



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

이산요소법 기반 모래지에서의 전차량 주행  
시뮬레이션에 관한 연구



2020년 2월

부경대학교 대학원

기계설계공학과

정성헌

공 학 석 사 학 위 논 문

이산요소법 기반 모래지에서의 전차량 주행  
시뮬레이션에 관한 연구

지도교수 손 정 현

이 논문을 공 학 석 사 학위논문으로 제출함.

2020년 2월

부 경 대 학 교 대 학 원

기 계 설 계 공 학 과

정 성 현

정성현의 공학석사 학위논문을 인준함



주	심	공학박사	정 영 석 (인)
위	원	공학박사	김 찬 중 (인)
위	원	공학박사	손 정 현 (인)

# 목 차

Abstract .....	vi
1. 서 론 .....	1
1.1. 연구의 필요성 .....	1
1.2. 연구 배경 .....	1
1.3. 연구 목표 및 연구 범위 .....	3
2. DEM 기반 모래입자 접촉 모델링 .....	4
2.1. 이산요소법 .....	4
2.2. 입자간의 접촉모델 .....	4
2.2.1. 법선력 접촉모델 .....	4
2.2.2. 접선력 접촉모델 .....	6
2.2.3. JKR 점성 모델 .....	7
2.2.4. 구름 저항 모멘트 모델 .....	8
3. 다물체동역학과 이산요소법과의 연성해석기법 .....	10
3.1. 다물체동역학 .....	10
3.1.1. 오일러 매개변수 .....	10
3.1.2. 운동방정식 .....	11
3.2. 다물체동역학과 이산요소법과의 연성해석 알고리즘 .....	13
4. 강체 휠과 모래입자의 접촉해석 및 실험비교 .....	15
4.1. 휠 테스트베드 실험 .....	15
4.1.1. 휠 테스트베드 장치 구성 .....	15
4.1.2. 휠 테스트베드 시험 방법 .....	19
4.2. 휠 테스트베드 시뮬레이션 .....	24
4.2.1. 휠 테스트베드 모델링 .....	24
4.3. 모래지 노면 파라미터 스터디 .....	27
4.3.1. 접촉계수에 따른 휠의 침하량 비교 .....	28
4.4. 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션 비교 .....	35
5. 전차량 주행 시뮬레이션 .....	41

5.1. 전차량 및 야지노면 모델링 .....	41
5.1.1 전차량 모델링 .....	41
5.1.2 야지노면 모델링 .....	49
5.2. 타행 주행 시뮬레이션 .....	50
5.2.1 속도에 따른 전차량의 동적 거동비교 .....	53
6. 결 론 .....	58
참고문헌 .....	60



## List of table and figure

표 1 휠 테스트베드 주행조건 .....	19
표 2 수직력과 견인력의 평균 힘, 최대 침하량 비교 .....	23
표 3 휠 테스트베드 장치의 물성치 .....	25
표 4 휠 테스트베드 입자의 물성치 .....	26
표 5 시뮬레이션의 마찰 계수 및 에너지계수 .....	28
표 6 마찰계수와 에너지계수에 따른 최대 침하량 .....	35
표 7 마찰계수의 세분화를 위한 최대 침하량 비교 .....	36
표 8 마찰계수에 따른 최대 침하량 비교 .....	37
표 9 실험과 시뮬레이션의 침하량 비교 .....	38
표 10 실험과 시뮬레이션의 진행방향 힘 비교 .....	38
표 11 전차량 모델링 .....	43
표 12 스프링-댐퍼 힘 요소 정보 .....	45
표 13 전차량 조인트 및 힘 요소 연결 정보 .....	45
표 14 서스펜션 해석 비교를 위한 스프링-댐퍼 힘요소 .....	46
표 15 4가지 타행 주행 .....	51
표 16 4가지 타행 주行的 이동거리 및 주행시간 .....	54
표 17 4가지 타행 주行的 감속시간 및 평균 감속 .....	55
표 18 왼쪽 전륜에 발생한 평균 견인력 .....	58
그림 1 H. Nakashima 경사노면에서 휠과 모래지 노면간의 접촉 연구 .....	2
그림 2 이산요소법, Bekker method, 휠 테스트베드 실험의 비교연구 .....	2
그림 3 법선력 접촉 모델 .....	5
그림 4 테스트베드 입자의 물성치 .....	6
그림 5 JKR 점착 (구 접촉) .....	8
그림 6 구름 저항력 모델 .....	9
그림 7 오일러 파라미터 .....	11
그림 8 다물체동역학과 이산요소법의 연성해석 개념도 .....	13
그림 9 다물체동역학 해석 알고리즘 .....	14
그림 10 이산요소법 해석 알고리즘 .....	14
그림 11 휠 테스트베드 개략도 .....	15
그림 12 실험에 사용된 강제 휠 .....	16
그림 13 휠 테스트 베드 시험기 .....	16
그림 14 모래지의 입자 알갱이 .....	17

그림 15 Calibration용 지그 제작 .....	17
그림 16 지그를 이용한 시험기의 자중 측정 .....	17
그림 17 고속 카메라를 이용한 침하량 측정 .....	18
그림 18 고속카메라를 통한 휠 테스트베드 침하량 계측 .....	19
그림 19 진행 거리에 따른 침하량 측정 .....	21
그림 20 진행 거리에 따른 견인력 측정 .....	21
그림 21 진행 거리에 따른 수직력 측정 .....	22
그림 22 휠 테스트베드 주행 중 휠에 작용하는 힘 .....	22
그림 23 휠 테스트베드 모델링 .....	24
그림 24 강체 휠 모델링 .....	25
그림 25 휠 테스트베드 모델링 .....	26
그림 26 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.2$ ) .....	28
그림 27 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.3$ ) .....	29
그림 28 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.4$ ) .....	29
그림 29 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.5$ ) .....	30
그림 30 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.6$ ) .....	30
그림 31 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.7$ ) .....	31
그림 32 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.8$ ) .....	31
그림 33 마찰 계수에 따른 침하량 ( $\gamma = 0$ ) .....	32
그림 34 마찰계수와 에너지계수에 따른 최대 침하량 .....	33
그림 35 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션의 침하량 비교 .....	36
그림 36 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션의 견인력 비교 .....	38
그림 37 휠 테스트베드 시뮬레이션 .....	40
그림 38 휠 테스트베드 시뮬레이션(Isometric view) .....	40
그림 39 실제 차량 재원 .....	41
그림 40 더블 위시본 서스펜션 .....	43
그림 41 전차량 휠과 서스펜션 모델링 .....	44
그림 42 시간에 따른 휠의 진행방향 위치 .....	46
그림 43 시간에 따른 휠의 측면방향 위치 .....	46
그림 44 시간에 대한 휠의 수직방향 위치 .....	47
그림 45 진행방향 위치에 대한 휠의 수직방향 위치 .....	47
그림 46 측면방향 위치에 대한 휠의 수직방향 위치 .....	48
그림 47 실제 전차량 야지노면 주행 시험로 .....	49
그림 48 전차량 주행 야지노면 모델링 .....	49
그림 49 In-house 코드 전차량 모델링 .....	50

그림 50 차량 주행 시뮬레이션 .....	51
그림 51 전차량 주행 시뮬레이션(Isometric view) .....	52
그림 52 초기속도에 따른 차량의 주행 거리 .....	53
그림 53 초기속도에 따른 평균 감속도 .....	54
그림 54 초기속도 3m/s일 때 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력 .....	55
그림 55 초기속도 4m/s일 때 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력 .....	55
그림 56 초기속도 5m/s일 때 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력 .....	56
그림 57 초기속도 6m/s일 때 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력 .....	56



A Study on the Full-Car Driving Simulation on Sandy Road  
based on Discrete Element Method

Sung Heon Jung

Department of Mechanical design engineering, The Graduate School,  
Pukyong National University

**Abstract**

The soil road is composed of powder and It is difficult to determine the driving state of unmanned vehicles because the road surface is deformed when the road surface is contacted with wheel. In order to secure driving performance, stability and efficiency of unmanned vehicles, it is necessary to establish a contact analysis database between wheels and road surfaces. Soil and sand properties are affected by environment, such as weather and humidity, so that property changes can easily occur. Because of soil and sand characteristics, to build a database by performing experiments on real land surfaces is not efficient. In simulation, since there is no effect on the surrounding environment, it is possible to build and efficient database. Therefore it is necessary to study wheel and soil road contact analysis through computer simulation.

The sandy road is modeled based on discrete element method and Full-Car is modeled based on multi-body dynamics. After calculating the contact force between the particle and particle, the particle and rigid body, the discrete element method applies the Velocity verlet integrator and the multibody dynamics is calculated using the 4<sup>th</sup> runge-kutta integrator.

In this study, wheel test bed experiments is performed to conduct contact studies between wheels and sandy road. Wheel test bed simulation is verified by comparison experiment of drawbar pull and max sinkage. Based on the wheel test bed experiments and simulation, Coast down driving simulation of full-car is performed and compared the driving distance, average deceleration of full-car and drawbar pull of wheels according to the Initial velocity. The simulation is expected to establish and efficient database of contact analysis between wheels and sandy road.

# 1. 서론

## 1.1 연구의 필요성

최근 우주 탐사 및 무인 차량의 발달로 인해 야지 노면을 주행하는 무인 차량의 연구개발이 중요해지고 있다. 야지 노면은 모래지와 토양과 같은 분체로 이루어져 있으며 노면은 휠과의 접촉 시 노면의 변형이 발생하기 때문에 무인차량의 주행상태를 결정하기 어렵다. 휠의 슬립을 및 작용력을 측정하고 이를 통해 앞으로의 무인 차량의 주행상태를 결정하여 안정적이고 효율적인 주행 성능을 유지하는 것이 무엇보다 중요하다 할 수 있다. 무인차량의 주행성능, 안정성, 효율성을 확보하기 위해서는 휠과 야지노면의 접촉해석 데이터베이스 구축이 필요하다. 데이터베이스의 구축은 현재까지 주로 시험을 통해 이루어지고 있다.[1] 토양과 모래지의 특성은 날씨, 습도와 같은 주변 환경에 많은 영향을 받으며 물성의 변화가 쉽게 일어나게 된다. 이러한 토양과 모래지의 특성 때문에 실제 야지노면에서 다양한 실험을 수행하여 데이터베이스를 구축하는 것은 효율적이지 못하다. 시뮬레이션은 외부환경에 대한 변수를 없앨 수 있으며, 토양 조건을 설정하기 쉽기 때문에 효율적인 데이터베이스 구축이 가능하다. 효율적인 데이터베이스 구축을 위해서 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 휠과 야지노면의 접촉 연구가 많이 이루어지고 있다.

## 1.2 연구 배경

노면을 주행하는 차량이 받는 모든 힘들은 바퀴에서 발생하여 차량으로 전달되며 차량 동역학 해석에 있어서 바퀴에 작용하는 힘을 해석하는 것은 매우 중요하다. 차량이 주행하는 노면은 포장 노면, 야지 노면으로 크게 2가지로 나눌 수 있다. 휠과 포장 노면의 접촉해석 모델은 강체 노면과 휠의 접촉 해석으로 MF(Magic Formula)타이어 모델, UA(University of Arizona)타이어 모델 등이 있으며, 실제 해석에 적용이 되고 있다.[2] 야지 노면과 휠의 접촉 해석은 분체로 이루어진 노면과 휠의 접촉이다. 야지노면과 휠의 접촉 해석은 경험과 지형역학의 이론을 통해 이루어 졌으며 지형역학의 이론적 한계와 어려움이 많았다. 야지노면과 휠의 접촉 해석을 위해 M.G. Bekker가 1956년에 반 실험적인 Bekker Method가 처음 제시되었다. 하지만 Bekker Method는 복잡한 야지노면 표현의 한계가 있었다.[3]

1970년대 이후 컴퓨터의 성능이 향상 되면서 수치해석적 방법인 이산요소법 (Discrete Element Method)이 주목을 받기 시작하였다. 이산요소법은 분체를 구성하고 있는 입자를 개개로 모델링 하여 입자의 동적 거동을 해석 하는 방법으로 1979년 Cundall과 Strack에 의해 제안되어졌다.[4] 2000년대 이후 우주 탐사 및 무인 차량의 발달로 이산요소법을 이용한 월과 노면의 접촉 연구가 활발해졌다. 2006년 Z. Asaf 등은 이산요소법을 이용하여 2D에서 강제 월과 야지 노면간의 접촉 연구를 수행 하여 월에 작용하는 접촉력을 실험과 비교를 통해 이산요소법을 통한 시뮬레이션의 가능성을 제시하였으며, 2010년 H. Nakashima는 그림 1과 같이 2D에서 경사노면에서 월과 노면간의 접촉 연구를 통해 월의 성능평가를 수행 하였다.[5][6] 2014년 Wiliam Smith는 월과 야지 노면간의 접촉 연구에서 Bekker method, 이산요소법, 월 주행 시험의 비교를 통해 그림2와 같이 월과 야지노면의 접촉해석에서 이산요소법의 우수성을 검증 하였다.[7] 2015년 Jerome B. Jhonson은 화성 탐사로봇의 월 성능을 검증하기 위해 이산요소법과 실험과의 비교 연구를 수행 하였다.[8]

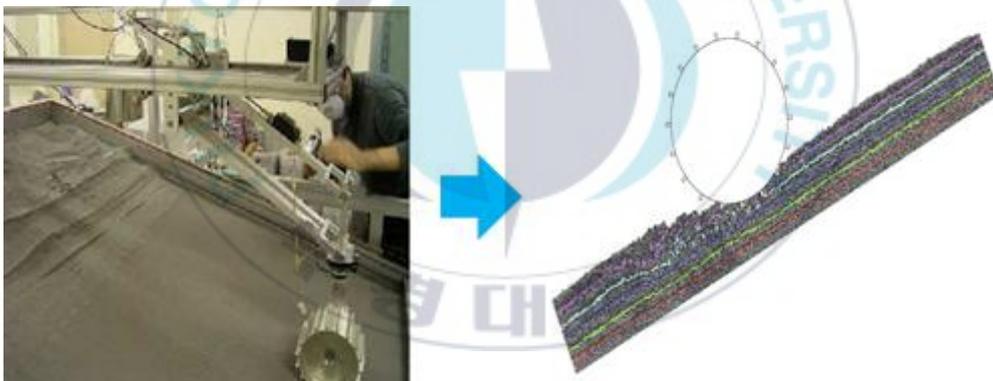


그림 2 H. Nakashima 경사노면에서 월과 모래지 노면간의 접촉연구

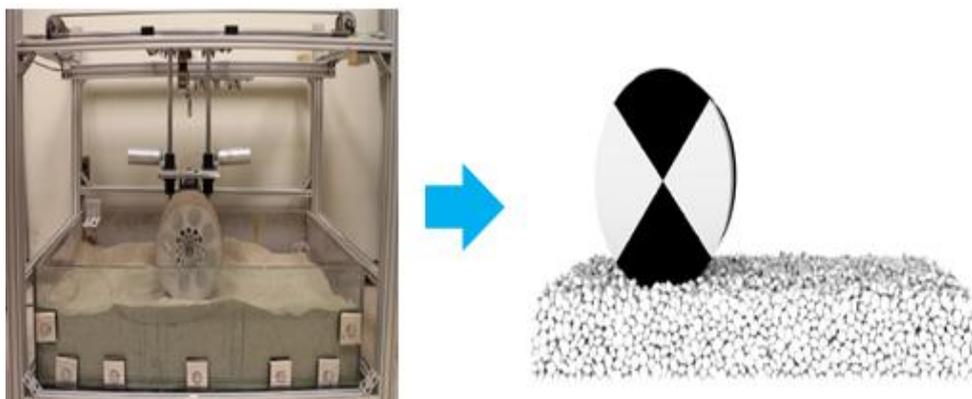
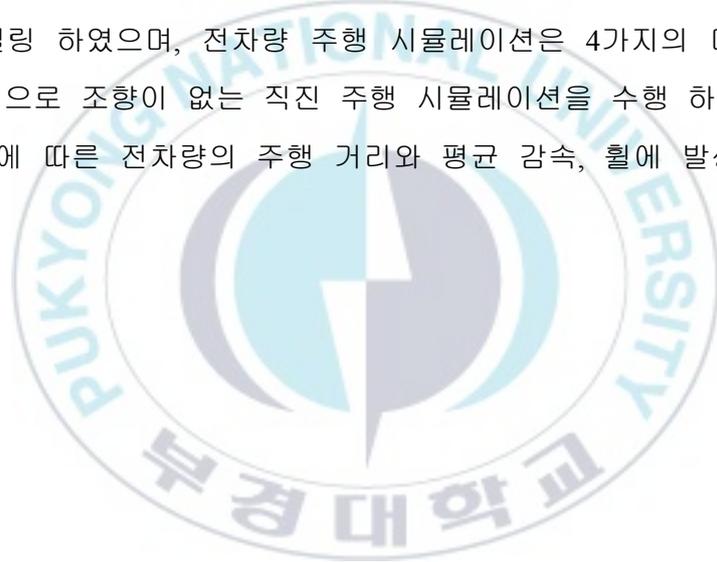


그림 3 이산요소법, Bekker method, 월 테스트베드 실험의 비교연구

### 1.3 연구 목표 및 연구 범위

본 연구에서는 실제 야지노면을 주행하는 전차량과 같이 야지노면 위를 주행하는 전차량 시뮬레이션으로 데이터베이스 구축에 대한 가능성을 확인 하였으며 시뮬레이션에 대한 신뢰를 검증하기 위해 휠 테스트 베드 실험과 시뮬레이션의 비교를 통해 해석을 검증하였다. 휠 테스트베드 시뮬레이션의 해석 검증을 위해 휠 테스트베드 실험을 수행하였으며 시뮬레이션으로 실제 야지노면과 유사한 모델링을 위해서 입자간의 접촉계수를 도출하여 휠 테스트베드 실험에서 침하량과 진행방향 힘을 비교하였다.[9] 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션의 비교 및 검증을 기반으로 하여 동일한 접촉 계수를 가지는 야지노면을 모델링하여 전차량 시뮬레이션을 수행 하였다. 전차량 주행 시뮬레이션은 휠 테스트 베드 시뮬레이션을 기반으로 야지노면을 모델링 하였으며, 전차량 주행 시뮬레이션은 4가지의 다른 초기속도를 가진 타행주행으로 조향이 없는 직진 주행 시뮬레이션을 수행 하였다. 타행 주행을 통해 속도에 따른 전차량의 주행 거리와 평균 감속, 휠에 발생하는 견인력을 확인하였다.



## 2. DEM 기반 모래입자와 강체 휠과의 접촉 모델링

### 2.1 이산요소법

이산요소법은 분체를 구성하고 있는 입자를 개개로 모델링 하여 입자의 동적 거동을 해석 하는 방법으로 1979년 Cundall과 Strack에 의해 제안되어졌다.[4] 많은 수의 입자를 각각의 개별적인 요소로 간주하여 입자의 거동을 해석하며 입자의 거동은 뉴턴의 제 2법칙을 기반으로 한다. 뉴턴 제 2법칙은 식 (1)과 식 (2)로 표현된다.

$$m_i \ddot{u} = F_i \quad (1)$$

$$I_i \dot{\omega} = T_i \quad (2)$$

### 2.2 입자간의 접촉모델

입자의 거동을 해석하기 위해서는 입자에 작용하는 힘인 접촉력 계산이 필요하다. 이산요소법에서 접촉력은 모두 입자 간의 침투량을 기반으로 하여 계산되며 크게 법선력(Normal force), 접선력(Tangential force), 점성력(Cohesion force) 3가지로 이루어지며 식 (3)으로 표현된다.

$$F = (F_n + F_t + F_{JKR}) \quad (3)$$

#### 2.2.1 법선력 접촉모델

법선력은 Hertzian spring와 viscous damping모델을 사용하였으며 그림 3과 같이 접촉시 발생하는 법선력을 나타내었다. 법선력을 구하는 공식은 식 (4)으로 표현된다.  $k_n$ 은 스프링 계수,  $\delta_n$ 은 법선방향의 침투량,  $c_n$ 은 감쇠 계수,  $\Delta v$ 은 두 입자간의 상대 속도를 나타낸다.

$$F_n = k_n \delta_n^{1.5} + c_n (\Delta v \cdot \hat{n}) \quad (4)$$

법선 스프링 계수는 두 입자의 등가 영률과 등가 반경으로 구해진다. 스프링

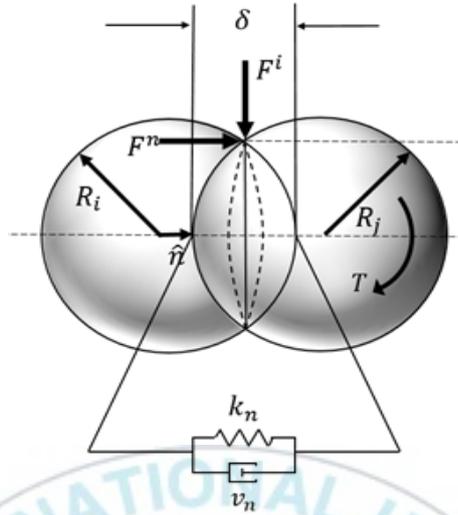


그림 4 법선력 접촉 모델

계수를 구하는 공식은 식 (5)에 표현하였다. 등가 영률과 등가 반경은 접촉하는 두 입자의 영률, 포아송비, 반지름으로 구해지며 식 (6)과 식(7)로 표현된다.

$$k_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \quad (5)$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \quad (6)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \lambda_i^2}{E_i} + \frac{1 - \lambda_j^2}{E_j} \quad (7)$$

법선 댐핑 계수는 법선 스프링 계수, 입자의 등가 질량, 입자의 반발계수를 통해 구해지며 식 (8)과 같이 표현된다. 등가질량은 두 입자의 질량으로 계산되며 식 (9)로 표현된다. 두입자의 상대속도는 병진방향의 속도와 회전에 의한 접선방향에 의한 속도로 계산되며 식 (10)과 같다. 상대 속도 식에서  $v$ 는 입자의 법선방향 속도,  $\omega$ 는 입자의 회전 속도이다.

$$c_n = \sqrt{\frac{4k^n m^*}{1 + (\pi/\ln e_p)^2}} \quad (8)$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \quad (9)$$

$$\Delta v = (v_j + \omega_j \times (R_j \cdot - \hat{n})) - (v_i + \omega_i \times (R_i \cdot - \hat{n})) \quad (10)$$

### 2.2.2 접선력 접촉모델

접선력 접촉모델은 접선방향의 침투량을 통해 결정되며 법선력과 마찬가지로 스프링과 댐퍼로 표현된다.[10] 접선력의 접촉 모델은 그림 4와 같이 표현하였으며 접선력 계산 공식은 식 (11)과 같이 표현된다.  $k_s$ 는 접선방향 스프링 계수,  $\delta_s$ 는 접선방향 침투량,  $c_s$ 는 접선방향 댐핑 계수,  $\Delta v_s$ 는 두 입자의 접선방향 상대속도,  $\mu_s$ 는 마찰 계수,  $f_{sn}$ 은 계산된 법선력이다. 접선력은 최대 마찰력인  $\mu_s |f_{sn}|$ 을 넘지 못하기 때문에 2가지의 값을 비교 후 작은 값을 접선력으로 계산한다.

$$F_t = \min\{(k_s \delta_s + c_s \Delta v_s) \cdot \hat{s}_{ij}, \mu_s |f_{sn}| \cdot \hat{s}\} \quad (11)$$

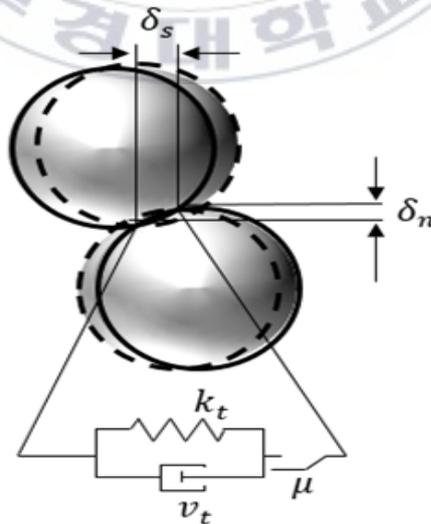


그림 5 접선력 접촉 모델

접선력의 접선 스프링계수와 댐핑계수는 법선력에서 구해진 스프링 계수와 댐핑 계수의 일정 비율을 곱하여 사용하며 식 (12), 식(13)과 같다. 접선 방향의 상대 속도는 식 (14)로 표현되며 상대속도에서 접선방향의 성분만 도출한다.

