교 육 학 석 사 학 위 논 문

중학교 1학년 수학 교과서의 수학사 내용 비교 분석

2012년 8월

부경대학교 교육대학원

수학교육전공

이 현 지

교 육 학 석 사 학 위 논 문

중학교 1학년 수학 교과서의 수학사 내용 비교 분석

지도교수 김 도 상

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2012년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

이 현 지

이현지의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2012 년 8 월 24 일

주 심 이학박사 신 준 용 (인)

위 원 이학박사 심 효 섭 (인)

위 원 이학박사 김 도 상 (인)

목 차

표 목 차

Comparative Analysis of Mathematics History
in 1st Grade Textbooks of the Middle School

Hyun Ji Lee

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

Many students think that mathematics is hard and boring thing. We firmly believe that using mathematics history can be useful method to change students' attitude and to motivate students. Therefore, this research has compared a mathematics history in textbooks for middle school students who are especially in 1st grade and will suggest useful mathematics history for each chapters to keep students' interest in study.

First, we researched the importance of mathematics history and needs of teaching mathematics history including effects and directions. The class using mathematics history can not only keep students's interest but also make students understand mathematics easily.

Second, we have compared 10 kinds of mathematics textbook for middle school student 1st graders. We found out that every textbook has different mathematics history and it doesn't have enough contents.

Third, with the result of the research, we recommend mathematics history for each chapters to motivate students and help them study mathematics effectively.

To use mathematics history for classes, I hope that students understand development of mathematics and have the strong will to study mathematics by themselves.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성

수학은 인간의 역사와 함께 시작되었으며 인위적으로 만들어 낸 것이 아니라 인류의 발전과 함께 실생활에서 요구되는 필요성에 의해 발견되었으며 과거 수학자들의 고뇌와 시행착오가 고스란히 담긴 인간 정신의 문화적 산물이다. 수학은 비판적이고 논리적인 사고 능력을 길러주어 문제해결 능력을 향상시켜줄 뿐 아니라 사회가 발달함에 따라 암호이론, IT기술, 금융 여러 분야에서 활용되고 있다. 또한 미래 사회가 점점 복잡해지고 전문화되어 감에 따라 사회 구성원에게 창의적인 사고능력과 문제해결 능력, 정보처리 능력 등이 요구되는데 이는 수학적 추론과 문제해결, 수학적 의사소통 등으로 증진될 수 있다. 이렇듯 수학은 학생들의 능력과 우리의 삶의 크게 기여하고 있으며 우리의 삶과 함께 발전되어 가고 있다.

하지만 학교 교육에서 수학은 학생들에게 그저 문제풀이를 위한 과목일 뿐이다. 수학이라 하면 방정식 풀이, 미분과 적분의 계산 등을 떠올리며 수학의 가치가 아닌 어떤 풀잇법에 의해 답을 내는 과목이라 생각한다. 따라서 학생들은 수학의 가치는 알지 못한 체 “수학을 왜 배우지?” “수학은 어렵고 지루한 과목이야.”라 생각하고 이는 수학에 대한 흥미를 잃게 하며 수학에 대한 자신감을 결여시킨다. 또한 입시를 위한 주입식교육과 정의적 영역은 간과하고 인지적 영역의 목표 달성에 목적을 둔 학교 수업은 학생들의 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖기 힘들게 하고 있다.

따라서 학생들에게 수학이라는 과목 자체의 가치와 그 필요성을 일깨워

주고 수학 과목에 대한 긍정적인 태도를 회복시켜주기 위한 방안이 필요하다. 이를 위한 노력에는 여러 가지가 있겠지만 수학사를 활용한 수업은 이를 해결하고 수학 교육의 목표를 실현하는데 훌륭한 도구이자 방안이 될 수 있다. 하지만 교과서에 수록된 수학사 자료는 학생들의 흥미를 유발하기에 부족하고 그 내용 또한 관련 수학자들의 업적을 나열하고 있는 경우가 많아 그 역할을 제대로 해내지 못하고 있음을 알 수 있다.

이에 본 연구에서는 중학교 1학년 교과서에 수록된 수학사의 내용을 비교 분석하고 수업시간에 활용할 수 있는 수학사 자료를 제시하여 학생들의 흥미를 유발하고 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖게 하고자 한다.

2. 연구의 내용 및 방법

본 연구의 구성 및 내용 및 방법은 다음과 같다.

Ⅱ장에서는 이론적 배경으로 수학교육에서 수학사의 중요성과 수학사 지도의 필요성 및 효과와 방향에 대해서 알아본다.

Ⅲ장에서는 2007개정 교육과정의 수학 교과서 10종의 수학사 내용을 단원별로 비교 분석한다. 분석을 토대로 교과서에 수록되지 않은 관련 수학사 자료를 문헌조사를 통해 제시한다.

Ⅳ장에서는 본 논문을 요약하고 수학사를 수업에 활용하기 위한 제언을 한다.

3. 연구의 제한점

첫째, 본 연구는 2007개정 교육과정하의 중학교 1학년 수학의 내용에 한정하여 분석하였다.

둘째, 임의로 선정된 교과서의 수학사 내용을 분석하였으므로 전체 교과서를 일반화하기에 한계가 있다.

셋째, 교과서 분석에 있어서 수학 익힘책에 관해서는 분석하지 않으므로 학생들이 실제로 접하는 수학사의 내용은 본 연구보다 더 많을 수 있다.

Ⅱ. 수학교육에서 수학사

본 장에서는 수학교육에서 수학사의 중요성과 수학사 지도의 필요성 및 효과와 방향에 대해서 알아보고자한다.

1. 수학사 지도의 필요성

대부분의 학생들은 수학은 푸는 요령을 외워서 문제에 적용하는 문제풀이를 위한 과목이라고 생각한다. 하지만 수학은 인간의 역사와 함께 시작되었으며 인위적으로 만들어 낸 것이 아니라 인류의 발전과 함께 실생활에서 요구되는 필요성에 의해 발견된 것이다. 따라서 수학이 발전하며 걸어온 시간적, 역사적 과정을 간과하고 배운다는 것은 인류가 걸어온 방향을 알지 못하고서 미래를 예측하려는 시도와 같다.

수학의 역사에 대한 지식으로부터 어떤 이득을 얻을 수 있는가에 대해서 푸앵카레(Poincare)는 다음과 같이 말하였다.[1)]

“어떤 동물의 태아 발달은 지질학적 시대의 그의 선조의 전체 역사를 매우 짧은 기간 동안에 경과한다고 동물학자들은 주장하였다. 인간의 정신 발달에서도 마찬가지인 듯하다. 교육자는 아동을 그의 선조가 통과한 모든 단계를 따라 매우 빨리 그러나 어떤 단계도 소실되지 않게 인도해야 한다. 이러한 이유에서 학문의 역사는 우리의 첫째가는 안내자이어야 한다.”

현종익은 교사를 위한 수학사에서 수학교육에 수학사를 도입해야 할 필

1) 우정호(1998) 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부,

요성과 그 역할을 다음과 같이 말하였다.[2)]

어떤 국가나 민족은 고유의 역사와 민족문화를 갖고 있다. 한 민족을 이해하려면 그 민족이 지금까지 걸어왔던 발자취와 문화적 특성을 정확이 파악해야 할 것이며, 이와 마찬가지로 한, 학문을 연구하는데 있어서도 그 학문의 기원과 발전과정을 통해서 그 특성과 본질을 이해할 수 있다고 생각할 것이다.

이는 모든 학문이 그러하듯 수학 역시 인간의 사회생활과 문화 창조의 필요에 의해 만들어 진 것이며 수학의 기원과 발전과정을 통해서 특성과 본질을 이해할 수 있으며 이를 위해서 수학수업에 수학사를 도입해야 한다는 것이다.

2. 수학사 지도의 도입 효과

허민(1997)은 수학교육에서 수학사 지도를 통하여 얻게 되는 이점을 다음과 같이 말하고 있다.

첫째, 수학의 유용성을 강조할 수 있다. 수학에 흥미가 없는 학생들이나 수학을 왜 배우는지 궁금해 하는 학생들에게 인도 - 아라비아 수 체계, 기하학의 발생배경 등을 설명함으로 수학이 필요에 의해 발생되었다는 것을 알려준다.

둘째, 수학은 발전하는 학문임을 인식시킬 수 있다. 수학은 계속해서 변해왔으며 현재도 발전하고 있고 앞으로도 더욱 발전할 것이라는 생각을 심어줄 수 있다.

셋째, 수학의 인간화를 도모할 수 있다. 수많은 실패 속에서도 연구를 계

2) 현종익(2005), 교사를 위한 수학사, 교우사,

속하는 수학자들의 모습은 수학 내용을 더 흥미롭게 만드는 인간적인 과목임을 보여준다.

넷째, 현대 수학을 좀 더 치밀하게 이해시킬 수 있다. 수학사는 현대 수학의 구조에 대한 이해를 제공하며 이는 수학을 이해하고 접근하기 쉽게 만들어준다.

다섯째, 수학의 문화적 가치를 인식시킬 수 있다. 수학을 가르치는 중요한 이유는 수학의 문화적 가치이다. 수학교사는 문화의 전달자라는 사명을 가지고 학생들에게 전달해야 한다.

여섯째, 수학 학습의 어려움을 이해시킬 수 있다. 수학은 단시간에 만들어진 것이 아니라 오랜 시간동안 끊임없는 시행착오와 노력으로 만들어진 과목임을 인식시켜줄 수 있다.

