 학생들이 보이는 오류 분석. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[8] 김아람(2013). 일차 방정식 문제 해결이 과정에서 보이는 오류의 유형 분석. 한양대학교 교육대학원 석사학위논문.

[9] 김옥경(1991). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구. 이화여자대학교 석사학위논문.

[10] 김윤영(2003). 일차방정식 풀이 과정에서 보이는 오류의 유형 분석 및 교정지도. 이화여자대학교 석사학위논문.

[11] 김차숙(2003). 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[12] 류한영(1999). 중학교 3학년과 고등학교 1학년들의 방정식에 대한 오류분석에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

[13] 신인숙(1996). 중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류 분석에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

[14] 안명희(2009). 수학 부진아의 일차식의 계산에서의 오류에 관한 분석. 아주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[15] 이성은(2013). 오류기반 토의학습이 수학과 학업 성취도에 미치는 영향. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[16] 이호철(2005). 미분문제 해결과정에서 발생하는 오류에 관한 연구 -「수학Ⅱ」중에서 -. 계명대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[17] 오세경(1996). 수학 학습 지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안에 대한 연구. 충북대학교 대학원 석사학위논문.

[18] 오혜경(2008). 고등학교 수학에서 미적분단원의 오류에 관한 연구. 전남대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[19] 윤연주(2012). 연립방정식 활용 문제 해결과정에서 중학생들에게 나타나는 오류 분석. 순천대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[20] 전태환(2016). 고등학교 3학년 자연계열 학생들의 도함수의 활용 단원에서 발생하는 오개념과 오류 분석. 교육연구논총. CNU Journal of Education Studies 2016. Vol. 37, No. 4.

[21] 정다희(2011). 도함수의 그래프 이해에서 발생하는 오류 및 오개념에 관한연구 - 고등학교 3학년 미분단원 중심으로. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

[22] 차정하(2006). 중학생의 방정식 풀이 과정에서의 오류 유형 분석. 영남대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[23] 최나영(2001). 미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 연구 : 함수와 도함수 사이의 그래프 표현을 중심으로. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

[24] 최선옥(2006). 일차방정식 풀이에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구. 목포대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[25] 최영우(2007). '일차방정식' 문제 해결 과정에서 발생하는 오류 분석 연구 -중학교 1학년을 대상으로-. 강원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[26] 최윤경(2003). 문자와 식 · 변수지도에서의 오개념 지도. 아주대학교 석사학위논문.

[27] 한종희(1997). 고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

[28] 홍선주(2013). 미분개념에 대한 학생들의 학습경향 및 오류분석과 지도방안 연구 - 고등학교 2학년 문과학생을 대상으로 : 이과학생들과 비교하여 -. 중앙대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[29] 이병옥, 안병곤(2008). 수학 문장제의 문장 구조와 해석상의 오류 분석 : 초등학교 2학년을 중심으로. 한국초등수학교육학회지. 제 12권 제 2호.

[30] Movshovitz-Hardar, N. & Zaslavsky, O. & Inbar, S.(1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 18, No. 1.

[31] Radatz, H.(1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Researvh in Mathematics Education*. 10.

[32] Radatz, H.(1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process : a Survey. For the Learning of Mathematics, 1.