$$k_s = k_n \times ratio \quad (12)$$

$$c_s = c_n \times ratio \quad (13)$$

$$\Delta v_t = \Delta v - (\Delta v \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (14)$$

접선방향의 침투량은 접선방향의 상대속도에서  $\Delta t$ 인 적분 간격만큼의 시간을 곱해주면 식 (15)와 같이 침투량이 계산된다. 접선방향의 유닛벡터  $\hat{s}$ 는 접선방향의 상대속도로 계산되며 식 (16)으로 표현된다.

$$\delta_s = |v_t| \times \Delta t \quad (15)$$

$$\hat{s} = \frac{\Delta v_t}{|\Delta v_t|} \quad (16)$$

### 2.2.3 JKR 점성 모델

JKR 점성 모델은 Johnson-kundall-Robert가 1971년 개발한 모델로 탄성체에 저장된 탄성에너지와 표면에너지의 손실 사이의 균형을 이용하여 점착력이 있는 접촉 이론을 공식화 한 것이다.[11] 점착력 발생은 그림 5와 같이 표현되고 계산식은 식 (17)과 같다.  $\gamma$ 는 에너지 계수,  $E$ 는 영률,  $R$ 은 입자 반경,  $a$ 는 접촉 반경을 나타낸다. 접촉 반경을 구하는 식은 식 (18)과 같이 표현되며 입자의 등가 반지름  $R^*$ 와 등가 영률  $E^*$ 로 계산된다.

$$F_{JKR} = 4\sqrt{\pi\gamma E^* a^3} \cdot n \quad (17)$$

$$a = \left( \frac{9\pi\gamma(R^*)^2}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (18)$$

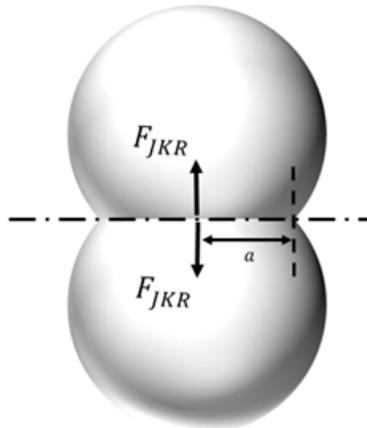


그림 6 JKR 점착 (구 접촉)

#### 2.2.4 구름 저항 모멘트 모델

이산요소법의 입자 모델링은 구 형태를 기반으로 한다. 구 형태의 입자는 기하학적인 형태의 입자와 비교하여 계산 시간에 매우 효율적이지만 기하학적인 형태의 입자 거동을 표현하는데 많은 어려움을 가진다. 구 형태의 입자는 접선방향의 힘이 발생하게 되면 과도한 회전이 발생하게 되며 이를 해결하기 위해 구름 저항 모멘트 모델이 필요하다. 구름 저항력 모델은 그림 6과 같이 구형태의 입자의 구름 운동을 제어할 수 있다. 입자에 작용하는 모멘트는 식 (19)와 같이 표현된다.[12]

$$T = R_i \times F_t \quad (19)$$

구름 저항 모멘트는 입자에 작용하는 수직력  $F_n$ 에 등가 반경  $R^*$ , 구름 저항 계수  $\mu_r$ , 상대 회전속도  $w_{rel}$ 로 이루어져 있으며 식 (20)과 같이 표현된다. 입자의 상대 회전속도는 식(21)과 같이 표현된다.

$$T_r = -(\mu_r)(R^*)|F_n| \frac{w_{rel}}{|w_{rel}|} \quad (20)$$

$$w_{rel} = w_j - w_i \quad (21)$$

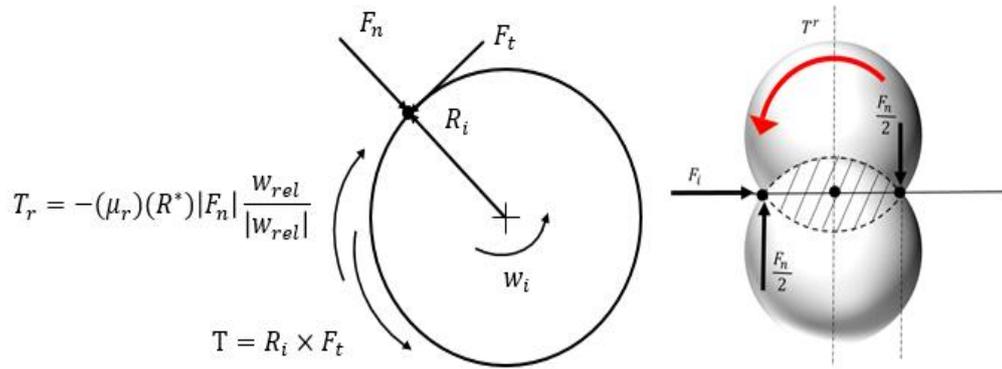


그림 7 구름 저항력 모델



### 3. 다물체동역학과 이산요소법과의 연성해석기법

#### 3.1 다물체동역학

본 연구에서는 야지노면을 주행하는 전차량 주행 시뮬레이션을 위해 다물체동역학과 이산요소법과의 연성해석기법을 사용하였다. 전차량의 위치와 자세를 결정하기 위해서 직교좌표계(Cartesian coordinate)와 오일러 매개변수(Euler parameter)를 사용하였으며 명시적(Explicit) 적분기인 4<sup>th</sup> Runge-Kutta를 사용하였다.

##### 3.1.1 오일러 매개변수

3차원 공간상에서 물체의 자세를 결정하기 위해서는 오일러각(Euler angle), 브라이언트각(Bryant angle), 오일러 파라미터로 3가지 방법이 존재한다. 오일러각과 브라이언트 각은 물체의 로컬 좌표계에서 ZXZ축, XYZ축으로 물체를 회전하여 해석하는 방법이다. 오일러 각과 브라이언트 각은 두 축이 같은 방향으로 일치 하면 특이 문제가 발생하여 해석이 불가능하지만 오일러 매개변수는 물체의 회전축에 대해서 회전한 각도를 계산하기 때문에 특이(Singular)문제를 해결 할 수 있다.[13] 오일러 파라미터는 그림 7과 같으며  $\vec{u}$ 를 물체의 회전축으로 설정하고  $\overline{NP}$ 와  $\overline{NP}'$ 의 각도를 계산하여 물체의 회전을 계산한다. 오일러 매개변수는 하나의 회전각과 회전 지향축의 방향코사인으로 표현되며 식 (25)와 같다. 회전 파라미터에서  $e_0$ 는 회전각을 나타내며 식 (26)과 같이 표현된다.

$$\vec{e} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \quad (25)$$

$$e_0 = \cos \frac{\Phi}{2} \quad (26)$$

$e_1, e_2, e_3$ 는 회전지향축의 방향 코사인을 나타내며 식(27)과 같이 표현된다. 이와같이 오일러 매개변수는 4개의 회전 파라미터가 정의되며 회전에 있어서 4개의 자유도를 가지게 된다.

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \vec{u} \sin \frac{\Phi}{2} \quad (27)$$

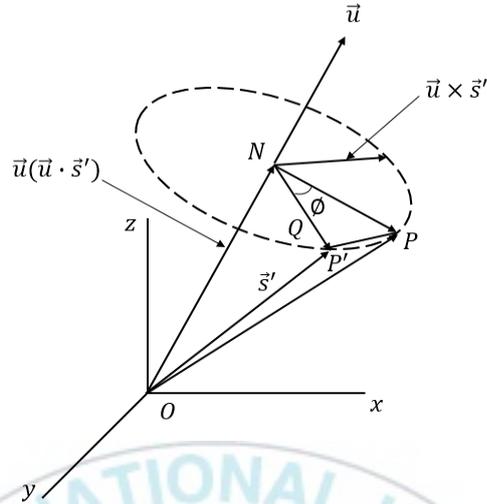


그림 8 오일러 파라미터

오일러 매개변수는 물체의 자세를 표현하는데 4개의 좌표를 사용하기 때문에 하나의 물체는 3차원 공간상에서 7 자유도를 가지며 물체의 좌표는 식 (28)과 같이 표현된다.

$$q = [x, y, z, e_0, e_1, e_2, e_3]^T \quad (28)$$

### 3.1.2 운동방정식

n개의 일반화 좌표를 표현하는 q는 식 (29)와 같고 다물체시스템에 대한 운동방정식은 식 (30)와 같이 표현되며 구속방정식은 식 (31)과 같이 표현된다.

$$q = \{x^1, y^1, z^1, e_0^1, e_1^1, e_2^1, e_3^1 \dots x^n, y^n, z^n, e_0^n, e_1^n, e_2^n, e_3^n\} \quad (29)$$

$$M(q)\ddot{q} + \Phi_q^T(q, t)\dot{\lambda} = Q(\dot{q}, q, t) \quad (30)$$

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (31)$$

식 (30)과 식(31)의  $q, \dot{q}, \ddot{q}$ 는 벡터로 표현되는 물체의 위치, 속도, 가속도를 나타낸다.  $M(q)$ 는  $n \times n$ 의 행렬로 표현되는 질량과 관성 행렬이다.  $Q(\dot{q}, q, t)$ 는  $n \times 1$ 의 힘 벡터이고,  $\lambda$ 는 라그랑지 곱수이다.  $\Phi_q$ 는 구속방정식을 일반화 좌표  $q$ 로 편미분한 것으로  $m \times n$ 으로 표현되는 구속 자코비안 행렬이다. 오일러 매개변수를 사용한 운동방정식을 행렬로 나타내면 식 (32)와 같다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 4G^T J' G 2p \\ 0 & 2p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{p} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 2G^T T' + 8\dot{G}^T J' \dot{G} p \\ -2\dot{p}^T \dot{p} \end{bmatrix} \quad (32)$$

식 (32)에서  $M$ 은 물체의 질량을 포함하는 대각행렬이며,  $J'$ 는 물체의 관성을 포함하는 대각행렬이다.  $r$ 은 물체의 위치,  $p$ 는 오일러 매개변수,  $F$ 와  $T'$ 은 물체에 작용하는 힘과 토크를 나타낸다. 물체의 회전을 표현 하는데 사용되는 변환행렬  $A$ 는 식 (33)과 같으며 행렬  $G$ 와 행렬  $L^T$ 로 표현된다.  $G$ 와  $L^T$ 는 식(34), 식(35)로 표현된다.

$$A = GL^T = \begin{bmatrix} 2e_0^2 - 1 + e_1^2 & 2e_1e_2 - 2e_0e_3 & 2e_1e_3 + 2e_0e_2 \\ 2e_1e_2 + 2e_0e_3 & 2e_0^2 - 1 + e_2^2 & 2e_2e_3 - 2e_0e_1 \\ 2e_1e_3 - 2e_0e_2 & 2e_2e_3 + 2e_0e_1 & 2e_0^2 - 1 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$G = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$L^T = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix}^T \quad (35)$$

### 3.2 다물체동역학과 이산요소법과의 연성해석 알고리즘

다물체동역학에 사용되는 적분기는 4<sup>th</sup> Runge-Kutta를 사용하며 이산요소법에 사용되는 적분기는 Velocity-verlet을 사용한다. 해석에 사용되는 적분기가 다르기 때문에 연성해석을 할 수 있는 알고리즘이 필요하다. 그림 8은 다물체동역학과 이산요

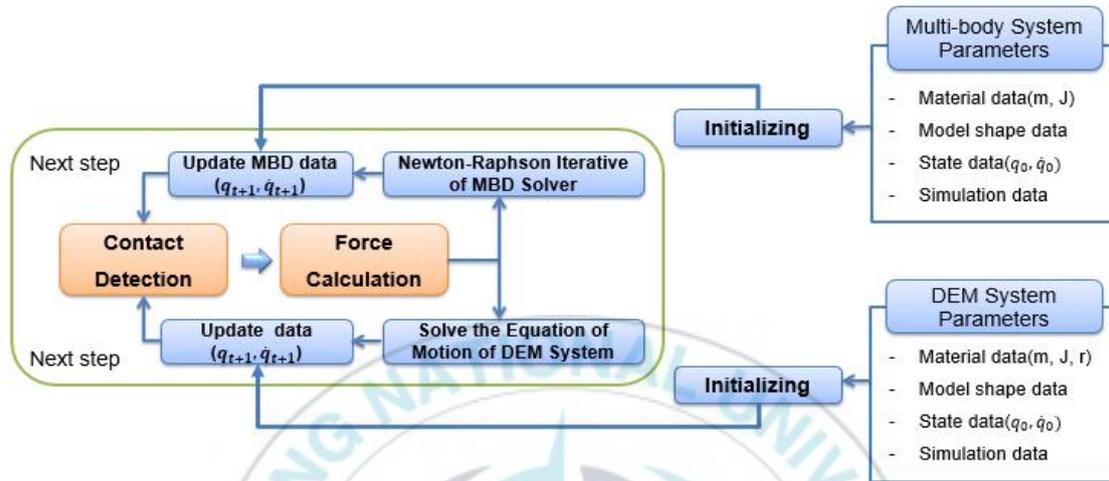


그림 9 다물체동역학과 이산요소법의 연성 해석 개념도

소법의 연성해석을 위한 알고리즘을 나타내었다.[13] 해석을 위해 주어진 물체와 입자의 위치, 속도, 물성치와 같은 데이터를 통해 초기화를 한다. 초기화 한 뒤,  $t_0$ 에서의 강체와 입자, 입자와 입자, 입자와 경계면과의 접촉 판별을 수행한다. 접촉에 의한 접촉력이 발생되면 다물체동역학과 이산요소법을 해석솔버에 힘 정보를 넘겨주어 해석을 수행하며  $t_{n+1}$ 에서의 입자와 강체의 위치를 결정하며  $t_{end}$ 까지 반복하여 연성해석을 수행한다.

4<sup>th</sup> Runge-Kutta를 이용한 다물체 동역학 계산 알고리즘은 그림 9와 같다.  $t_n$ 에서의 힘과 물체의 위치, 속도를 이용해 운동방정식을 구성하고 계산한다. 운동방정식 계산을 통해 물체의 가속도가 계산되며 속도와 가속도를 이용하여 위치와 속도를 적분하고 수정단계에서 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 반복 계산 알고리즘에 의해 수정하여  $t_{n+1}$ 에서의 물체의 위치, 속도를 결정한다.[14]

Velocity-verlet을 이용한 이산요소법의 알고리즘은 그림 10과 같다.  $t_n$ 에서의 입자의 위치를 통해 입자의 접촉 판별을 수행한다. 접촉이 일어나는 입자의 침투량을 통해 접촉력을 계산한 뒤, Velocity-verlet을 이용하여  $t_{n+1}$ 의 입자의 위치, 속도를 결정하고 반복 수행한다.

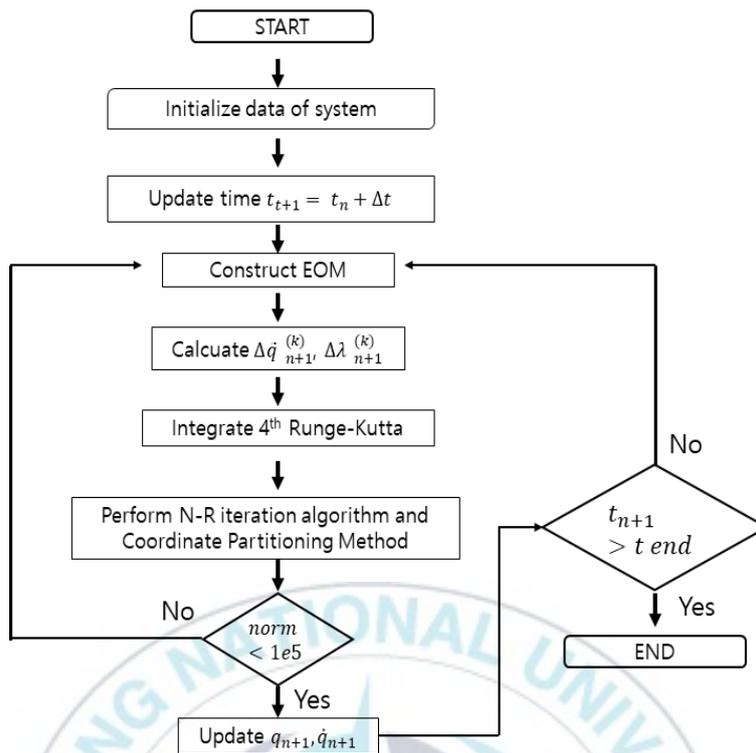


그림 10 다물체 동역학 해석 알고리즘

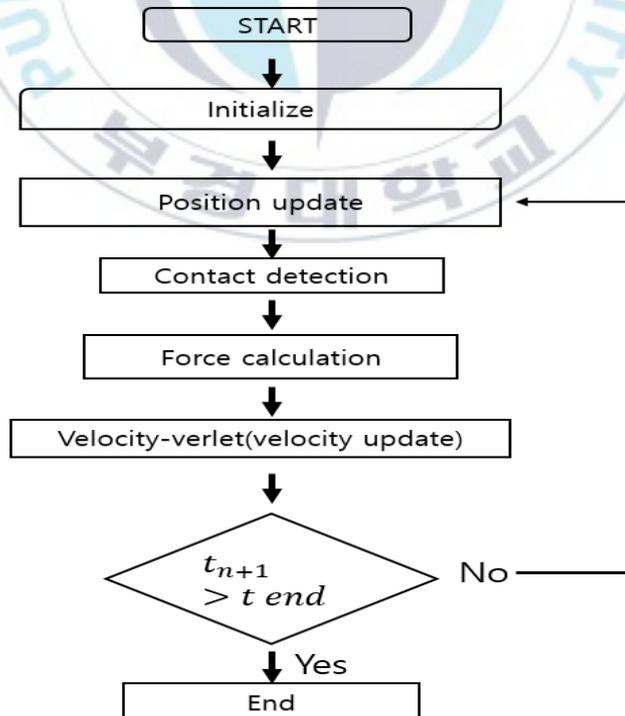


그림 11 이산요소법 해석 알고리즘

## 4. 강체 휠과 모래입자의 접촉해석 및 실험비교

### 4.1 휠 테스트베드 실험

#### 4.1.1 휠 테스트베드 장치 구성

모래지 노면을 주행하는 강체 휠과의 접촉 실험을 위해 휠 테스트베드 실험을 수행하였다. 실험에 사용된 휠 테스트베드 장치의 개략도는 그림 11과 같다. 휠 테스트베드는 H-body, V-body, Wheel로 구성되어있으며 강체 휠과 모래입자의 접촉력을 계측하는 센서는 6분력계(6-component load cell)로 계측하였다.

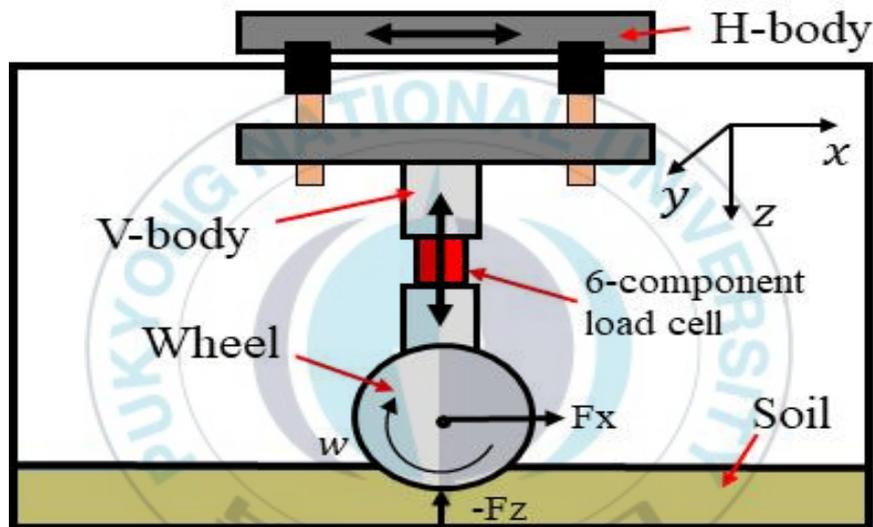


그림 12 휠 테스트베드 개략도

H-body는 y축으로 이동이 자유로우며 x축으로는 모터를 통해 속도가 제어된다. V-body는 H-body와 연결되어 있으며 z축으로의 이동이 자유롭다. 강체 휠은 톱니 형태의 패턴을 가지며 그림 12와 같다. 강체 휠의 반지름은 100mm의 반지름을 가지고 5mm의 톱니형태 패턴을 가진다. 강체 휠은 알루미늄 소재로 제작되었으며 약 3.3kg의 질량을 가진다. 휠 테스트베드의 모래지는 1760mm×680mm×300mm의 크기를 가지며 휠 테스트베드 시험기는 그림 13과 같다. 실험에 사용된 모래지는 점성이 없는 사질토이며 입자의 반지름은 0.5mm인 매우 고운 입자이다. 실제 모래 알갱이의 사진은 그림 14와 같다.