일곱째, 교수방법을 개선시킬 수 있다. 역사에서 발생했던 것과 유사하게 가르침으로 수학의 발전과정을 인식시켜 줄 수 있다.

여덟째, 수학에 대한 흥미를 유도할 수 있다. 수업 중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개하므로 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있다.

수학교육에서 수학사를 도입하여 얻을 수 있는 이점을 Fauvel(1991)과 Freudenthal(1983)은 다음과 같이 말한다.(우정호,1999)

첫째, 알고리즘인 계산 수학을 반성하여 개념적 사고를 고취하는데 이용할 수 있다.

둘째, 교육과정 구성에서 자연스러운 내용 배열의 준거가 되며, 학습-지도에서 수학적 아이디어의 발달 과정을 따름으로써 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다.

셋째, 수학의 역사적 발달 과정을 소급해 봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습을 접해보게 하고, 학습 동기를 유발하고 수학학습에 생기를 불어넣을 방안을 찾을 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할 특히, 인간관과 세계관 형성에 미친 수학의 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생들의 인식을 바꿀 수 있다.

이처럼 수학교육에서 수학사가 담당할 수 있는 역할은 매우 다양하며 학생들의 여러 방면에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 먼저 학생들의 학습동기와 의욕을 높일 수 있다. 수학자들도 정교한 이론을 만드는 과정에서 여러 오류와 실수를 범했고 어려움에 직면했다는 사실들을 통해 문제해결 과정에서 시행착오를 거듭하는 학생들에게 자신감을 줄 수 있다. 이는 나아가서 학생들의 논리적 사고 신장에 도움을 주어 논리적인 통찰력을 증진시킨다. 또한 실생활과 수학의 관계에 대한 이해에 도움을 주어 실생활에 여러 가지 사실과 원리들이 수학과 어떤 관련이 있는가를 파악할 수 있게 한다.

3. 수학사를 이용한 지도법

이 절에서는 수학사를 수업시간에 도입하기 위한 방향성과 구체적인 방법에 대해 고찰해본다.

백석윤(1990)은 수학사의 지도 방법에 대해 다음과 같이 말하고 있다.

첫째, 새로운 단원을 배울 때 도입부에 그와 관련된 역사나 시대적인 배경, 수학자의 일화 등을 소개하는 방법이다. 이는 배우고자 하는 내용과의 연계성이나 입체감을 느끼게 해줌으로 수학에 대한 폭넓은 이해와 흥미를 유발시켜 줄 것이다.

둘째, 수업전개 중 이와 관련된 수학사에 등장한 문제들을 직접 학생들이 풀어보게 하거나 교사가 풀이방법을 현재 풀이 방법과 비교 설명해 주

는 방법이다. 이는 학생들에게 여러 가지 면에서 문제풀이에 대한 의욕을 가져다주며 단순한 문제제시가 아닌 입체적이고 재미있는 문제 제시방법이 될 것이다.

셋째, 특정 수학자의 이름과 관련된 용어나 정리를 학생이 접하게 되었을 때 이름이 사용된 수학자의 시대적 배경이나, 수학자의 이름이 이용되게 된 배경을 간단히 설명하는 방법이다. 이는 지금 배우고 있는 내용이 시간적 공간적으로 단절된 내용이 아니라 역사적 근원과 경로를 갖고 있음을 인식하게 해주며 이름의 사용에 대한 학생들의 흥미를 배우고자 하는 수학에 자연스럽게 유입시킬 수 있을 것이다.

넷째, 학생들이 수학을 왜 배울까 의문을 품을 때 과거 수학자들이 미래사회나 학문에서 필요하게 될 분야에 대해 예견하여 연구한 사례를 설명하는 방법이다. 이는 왜 그 내용을 배울까 하는 학생들의 의문점을 해결해주며 수학에 대한 그릇된 선입견과 편견을 올바른 방향으로 유도한다.

다섯째, 다양한 수학사적 참고 자료들은 주의환기용이나 관심을 집중시키기 위한 방법으로 사용될 수 있다.

여섯째, 수학내용들이 일반화 되고 추상화 되어 가는 과정의 이유에 대한 설명을 가능하게 해준다.

황미숙(2004)은 수학사를 수학에 도입하기 위한 구체적인 방법으로 다음을 제시하였다.

첫째, 학생들의 학습 동기 및 흥미 유발을 위해 수업 중 수학사 내용을 이야기해준다. 이는 학습 내용의 필요성을 인식시켜 흥미를 유도하고 주제를 명확하게 이해시킬 수 있다.

둘째, 수학사 내용을 중심으로 수업을 구성한다. 이는 수학자나 개념 형성 과정의 역사를 연극으로 구성하거나 수학 내용이 이용되고 있는 분야에 대한 발표 및 예제 풀이 수업, 수학사를 이용한 단원 도입 등이 있다.

셋째, 수학사에 등장했던 문제를 통해 역사적 사실을 탐구한다. 문제풀이는 수업을 진행함과 수업의 계획에서 그 배열을 어떻게 할 것인가에 대해 중요한 내용이 된다.

넷째, 수학을 통해 수학이 발달되어 온 과정을 살펴보고 수학의 발달 과정에 맞게 교육과정을 구성한다.

위를 토대로 수학사의 도입방법을 정리해보면 다음과 같다.

첫째, 수업의 도입 시 관련된 역사적인 배경이나 수학자의 일화를 소개한다. 이는 학생들의 주의환기와 흥미유발에 도움을 주며 학습 내용의 필요성을 인식시켜준다.

둘째, 수업시간에 배우는 내용과 관련 있는 과거의 수학 문제를 학생들에게 제시한다. 이는 학생들의 동기를 유발하고 문제해결 하는 것에 대한 흥미를 갖게 될 것이다. 이 때 교사가 그 시대의 풀이방법과 현재 풀이 방법을 비교하여 제시해 서로의 장단점을 논의함으로 교사와 학생간의 상호작용을 높여 활기찬 수업시간으로 이끌어 갈 수 있다.

셋째, 학생들이 학습한 내용이나 학습하게 될 내용과 관련된 수학적 주제들의 목록을 학생들에게 제시하여 수학사 연대표를 학생들 스스로 만들어 보게 한다.

넷째, 수업시간에 수학자 관련 용어나 정리가 나왔을 경우 그와 관련된 역사적인 배경과 일화를 제시함으로 학생들의 흥미를 유발시킨다. 예를 들어 피타고라스가 집을 오가는 길에 타일들을 유심히 보다가 영감을 얻어서 피타고라스 정리를 발견했다는 예화를 설명함으로 주변에 사소한 것으로부터 영감을 얻어 수학이 발전 되었다는 것을 알게 됨으로 시간적, 공간적으로 단절된 수학을 배운다는 인식을 해소시킬 수 있다.

다섯째, 수학 문제에 대해 수학사에 나오는 다양한 문제 해결법을 제시하고 비교함으로 문제해결력 증진과 여러 관점으로 문제를 접할 수 있는

능력을 기를 수 있다. 이는 문제의 풀이 방법이 하나라는 선입견과 편견을 해소시킬 수 있다.

이와 같이 수학사는 수업의 도입부분에서 관련 내용을 소개하며 수업의 전개 중 문제풀이 과정과 그와 관련 정리가 나왔을 경우 등 수업의 여러 가지 부분에서 활용될 수 있다. 교사는 수학사에 대한 많은 지식을 습득하고 이해함으로 학생들의 흥미를 일으키기에 충분한 내용을 선정하여 수학사를 도입해야한다. 또한 학생들의 사고과정에도 이는 근본적으로 영향을 미치므로 학생들의 수준을 고려하여 수학사를 도입하여야 한다.

Ⅲ. 수학교과서 분석 및 학습자료 제안

1. 교과서 단원별 수학사 내용 분석

가. 연구대상

2007년 개정 교육과정에 따른 중학교 1학년 교과서 중 10종을 선정하였으며 다음과 같은 기호로 표시하도록 한다.

<표Ⅲ-1>중학교 수학1 교과서 기호표

기호	출판사(저자)
A	교학사(강신덕,함남우,홍인숙,김영우,이재순,전민정,라미영)
B	두산(정순영,권혁천,강운중,이환철,신지영,설정수)
C	지학사(신항균,이광연,윤혜영,이지현)
D	천재문화(최용준,한대희,박진교,김강은,신태양,배명주)
E	대교(정창현,김창동,이상은,이치형,민정범)
F	대교(정광식,김정헌,오종래,임윤영)
G	성지출판(김홍종,계승혁,오지은,원애경)
H	비유와상징(김원경,조민식,김영주,김윤희,방환선,윤기원,이춘신)
I	대한교과서(유희찬,류성림,한혜정,강순모,제수연,김명수,천태선,김민정)
J	더텍스트(윤재한,박진석,정낙영,이영철,이성재,윤장노,최준호,장인선)

나. 교과서 단원 구성

2007개정 교육과정에서 중학교 1학년 수학은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하의 다섯 개의 영역으로 나누어지는데 교과서의 대단원이 동일하지는 않지만 내용과 순서는 유사하므로 집합과 자연수, 정수와 유리수, 문자와 식, 함수, 통계, 기본 도형과 작도, 도형의 성질단원으로 구성한다.