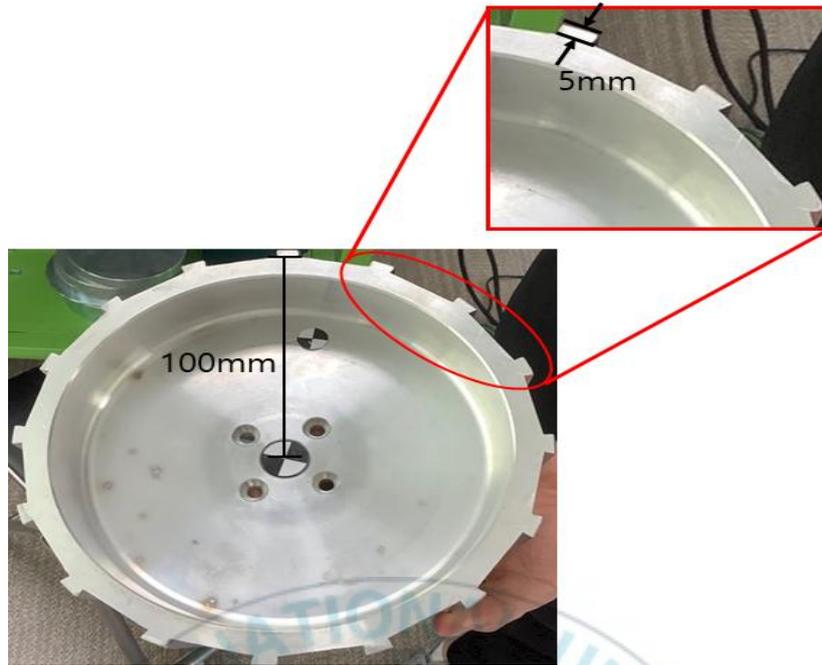


그림 13 실험에 사용된 강체 휠

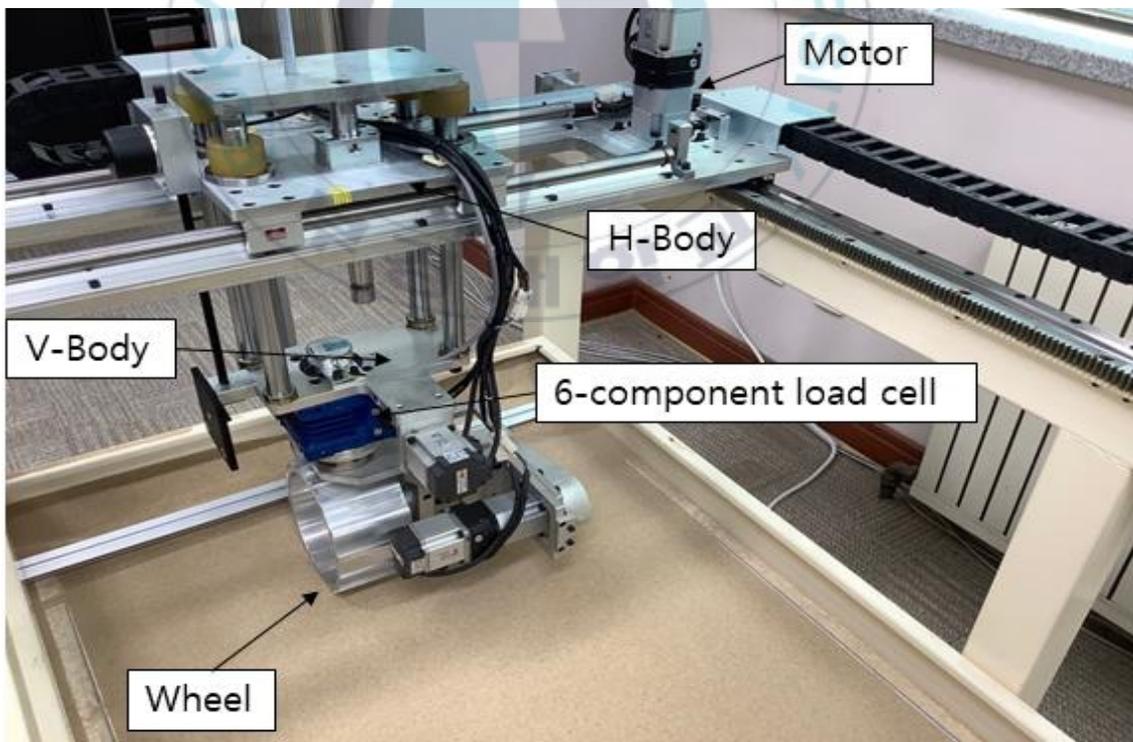


그림 14 휠 테스트 베드 시험기

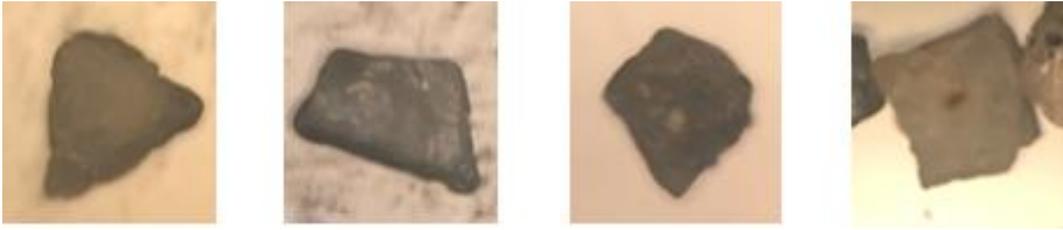


그림 15 모래지의 입자 알갱이

강체 휠과 모래지의 접촉력을 계측하기 위해 6분력계를 사용하였다. 6분력계를 통해 휠에 작용하는 힘을 계측 하게 되면 (N)의 단위로 힘이 계측되지 않기 때문에 6분력계에 대한 캘리브레이션이 필요하다. 힘 센서의 캘리브레이션을 위하여 지그를 제작하였으며 제작된 지그는 그림 15과 같다. 제작된 지그는 총 5개의 스프링으로 이루어져 있으며 하나의 스프링당 스프링계수는 5.44(N/mm)로 총 지그의 스프링 계수는 27.2(N/mm)이다. 지그의 스프링 변위량을 통해 그림 16과 같이 시험기의 자중을 측정 하였으며 측정된 변위량은 7.5mm이다. 지그를 통해 측정된 시험기의 자중은 204.3N으로 계산되었고, 6분력계의 측정된 수직력은 2.6으로 계측되어 78.6의 캘리브레이션 값을 가진다.



그림 16 Calibration용 지그 제작

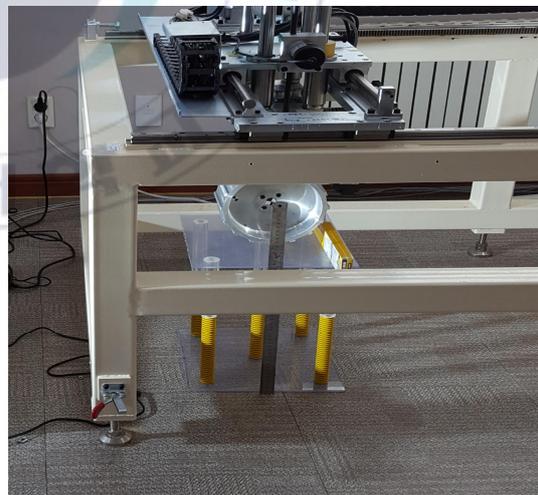


그림 17 지그를 이용한 시험기의 자중 측정

휠 테스트베드 주행 실험을 수행 시 강체 휠은 모래지 위를 주행하기 때문에 침하량이 발생한다. 본 연구에서는 고속카메라의 동작 분석 방법을 이용하여 강체 휠의 침하량을 측정하였다. 고속카메라는 동일 평면상에 위치한 참조점(Reference marker)을 이용하여 거리를 정의하며 추적점(Tracking marker)을 통해 대상의 움직

임을 감지한다. 참조점과 추적점을 동일 평면상에 위치시키기 위해 지그를 3D print를 이용하여 제작하였으며 그림17과 같이 지그를 이용하여 추적점과 참조점을 부착하였다. 휠 테스트베드의 침하량을 정확하게 계측하기 위해 고속카메라는 100프레임으로 촬영하여 0.01초마다 휠의 위치를 추적하여 침하량을 계측하였다.

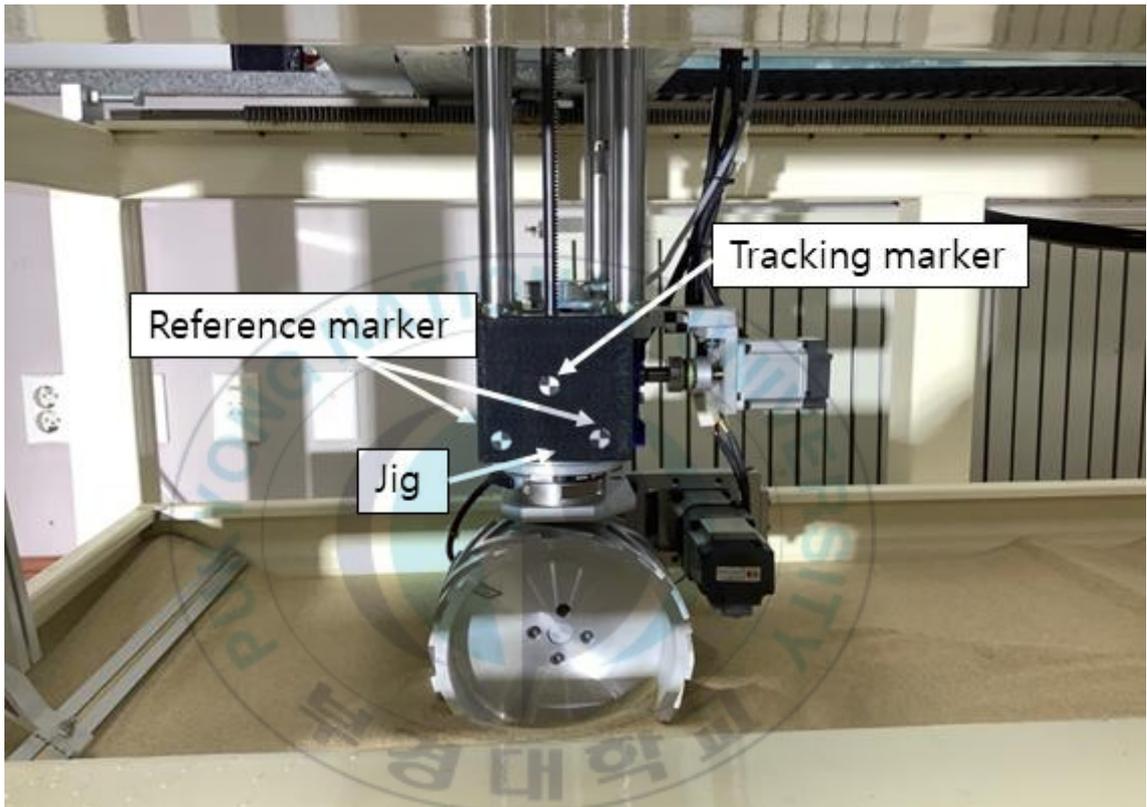


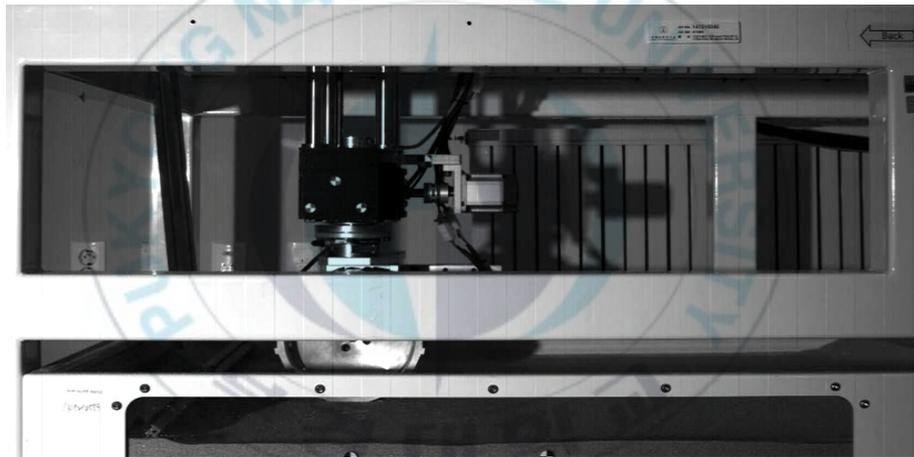
그림 18 고속 카메라를 이용한 침하량 측정

#### 4.1.2 휠 테스트베드 시험 방법

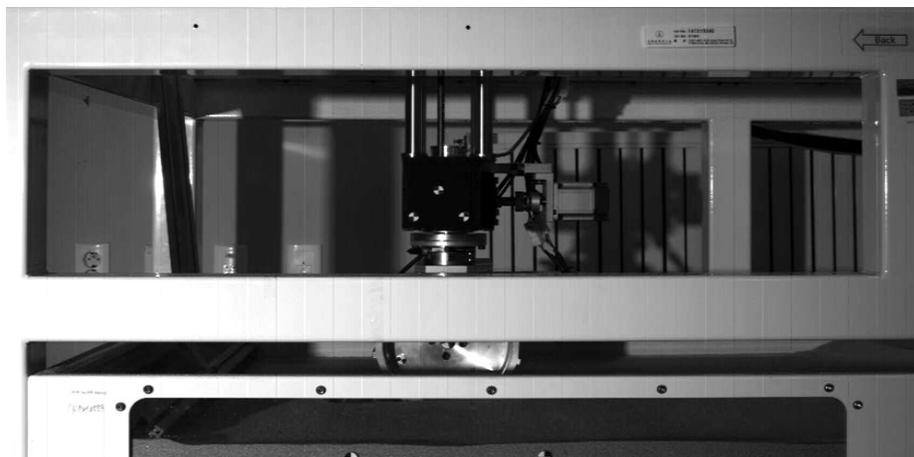
휠 테스트베드 주행 실험은 슬립율 0일때의 주행조건으로 수행하기 위해 강제 휠의 주행 조건을 표 1과 같다. 슬립율은 식 (36)으로 계산되며, 패턴을 제외한 강제 휠의 반지름은 100mm, 진행방향 속도 30mm/s, 각속도 0.3rad/s이다. 휠 테스트베드 주행시간은 약 16초로 주행거리 400mm를 주행하였으며 휠 테스트베드 주행 실험의 재연성을 위해서 같은 조건으로 3번의 주행실험을 실시하였다.

표 1 휠 테스트베드 주행조건

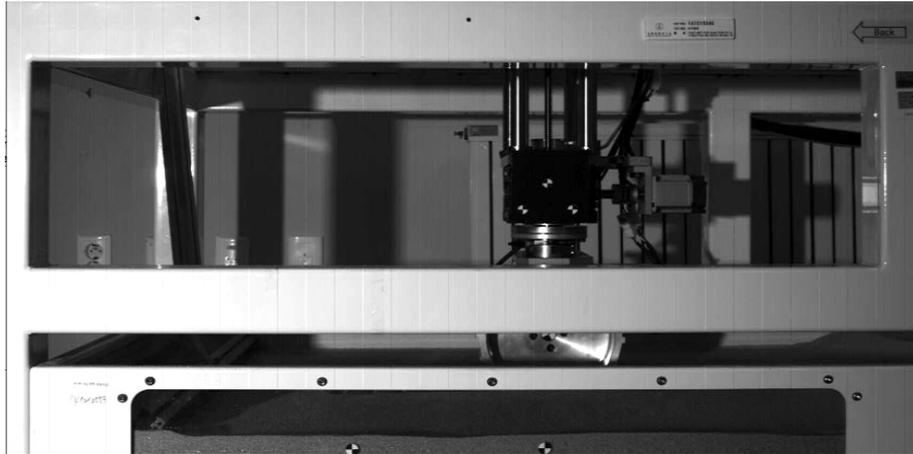
Slip ratio	Radius(mm)	Longitudinal velocity(mm/s)	Angular velocity(rad/s)
0	100	30	0.3



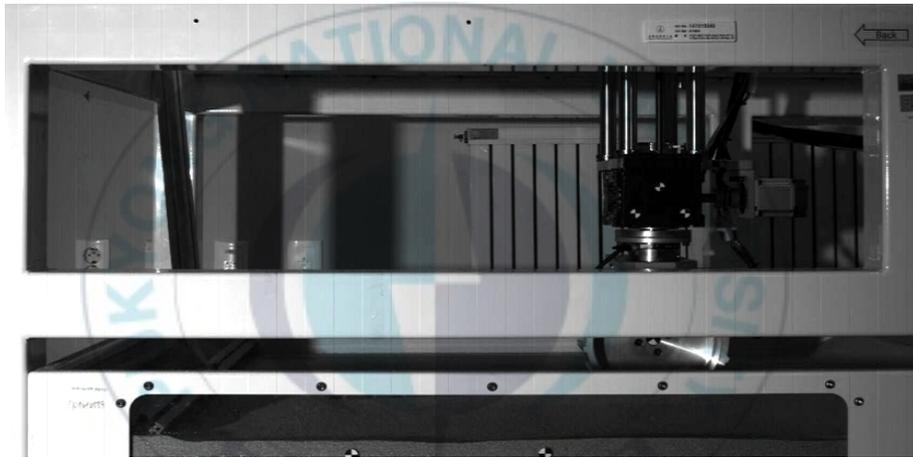
(a) time = 0.0



(b) time = 5.0



(c) time = 10.0



(d) time = 15.0

그림 19 고속카메라를 통한 휠 테스트베드 침하량 계측

그림 18은 고속카메라를 통한 휠 테스트베드 침하량 계측 영상을 사진으로 나타내었으며 (a)는 휠 테스트베드의 초기 위치, (b)는 5초 때의 휠 테스트 베드의 위치, (c)는 10초 때의 휠 테스트베드의 위치, (d)는 15초 때의 휠 테스트베드의 위치를 나타내었다.

3번의 주행을 통해 휠에 작용하는 수직력, 견인력과 휠의 침하량을 계측 하였다. 진행거리에 따른 휠의 침하량, 견인력과 수직력은 그림 19, 그림 20, 그림 21과 같다. 첫 번째 주행 실험에서 침하량이 두 번째 세 번째 침하량과 비교하여 약 3~4mm정도 차이가 나는 것을 확인하였으며 이로 인해 견인력과 수직력에 약간의 차이를 발생 시킨 것으로 확인된다. 세 번의 실험에서 약간의 차이는 발생 하였지

만 침하량, 견인력, 수직력의 경향성과 크기값에는 큰 차이가 없어 재연성을 보여 주는 실험으로 판단된다.

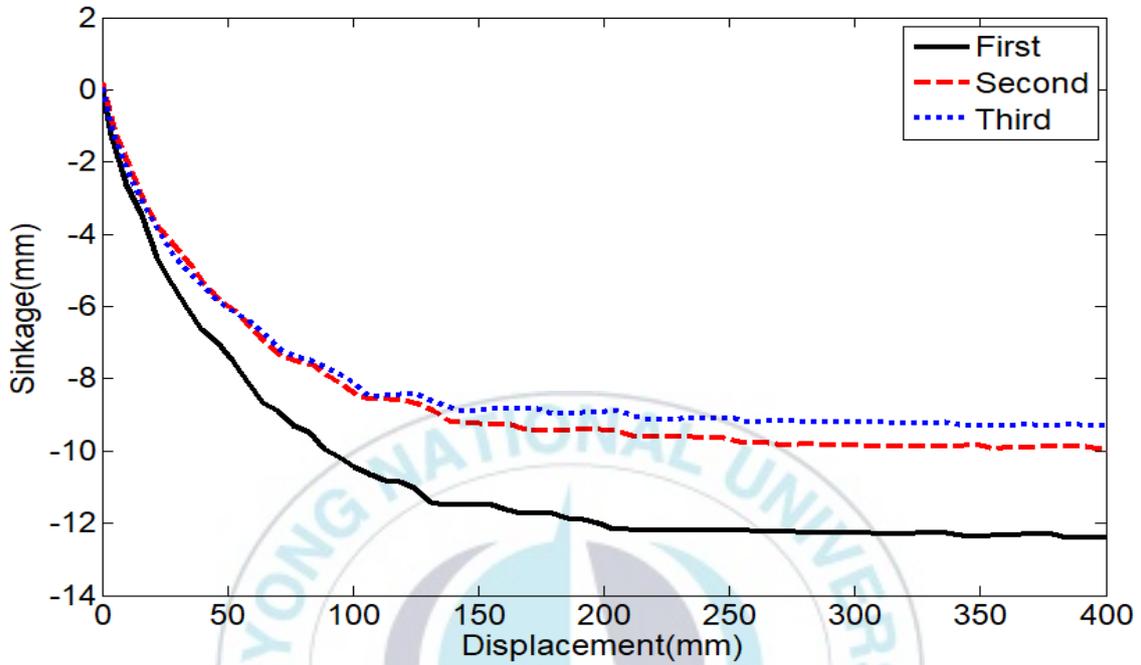


그림 20 진행 거리에 따른 침하량 측정

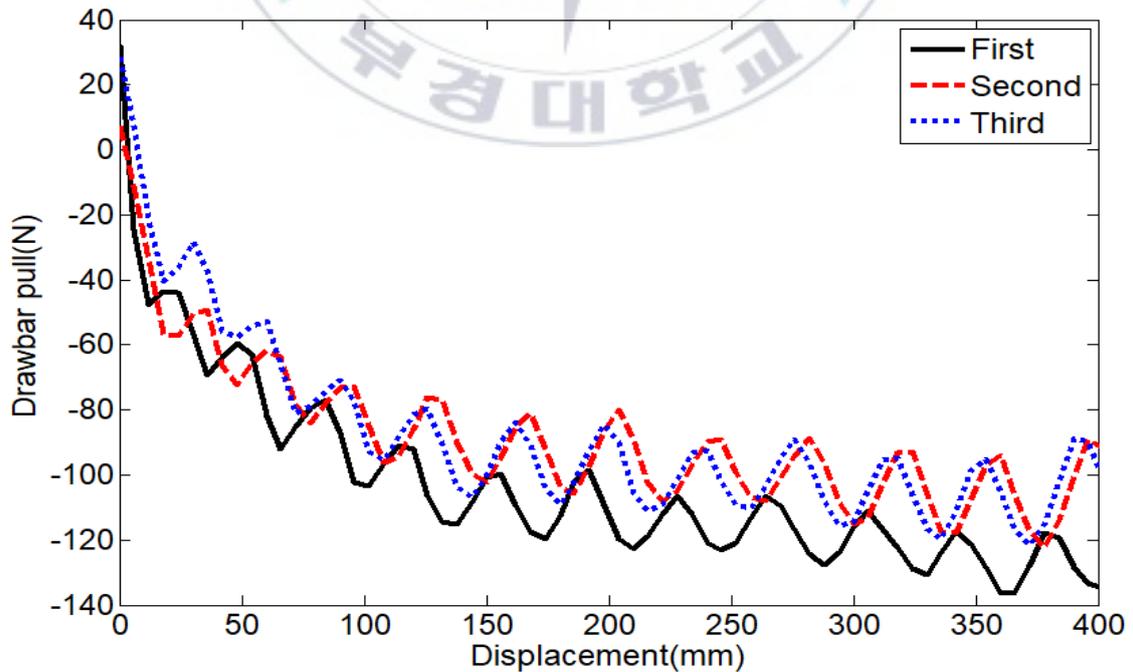


그림 21 진행 거리에 따른 견인력 측정

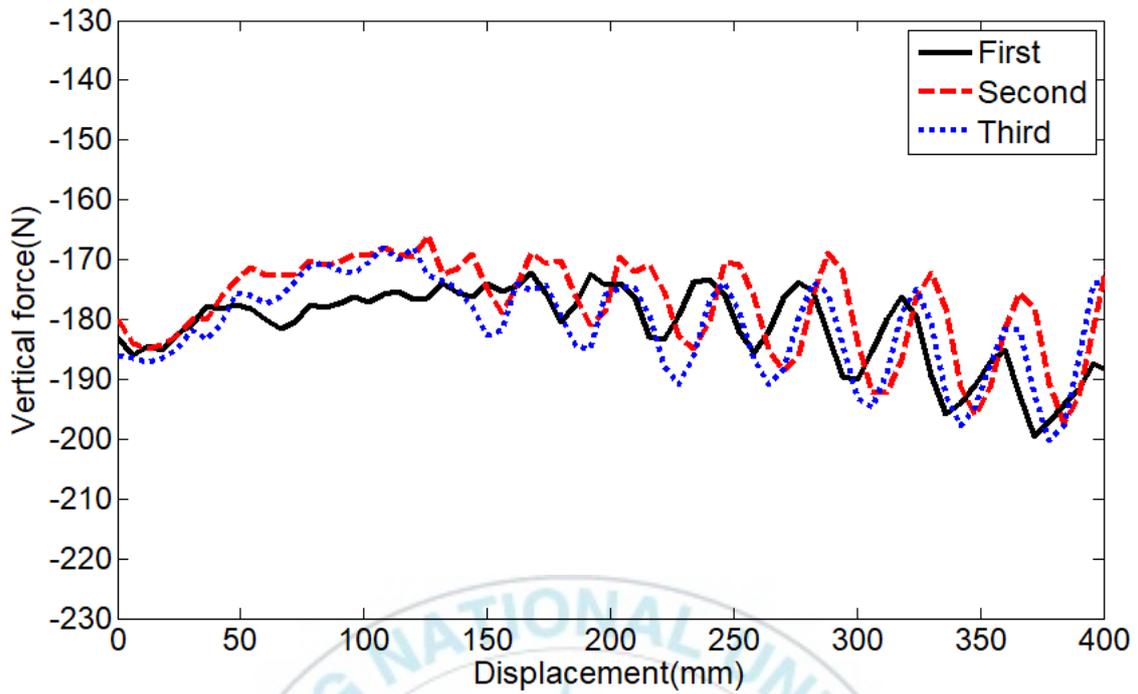


그림 22 진행거리에 따른 수직력 측정

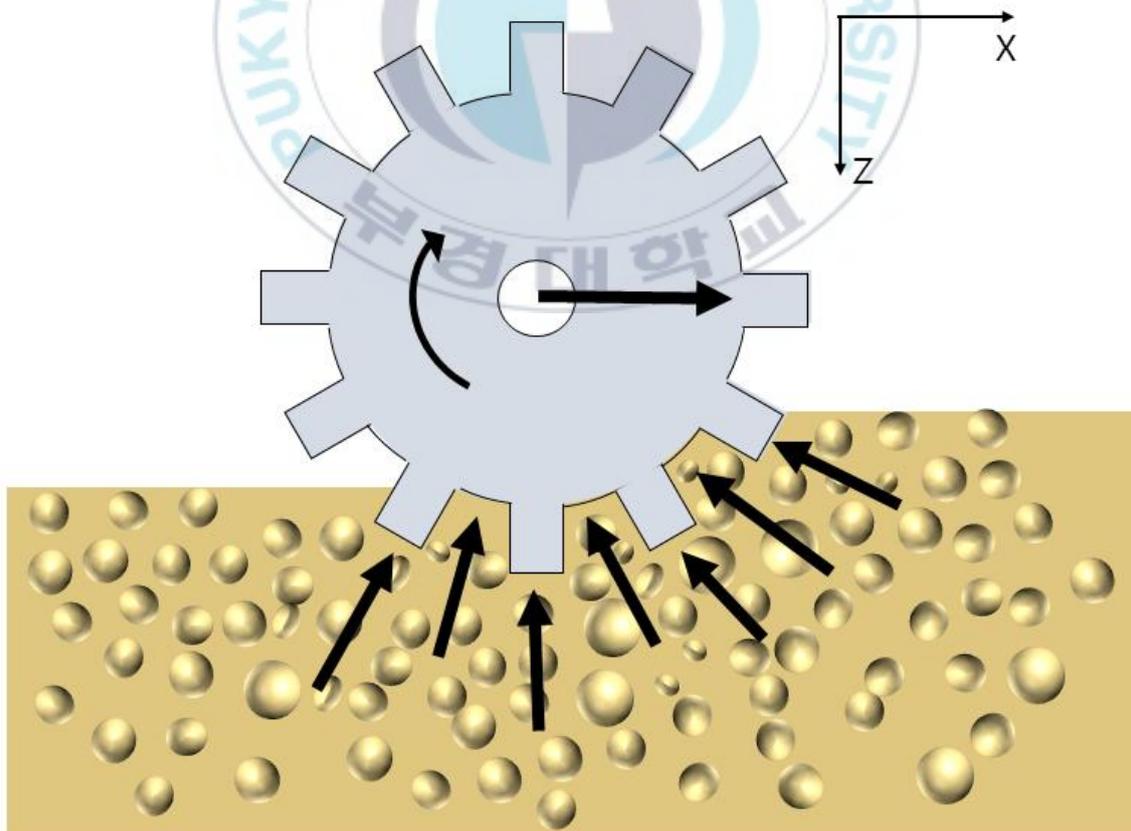


그림 23 휠 테스트베드 주행 중 휠에 작용하는 힘

휠에 작용하는 수직력과 견인력은 침하가 발생하고 그로 인해 그림 22와 같이 모래에 의해서 진행방향의 역방향과 수직방향으로 힘이 발생하게 되어 견인력과 수직력은 음의 값을 가지게 된다. 휠의 침하는 100mm주행 까지는 급격히 발생하고 100mm 주행 이후 침하량은 유지되며 견인력과 수직력은 휠의 패턴에 의해 Sin 형태의 힘이 계측 되지만 진폭은 약 20(N)으로 작게 발생하는 것을 확인할 수 있다.