다. 교과서의 수학사 내용 분석

(1)집합과 자연수

<표Ⅲ-2>「집합과 자연수」단원의 수학사 내용

교과서	수학사 내용
A	• 칸토어 : 독일의 수학자로 집합에 관한 이론을 발표함 물건의 개수를 세는 것으로부터 발생한 자연수를 나타내는 기호는 시대와 지역에 따라 다르게 사용되다가 아라비아 숫자가 사용됨. • 에라토스테네스의 체 : 소수를 쉽게 찾는 방법소개
B	• 벤다이어그램 : 영국의 수학자 벤의 논문에서 처음으로 소개
C	• 벤다이어그램은 영국의 논리학자 벤이 창안한 그림 • 에라토스테네스의 체 : 소수를 찾는 방법을 소개, 이와 관련하여 표현하기 문제 제시 • 고대 이집트 사람들이 사용했던 상형문자의 그림을 제시하여 십진법의 개념을 도입
D	• 벤 : 집합 사이의 관계를 그림으로 나타내는 벤다이어그램 창안 • 칸토어 : 집합의 이론을 처음으로 도입, 무한집합 대한 논문을 발표 • 피타고라스 : 홀수, 짝수, 피타고라스의 수에 대하여 연구 • 라이프니츠 : 동양의 음양 사상을 이용하여 이진법연구 • 에라토스테네스의 체 : 에라토스테네스가 고안한 것으로 체를 이용하여 소수를 걸러 내는 것처럼 보여 에라토스테네스의 체라 한다. • 고대 이집트 상형문자의 그림을 제시 • 동양의 이진법 : 우리나라와 중국에서 점을 치던 역을 이용하여 나오는 8가지 경우를 팔괘라 하는데, 이 속에서 이진법을 찾을 수 있다.
E	• 칸토어 : 독일의 수학자, 집합론 창시, 무한집합의 개념을 고찰 • 벤 : 영국의 논리학자, 벤다이어그램창안 • 에라토스테네스의 체 : 소수를 찾는 방법
F	• 칸토어 : 집합기호{ }은 칸토어가 쓴 원고에 처음으로 등장 • 벤다이어그램 : 벤은 영국의 수학자 이름이고 다이어그램은 그림, 도표를 뜻하는 단어 • 에라토스테네스의 체 : 소수를 찾는 방법 • 메르센소수 : 2^n-1의 형태의 자연수 중에서 소수인 수를 메르센소수라고 한다. 소수가 무수히 많다는 것을 고대 그리스의 수학자 유클리드가 원론에서 밝혔다.

G	• 수학역사의 흐름 칸토어의 집합론은 20세기에 와서 보완되어 컴퓨터 언어 개발과 디지털 혁명에 기여 -칸토어 : 집합론 창시(19세기말) -괴델 : 집합론과 논리학에 큰 기여(20세기전반) -튜링 : 컴퓨터 개발(20세기중반) • 수학역사의 흐름 인류가 자연수를 이해하고 기호로 표현하기에 오랜 세월이 걸렸는데 현재는 아라비아 숫자를 통한 표현법이 널리 쓰인다. -디오판도스 : 자연수에 관한 책 산술을 지음(3세기) -가우스 : 산술지음(1801년) -불: 옳고 그름을 1과 0으로 표현(19세기) • 에라토스테네스 : 소수를 쉽게 찾는 방법 소개 • 차 번호판에 담긴 수학 : 인도의 수학자 라마누잔과 영국의 수학자 하디의 일화 • 고대이집트 상형 문자의 그림제시 : 십진법과 차이점 • 함께하는 수학여행 : 오늘날 우리가 부르는 벤 다이어그램은 오일러에게서 비롯된 것이다.
H	• 벤 다이어그램에서 벤은 영국의 수학자의 이름이고 다이어그램은 그림이라는 뜻이다. • 에라토스테네스의 체 : 고대 그리스의 수학자 에라토스테네스가 고안한 소수를 찾는 방법 • 고대이집트 상형문자 : 고대 이집트 상형문자는 1,10,100..등에 대한 기호를 그림으로 제시 • 태극기의 네 귀에 있는 4궤에서 '--'은 '음', '-'은 양을 뜻한다. • 골드바흐의 추측 : 2보다 큰 모든 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다. 아직까지 해결하지 못한 수학에서의 난제이다.
I	• 영국의 수학자 벤 : 벤다이어그램 창안
J	• 칸토어 : 집합론의 창시자 • 벤 : 벤다이어그램을 처음으로 소개 • 공집합 : 프랑스 수학자 베일이 ∅도입

집합과 자연수 단원에는 모든 교과서가 수학사 내용을 포함하고 있었는데 공통적으로 집합론을 창시한 칸토어, 벤다이어그램을 창안한 벤, 에라토

스테네스의 체를 이용하여 소수를 구하는 방법을 소개하고 있었다. 칸토어에 대해서는 집합의 { }을 칸토어에 논문에서 사용했다는 교과서 F외에는 칸토어가 집합론을 창시했다는 내용을 소개했다. 벤에 대해서는 대부분의 교과서가 벤다이어그램을 만들었다고 소개했는데 F와 H는 벤 다이어그램이 벤이라는 수학자와 그림이라는 다이어그램의 합성어라 소개하여 학생들의 이해를 도왔다.

에라토스테네스에 대해서는 에라토스네테스의 일대기를 소개한 교과서는 없었고 에라토스테네스의 체 이야기만 포함하고 있었으며 메르센 소수에 대해 설명한 교과서는 F가 유일했다. 교과서 A에는 자연수의 발생이유가 설명되어 있어 학생들의 이해를 도왔고 C, D, G, H는 이집트의 상형문자를 도입하여 십진법을 설명하여 십진법이 왜 도입되었는지 이해할 수 있게 했으며 D, H는 동양의 팔괘를 제시하여 이진법의 이해를 도왔다. G는 수학역사의 흐름을 통해 집합이 컴퓨터 개발에 영향을 주었음을 보여주었으며 라미누잔과 하디의 일화와 벤과 오일러의 일화를 실음으로 학생들의 흥미를 주고 있다.

(2)정수와 유리수

<표Ⅲ-3>「정수와 유리수」단원의 수학사 내용

교과서	수학사 내용
A	• 고대문명이 발달함에 따라 수의 개념과 기본적인 셈법이 발전됨 브라마굽타 : 자산과 부채를 양수와 음수의 개념으로 사용 보헤미아 수학자 비트만 : +, -기호를 사용하여 정수를 나타냄 분수 : 분배와 측정의 기록을 위해 자연발생적으로 생겨남 스테빈이 사용한 소수 : 물건의 길이를 재거나 양의 측정 등 필요에 의해서 발명
B	• 덧셈의 기호와 뺄셈의 기호는 비트만이 쓴 산술책에 나타난다. 덧셈의 기호 +는 더한다는 뜻의 라틴어가 변형된 것이고 뺄셈 기호 -는 뺀다는 뜻의 minus를 간단히 쓴 m을 사용하다가 -로 바뀌었다.

	• 음수의 뜻을 처음 도입한 사람은 인도의 승려 브라마굽타로 자산과 부채를 양수와 음수로 설명 • 오트레드 : 수학적 기호를 대단히 강조하면서 150개가 넘는 수학기호를 도입, 만든 기호 중 사용되는 것은 ×기호 등 3개이다. • 암산의 천재와 암산의 둔재 : 암산의 천재 인도의 수학자 라마누잔과 계산을 못하기로 유명한 수학자 쿠머이야기
C	없음
D	• 헤리엇 : 부등호 〈,〉 처음 사용 • 곱셈의 기호 ×를 처음사용, 계산자 발명 • + , - , ×, ÷의 역사 : 15세기 독일에서 기호의 정비가 이루어짐 + : 13세기경 레오나르도 피사노에 의해 만들어짐 - : 1489년 비트만이 만듦 × : 영국의 오트레드 수학의 열쇠에서 나타남 ÷ : 10세기경의 수학책에는 10 나누기 5등과 같이 나누기 라는 말을 함께 썼으나 후에 ÷로만 쓰게 됨. • 아메스 : 세계최초의 수학자, 그가 쓴 파피루스에는 몇 개의 분수의 합으로 나타내는 최초의 분수기록이 있다. • 클라비우스 : 유클리드 원론의 주석서와 대수 집필, 소수점을 처음으로 사용 • 수학자들도 어려워한 음수 : 데카르트나 파스칼도 음수를 사용하기 꺼렸으나 음수의 유용성을 알았던 수학자들이 음수를 발전시킴
E	• 가우스 : 독일의 수학자로 정수론을 지었으며 대수학의 기본정리를 발견
F	• +,- 기호의 유래 : +는 ~와를 의미하는 라틴어 et가, 기호 -는 minus의 m이 변한 것으로 비트만의 저서에서 처음 사용되었다. • 수학의 황제 가우스 : 가우스가 1부터 100까지의 합을 구한 방법을 수식으로 표현
G	• 팔괘를 이용하여 정수의 개념을 설명 • 수학 역사의 흐름 피타고라스: 조화, 화음, 자연수, 기하연구(기원전5) 브라마굽타: 음수곱하기 음수는 양수설명(7세기전반) 라이프니츠: 음양과 이진법을 비교 • 가우스일화 : 가우스가 1부터 100까지 합 구한 방법을 소개 • 수학역사의 흐름 피타고라스: 세상의 조화를 비로 설명(기원전6세기)