표 2는 세 번의 실험에서 계측된 견인력과 수직력에 대한 평균 힘과 최대 침하량을 나타내었다. 수직력은 세 번의 실험에서 큰 차이를 가지지 않지만 침하량과 견인력은 약간의 차이를 가지는 것을 확인 할 수 있다. 휠이 주행 하는 모래지면 내부가 세 번의 실험 모두 동일한 조건을 가질 수 없어 생기는 차이로 판단된다.

표 2 수직력과 견인력의 평균 힘, 최대 침하량 비교

	Avg. Drawbar pull (N)	Avg. Vertical force (N)	Max sinkage (mm)
First	-102.5	-181.1	12.5
Second	-87.9	-177.6	10.1
Third	-97.1	-180.9	9.3

## 4.2 휠 테스트베드 시뮬레이션

### 4.2.1 휠 테스트베드 모델링

휠 테스트베드 주행 실험과 시뮬레이션의 결과비교를 위해 본 연구에서는 In-House 코드를 통해 휠 테스트베드 주행 장치와 모래지 노면을 모델링 하였다. 휠 테스트베드 주행 시험기 모델링은 다물체동역학을 기반으로 모델링 하였으며 실제 실험과 동일하게 H-body, V-body, Wheel로 3개의 바디로 구성되며 그림 23과 같다. 표 3은 모델링된 바디의 물성치를 나타낸다. 강체 휠의 질량은 실제와 동일한 3.31kg로 하였으며 강체 휠의 질량을 제외한 V-body는 17.5kg이다. 휠 테스트베드 장치는 진행방향, 수직방향, 회전의 자유도를 가져야 하므로 H-body는 지면과의 병진조인트로 구속, V-body는 H-body와 수직방향의 병진조인트로 구속, Wheel은 V-body와 회전조인트로 구속하여 휠 테스트베드장치를 모델링하였다.

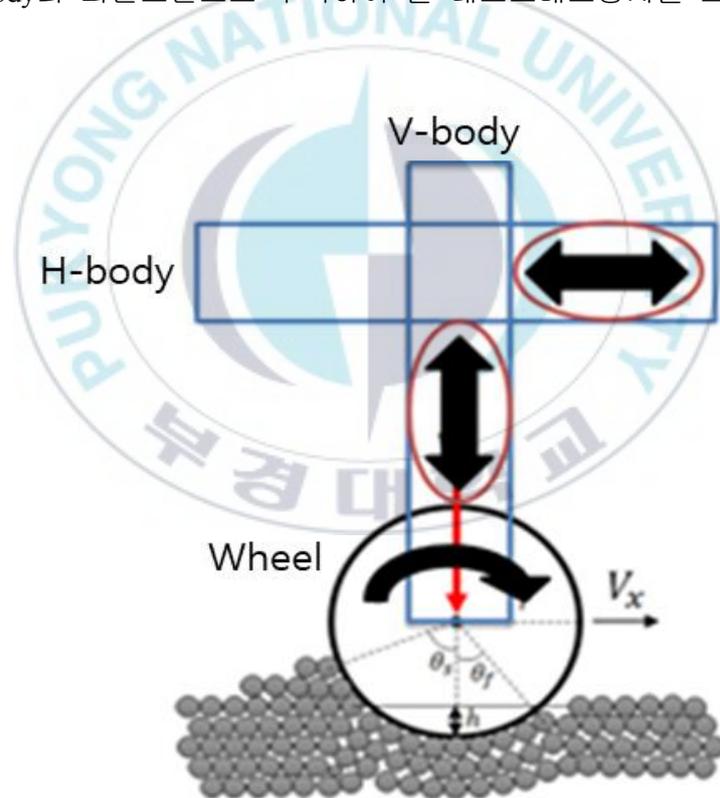


그림 24 휠 테스트베드 모델링

표 3 휠 테스트베드 장치의 물성치

Name	H-body	V-body	Wheel
Mass(kg)	1.0	17.5	3.31
Inertia(kg·m <sup>2</sup> ) [I <sub>xx</sub> , I <sub>yy</sub> , I <sub>zz</sub> ]	[0.017, 0.54, 0.54]	[0.31, 0.017, 0.31]	[0.011, 0.017, 0.011]

본 연구에서는 슬립을 0의 조건에서 러그(lug)에 의해 발생하는 견인력은 매우 작기 때문에 실린더 형태로 그림 24와 같이 실린더 형태로 모델링 하였다. 실린더의 형상은 패턴을 제외한 강체 휠과 동일하게 반지름 100mm, 폭 100mm로 모델링 하였다.

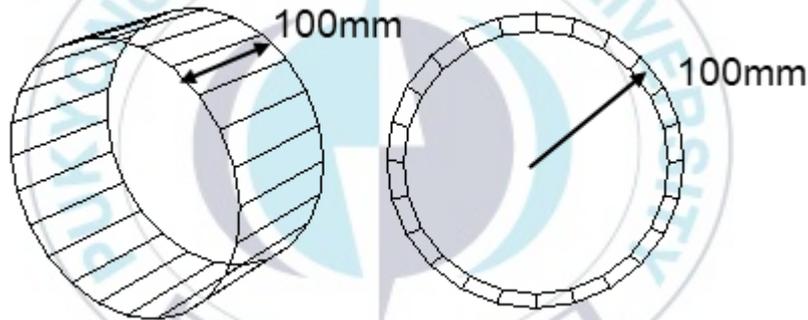


그림 25 강체 휠 모델링

5mm의 반지름을 가지는 입자를 이용하여 700mm×150mm×260mm의 크기를 가지는 모래지 노면을 모델링 하였으며 모델링된 입자의 수는 24150개이다. 입자의 물성치는 표 4와 같다. 입자의 탄성계수와 포아송비는 Hunt가 제안한 조밀한 사질 토의 물성치를 사용하였다.[16] 입자의 밀도는 벌크밀도(Bulk density)를 사용하였다. 분체의 경우 입자 하나하나의 밀도가 아닌 모여있을 때의 밀도를 구하는 방식으로 식 (36)과 같다.  $\rho_b$ 는 벌크 밀도이며,  $M_b$ 는 벌크 질량으로 실린더에 담긴 분체의 질량,  $V_b$ 는 실린더에 담긴 분체의 부피를 나타낸다.

$$\rho_b = M_b / V_b \quad (36)$$

표 4 휠 테스트베드 입자의 물성치

Young's modulus( $kN/m^2$ )	Poisson's ratio	Bulk density( $kg/m^3$ )
50000	0.3	3128.5

휠 테스트베드 주행 조건은 강체 휠을 모래지 노면에 낙하한 뒤, 0.2초 후에 진행방향 30mm/s, 회전속도 0.3rad/s의 조건으로 하였다. 모델링된 휠 테스트 베드 시험 장치는 그림 25와 같다.

실제 모래지 노면은 모래를 이루는 알갱이의 습도, 다짐정도, 입자 형태 등 고려해야할 변수들이 매우 많으며 이산요소법을 기반으로 하는 입자의 접촉 모델과 계수를 통해서 표현하기에 어려움이 많다. 또한 여러 가지 변수의 조합을 통해서 모래지 노면의 특성이 표현이 되기 때문에 접촉계수에 대한 파라미터 스테디는 필요하며, 이러한 파라미터 스테디를 통해 다양한 특성을 가지는 모래지를 모델링 할 수 있는 지표가 될 수 있다.

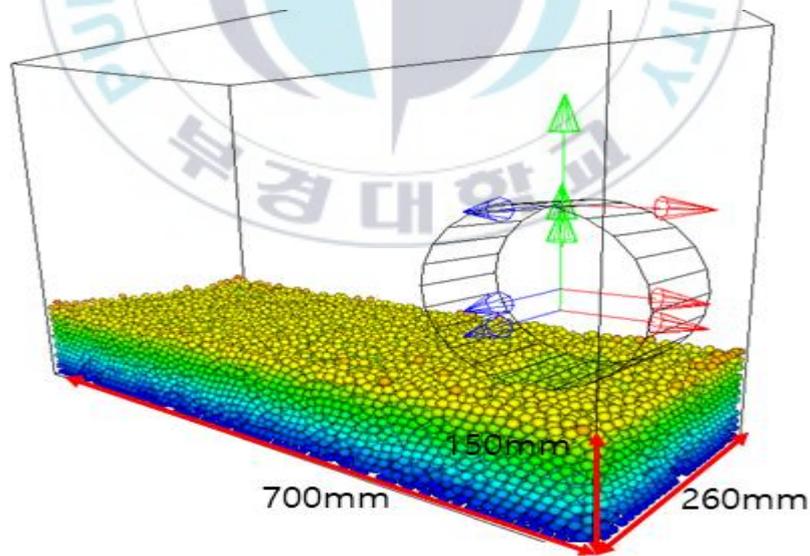


그림 26 모델링 된 휠 테스트베드

본 연구에서는 반지름 5mm 입자의 접촉 계수 변화를 통한 파라미터 스테디를 위해 시뮬레이션 하였다. 야지노면 주행 시뮬레이션은 슬립율 0인 조건에서 8초 동안 수행 하였으며 강체 휠에 발생하는 침하량과 강체 휠에 작용하는 견인력을

실험과 비교하여 알맞은 접촉 계수를 도출하였다.

### 4.3 모래지 노면 파라미터 스테디

실험과 유사한 야지노면을 모델링하기 위해 접촉계수인 마찰계수( $\mu$ )와 에너지계수( $\gamma$ )를 고려하였다. 마찰 계수는 분체의 거칠기를 나타내며, 에너지계수는 입자의 수분함유량을 표현하는 계수이다. 파라미터 스테디는 표 7과 같이 마찰계수와 에너지 계수에 따라 휠 테스트베드 주행 시뮬레이션을 수행되었으며 마찰 계수는 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 에너지 계수는 0, 5, 10, 15로 하여 28개의 시뮬레이션을 수행하였다.

표 5 시뮬레이션의 마찰 계수 및 에너지계수

Case No.	Friction coefficient	Energy coefficient
1		0
2		5
3	0.2	10
4		15
5		0
6		5
7	0.3	10
8		15
9		0
10		5
11	0.4	10
12		15
13		0
14		5
15	0.5	10
16		15
17		0
18		5
19	0.6	10
20		15
21		0
22		5
23	0.7	10
24		15
25		0
26		5
27	0.8	10
28		15

#### 4.3.1 접촉계수에 따른 휠의 침하량 비교

그림 26~32는 에너지 계수의 변화에 따라서 침하량을 나타낸 그래프이다. 마찰 계수가 일정하고 에너지계수가 증가 할수록 최대 침하량이 감소하는 것을 확인할 수 있다. 그림 23과 그림 24의 경우 휠이 침하가 발생하다가 다시 상승하는 것은 에너지계수가 높아 점착력이 강한 노면을 주행 시 입자를 올라타고 주행하게 되어 휠이 침하가 발생 하지 않고 상승한다. 그림 33은 에너지 계수 0일 때 마찰 계수에 따른 침하량을 비교한 것으로 마찰계수 0.4에서 최소 침하량을 보이며 마찰계수가 높을수록 침하량이 더 크게 발생하는 것을 확인할 수 있다. 마찰계수 0.4에서 침하량이 가장 작게 발생하는 것은 입자의 회전과 크게 관련이 있다. 입자는 접선 방향 힘인  $F_t = \min\{(k_s \delta_s + c_s \Delta v_s) \cdot \hat{s}_{ij} \cdot \mu_s |f_{sn}| \cdot \hat{s}\}$ 로 인한 회전에 의해 발생한다. 입자는 구 형상을 가지기 때문에 접선방향의 힘이 발생하게 되면  $F_t$ 에 의해서 모멘트가 발생하게 된다. 마찰 계수가 0.4보다 큰 경우 접선방향의 힘이 크게 발생하여 모멘트가 구름저항력보다 커지게 되며 입자의 회전이 발생한다. 입자의 회전이 발생하면 휠을 받쳐 주지 못해 침하가 더 크게 발생한다. 마찰계수가 0.4보다 작은 경우는 입자의 회전이 발생하지 않지만 접선방향 힘이 작게 발생하기 때문에 휠을 버티지 못하고 입자가 밀려나게 되면서 침하가 발생한다.

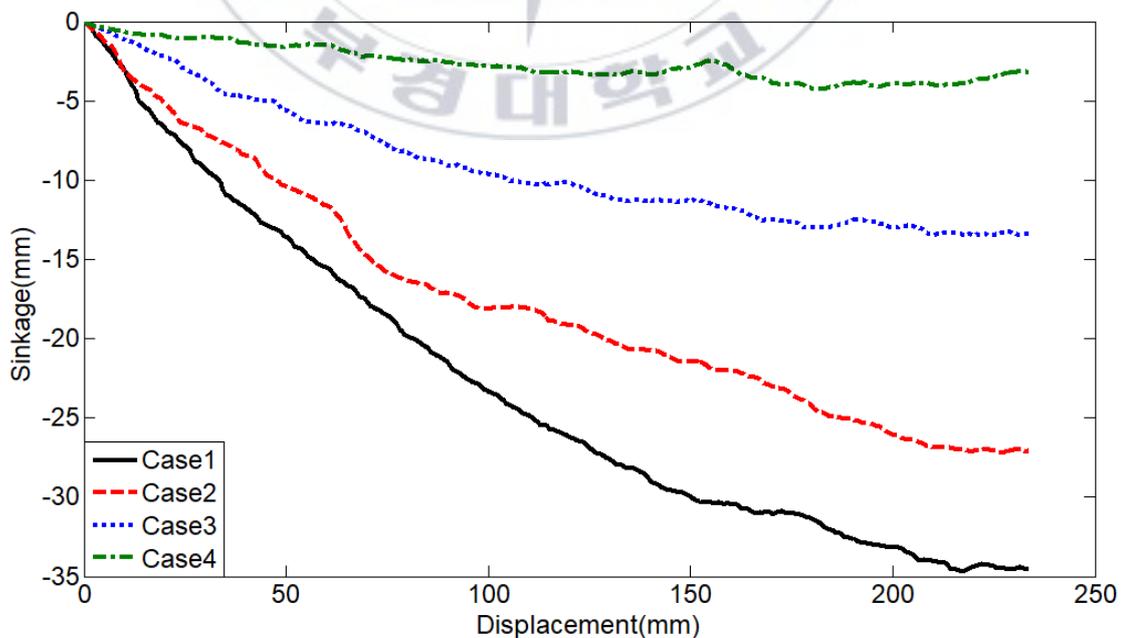


그림 27 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.2$ )

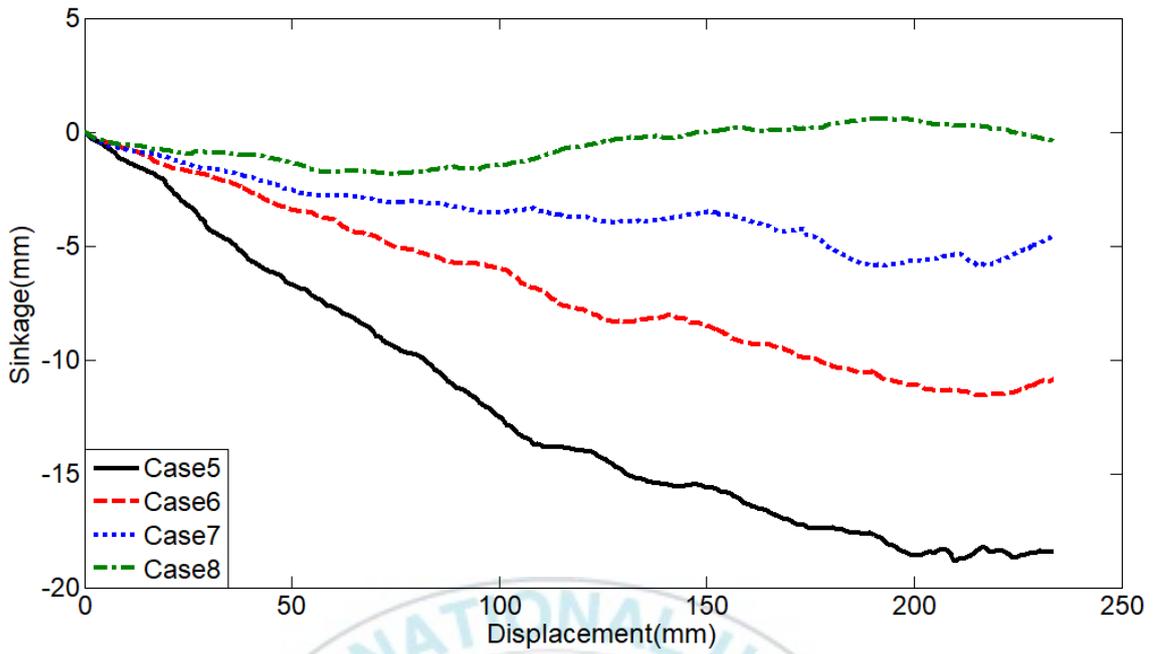


그림 28 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.3$ )

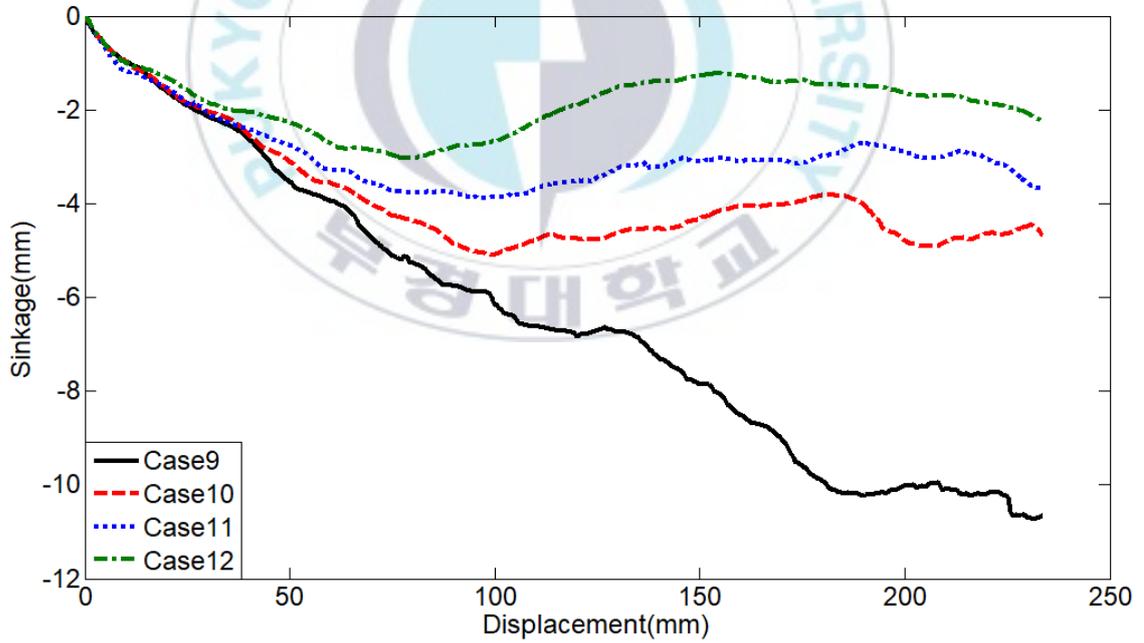


그림 29 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.4$ )

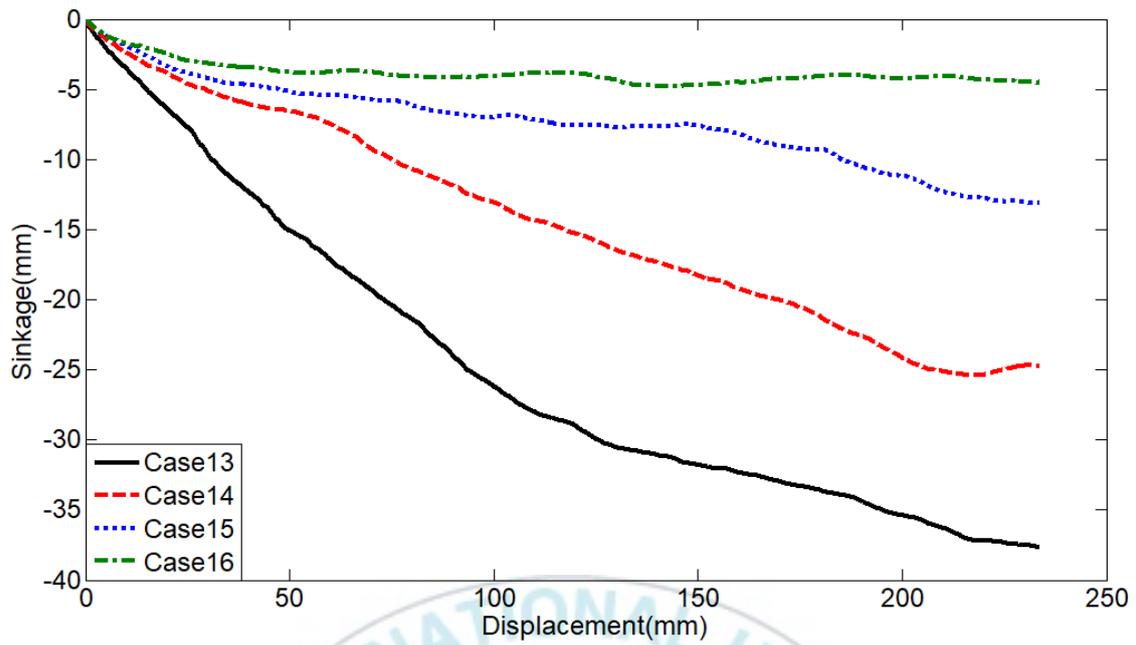


그림 30 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.5$ )