	세상을 이루는 것은 물질처럼 변하는 것이 아니며 영원하고 불변하는 것들이며 조화로운 수로 표현된다. 에우독소스: 비를 설명(기원전 4세기) 데데킨트: 유리수 집합을 둘로 나누어 수를 설명(19세기 후반)
H	• + : 또는 이라는 라틴어 et가 변형된 것 − : 부족하다라는 뜻의 minus에서 유래 • 분수의 마방진 만들기 : 자연수 1 ,2, 3...,9를 정사각형 모양으로 중복없이 나열하여 가로, 세로, 대각선 수의 합이 모두 같아지도록 만든 것을 마방진이라 한다.
I	없음
J	• 읽기자료 : 숫자이야기

정수와 유리수 단원에는 C와 I 교과서를 제외한 교과서가 수학사 내용을 포함하고 있었다. 이 단원에서는 처음으로 음수의 개념을 배우기 때문에 +, −기호를 사용하여 정수를 나타낸 비트만과 브라마굽타 그리고 정수와 유리수의 사칙연산에 사용되는 +, −, ×, ÷ 기호의 역사가 많이 다루어졌다. 기호의 역사를 설명하는 방법에는 그림과 함께 변천과정을 설명하는 교과서도 있었고 수학자의 이름과 기호만 제시한 교과서도 있었다. A는 분수와 소수의 발생 배경을 설명했지만 필요에 의해 발생되었다는 언급으로 끝나서 학생들의 이해를 돕고 흥미를 끌기에 부족했다. F와 G는 가우스가 1부터 100까지의 합을 구한 방법을 소개하며 덧셈의 교환법칙과 결합법칙의 유용성을 보여주었다. D는 음수를 어려워하는 수학자들을 소개하며 음수를 처음 배우는 학생들에게 거부감이 들지 않도록 도움을 주었지만 음수가 언제부터 사용되게 되었는지에 대해 언급되어 있는 교과서는 없었다. G는 팔괘를 이용하여 정수의 개념을 설명하여, 음수와 양수를 이해하는데 도움을 주었는데 팔괘의 이진법을 함께 언급한다면 전단원의 내용을 상기시키는데 유용하게 사용할 수 있어 보였다.

(3) 문자와 식

<표Ⅲ-4>「문자와 식」단원의 수학사 내용

교과서	수학사내용
A	• 디오판도스 : 수학에 처음으로 문자를 도입 비에타 : 알파벳 문자를 사용하여 방정식표현 데카르트 : 미지수 x, y, z를 사용
B	• 방정식에 미지수로 x많이 쓰는 이유: 프랑스에는 문자 x가 많이 사용되기 때문에 x라는 활자가 많이 갖추어져 있었고 이를 알뜰하게 이용하고자 데카르트가 사용
C	• 린드 파피루스에 실린 아하문제를 이용하여 방정식의 개념을 도입 • 수학자 디오판토스의 묘비의 그림을 제시하여 방정식 푸는 문제
D	• 디오판토스 : 대수학의 시조. 신학13권을 저술. 처음으로 문자도입 • 비에타 :알파벳을 수 기호로 사용하여 대수학의 기호화에 노력 • 아메스 : 아메스 파피루스에는 최초의 방정식기록 • 레코드 : 지혜의 숫돌에서 처음으로 등호모양사용 • 홍정하 : 저서 구일집에서 산가지 이용한 방정식 풀이제시 • 방정식의 유래 : 1세기경 중국에서 사용된 구장산술이라는 책에 방정술 이라는 말이 사용. • 미지수로 x사용한 이유 : 프랑스 수학자 데카르트 일화
E	• 뇌터 : 독일의 수학자로 20세기 최고의 여성수학자 • 곱셈기호 × : 오크레드의 '수학의 열쇠' 처음사용 • 나눗셈기호 ÷ : 스위스 수학자 란이 처음으로 사용 • 린드 파피루스 아하문제 : 고대 이집트의 린드 파피루스에 실린 오래된 방정식 문제 • 미지수를 x로 많이 쓰는 이유 : 데카르트일화 • 디오판토스 묘비에 적힌 생애를 제시
F	• 수학 산책 : 방정식의 역사 방정식이라는 단어는 중국의 구장산술에서 나왔으며 이집트의 파피루스, 바빌로니아의 점토판에서도 찾아볼 수 있다. 방정식에 대해 체계적으로 연구한 사람은 디오판토스이며 기호 체계를 확립한 사람은 비에타이다. • 역사 속의 방정식 이집트 방정식: 린드 파피루스에 실린 아하 문제 그리스 방정식: 디오판토스의 묘비문제 인도의 방정식 : 벌떼가 모두 몇 마리인지 구하는 문제

	중국의 방정식: 명나라 정대위가 지은 산법통종 문제 • 우리나라 수학의 자부심, 홍정하 : 중국의 수학자와 홍정하의 수학 대결에 대한 일화
G	• 갈릴레이의 이야기 : 자연은 수학이라는 언어로 쓰여 있고 그 문자는 삼각형이나 원, 그리고 기하학적인 도형이다. • 수학역사의 흐름 레코드 : 등호사용 라이프니츠 : $a:b=\frac{a}{b}$ • 구장산술 : 2000년전 중국에서 사용된 수학책, 구장산술의 방정은 수를 네모난 표의 형태로 늘어놓고 계산하는 것을 뜻한다. • 수학 역사의 흐름 산수서 :구장산술보다 수 백년 앞선 수학책,1983년 중국에서 발견 가우스: 방정식을 풀어 소행성의 위치 알아냄(19세기) 케일리: 연립일차방정식 연구 • 디오판토스의 묘비 문제
H	• 고대이집트에서는 숫자를 대신하여 상형문자 사용했다. • 조선후기 실학자 황윤석이 쓴 이수신편 방정식 문제 만두 백 개와 스님 백 명이 있는데 큰 스님에게는 각각 세 개씩 나누어 드리고 작은 스님에게는 세 사람 당 한 개씩 나누어 드리면 딱 떨어진다. 이 때 큰스님의 수를 구하라 • 중국 명나라 학사 정대위의 산법통종 문제 주막을 하는 이씨의 집에 손님이 많이 몰려왔다. 한 방에 7명씩 들어가면 7명이 남는데, 9명씩 들어가면 빈방이 하나 남고 나머지 방에는 모두 9명씩 꽉찬다. 방의 개수를 구하여라. • 디오판토스의 묘비 문제 • 유클리드 그리스 시화집에 실려 있는 이야기 속 방정식문제
I	• 프랑스 수학자 비에타 : 수학에 문자를 도입 • 우리나라의 옛 수학책으로 최석정이 쓴 구수략이 있다. • 인도수학자 바스카라의 책속의 방정식 문제 • 역사 속에서 찾은 수학 이야기 : 기원전 1650년경 이집트의 왕실에서 기록원으로 일하던 아메스가 85개의 수학 문제를 파피루스라는 풀로 만든 종이에 기록한 것
J	• 수행과제 : 린드 파피루스와 아하 - 이집트에서 방정식을 풀었던 방식을 소개

문자와 식 단원에서는 모든 교과서가 수학사 내용을 포함하고 있었으며 역사속의 방정식 문제를 소개하므로 수학사 대한 내용을 많이 포함하고 있었다. 이 단원에서는 중학생이 되어 처음 접하게 되는 미지수 x에 관한 데카르트의 일화와 린드 파피루스의 아하문제, 디오판토스의 묘비 문제를 다룬 교과서가 많았다. 등호를 처음 사용한 레코드를 다룬 교과서는 D와 G이고 E는 곱셈과 나눗셈 기호를 사용한 수학자 란과 오크레드를 다루었는데 이는 정수와 유리수의 사칙연산에서 곱셈과 나눗셈 계산을 배우므로 정수와 유리수 사칙연산에서 다우면 좋겠다는 생각을 했다. D와 F는 방정식의 역사를 읽을거리로 제시하여 역사적으로 방정식의 변천을 알 수 있었고, 다른 교과서와 다르게 아하 방정식과 디오판토스 묘비 문제 외에 인도와 중국의 방정식을 제시하여 학생들의 흥미를 이끌어냈다. G는 수학역사의 흐름에서 연립일차방정식을 다룬 케일리를 소개하여 2학년 때 배울 내용에 연계성을 더했으며 E는 독일의 여성수학자 뇌터를 소개하였는데 업적에 대한 설명 없이 소개되어 있어서 학생들의 관심을 끌기에 부족해보였다. 이 단원에서는 우리나라의 수학자 홍정하와 조선시대 수학책 구수략을 소개하므로 서양 중심으로 발전하였다 생각하였던 수학이 우리나라에서도 역시 발전했음을 보여주었다.

(4) 함수

<표Ⅲ-5>「함수」단원의 수학사 내용

교과서	수학사내용
A	• 함수개념은 17세기에 케플러와 갈릴레이의 물체의 운동에 대한 연구를 하면서 도입 데카르트 : 좌표를 도입하여 함수를 그래프로 나타냄 라이프니츠 : 함수를 function이라는 용어로 사용
B	없음
C	없음

D	• 데카르트가 좌표도입하게 된 일화를 만화로 소개 • 데카르트 : 순서쌍을 좌표평면위의 점에 대응 • 라이프니츠 : 함수(function)라는 용어를 처음으로 사용
E	• 데카르트 : 프랑스의 수학자로 순서쌍을 좌표평면 위에 나타내는 방법을 창안 • 라이프니츠 : 독일의 수학자, 함수의 용어 처음사용
F	• 수학산책 : 데카르트의 좌표평면 발견 일화 벽과 천장이 만나는 두 모서리로부터 떨어진 거리를 이용하여 파리의 위치를 나타낼 수 있음을 발견.
G	• 함수의 개념의 진화 설명 함수의 개념은 처음에는 한 종류의 값이 변함에 따라 다른 종류의 값이 변화하는 관계로, 오늘날에는 두 대상 사이의 관계를 설명 • 수학역사의 흐름 고대 바빌로니아에서 각종 수표를 진흙에 새김(기원전 2000년경) 라이프니츠 : 함수라는 용어 처음 사용(1673) 오일러 : 함수의 뜻을 설명하고 기호 f(x)사용 • 데카르트: 기하학에서 평면에 좌표를 도입하는 방법 설명 • 수학역사의 흐름 디리클레 : 유리수에서만 값이 1인 새로운 함수 발견(1837) 푸앵카페 : 모든 함수를 허용하다 소볼레스 : 함수의 개념 확장
H	없음
I	• 프랑스의 수학자 데카르트 : 좌표를 처음 생각해냈다
J	• 읽기자료 : 라이프니츠의 업적 • 데카르트 : 좌표를 도입

함수 단원에서는 교과서 B와 C, H를 제외한 모든 교과서가 수학사 내용을 포함하고 있다. 이 단원에서는 좌표를 도입한 데카르트와 함수 용어를 사용한 라이프니츠를 많이 다루었다. 데카르트의 좌표도입은 데카르트의 업적으로 간단히 다루거나 일화를 만화나 읽을거리로 제공하였는데 만화나 읽을거리로 소개하는 것이 학생들의 흥미를 이끌어내고 좌표평면의 개념을 이해하는데 도움을 줄 거 같았다. G는 다른 교과서와 다르게 함수의 개념의 변천을 제시하여 학생들의 이해를 도왔다.

(5) 통계

<표Ⅲ-6>「통계」단원의 수학사 내용

교과서	수학사 내용
A	• 통계학의 기원 : 17세기에 경제, 토지, 인구 등 국가의 중요한 사항을 수량적으로 기술하고 특징을 알아보고자 발생 그랜트 : 처음으로 사망표를 작성하여 남녀의 출생아 수, 결혼의 상황 등에 대하여 기록, 정리, 비교하여 관찰 페티 : 인구통계학 만들어 전 세계의 인구추정
B	• 통계학의 기원 : 통계학의 어원은 고대 로마시대로, 국가의 상태를 살피는 것에 관심을 가졌는데 이를 statistic이라 불렀음. 17세기 독일을 중심으로 국가적 상태를 정리하고 기술하는데서 출발함
C	없음
D	• 삽화를 통해 우리나라의 통계 역사 : 신라장석 • 엥겔 : 독일의 통계학자로 엥겔의 법칙을 발표 • 피어슨 : 생물 통계학, 기술 통계학을 연구 • 마르코프 : 수리통계학과 확률론을 연구 • 피셔 : 현대 추측 통계학을 창시
E	• 피셔 : 영국의 통계학자, 현대 추측 통계학의 창시자
F	없음
G	• 나이팅게일의 통계 : 나이팅게일의 보고서중 크림전쟁에서 영국군의 사망원인을 나타낸 '닭볏'이라는 그림그래프 소개 • 수학 역사의 흐름 케틀레 : 평균적인 사람이라는 개념이 생김(19세기중반) 골턴 : 평균으로 돌아가려는 원리(19세기 후반) 통계학의 거장 : 피셔(20세기 전반) • 수학 역사의 흐름 드무아브르 : 분포곡선의 발견(18세기 전반) 가우스 : 분포 법칙 설명(19세기 전반) 왈드 : 확률적 방법으로 판단하는 과정 설명(20세기 전반)
H	• 히스토그램 : 역사와 그림의 합성어
I	없음
J	없음

통계단원은 교과서 C, F, I, J를 제외한 교과서가 수학사 내용을 포함하고 있었고 다른 단원에 비해 수학사 내용이 가장 적었다. 또한 수학사 내

용을 제시하는 것도 수학자와 그의 업적을 단순히 소개하는데 그쳤다. A, B는 통계학의 기원을 설명하므로 예전부터 통계가 이용되었음을 보여주고 있고, G는 나이팅게일의 통계를 다루어 학생들의 흥미를 이끌었다. 이 단원은 실생활과 관련된 단원이서서 실생활과 관련 문제와 2007개정 교육과정에서 강조하는 컴퓨터나 계산기를 이용하는 부분이 주를 이루었다.

(6)기본도형과 작도

<표Ⅲ-7> 기본도형과 작도」 단원의 수학사 내용

교과서	수학사 내용
A	• 기하학발전 : 고대 이집트 홍수로 나일강 범람 후 토지의 재분배문제의 필요성에 의해 발생 탈레스 : 기하학연구를 체계적으로 하였다 유클리드 : 기하학의 기본인 점, 선, 면과 여러 가지 도형의 뜻과 성질에 대한 내용으로 원론이라는 책 저술, 기하학 기초 확립 • 맞꼭지각의 크기가 같다 : 탈레스가 처음으로 증명 • 탈레스의 거리 측정 문제 제시, 어떠한 원리로 거리를 측정했는가
B	없음
C	• 미로의 유래는 그리스 신화에서 찾을 수 있는데 다이달로스는 미로의 밑그림을 자와 컴퍼스로 그림.
D	• 갈릴레이의 명언 : 우주는 수학의 언어로 적혀 있으며, 그 문자는 삼각형, 원 및 그 밖의 기하학적 도형이다. 기하학의 역할 • 탈레스 : 두 직선이 만나서 생기는 맞꼭지각의 크기가 같음을 밝힘 • 유클리드: 도형에 대한 대표적인 책 기하학원론 집필 유클리드의 일화 : 기하학에는 왕도가 없습니다. • 플라톤 : 눈금 없는 자와 컴퍼스 이외의 작도법은 기하학 완전성을 파괴하는 것이다. • 가우스 : 정17각형을 작도할 수 있음을 보였다.
E	• 유클리드 : 고대 그리스의 수학자, 기하학을 체계적으로 정비하여 ‘원론’ 13,권을 편찬 • 작도에서 캐드로 : 작도는 옛날부터 토지를 측량하는 데 이용되다가, 기계, 전기, 건축 분야의 설계에까지 응용 • 가우스 : 독일의 수학자이자 물리학자, 합동기호 처음 사용

F	• 유클리드 일화 : 유클리드의 제자가 원론을 쉽게 배울 방법을 묻자 기하학에는 왕도가 없다고 답한 일화 • 도형의 아름다움, 테셀레이션
G	• 기하의 어원 : '땅을 측량한다.' 라는 그리스 어에서 유래 • 수학역사의 흐름 유클리드 : 원론 13권을 지음(기원전 3세기) 리만 : 리만기하학 탄생(1854년) 힐베르트 : 기하학의 기초 지음(30세기 전반) • 중국 당나라 고분에 발견된 그림과 고대 이집트 : 측량의 가장 기본적인 도구가 자와 컴퍼스 • 수학 역사의 흐름 가우스 : 정십칠각형작도(18세기) 보여이 : 비유클리드 기하 발견(19세기) 로바체프스키 : 비유클리드 기하 발견(19세기) • 해밀턴의 경로 : 다면체의 모서리를 따라 모든 꼭짓점을 오직 한번씩 지나는 경로
H	• 수행평가 : 기하학의 3대 작도 불가능 문제
I	• 유클리드 : 도형의 기초에 관한 내용을 정리한 원론 책 저술 • 고대 그리스 사람들은 직선과 원을 기본도형으로 생각하고, 눈금 없는 자와 컴퍼스를 기본도구로 이용하여 작도하였다.
J	• 3대 작도 불능 문제 : 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 작도 불가능

기본도형과 작도는 B를 제외한 모든 교과서가 수학사 내용을 포함하고 있었다. 대부분의 교과서가 기하학 원론을 집필한 유클리드 내용을 다루고 있었는데 유클리드의 일화를 소개한 D를 제외한 모든 교과서는 유클리드의 업적을 단순히 소개하므로 학생들이 읽고 이해하기에 어려움이 느껴졌다. A는 기하학의 발생을 설명하여 기하학의 역사를 알 수 있었고, D는 갈릴레이의 명언으로 기하학을 배우는 이유를 설명했다.

B는 단원의 도입부에서 미로의 유래를 통해 다이달로스가 자와 컴퍼스로 미로의 밑그림을 그렸다고 소개하여 학생들의 흥미를 끌어냈다. H와 J는 3대 작도 문제를 수록하였다.