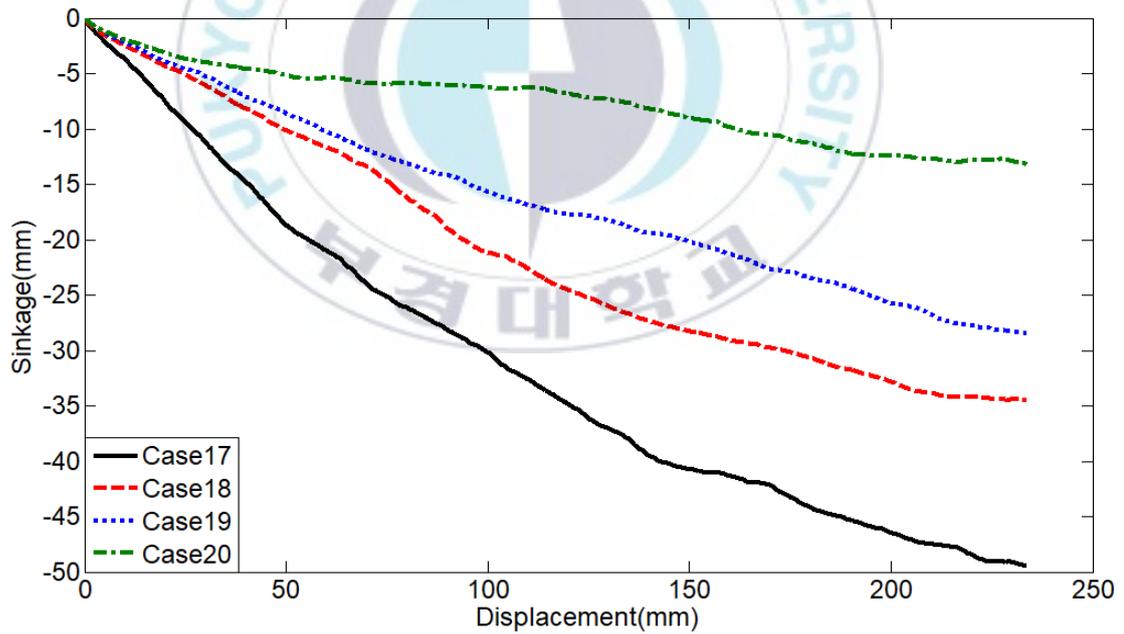


그림 31 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.6$ )

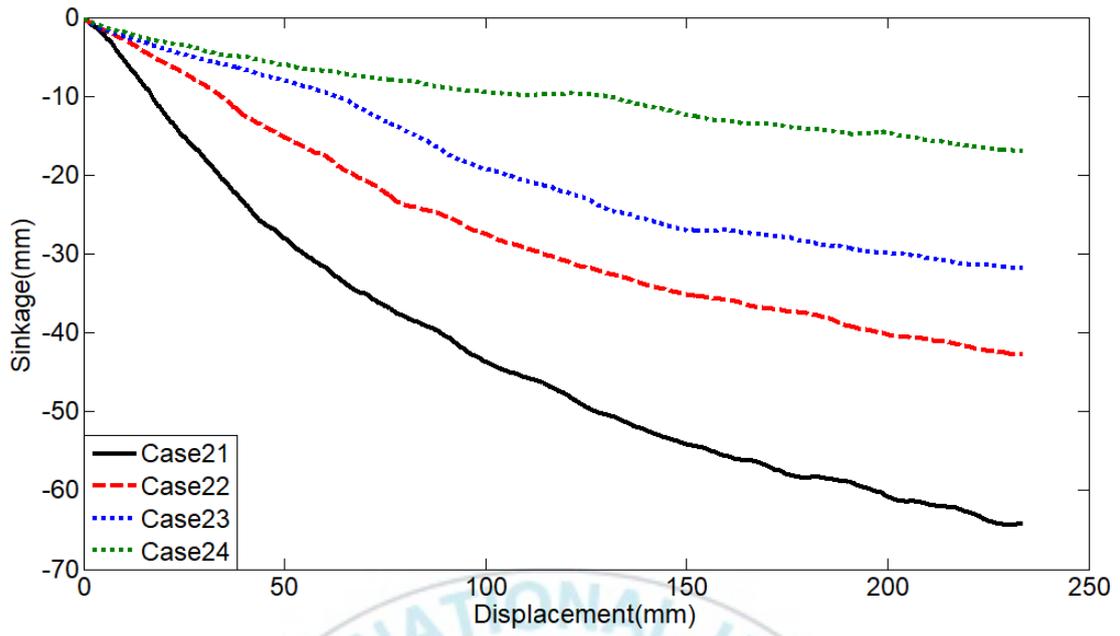


그림 32 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.7$ )

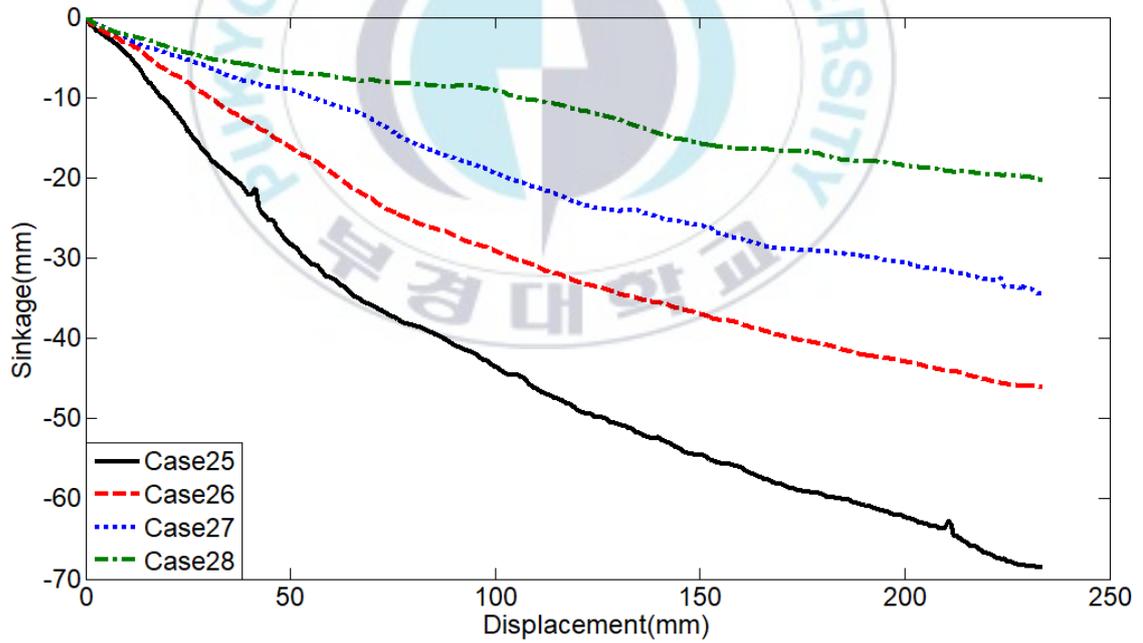


그림 33 에너지 계수에 따른 침하량 ( $\mu = 0.8$ )

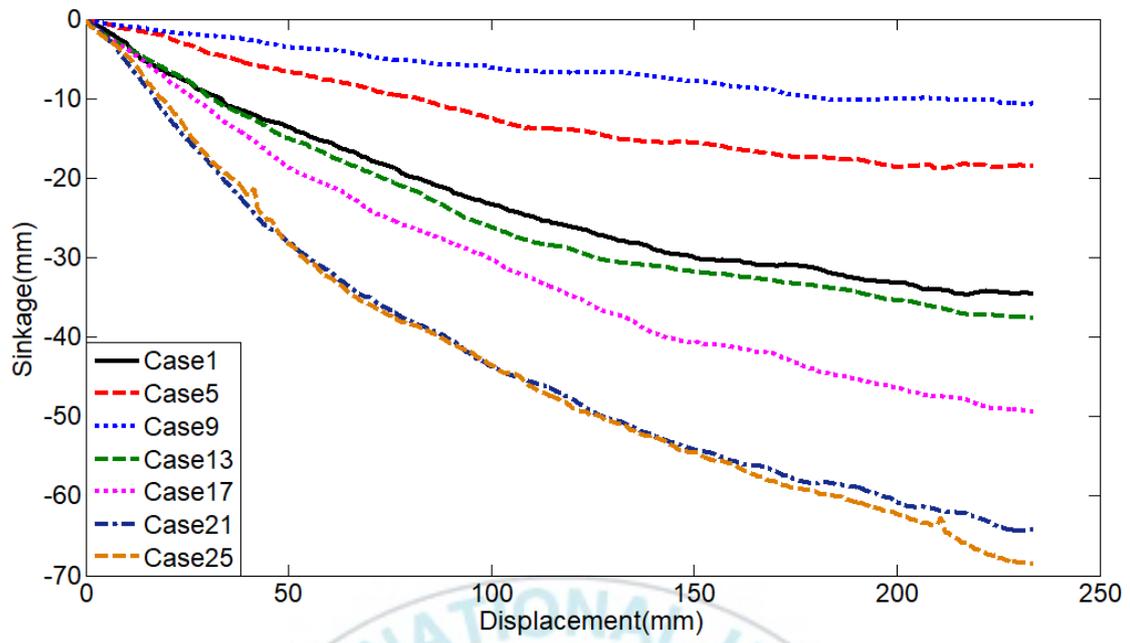


그림 34 마찰 계수에 따른 침하량 ( $\gamma = 0$ )



표 6은 마찰계수와 에너지 계수에 따른 훔 테스트베드의 최대 침하량을 나타낸 것이며 그림 34는 마찰 계수와 에너지 계수에 따라서 훔 테스트베드의 침하량을 Surface 그래프로 나타낸 것이다. 그림 34와 같이 일정 침하량에 있어서 마찰 계수와 에너지 계수의 다양한 조합으로 최대 침하량이 표현될 수 있으며 그림 24의 그래프를 기반으로 다양한 모래지를 모델링 할 수 있을 것으로 판단된다. 본 연구에서는 그림 34의 그래프를 기반으로 실제 실험에 사용된 모래지와 유사하게 모델링하기 위해 접촉 계수를 세분화하여 시뮬레이션 결과를 도출 및 비교 하였다.

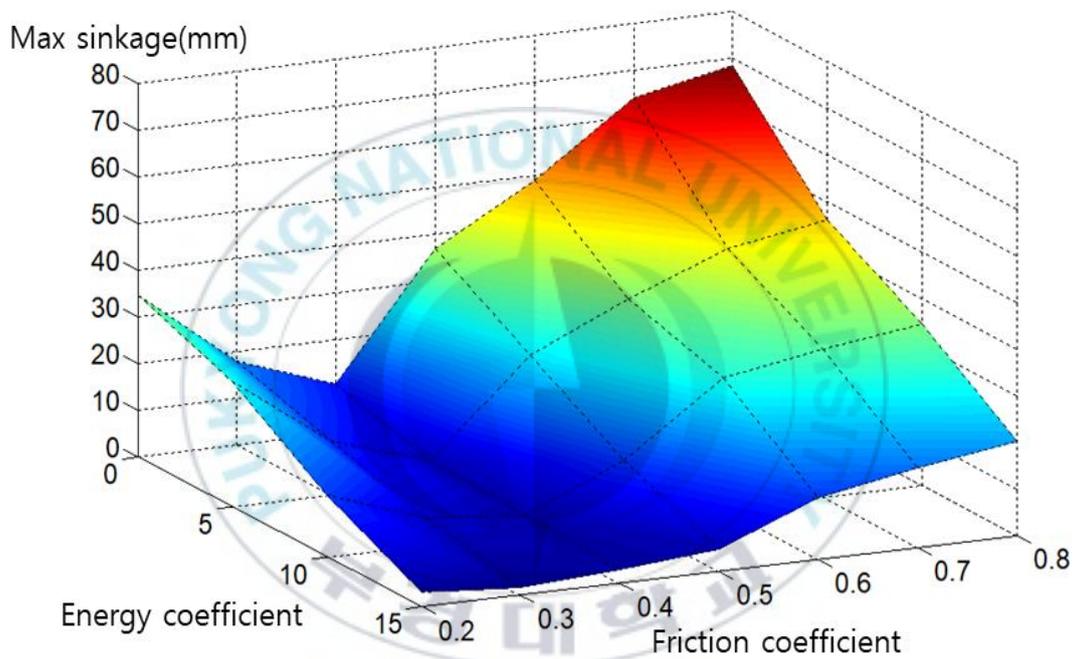


그림 35 마찰계수와 에너지계수에 따른 최대 침하량

표 6 마찰계수와 에너지계수에 따른 최대 침하량

Case No.	Friction coefficient	Energy coefficient	Max Sinkage(mm)
1		0	34.6
2	0.2	5	27
3		10	13.3
4		15	3.2
5		0	18
6	0.3	5	11.5
7		10	5.8
8		15	1.8
9		0	10.6
10	0.4	5	5
11		10	3.8
12		15	3
13		0	37
14	0.5	5	25
15		10	13
16		15	4.8
17		0	49
18	0.6	5	34.5
19		10	28.3
20		15	13.2
21		0	64.2
22	0.7	5	42.7
23		10	31.8
24		15	17
25		0	68.5
26	0.8	5	46.1
27		10	34.5
28		15	20.3

#### 4.4 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션 비교

휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션을 비교하기 위해서 3번의 실험에서 측정된 침하량의 평균값을 계산하였다. 계산된 평균값은 약 10.4mm이다. 실험에서 측정된 침하량과 가장 유사하며 점성이 없는 접촉 계수는 에너지 계수 0, 마찰계수 0.4이다. 본 연구에서는 마찰 계수 0.4 기준으로 마찰계수를 더 세분화 하여 시뮬레이션과 실험을 비교하였다. 먼저 마찰 계수를 세분화할 방향을 잡기 위해 0.39와 0.41의 침하량을 비교하였다. 0.39와 0.41의 최대 침하량을 비교는 표 7과 같으며 마찰 계수가 0.41일 경우 침하가 더 크게 발생 하고 마찰 계수 0.39는 0.4와 침하량에서 큰 차이가 발생하지 않기 때문에 마찰 계수 0.35 ~ 0.4까지의 침하량을 비교 하였다.

표 7 마찰 계수의 세분화를 위한 두 조건에 대한 최대 침하량 비교

Friction coefficient	Max sinkage(mm)
0.39	11.2
0.41	14.2

0.35~0.4까지 마찰계수에 대한 최대 침하량을 표 8에 나타내었으며 0.38에서 최소 침하량을 보여주었고 0.38에서 10.5로 10.4인 실험과 가장 유사한 값을 보였다. 최대 침하량이 가장 유사한 마찰계수 0.38과 0.4와 휠 테스트베드 실험과의 침하량을 그림 35에 나타내었다. 진행 거리 180mm 이전 휠이 지속적인 침하가 발생할 때 는 실험과의 침하량에서 차이가 발생하는 것을 확인 할 수 있다. 휠의 침하가 정상상태를 가지는 180mm 이후에는 실험과 유사한 침하량을 가지고 진행 하는 것을 확인 할 수 있다.

정상상태를 가진 후 휠 테스트베드실험과 시뮬레이션의 침하량의 RMS오차와 최대 침하량의 상대오차 비교를 표 9에 나타내었다.

표 8 마찰 계수에 따른 최대 침하량 비교

Friction coefficient	Max sinkage(mm)
0.35	14.2
0.36	13.6
0.37	11.6
0.38	10.5
0.39	11.2
0.4	10.6

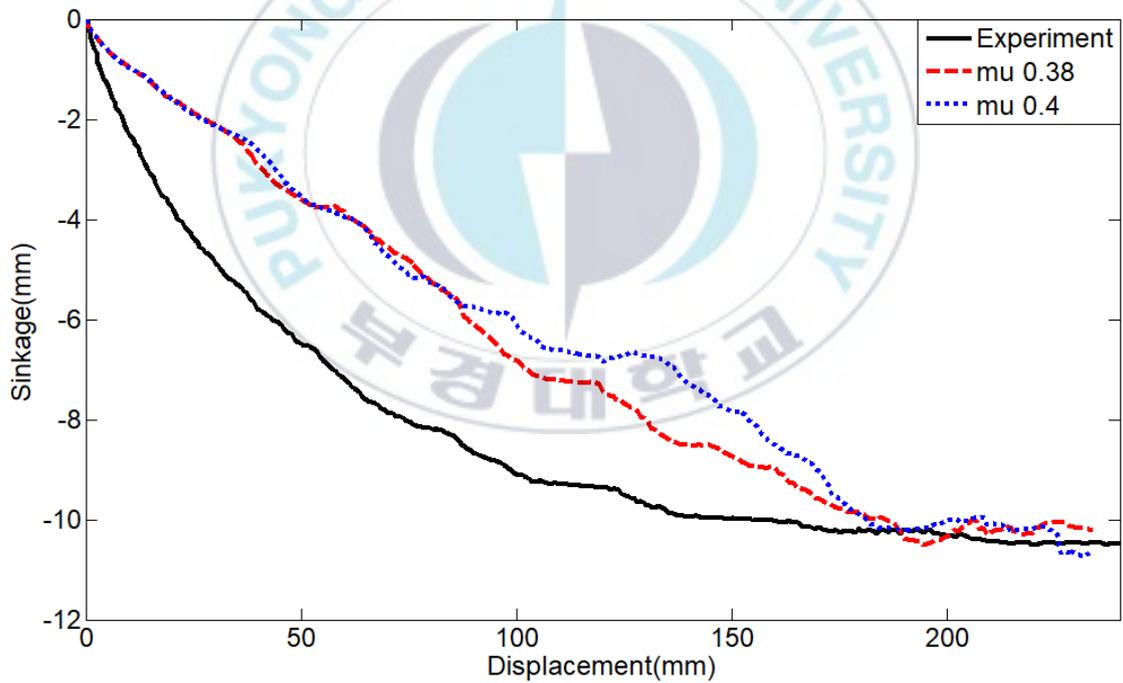


그림 36 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션의 침하량 비교

정상상태를 가진 후 휠 테스트베드실험과 시뮬레이션의 침하량의 RMS오차와 최대 침하량의 상대오차 비교를 표 10에 나타내었다. 정상상태 이후의 휠 최대 침하량은 10.5(mm), 10.6(mm)으로 10.4(mm)인 실험과 상대오차 1%, 2%의 차이를 보이며 실험과 매우 유사하게 발생하는 것을 확인하였으며, 약 60(mm)정도의 주행 시간동안 발생한 침하량의 RMS오차는 약 0.25(mm)로 실험과 매우 유사한 것으로 판단된다.

표 9 실험과 시뮬레이션의 침하량 비교

Friction coefficient	RMS error (mm)	Max sinkage(mm)	Relative error(%)
0.38	0.2550	10.5	0.96
0.4	0.2597	10.6	1.92

휠 테스트베드 주행 실험에서 휠 주행시 측정된 견인력과 시뮬레이션에서 계산된 견인력은 그림 36에 나타내었다. 견인력도 침하량과 마찬가지로 정상상태를 가지는 180mm 이후의 주행을 비교하였다. 정상상태를 가진 이후 진행방향 힘의 평균값과 상대오차는 표 10에 나타내었다. 견인력의 평균값은 실험에서 약 -100(N)이 측정되었고 시뮬레이션에서는 약 -90(N)으로 10(N)정도의 차이를 보여줬으며 상대오차로는 약 13%의 차이를 보여주었다. 정상상태에서 실험과 시뮬레이션의 견인력의 RMS 오차를 비교 하여 보았다. 마찰계수 0.38일 때 RMS 오차의 경우 16.2(N), 마찰계수 0.4일 때 RMS오차는 15.7(N)의 값으로 실험과 매우 유사하게 견인력이 발생하는 것으로 판단된다.

표 10 시뮬레이션과 실험의 진행방향 힘 비교

	Simulation	Experiment
Friction coefficient	0.38	0.4
Avg. Drawbar Pull(N)	-88.9	-89.4
Relative error(%)	-13.4	-12.9

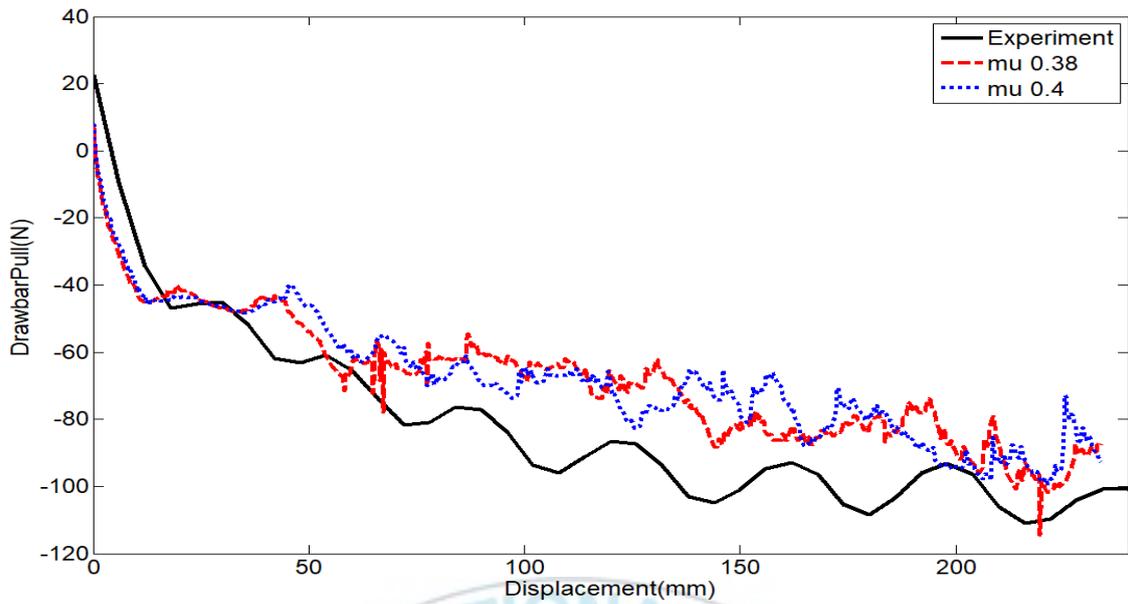
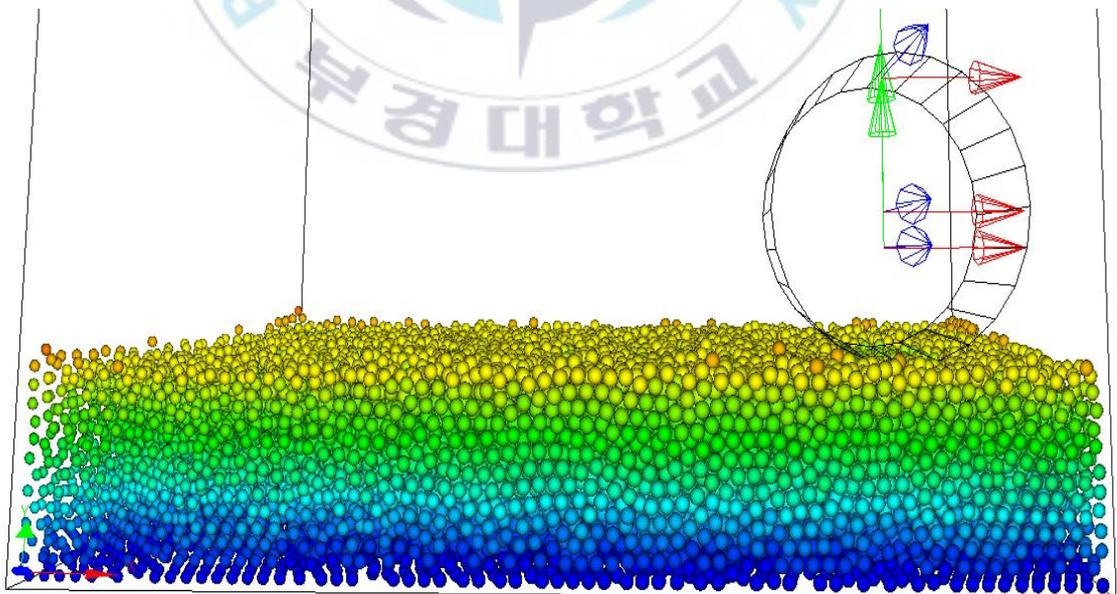
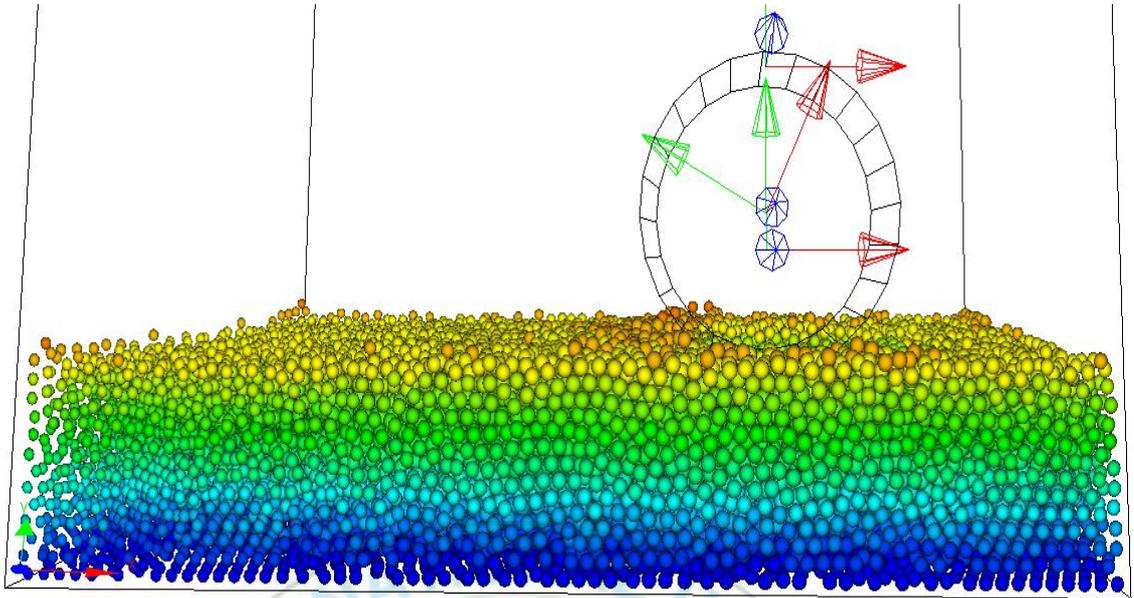


그림 37 휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션의 견인력비교

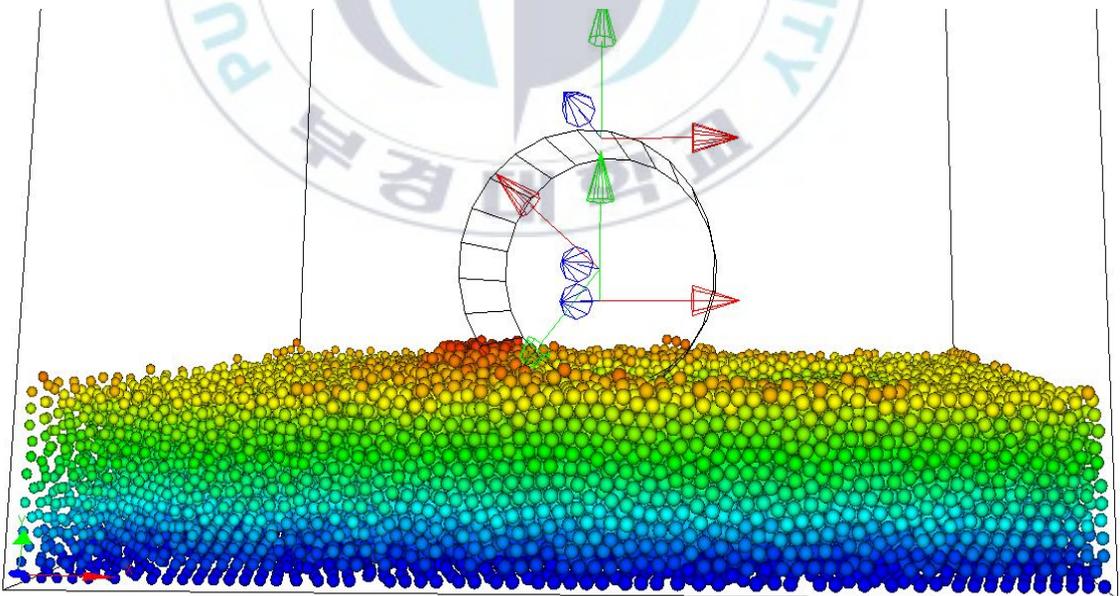
그림 37은 침하량과 견인력이 가장 유사하게 나온 마찰 계수 0.4, 에너지 계수 0인 시뮬레이션을 나타낸 것이며, 그림 38은 휠이 주행하면서 침하가 일어나며 노면이 변형된 것을 확인 할 수 있다.



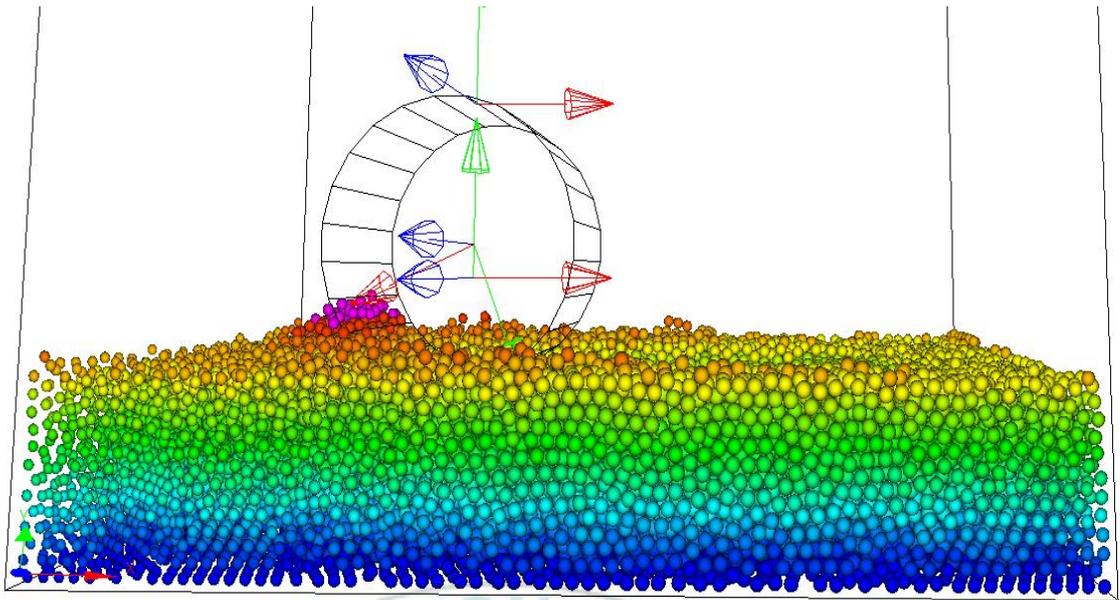
(a) 휠 테스트베드 시뮬레이션 (t =0)



(b) 휠 테스트베드 시뮬레이션 ( $t = 2$ )



(c) 휠 테스트베드 시뮬레이션 ( $t = 4$ )



(d) 휠 테스트베드 시뮬레이션 (t =8)

그림 38 휠 테스트베드 시뮬레이션

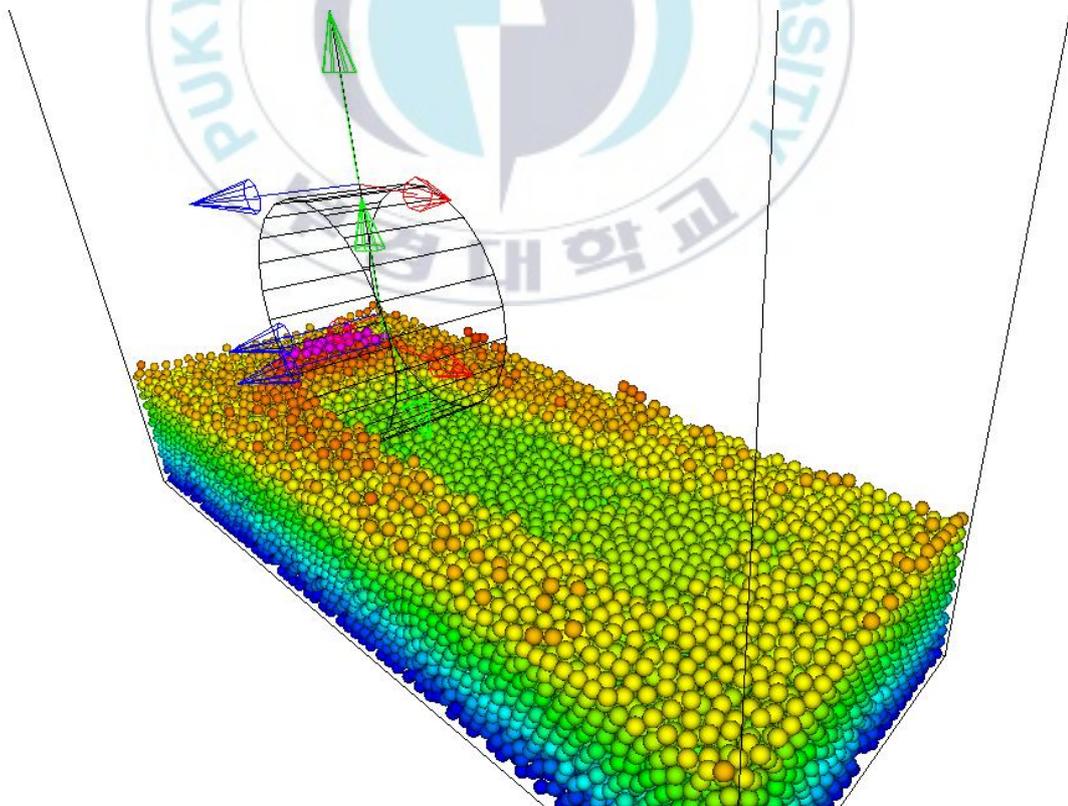


그림 39 휠 테스트베드 시뮬레이션 (Isometric view)

## 5. 전차량 주행 시뮬레이션

### 5.1 전차량 및 야지노면 모델링

#### 5.1.1 전차량 모델링

휠 테스트베드 주행 시뮬레이션과 실험의 비교 및 검증 을 기반으로 모래지 노면 위를 주행하는 차량 주행 시뮬레이션을 수행하였다. 차량의 재원은 국방과학연구소에 실제 시험 차량을 기반으로 모델링을 수행하였다. 실제 차량은 그림 39와 같다. 전차량은 차체, 서스펜션, 휠로 이루어져있으며 표 11에 3D CAD파일로 구성된 전차량과 서스펜션의 물성치를 나타내었다.

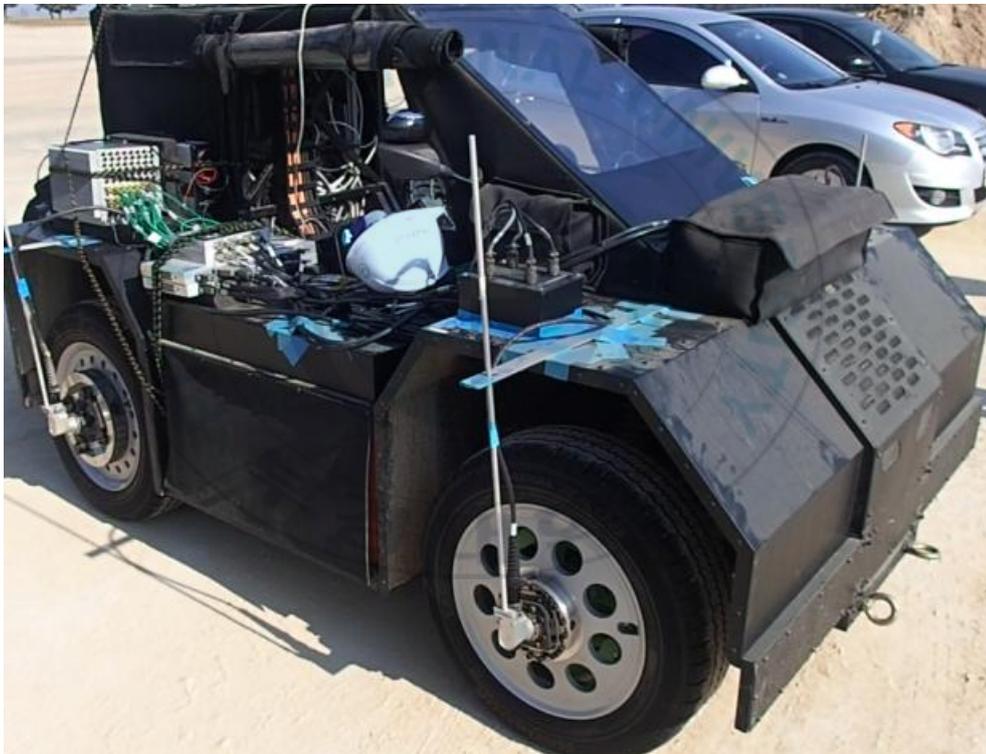
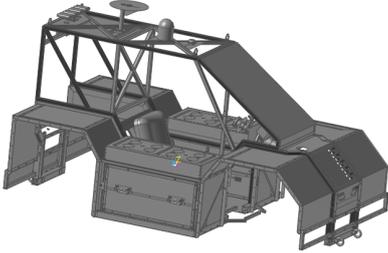
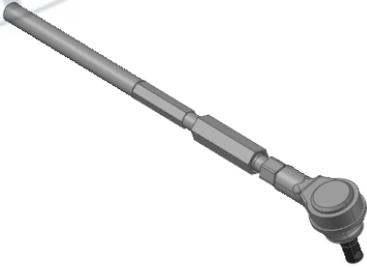
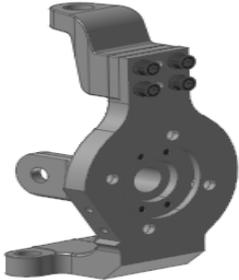


그림 40 실제 차량 재원

표 11 전차량 모델링

Name	Properties		Shape
<b>Carbody</b>	Mass	1600(kg)	
	Ixx	552.206(kg · m <sup>2</sup> )	
	Iyy	869.751(kg · m <sup>2</sup> )	
	Izz	1141.93(kg · m <sup>2</sup> )	
<b>Upper arm</b>	Mass	5.755(kg)	
	Ixx	0.044(kg · m <sup>2</sup> )	
	Iyy	0.037(kg · m <sup>2</sup> )	
	Izz	0.080(kg · m <sup>2</sup> )	
<b>Low arm</b>	Mass	5.749(kg)	
	Ixx	0.075(kg · m <sup>2</sup> )	
	Iyy	0.037(kg · m <sup>2</sup> )	
	Izz	0.080(kg · m <sup>2</sup> )	
<b>Steer link</b>	Mass	1.287(kg)	
	Ixx	0.012(kg · m <sup>2</sup> )	
	Iyy	0.001(kg · m <sup>2</sup> )	
	Izz	0.012(kg · m <sup>2</sup> )	
<b>Wheel knuckle</b>	Mass	28.057(kg)	
	Ixx	0.518(kg · m <sup>2</sup> )	
	Iyy	0.794(kg · m <sup>2</sup> )	
	Izz	0.518(kg · m <sup>2</sup> )	

전차량의 서스펜션은 그림 33과 같이 더블 위시본의 형태를 가지며, 전차량의 Steer link를 통해 차량의 조향도 가능 하도록 모델링 하였다. 휠은 반지름 300mm에 폭 165mm의 크기를 가지는 실린더 형태이며 그림 40과 같다.

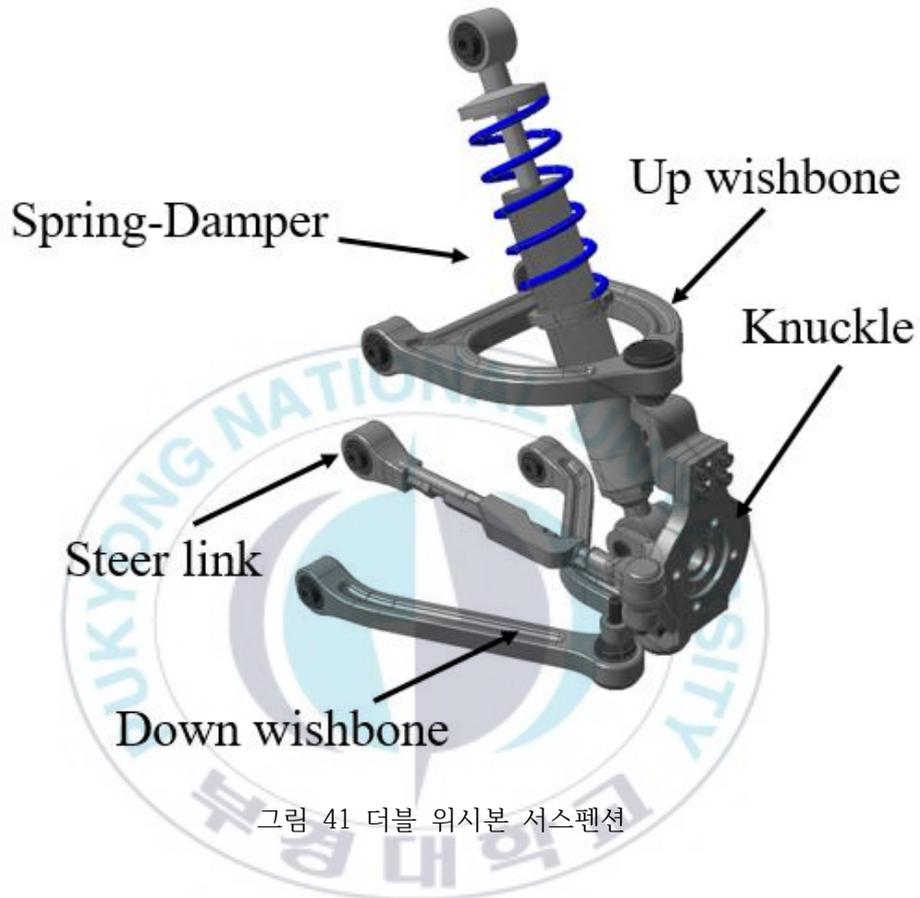


그림 41 더블 위시본 서스펜션

서스펜션과 차량 연결에는 조인트와 스프링이 사용된다. 스프링-댐퍼는 너클과 차체와 연결하였으며 스프링 강성과 댐핑 강성은 표 12와 같다. 조인트는 회전조인트, 구 조인트, 유니버설 조인트, 병진 조인트로 4가지의 조인트가 사용되며 스프링은 병진 스프링이 사용된다. 서스펜션의 조인트 및 스프링 모델링은 표 9와 그림 27과 같으며 실제 형상을 보여주기 위해 상용 다물체동역학 프로그램인 RecurDyn으로 차량 모델링 하였다. 더블 위시본의 서스펜션으로 차체와 Upper arm과 Low arm은 회전 조인트로 구속되어 있으며 너클은 구 조인트로 구속하였다. 휠과 너클은 회전 조인트로 구속하였다. Steer link는 너클과 유니버설 조인트로 구속하였으며 Reckbar를 추가하여 구 조인트로 구속하였다. 모델링된 전차량은 그림 41과 같고, 표 13과 같이 나타내었다.

표 12 스프링-댐퍼 힘요소 정보

Spring coefficient	Damping coefficient
100000 $N/m$	10000 $N \cdot s/m$

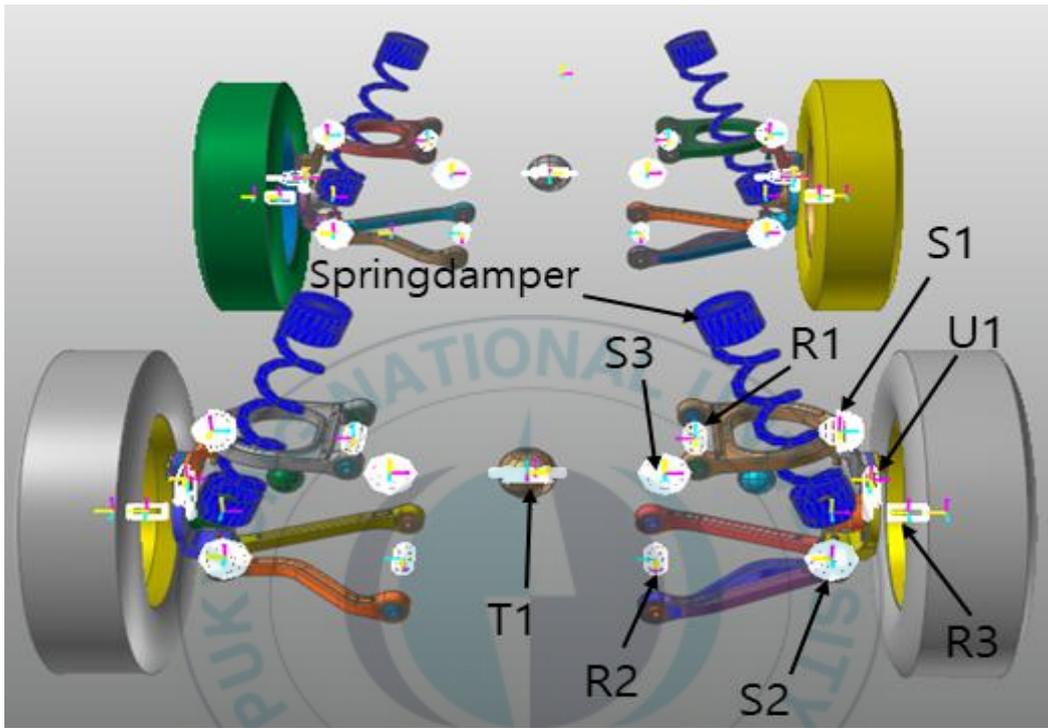


그림 42 전차량의 휠과 서스펜션 모델링

표 13 전차량 조인트 및 힘요소 연결 정보

Name	Base body	Action Body
S1	Upper arm	Knuckle
S2	Low arm	Knuckle
R1	Carbody	Upper arm
R2	Carbody	Low arm
S3	Reckbar	Steerlink
U1	Knuckle	Steerlink
T1	Carbody	Reckbar
Spring	Carbody	Knuckle

전차량은 표 13과 같이 다수의 강체와 조인트로 이루어져 있다. In-House코드에서 다물체계의 정확한 해석을 확인하기 위해서 상용 다물체동역학프로그램인 RecurDyn과의 비교를 통해 다물체동역학 해석의 정확성을 검증하였다. 서스펜션의 거동을 비교하기 위해 차체를 지면에 고정 한 후 타이어의 자중에 의한 동적 거동을 비교하였다. 서스펜션의 동적거동을 크게 보기위해서 스프링-댐퍼 힘 요소는 표 13과 같이 모델링하였다. 서스펜션의 움직임을 크게 보기 위해서 전 차량 주행 시뮬레이션보다 스프링과 댐핑 계수를 작은 값으로 모델링하여 비교하였다.