(7) 도형의 성질

<표Ⅲ-8>「도형의 성질」단원의 수학사 내용

교과서	수학사 내용
A	• 이집트인 : 원은 크기에 관계없이 지름에 대한 둘레의 비율 일정 구장산술 : 중국의 오래된 수학책, 원주율을 3으로 사용 아르키메데스 : 원의 내부에서 접하는 정육각형의 둘레와 원의 외부에서 접하는 정육각형 둘레의 길이 비교하여 원주율을 계산 • 아르키메데스의 묘비 : 원기둥과 원기둥에 꼭 맞게 들어가는 구와 원뿔의 세 도형의 부피의 비가 일정 : 실험하여 구의 부피 공식
B	• 수학산책 유클리드 이야기 : 기하학에는 왕도가 없다는 유클리드와 일화와 학문 그 자체를 사랑하는 유클리드의 일화 소개 • 파이데이 : 프랑스 수학자 자르투가 원주율 3.14고안함을 기리는 날로 이와 관련된 이야기를 나누게 함으로 흥미유발
C	• 아르키메데스 : 원주율을 계산한 수학자(그림으로 제시)
D	• 피타고라스 : 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°임을 알아냄 • 데모크리토스 : 그리스의 수학자로 원의 접선을 연구 • 조선시대의 입체도형의 이름을 만화로 소개(방보도, 원보도, 방정, 방추, 원추, 입원) • 플라톤 : 다섯 개의 정다면체를 각각 불, 흙, 공기, 우주, 물과 결합 • 카발리에리 : 카발리에리의 원리를 이용하면 삼각뿔의 부피가 삼각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임을 설명할 수 있다. • 아르키메데스의 묘비 : 아르키메데스는 구의 겉넓이와 부피 공식을 증명하였고 이를 이용하면 원뿔, 원기둥, 구의 부피의 비가 1 :2 : 3 알 수 있다.
E	• 아르키메데스 : 고대그리스의 발명가이자 수학자로 수학, 물리학, 천문학 등 여러 분야에 업적을 남김 • 파이 : 원주를 의미하는 그리스어의 첫 글자, 영국의 수학자 존스가 처음으로 사용함. • 아르키메데스는 원기둥과 그 원기둥에 꼭 맞는 구와 원뿔의 부피 사이에 정수비가 성립함을 밝힘.
F	• 그리스 수학자 파포스의 수학집성의 대목소개
G	• 수학역사의 흐름 갈루아 : 무늬와 대칭성에 관한 생각을 명확히 설명(19세기 중반) 리 : 연속 대칭성 연구(19세기 후반)

	이임학 : 대칭성 분류(20세기 후반) • 수학역사의 흐름 탈레스 : 지름은 원을 이등분한다(기원전6세기) 아폴로니오스 : 원뿔곡선론지음(기원전 3세기) 데카르트 : 접하는 네 원 정리(17세기) • 원주율은 끝이 없는 수이다 : 원주율의 값을 알기위해 많은 노력이 있었다. 아르키메데스가 원주율을 계산한 방법을 그림으로 소개하며 원주율계산, 중국의 원주율(유휘,조충지) • 수학역사의 흐름 테아이테토스 : 정다면체 모두 발견(기원전 4세기) 가우스 : 곡면연구(19세기 전반) 푸앵카레 : 삼차원을 설명(19세기 후반) • 수학역사의 흐름 피타고라스 : 모든 것은 조화를 이룬다(기원전6세기) 아르키메데스 : 지렛대와 도르래의 원리, 원주율, 구의 겉넓이와 부피를 구하는 법 등을 발견(기원전3세기) 덴 : 다면체의 합동 연구(20세기 전반)
H	없음
I	• 아낙사고라스 : 신을 모독한다는 생각으로 감옥에 가서 원과 같은 넓이를 가진 정사각형을 작도 하여라 라는 문제를 생각 • 파이 : 원둘레를 의미하는 그리스어 첫 글자, 존스가 처음 사용 • 아르키메데스 : 원기둥과 원기둥에 내접하는 구와 원뿔 부피관계
J	• 플라톤 : 정다면체를 발견한 그리스의 수학자

이 단원은 H 교과서를 제외한 모든 교과서가 수학사 내용을 다루고 있었다. 대부분의 교과서가 원주율을 다루고 있었는데 G는 아르키메데스의 원주율을 구하는 방법과 중국의 유희, 5세기에 초중지를 소개하여 원주율의 범위와 원주율이 무한한 수임을 이해시켰다. 아르키메데스의 원기둥과 원기둥에 내접하는 구와 원뿔 부피관계를 다룬 교과서는 A, D, E, G, I인데 직접 문제에 적용시켜서 확인 시키는 방법으로 제시되었다. D는 조선시대 입체도형의 이름을 만화로 소개하여 학생들의 흥미를 끌었고 G는 수학역사의 흐름을 통해 관련 수학자를 나열했다.

2. 수학사 활용을 위한 학습자료

중학교 1학년 교과서를 살펴본 결과 교과서에 수록된 수학사 내용이 많이 부족함을 알 수 있었다. 대부분의 수학사 내용은 단원에 관련된 수학자의 업적이나 일화에 대한 이야기, 기호의 유래 등을 간략히 글로 소개하는 정도였고 학생들이 흥미를 느낄만한 내용은 소수에 지나지 않았으며 내용도 너무 어려웠다. 예를 들어 정수의 도입부분에서 팔괘이야기는 음효와 양효, 사괘 등 어려운 단어를 사용하였는데 이는 교사가 설명하지 않으면 중학교 학생들이 어려워 할 내용이었다. 따라서 학생들이 알기 쉽고 이해할 수 있는 수학사 내용을 선별하여 교과서에 수록해야 할 필요성을 절감하게 되었다. 이 절에서는 단원별로 각 단원별로 소개된 수학사 외의 단원과 관련된 수학사 자료를 제시한다.

가. 집합과 자연수

(1) 합집합과 교집합의 기호[2]

합집합의 기호 ∪와 교집합의 기호 ∩는 언제 누가 만들었을까? 이 기호가 언제 만들어졌는지는 알려져 있지 않지만 이탈리아 수학자 페아노(Peano, G)가 그의 논문에서 처음 사용했다고 한다. 페아노는 독일의 수학자 슈뢰더(Schroder, F)가 논리합과 논리곱을 나타내기 위해 사용한 기호 + 와 ×가 덧셈과 곱셈의 기호와 구별하기 어렵다 생각하여 ⌢와 ⌣를 새로 도입했다. 현재 우리가 쓰는 기호 ∪와∩는 이에서 변형된 것이다.

(2) 완전수 이야기[8][15]

완전수는 “만물의 근원은 수이다”라는 말로 유명한 피타고라스가 고안한

특별한 수이다. 자기 자신을 제외한 약수를 진약수라고 하는데 이 진약수의 합이 그 수와 같아지는 수를 '완전수'라고 한다. 완전수의 대표적인 예는 6과 28이 있다. 6의 약수는 1,2,3,6으로 이 중 6을 제외한 나머지 약수의 합은 6이 되고 28의 약수는 1, 2, 4, 7, 14, 28로 이 중 28을 제외한 나머지 약수의 합은 28이 된다.

'부족수'는 진약수를 더하면 자기 자신보다 작아지는 수를 말한다. 이를테면 8의 진약수를 더하면 1 + 2 + 4 = 7 이고 자기 자신 8보다 작으므로 8은 부족수이다.

'과잉수'는 진약수의 합이 그 수보다 큰 경우를 말한다. 예를 들면 12의 진약수를 더하면 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16이 되어 자기 자신 12보다 크므로 12는 과잉수이다.

피타고라스의 완전수에 대한 열망은 과잉수 중 일부를 완전수와 비슷하게 만들려는 시도로 이어져 반완전수를 탄생시켰다. '반완전수'는 어떤 수의 진약수의 일부를 더해 그 수와 같도록 만들 수 있는 수를 말한다. 예를 들어 20의 약수의 합은 22이지만 진약수 2를 제외하고 더하면 1 + 4 + 5 +10 = 20 이므로 반완전수가 된다.

피타고라스는 완전수를 신성하게 여겼으며 이런 그의 생각은 하나님이 천지를 6일 동안 창조했다고 해석했고 결혼하기에 적합한 나이는 28세라 생각하게 하였다. 완전수 6과 28은 우리 주변에서도 많이 발견되는데 벌집의 정육각형 기둥과 병원에서 생후 28일까지의 아기를 신생아라 부르는 것이 그 예이다.

(3) 우정수와 부부수[8][15]

진약수의 합이 서로 엇갈리면서 같아지는 한 쌍의 수를 '우정수'라고 한다. 대표적인 우정수의 예는 220과 284로 220에서 자기 자신을 제외한 약

수를 모두 더하면 284가 되고, 284에서 자기 자신을 제외한 약수를 모두 더하면 220이 된다.

우정수가 되는 수는 (1184 ,1210), (2620, 2924), (12285, 14595)와 같이 짝수끼리 혹은 홀수끼리의 쌍이 된다. 피타고라스학파는 짝수는 여성을 홀수는 남성을 나타낸다고 보았기 때문에 '우정수'는 홀수끼리 짝수끼리 나타나므로 동성인수가 되며, 우정을 상징하는 수로 알려져 있다.

1과 자기 자신을 제외한 약수의 합이 다른 한 수와 같은 두수를 '부부수'라고 한다. 대표적인 부부수의 예는 48과 75로 48에서 자기 자신과 1을 제외한 약수의 합이 75가 되고 75에서 자기 자신과 1을 제외한 약수를 모두 더하면 48이 된다.

현재까지 알려진 부부수가 되는 수는 (140, 195) (1575, 1648) (1050, 1925), (2024, 2295) 등이 있고 이들은 모두 짝수와 홀수의 쌍으로 나타내어지기에 부부수라 불리게 된 것이다.