표 14 서스펜션 해석 비교를 위한 스프링-댐퍼 힘요소

Spring coefficient	Damping coefficient
10000 $N/m$	40 $N \cdot s/m$

서스펜션의 경우 조인트와 스프링-댐퍼 힘요소로 이루어져 있기 때문에 조인트의 위치, 방향, 강체의 무게 등 물성치가 동일하지 않으면 다른 거동을 나타내기 때문에 서스펜션의 가장 말단 부분인 휠의 거동을 비교하였다. 휠과 서스펜션의 자중에 의해 운동하는 것을 비교하였으며, 시뮬레이션은 1초간 수행하였다. 그림 42, 43, 44는 왼쪽 전륜의 시간에 대한 진행, 측면, 수직방향의 위치를 나타낸 것이며, 그림45, 46는 진행방향과 수직방향의 평면, 측면방향과 수직방향의 평면에서 휠의 위치를 나타낸 것이다. In-house코드와 RecurDyn에서 휠의 움직임에 있어서 동일한 거동을 보여주며, In-house코드의 다물체동역학 해석의 정확성을 검증 하였다.

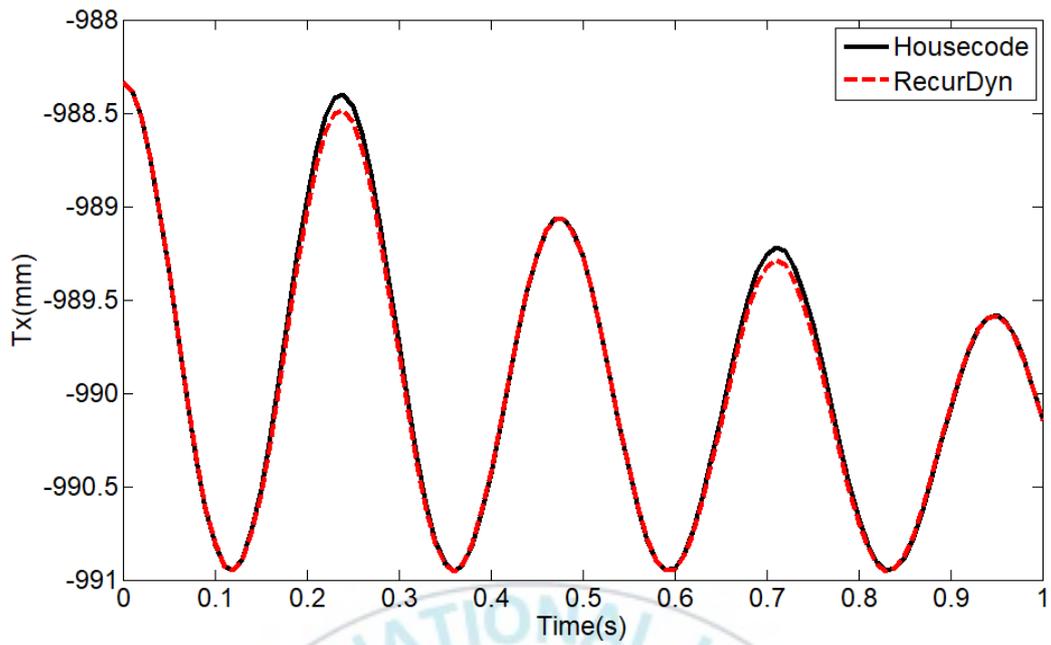


그림 43 시간에 따른 휠의 진행방향 위치

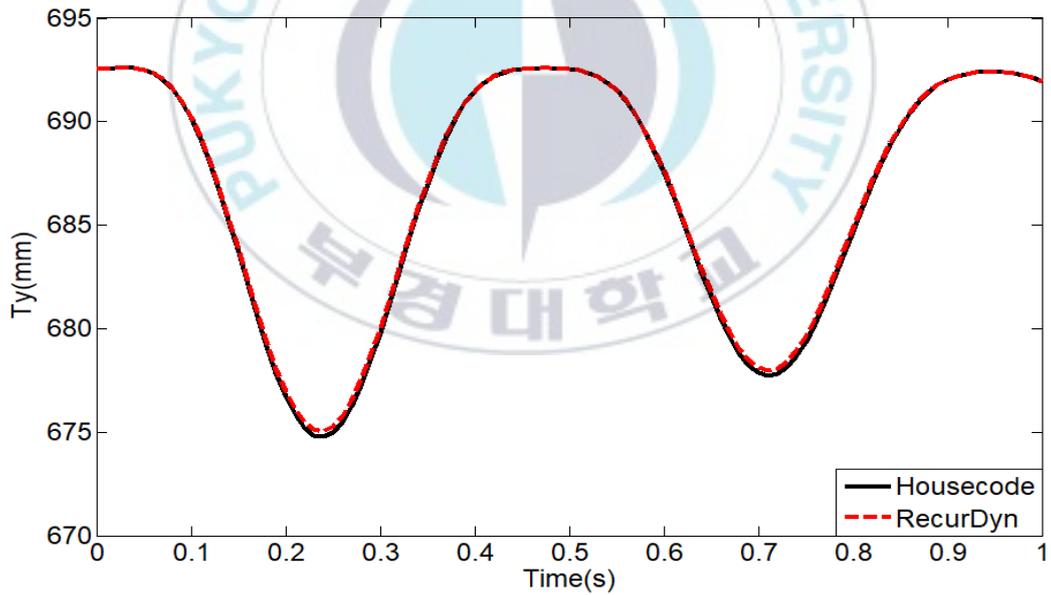


그림 44 시간에 따른 휠의 측면방향 위치

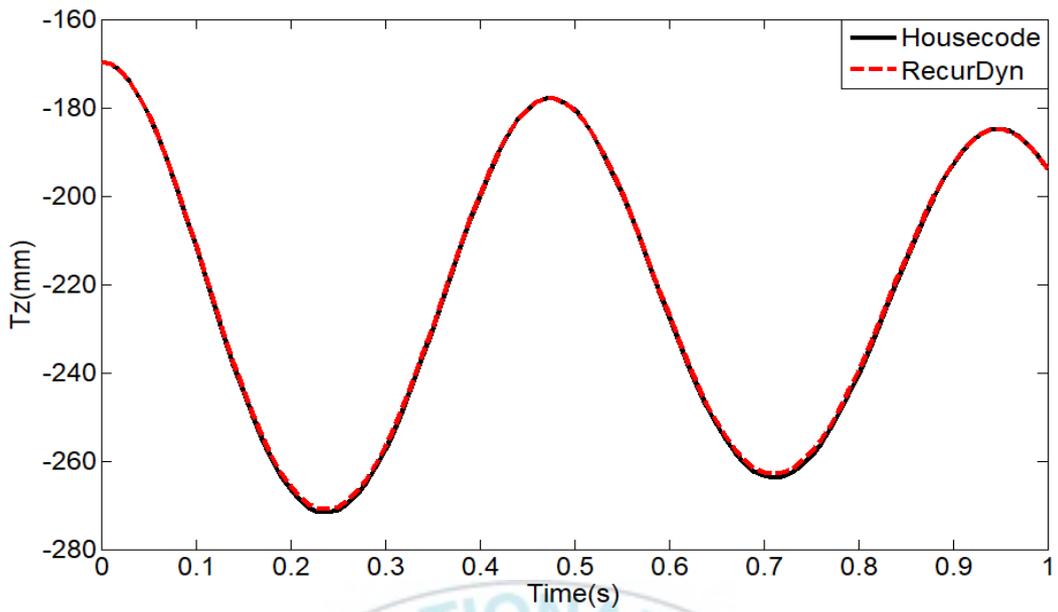


그림 45 시간에 따른 월의 수직방향 위치

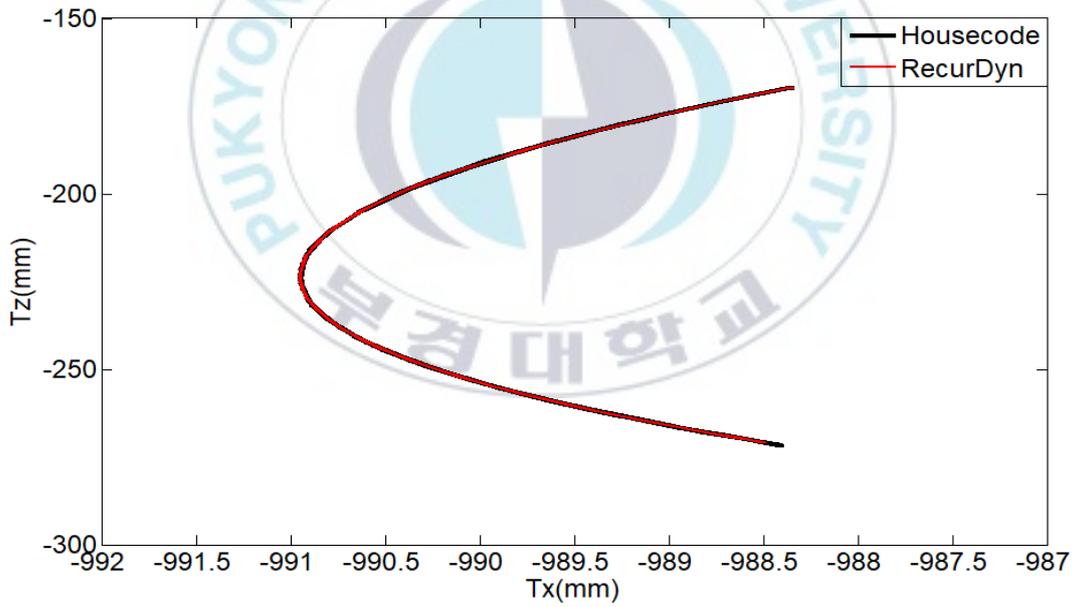


그림 46 진행방향 위치에 대한 월의 수직방향의 위치

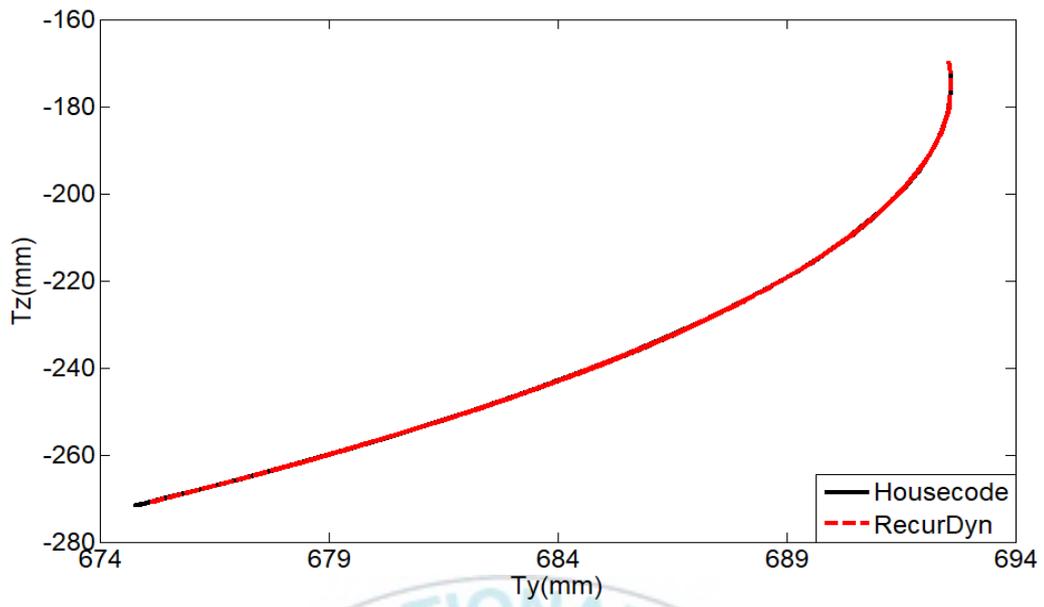


그림 47 측면방향 위치에 대한 휠의 수직 방향의 위치



### 5.1.2 야지노면 모델링

그림 47은 실제 실험에 사용되는 야지노면으로써 실험과 유사한 크기를 가지는 야지노면을 모델링하기 위해 그림 48과 같이 야지노면을 모델링 하였다. 야지노면의 크기는 길이방향으로 22m, 수직방향 0.4m, 횡 방향 0.5m의 크기를 가지며, 차량의 휠이 지나가는 길이 방향으로 오른쪽, 왼쪽으로 나누어 모델링 하였다. 야지노면을 이루는 입자의 반지름은 20mm의 크기를 가지며 총 입자의 수는 62048개이다. 입자와 입자간의 물성치는 휠 테스트베드에 사용된 입자 물성치와 동일하게 하였으며, 마찰계수 0.4, 에너지 계수 0을 사용하였다.



그림 48 실제 전차량 야지노면 주행 시험로

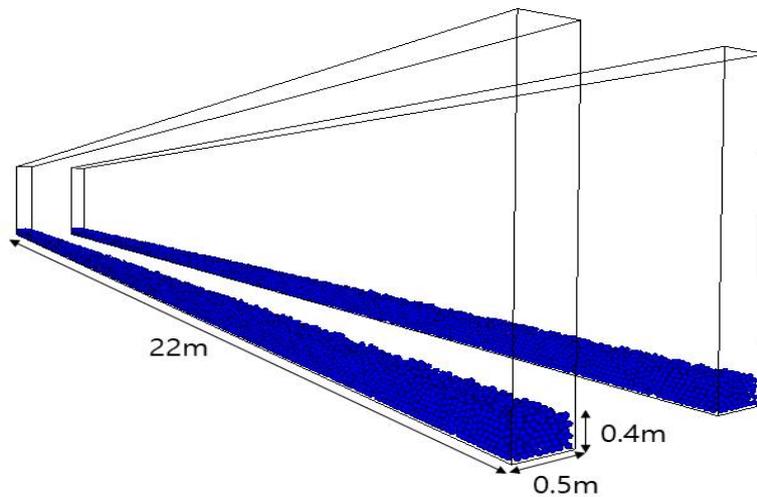


그림 49 전차량 주행 야지노면 모델링

## 5.2 타행 주행 시뮬레이션

야지노면을 주행하는 전차량 시뮬레이션은 표 15와 같이 4가지 속도에 대한 타행주행을 수행하였다. 타행 주행은 차량에 가해지는 모든 동력을 차단하고 차량의 관성에 의해 주행하는 방식이다.[17] 시뮬레이션은 차량에 초기속도를 설정하고 전 차량을 주행 시켰으며 조향이 없는 직진 주행으로 시뮬레이션을 수행하였다. In-House코드로 모델링된 전차량은 그림 42와 같다. 전차량의 모델링은 그림 35의 RecurDyn에서의 전차량 모델링과 동일하며, In-House코드에서는 4개의 휠은 형상을 가지고 나머지 물체는 좌표계로 표현된다. 5가지의 타행 주행 시뮬레이션은 차량이 주행 후 정지 할 때 까지 시뮬레이션을 하였다. 그림 50 수행된 전차량 시뮬레이션을 나타내었으며, 초기속도 6(m/s)의 속도로 주행하는 타행주행이다. 그림 50은 Isometric view의 차량 주행 시뮬레이션을 나타내었다. 그림 50과 그림 51에서 차량이 야지노면을 주행하는 중에 모래가 튀어 날아가는 스톤치핑(Stone chipping)현상도 확인 할 수 있다.[18]

표 15 4가지 타행 주행

Case	Initial velocity (m/s)
1	3
2	4
3	5
4	6

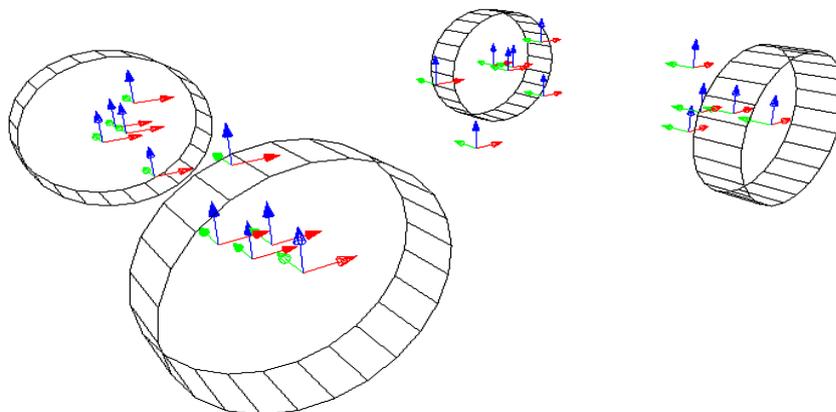
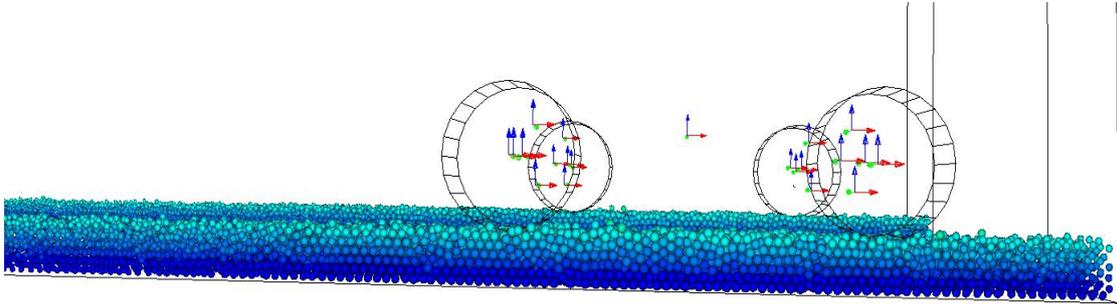
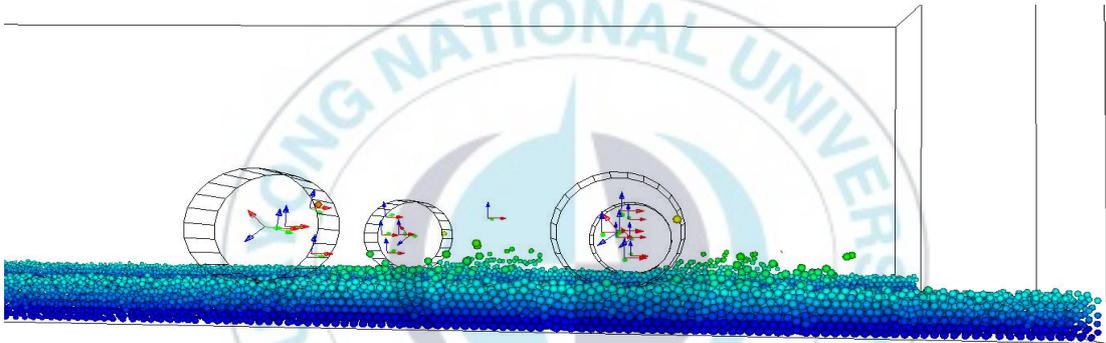


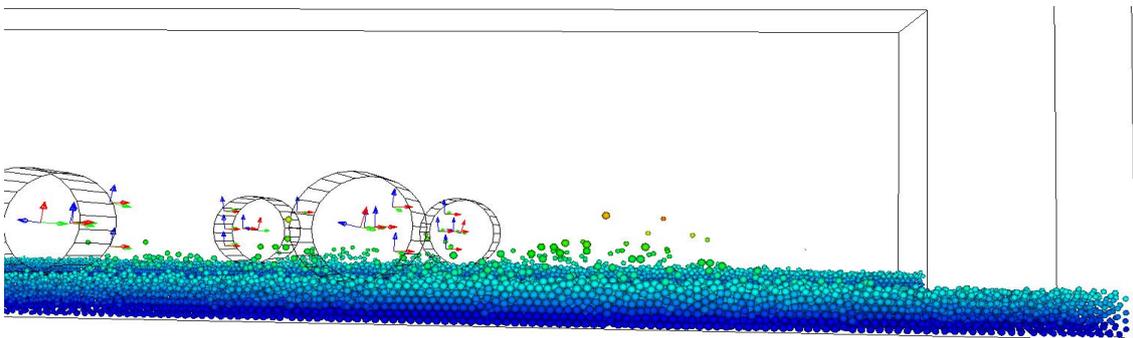
그림 50 In-house 코드 전차량 모델링



(a) 전차량 주행 시뮬레이션 (time = 0)



(b) 전차량 주행 시뮬레이션 (time = 0.2)



(c) 전차량 주행 시뮬레이션 (time = 0.5)

그림 51 차량 주행 시뮬레이션

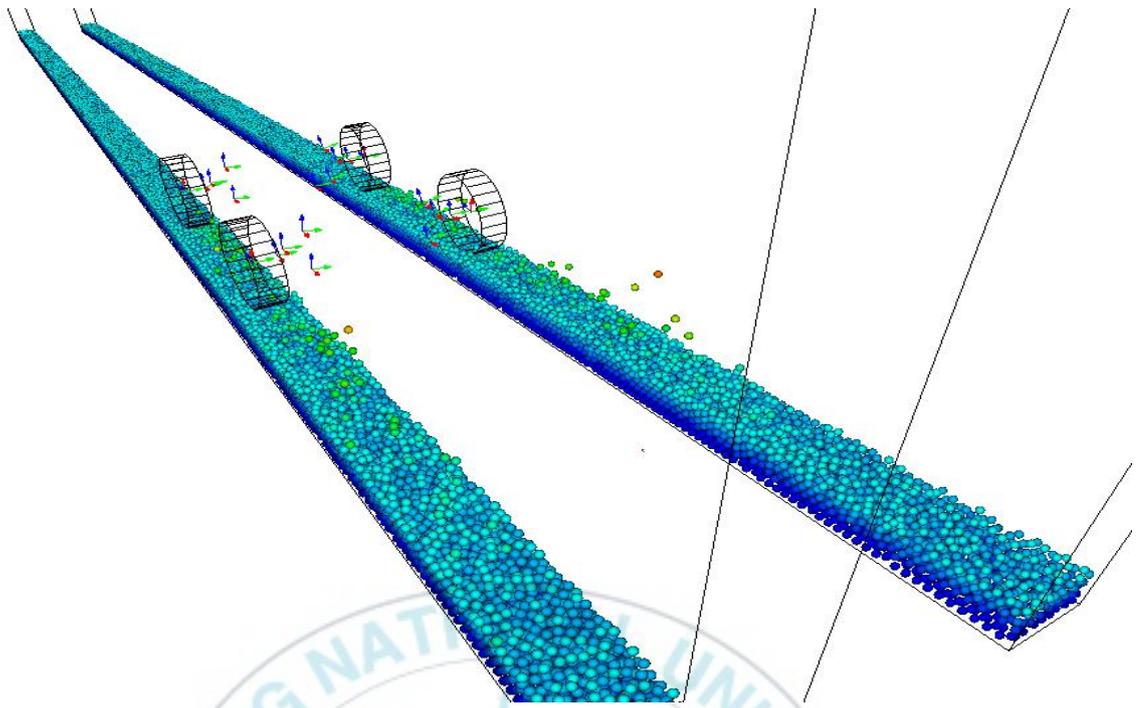


그림 52 전차량 주행 시뮬레이션 (Isometric view)

### 5.2.1 속도에 따른 전차량의 동적 거동 비교

차량의 초기속도를 가지고 멈추기까지의 이동거리와 주행시간을 표 16에 나타내었다. 차량의 초기속도에 대한 이동거리는 그림 52와 같으며, 초기 속도에 따른 차량의 이동거리는 3(m/s)일 때 주행거리 약 5m 이며 6(m/s)일 때 주행거리 약 15(m)로 초기속도가 1(m/s) 상승 할 때 마다 주행거리는 약 3(m)만큼의 주행 거리가 증가하며 초기속도에 따른 주행 거리는 선형적인 모습을 보인다. 주행시간은 초기속도 3(m/s)에서 5(m/s)까지는 약 1초정도의 주행 시간 차이를 보여주지만 초기속도 6(m/s)부터는 급격히 주행 시간이 줄어들며 초기속도 5(m/s)와 주행 시간에 있어서 큰 차이를 보이지 않는다.