(4) 기수법[4][15]

십진법이 가장 대표적인 진법이 된 이유는 손가락이 열 개라는 사실 때문이다. 실제 자리수를 뜻하는 단어 digit라는 단어에는 '손가락'이라는 뜻도 포함되어 있다. 이는 우리말의 서수에서도 찾아볼 수 있다. 손가락으로 수를 셀 때 하나부터 다섯까지는 손가락을 하나씩 접어서 세기에 다섯에서는 모든 손가락이 닫힌다. 여섯부터 열까지는 접었던 손가락을 하나씩 펴기 때문에 열에서는 모두 손가락이 열린다. 우리말에서 서수 '다섯' 과 '닫힌다' 와 '열'과 '열린다'는 발음이 유사함은 이 때문이다. 오늘날의 10진법 표기법은 피사의 레오나르도라고 부르기도 했던 수학자 피보나치가 발표한 '계산판에 대한 책'에서 처음 소개된 것이다. 기수법에는 십진법 외에도 이진법, 오진법, 이십진법, 육십진법 등이 있다.

컴퓨터는 기본수를 0과 1로 하는 이진법을 사용하고, 남아메리카의 한 종족은 hand인 5를 기준으로 하여 5진법을 사용한다. 아메리카 인디언들이나 마야인들은 손가락과 발가락의 개수를 모두 합하면 20이 되는 것에서 시작하여 20진법을 사용했다. 그들은 1부터 19에 해당하는 수를 나타내고 조개껍질 모양으로 0을 표현했다. 오늘날 담배 한 갑은 20개비, 오징어 한 축은 20마리, 한약한재는 20첩, 조기 한 두름은 20마리 하는 것은 모두 20진법과 관련이 있다. 바빌로니아에서는 60진법을 사용하여, 1부터 59까지의 수를 작은 화살촉모양의 쐐기문자로 나타냈다. 바빌로니아인들은 관측에 의해 지구의 공전 주기가 360일 정도가 된다는 사실을 알고 있어 태양의 모양인 원을 360으로 생각하고 360을 6등분한 60을 단위로 택했다. 1시간은 60분, 1분은 60초, 각도의 단위에서 1°(도)는 60′(분)을 나타내는 등 지금도 60진법은 사용되고 있다.

(5) 1은 왜 소수가 아닐까?[13]

소수를 찾아내기 위한 방법인 에라토스테네스의 체를 발견한 에라토스테네스 역시 1이 첫번째 소수라 믿었다. 실제로 수 백년동안 1은 소수에 포함된다고 알려져 있었다. 1은 1로 나누어 질 수 있으며 자기 자신인 1로도 나눌 수 있기 때문이다. 하지만 유클리드의 주장에 의해 1은 소수에서 제외되었다. 그는 산술의 기본 정리에서 " 1보다 큰 임의의 자연수는 소수이거나 소수의 곱으로 나타낼 수 있다"고 하며 이를 증명해냈다. 유클리드의 정리에 따르면 어떤 숫자를 만들기 위해 곱해지는 그 숫자들이 소수라는 것이다. 예를 들어 18은 2*3*3이고 2와 3은 소수이다. 유클리드가 이를 밝혀냄으로 1은 소수에서 쫓겨나게 되었고 실제로 1은 정리 증명에 방해만 될 뿐이어서 300년 전 수학자들에 의해 소수에서 제외되기로 합의 되었다.

(6) 소수의 미해결 문제[17]

소수는 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수인데 '아리스토테네스의 체'를 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 소수에 대해서는 지금도 풀리지 않는 미해결 문제들이 존재하는데 그 중에는 쌍둥이 소수와 골드바하의 추측이 있다.

유클리드에 의해 소수는 무한히 많음은 증명되었지만 소수들 사이에 어떤 관계가 있는지는 아직 알려져 있지 않다. 쌍둥이 소수는 두 수의 차가 2인 소수의 쌍, 즉 (소수, 소수+2)이다. 예를 들어 (3,5), (5,7) , (11,13), (17,19)은 쌍둥이 소수이다. 실제로 (2, 3)의 경우를 제외하고는 모든 두 소수의 차는 2이다. 이러한 쌍둥이 소수가 무한히 많다는 것은 아직도 해결되지 않은 문제이다. 2011년 12월 25일, 2개의 분산 컴퓨팅 프로젝트인 쌍둥이 소수 탐색과 프라임그리드가 현재까지 발견된 쌍둥이 소수 중 가장 큰 쌍둥이 소수 3756801695685*2^666669±1를 발견했는데 십진법으로 이 소수의 자릿수는 200700이다. 하지만 이것도 현재 발견된 가장 큰 쌍둥이 소수 일 뿐 쌍둥이 소수가 무한히 많음은 아직 증명되지 않았다.

'골드바흐의 추측'은 독일의 수학자 골드바흐가 오일러에게 보낸 편지 속에 있는 문제이다. 편지에는 '2보다 큰 임의의 자연수는 3개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다'고 쓰여 있었다. 골드바흐는 1도 소수이기에 가능하다고 생각했던 것이다. 오일러는 1이 소수가 아니라 생각하였기에 이를 수정하여 '2보다 큰 임의의 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다"고 하였다. 이 추측을 '골드바하의 추측' 또는 '오일러의 추측'이라고 불리 운다. 골드바흐의 추측은 아직 까지도 증명되지 않았으며 얼마 전 영국의 한 출판사가 이를 2년 안에 증명하는 수학자에게 백만 달러를 준다고 하면서 소설책 골드바흐의 추측을 발간해 세기적 주목을 끌고 있다.

나. 정수와 유리수

(1) 0의 발견[9]

0은 876년 인도에서 쓰인 기록에서 처음 발견되었다. 사실 인도뿐 아니라 다른 문명에서도 0을 찾아볼 수 있는데 바빌로니아의 기원전 200년경 기록에는 숫자가 빠진 곳을 메우기 위해 0의 기호를 사용한 흔적이 남아있지만 계산을 할 때에는 0을 사용하지 않았다. 마야와 중국에서도 0이 사용된 기록이 남아있지만 단지 빈자리를 채우기 위한 도구였다. 이는 오늘날에도 쓰이는 개념으로 23과 203처럼 0은 비어있는 자리를 나타내어 두 수가 다름을 알려준다.

0의 또 다른 역할은 무(無)이다. 이것은 0을 아무것도 없음을 나타내는 하나의 '수'로 인정한 것이다. 고대 문명에서 0은 단지 기호에 불과했다. 0을 수로 인정한다는 것은 '없는 것'을 실재하는 것처럼 표시한다는 의미하므로 옛날 수학자들은 쉽게 받아들이지 않았다. 특히 아리스토텔레스는 무(無)의 상태를 만드는 것은 신에게 맞서는 일이라고 생각했다. 또한 그는 나눗셈을 할 때 어떤 수를 0으로 나누면 이해할 수 없는 결과가 나오기에 0을 '규칙에서 벗어난 수'라고 말했다. 0으로 나누는 문제는 6세기에 되어서 해결되었는데 인도의 수학자들은 이 문제를 '무한대'라는 개념과 연결시켰고, 결국 인도의 수학자 브라마굽타는 어떤 수를 0으로 나눈 몫을 무한대의 수학적 정의로 사용하였다. 이처럼 0은 기호가 아닌 수이며 하나의 기호를 수로 인정하기까지 많은 시간이 걸렸으나 그 사이 수학의 영역은 '무한'까지 확장될 수 있었다.

(2) 음수이야기[2][4]

음수는 우리의 생활 속에서 유용하게 사용되고 있다. 영상 5도, 영하 3도

또는 고도를 표시할 때 우리는 모두 음수를 사용하고 있다. 또한 이익과 손해, 수입과 지출을 말할 때, 시간의 전후를 말할 때 우리는 음수를 사용하여 나타낸다. 이렇게 우리 생활에 유용하게 도움을 주는 음수는 언제부터 사용되었을까?

처음으로 수가 등장한 것은 원시생활을 하던 사람들이 사냥감이나 기르는 가축들의 수를 세고 더하기 위해서, 수확한 농작물의 양을 재기 위함이었다. 따라서 수는 어떤 보이는 물건에 대응하여 생각했다고 볼 수 있다. 그러나 -5마리의 양을 볼 수 없는 것처럼, -1, -2, -3은 눈에 보이지 않으니 음수를 생각하기 어려웠다. 따라서 1, 2, 3 같은 자연수는 쉽게 발견되었지만 음수를 발견하는 데는 그 후로 오랜 시간이 걸렸음이 당연하다.

고대에서 음수를 이해하고 있던 곳은 중국뿐이라 알려져 있었다. 중국에서는 기원전 2~3년경의 진•한 시대에 중국 수학자 유휘는 구장산술이라는 책을 만들었는데 이 책에는 양수와 음수가 모두 사용되고 있었다. 당시 중국에서는 막대기를 가지고 수를 표현하였는데 양수를 나타내는 수막대는 빨간색, 음수를 나타내는 막대기는 검정색으로 표시했다. 중국인들이 이렇게 일찍부터 음수를 이해할 수 있었던 이유는 동양사상의 기본인 음양론덕분이라 할 수 있는데 이는 우리나라의 태극기의 파란마크와 빨간 마크를 보면 찾아볼 수 있다. 중국인들은 일찍부터 음수의 개념을 갖고 있었기에 이를 이용하여 연립 일차방정식의 해법을 설명할 수 있었다.