표 16 4가지 타행 주행의 이동거리 및 주행시간

Initial velocity(m/s)	Driving distance(m)	Driving time(s)
3	4.6	3.2
4	7.6	4.1
5	11.4	5
6	14.8	5.2

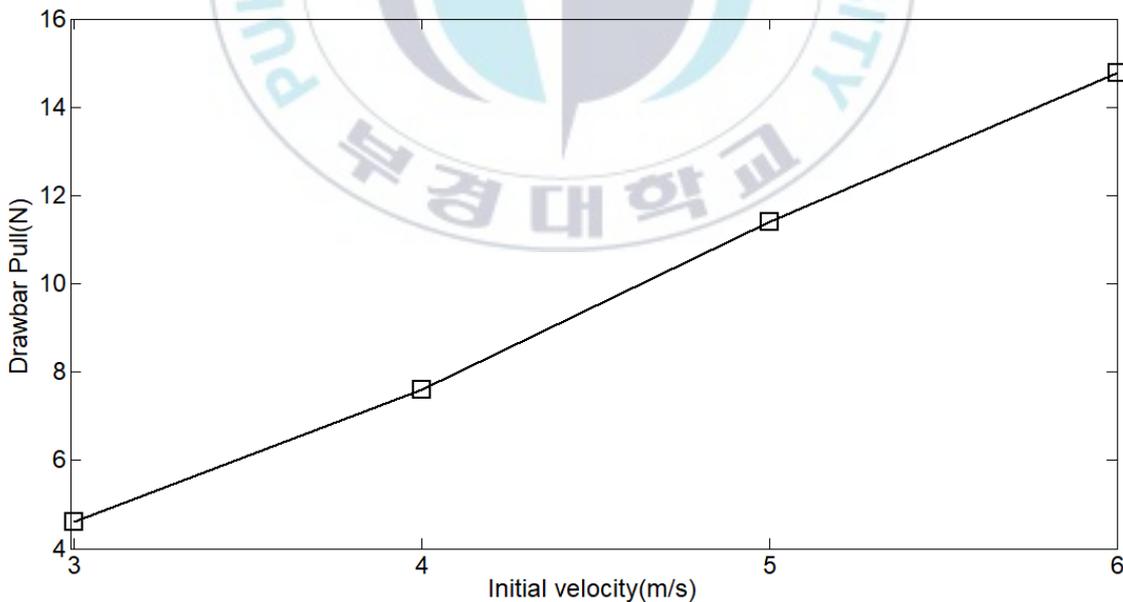


그림 53 초기속도에 따른 차량의 주행 거리

4가지 타행주행에서 전차량의 평균 감속도를 확인하기 위해 주행 시작 후 1초 차량 정지 전 0.5초 사이에서 발생하는 감속도를 비교해 보았다. 타행 주행 시 평균 감속도를 확인한 시간과 평균 감속도는 표 17에 나타내었다. 평균 감속도는 초기속도가 증가함에 따라 평균 감속도도 증가하는 것을 보였으며, 그림 53과 같이 초기속도 6(m/s)에서 평균 감속도가 급격히 올라가는 것을 확인 할 수 있어 속도가 높아짐에 따라 차량이 받는 감속도 높아지는 것을 확인 할 수 있다.

표 17 4가지 타행 주행의 감속시간 및 평균 감속

Initial velocity(m/s)	Deceleration time(s)	Avg. deceleration(m/s <sup>2</sup> )
3	1.8	0.86
4	2.5	0.88
5	3.5	0.91
6	3.8	1.1

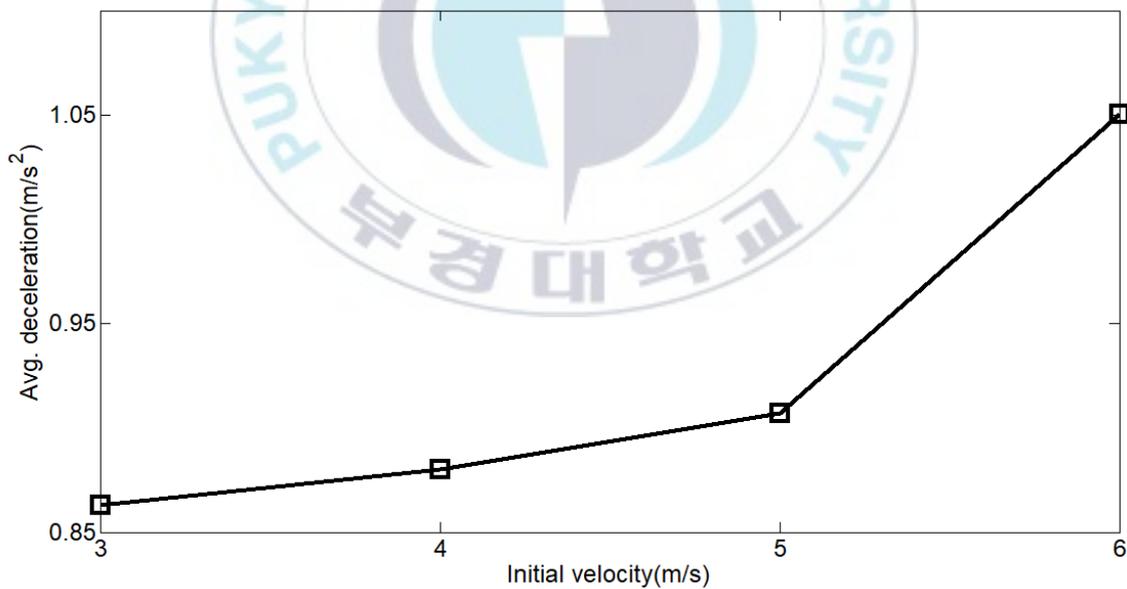


그림 54 초기속도에 따른 평균 감속도

5가지 주행에서 휠과 야지노면간의 발생된 견인력은 그림 54 ~ 57과 같으며, 안정적인 주행이 발생하는 시간대인 주행 시작 후 1초와 차량 정지 0.5초 사이의 차량 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력을 나타내었다. 초기속도가 증가할수록 휠에 작용하는 힘의 주기가 작아진다.

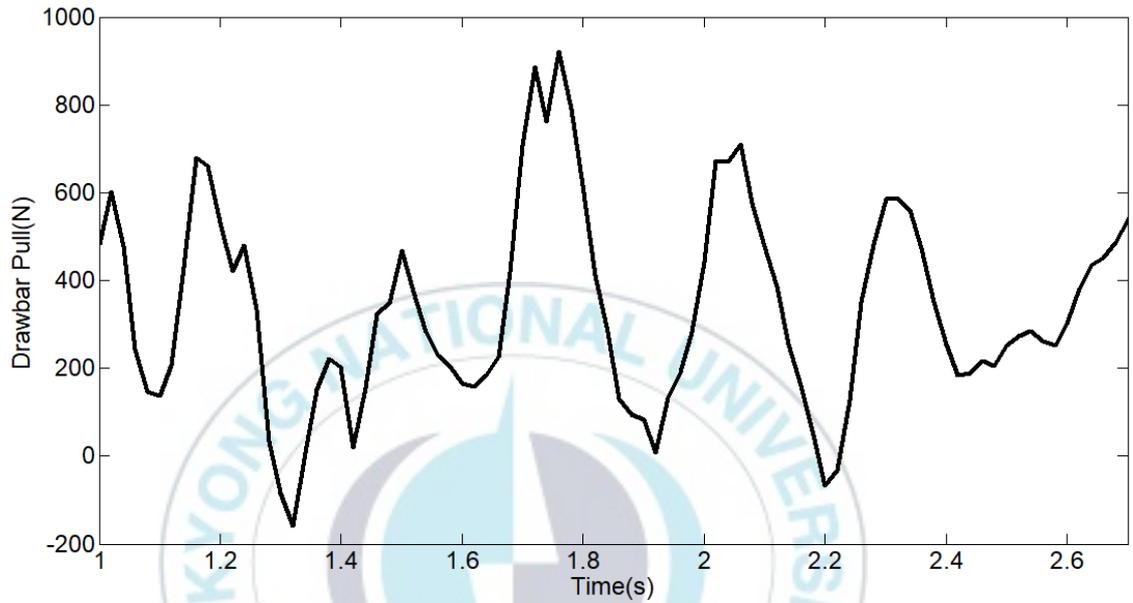


그림 55 초기속도 3m/s일 때의 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력

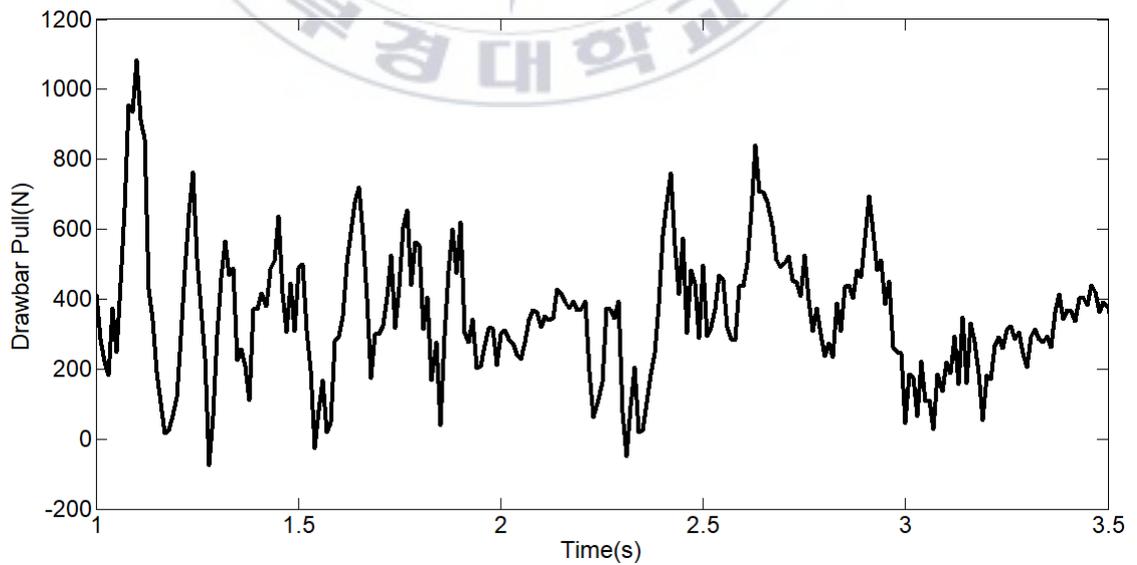


그림 56 초기속도 4m/s일 때의 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력

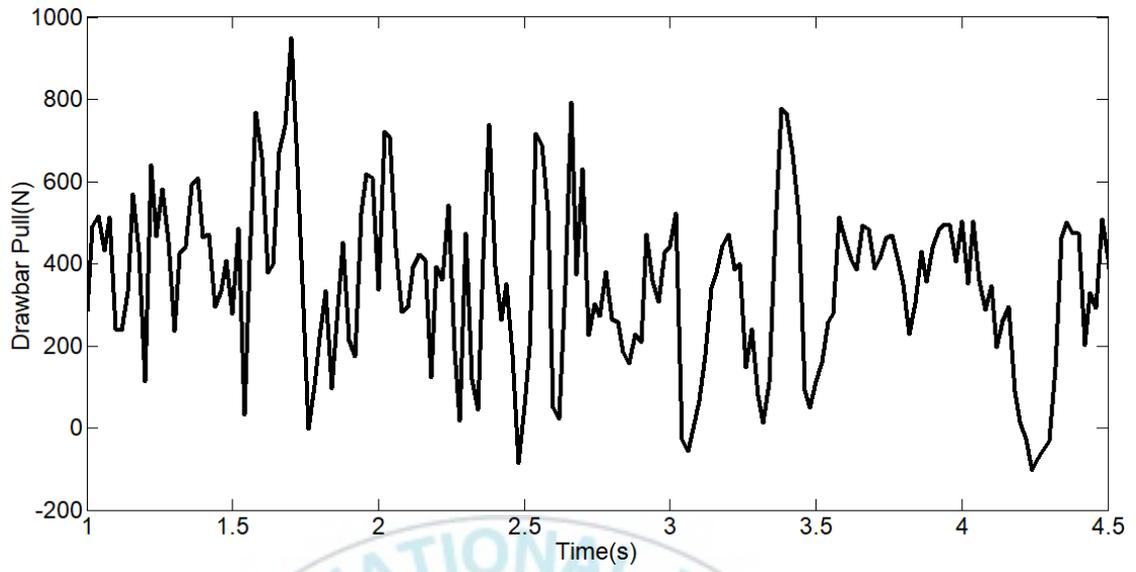


그림 57 초기속도 5m/s일 때의 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력

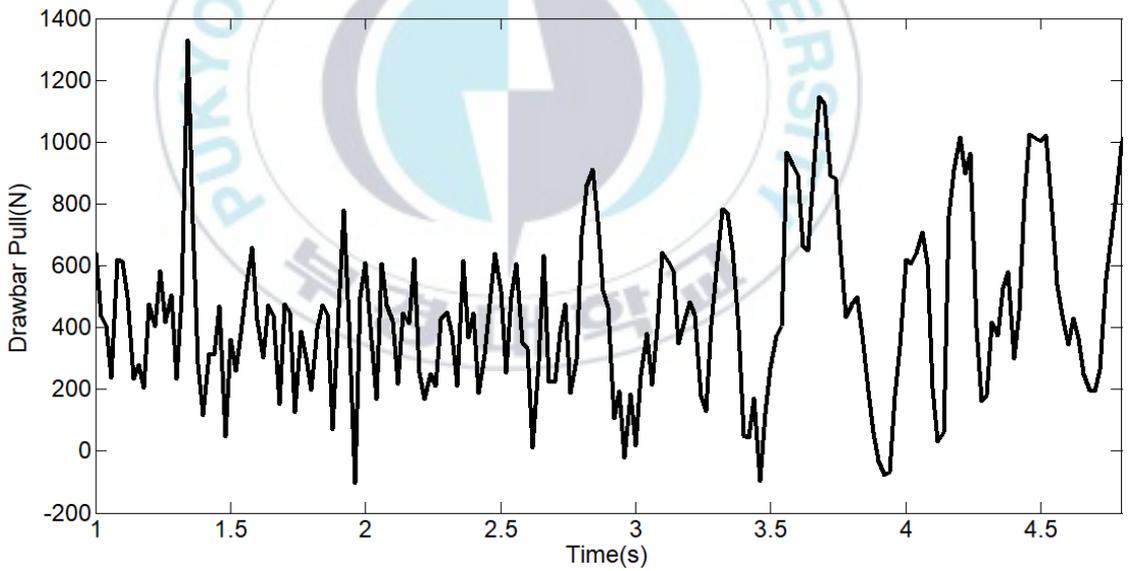


그림 58 초기속도 6m/s일 때의 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력

초기속도에 따른 왼쪽 전륜 휠에 작용하는 힘을 비교하기 위해서 그래프로 나타낸 견인력의 평균 힘을 비교 해보았다. 4가지 타행주행에 대한 평균힘은 표 18에 나타내었다. 타행주행 시 발생한 견인력을 비교해보면 초기속도 6(m/s)일 때 439.4(N)으로 견인력이 가장 큰 것을 알 수 있으며, 초기속도 3(m/s)일 때 331.2(N)으로 가장 작은 견인력을 보여준다. 또한 초기속도 5(m/s)와 6(m/s)일 때 힘의 차이가 크게 발생 하였다.

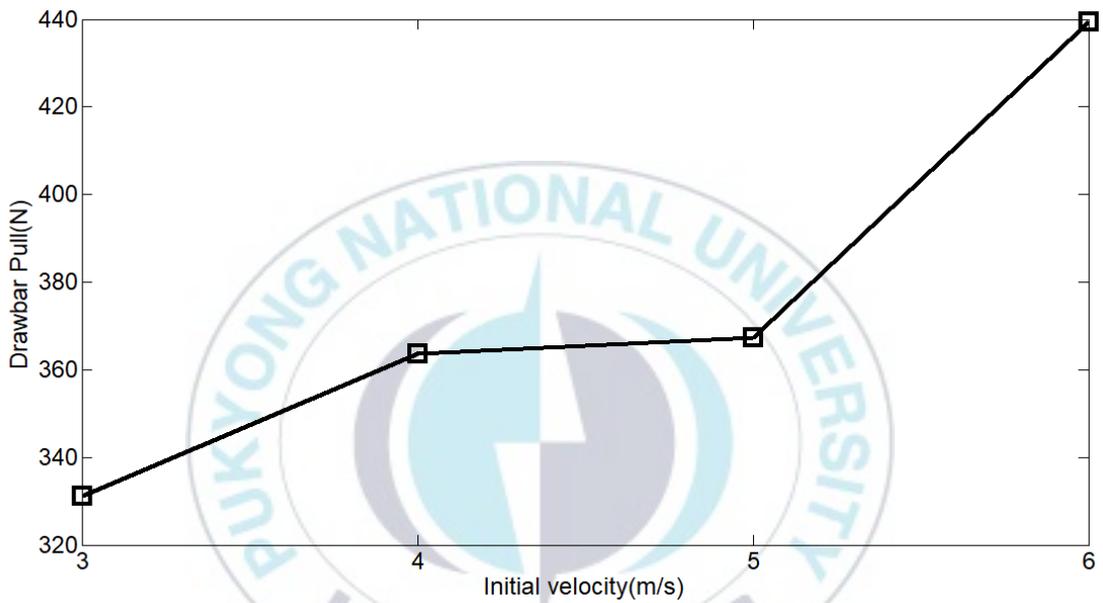


그림 59 왼쪽 전륜에 발생한 평균 견인력

표 18 왼쪽 전륜에 발생한 평균 견인력

Initial velocity(m/s)	Avg. Drawbar Pull(N)
3	331.2
4	363.6
5	367.4
6	439.4

## 6. 결론

야지노면을 주행하는 무인 차량과 무인 로봇의 개발이 활발해 짐에 따라 무인 차량 또는 무인 로봇의 주행 상태를 결정하는 것이 매우 중요해 졌다. 주행 상태를 결정하기 위해서는 무엇보다 휠과 야지노면의 접촉 시 발생하는 휠의 동적 거동에 대한 데이터베이스 구축이 매우 필요하며 시뮬레이션으로 효율적인 데이터베이스 구축이 가능하다.

본 연구에서는 야지노면 위를 주행하는 전차량 시뮬레이션을 수행하기 위해 휠 테스트 베드 실험과 시뮬레이션을 통해 먼저 해석을 검증하였다. 휠 테스트베드 시뮬레이션은 입자와 입자간의 접촉 계수를 통해 야지노면의 특성을 결정할 수 있기 때문에 파라미터 스터디가 필요하다. 파라미터 스터디는 마찰계수와 에너지 계수로 수행되었으며, 마찰계수와 휠 테스트베드 실험에서 측정된 최대 침하량을 기준으로 수행되었다. 입자와 입자의 접촉계수 결정 후 실험과 비교하여 정상상태에서 침하량은 1~2%의 상대오차를 보였으며 실험과 시뮬레이션에서의 평균 견인력은 상대오차 약 13%, RMS오차 15.7(N)으로 실험과 매우 유사하게 계산되어 해석의 정확성을 검증하였다.

전차량 주행 시뮬레이션은 실제 시험 차량을 재원으로 모델링하였으며, 휠 테스트 베드 시뮬레이션을 기반으로 야지노면을 모델링 하였다. 전차량 주행 시뮬레이션은 4가지의 다른 초기속도를 가진 타행주행으로 조향이 없는 직진 주행 시뮬레이션을 수행 하였다. 타행 주행 시뮬레이션을 통해 초기속도가 1(m/s) 증가함에 따라 주행 거리는 약 3(m)씩 선형적으로 증가하는 것을 보였으며, 주행 시간은 약 1초씩 증가하다 초기속도가 6(m/s)일 때 주행시간이 크게 증가하지 않는 것을 보였다. 주행이 안정적으로 일어나는 구간에서의 전차량의 평균 감속도를 확인하였으며, 평균 감속도는 주행속도가 높을수록 평균 감속도가 증가하여 차량의 감속이 더 많이 일어나는 것을 확인 하였다. 차량의 휠과 야지노면간의 접촉력을 확인하기 위해 왼쪽 전륜에 발생하는 견인력을 확인 하였다. 차량의 속도가 빠를수록 가해지는 견인력의 주기가 작아졌으며, 각 초기 속도 별로 발생하는 견인력을 확인하기 위해서 주행 시 발생하는 평균 견인력을 확인하였다. 평균 견인력은 초기 속도가 증가함에 따라서 증가하는 것을 보였으며, 평균 감속도가 가장 높은 초기 속도 6(m/s)에서 평균 견인력이 가장 크게 발생하는 것을 확인 하였다.

휠 테스트베드 실험과 시뮬레이션의 비교를 통한 해석의 정확성 검증과 접촉계수 파라미터 스터디를 통한 다양한 모래지 모델링이 가능함을 보였으며, 야지노면을 주행하는 전차량 주행 시뮬레이션으로 초기속도에 따른 주행 거리, 평균 감속, 휠과 야지노면과의 견인력 비교를 통해 시뮬레이션을 통한 효율적인 데이터베이스 구축이 가능할 것으로 판단된다.



## 참고 문헌

- [1] Y. S. Pyoun, Y. D. Jang, J. H. Park, I. H. Cho, Y.C. Lee, “ A Study on Development of Test Methodology and Test of no Spin Differential for Off- road Vehicle”, Transactions of KSAE, Vol. 13, No. 4, pp. 32-38, 2005.
- [2] 이민승, “차량동역학 해석 프로그램 AUTODYN7용 UA타이어 모델의 개발”, 공학석사 학위논문, 부산대학교 생산기계공학과, 1997.
- [3] M. G. Bekker, Theory of land locomotion: the mechanics of vehicle mobility. University of Michihan Press, 1956.
- [4] P.A. Cundall, O. D. L. Strack, “ A discrete numerical model for granular assemblies”, Geotechnique, Volume 29, Issue 1, pp. 47-65, 1979.
- [5] Z. Asf, I.Shmulevich, D. Rubinstein, “Predicting Soil-Rigid Wheel Performance Using Distinct Element Methods, American Society of Agricultural and Biological Engineers, Vol. 49, pp. 607-616, 2006.
- [6] H. Nakashima etc. “Discrete element method analysis of single wheel performance for a small lunar rover on sloped terrain”, Journal of Terramechanics, Vol. 47, pp. 307-321, 2010.
- [7] William Smith etc., “Comparison of discrete element method and traditional modeling methods for steady-state wheel-terrain interaction of small vehicles”, Journal of Terramechanics, Vol. 56, pp. 61-75, 2014.
- [8] Jerome B. Johnson etc., “Discrete element method simulations of Mars Exploration Rover wheel performance”, Journal of Terramechanics, Vol. 62, pp. 31-40, 2015.
- [9] Daniel Melanz, Paramsoth Jayakumar, Dan Negrut, “ Experimental validation of a differential variational inequality-based approach for handling friction and contact in vehicle/granular-terrain interaction”, Journal of Terramechanics, Vol. 65, pp. 1-13, 2016.
- [10] Nhuyen H. D., “Modeling the dynamics of toothbrush using discrete element method”. Phd. Dissertation, Kumoh National Institute of Technology.
- [11] Yu.M. Efremov, D.V. Bagrov, M.P. Kirpichnikov, K.V. Shaitan, “Application of the Johnson-Kendall-Roberts model in AFM-based mechanical measurements on cells and gel”, Colloids and Surfaces B: Biointerfaces, Vol. 134, pp.131-139, 2015.

- [12] Joaquin Irazabal Gonzalez, “Numerical analysis of railway ballast behavior using the Discrete Element Method”, Phd. Dissertation, Universitat Politecnica de Catalunya, 2017.
- [13] R. Serban, E. Haug, “Analytical Derivatives For Multibody System Analyses”, Department of Mechanical Engineering, The University of Iowa, 1998.
- [14] 전철웅, “GPGPU를 이용한 공간 다물체 시스템과 대량 입자들 사이의 접촉해석 연구”, 공학석사 학위논문, 부경대학교 메카트로닉스공학과, 2013.
- [15] P. E. NIKRAVESH, “Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems”, Prentice-Hall International, Inc, 1988.
- [16] R. E. Hunt, “Geotechnical Engineering Analysis and Evaluation,” McGraw-Hill, New York, 1986.
- [17] H. B. Kwon, S. W. Kim, H. K. Oh, “Assessment of the Running Resistance of a High-speed Train Using a Coasting Test”, Journal of the Korean Society for Railway, Vol. 17, No.3, 2014.
- [18] Y. J. Chu, H. J. Eun and S.Y. Lee, “Prediction of Damage to the Vehicle Underbody due to Stone Chipping.” MDPI 2018.