인도에서는 빚을 나타내기 위해 처음으로 음수를 도입했다. 6세기의 수학자인 브라마굽타는 양수를 자산으로 음수를 부채로 설명하였으며 음수의 사칙연산에 관한 책도 남겼다. 음수에 대한 생각은 인도로부터 유럽으로 전해졌으나, 곧바로 보급되지는 않았다. 유럽인들이 음수를 받아들이기 시작한 것은 데카르트가 음수를 직선위에 타나내면서부터이다. 17세기의 수학자 데카르트는 수직선의 기준점에 0을 표시하고 오른쪽과 왼쪽에 각각

양수와 음수를 표시하여 기하학적으로 음수를 이해할 수 있게 되었다. 하지만 그 때 데카르트는 어느 정도 음수를 인정했으나 음수가 아무것도 '없는 것'인 0보다 작은 수이기 때문에 잘못된 수로 생각했다고 한다. 그러나 데카르트의 이 개념 덕에 자연수에서 사용되는 '크다'와 '작다'의 개념이 음수에 적용되게 되었다.

음수가 등장하면서 이전에 있던 자연수와 대조적인 수를 새롭게 부를 필요가 되었다. 자연수를 음수의 반대개념인 양수로 부른 이유도 그러한 이유 때문이다. 그러다 보니 양수와 음수의 가운데인 아무것도 없음을 뜻하는 0을 더한 전체를 뜻한 말이 필요했고 이것들이 모두 합쳐져 정수가 탄생하게 되었다.

(3) 분수의 탄생[13]

바빌로니아인들과 로마인들은 다른 나라와 무역을 할 때 물건교환에 분수의 개념을 사용했다. 예를 들어 고기의 1/4와 과일자루 1/3을 바꿀 경우 이를 나타낼 방법이 필요했고 이를 위해 분수를 나타내는 기호와 표현을 만들었다. 이집트인들은 나일강의 범람 때문에 입은 손해를 고려하여 세금을 정해야 했기에 이 세금계산을 위해 수학적 지식이 필요했고 이로 인해 분수를 표현 하는 방법과 분수의 계산이 탄생하였다. 어림잡아 이집트인이 분수를 처음 사용한 시기가 B.C.1800년 쯤 이므로 분수의 역사는 매우 오래되었음을 알 수 있다.

오늘날의 분수표기 방식은 브라마굽타가 A.D.628년에 책을 발간하며 대중화 되었다. 그 당시에는 분수표기에 중간선 없이 두 정수를 위아래로 쓰는 방식을 사용하였고 660년 후에 중간선이 나타났다. 지금의 형태를 사용한 최초의 학자는 피보나치라 알려져 있다.

다. 문자와 식

(1) 1차방정식 해법을 찾아낸 알콰리즈미

일차방정식의 해법은 고대로부터 잘 알려져 있다. 고대 이집트의 린드 파피루스에 실린 '아하문제'속에서도 일차방정식을 찾아 볼 수 있는데 당시 이집트 사람들은 미지수를 나타내는 방법을 몰랐기에 분자가 1인 단위분수를 이용하여 방정식의 해를 구했음을 알 수 있다. 후에 방정식에 기호로 기술한 디오판토스는 한 변에 하나의 양수 항이 남을 때 까지 계속해서 양변에 서로 같은 것을 빼거나 더하는 방법을 사용하여 풀었는데 이는 그가 음수근을 인정하지 않았기 때문이다.

일차방정식의 해법을 체계화 시킨 수학자는 아라비아의 '알콰리즈미'이다. 그는 인도 대수학의 영향을 많이 받았으며 825년경 아라비아 최초의 대수학책인 「복원과 축소의 과학(Al-gebrw′ almuquabala)」을 발표했는데 Al-gebrw가 오늘날 대수를 나타내는 알제브라(algebra)의 어원이 되었다. 책 제목의 알제브라(all-gebrw)는 방정식의 음의 항을 다른변으로 이항하는 것을 말하며, 알무콰바라(almuquabala)는 양변의 동류항을 간단히 하는 것을 말한다. 알콰리즈미는 이 책에서 이항과 동류항 정리에 관한 내용과 함께 1차 방정식의 체계적인 풀잇법을 제시했다. 그는 1차 방정식의 해를 구할 때, 미지수를 포함한 항은 좌변으로 상수항은 우변으로 이항한 다름 동류항을 계산하여 해를 구하는 방법을 찾았는데 이는 오늘날 우리가 1차 방정식을 풀이하는 법과 동일하다. 그는 죽으면서 아내에게 " 만약 아들을 낳으면 유산의 $\frac{1}{3}$을 가지고 딸을 낳으면 유산의 $\frac{2}{3}$를 가지시오"란 유언을 남겼다한다. 그의 아내는 그가 죽고 얼마 후 아들과 딸 쌍둥이를 낳았다고 한다. 그의 아내는 얼마정도의 유산을 받았을까?

(2) 역사속의 방정식[18]

(가) 인도의 방정식 문제

현재 우리가 사용하고 있는 십진기수법과 숫자는 고대 인도인들이 사용했던 것이다. 인도는 일찍부터 상업의 중심지로 삶의 터전에서 계산이 필요하게 되었고, 조그만 흑판에 대로 만든 펜과 흰 잉크로 계산하여 계산에 쓰인 도구가 매우 편리하였기 때문이다.

다음은 인도의 마이소르 출신의 수학자 마하비라가 제시한 문제이다. 여기서 안고라는 인도의 도량단위이다.

80안고라나 되는 큰 뱀이 $\frac{5}{14}$일에 $7\frac{1}{2}$안고라 속도로 굴을 파고 들어간다. 그런데 뱀꼬리는 $\frac{1}{4}$일에 $\frac{11}{4}$안고라씩 자라난다. 큰 뱀은 며칠이 되어야 완전히 굴속으로 들어갈 수 있는가?

(풀이) 큰 뱀이 매일 굴속으로 들어가는 단위 ; $7\frac{1}{2} \div \frac{5}{14} = 21$(안고라)

매일 자라나는 큰 뱀의 꼬리의 길이 ; $\frac{11}{4} \div \frac{1}{4} = 11$

큰 뱀이 x일 걸려서 완전히 굴속으로 들어갔다고 하면

$21x = 80 + 11x$가 성립하고 이를 계산하면 $x = 8$이다.

따라서 뱀이 완전히 굴속으로 들어가려면 8일이 걸린다.

또한 인도 수학은 귀족을 위한 것이었기에 놀이화되는 경향이 있어 아름다운 시형식으로 엮여있었다.

선녀같이 아름다운 눈동자의 아가씨여! 참새 몇 마리가 들판에서 놀고 있는데 두 마리가 더 날아왔어요. 그리고 저 푸른 숲에서 그것의 다섯 배가 되는 귀여운 참새 떼가 날아와서 함께 놀았어요. 저녁 노을이 질 무렵 열 마리의 참새는 숲으로 들어가고 남은 참새 스무 마리는 밀밭에 숨었대요. 처음 참새는 몇 마리였는지 내게 말해 주세요.

(풀이) 처음의 참새의 수를 x라 두자. 그러면 $(x+2)+5(x+2)=30$이다. 이를 계산하면 $x=3$이다. 따라서 처음 참새는 3마리 있었다.

(나) 중국의 방정식 문제

「손자산경」은 「산경십서」라 불리는 고전 수학 총서의 하나로 상, 중, 하 세권으로 구성되어있다. 상권은 산목을 이용한 기수법과 곱셈, 나눗셈을 중권에는 예를 들어서 산목을 사용한 계산법을 설명하고 있다. 특히 손자상경은 응용문제를 일상적인 보기를 들어 쉽게 설명하고 있다.

학과 거북이를 합쳐 35마리가 있다. 다리의 수를 세면 94개가 된다. 학과 거북이는 각각 몇 마리 있는 것일까?

(풀이) 학의 수를 x라 하면 거북이의 수는 $35-x$이다. 다리의 수가 94개이므로 $2x+4(35-x)=94$가 성립한다. 이를 계산하면 $x=23$을 얻는다. 따라서 학은 23마리 거북이는 12마리가 있다.

아낙이 강변에서 그릇을 씻고 있다. 관리가 물었다. “무슨 그릇이 그렇게 많은가?” 아낙이 대답하길, “두 사람이 밥을 함께 먹고, 세 사람이 술을 함께 마시고, 네 사람이 고기를 함께 담아 먹었거든요. 그래서 모두 65개의 그릇을 썼는데 손님이 몇 명이었는지 알 수 없어요.”

(풀이) 손님의 수를 x라 하자. 그러면 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=65$ 가 성립한다. 이를 계산하면 $x=60$을 얻는다. 따라서 손님은 60명 있었다.

이 문제는 중국의 수학자 정대위의 산법통종 제 12권에 나오는 것이다. 러시아 마코로츠키에서도 이와 비슷한 문제가 나오는데 양을 갈매기와 사람으로 바꾸었다.

갑이 한 무리의 양을 초원으로 몰아가고 있었고, 그 뒤로 을이 살찐 양 한 마리를 몰고 따라가고 있었다. 을이 갑에게 물었다. "사형, 양은 백 마리쯤 됩니까?" 갑이 대답하였다. "이 양떼에다 원래의 1배를 더하고 거기에 또 원래의 절반을 더해 주고 거기에 또 원래의 $\frac{1}{4}$을 더해주고 당신이 끌고 온 양까지 더해주어야 겨

우 100마리가 되오."갑이 몰고 가는 양은 몇 마리일까?

(풀이) 갑이 가지고 있는 양을 x라하자. 그러면 $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$ 성립한다. 이를 계산하면 $x=36$ 이다. 갑은 36마리의 양을 몰고 가고 있다.

(다) 그리스의 방정식 문제

다음은 그리스 시화집에 실려 있는 노새와 당나귀 문제이다.

노새와 당나귀가 터벅터벅 자루를 운반하고 있습니다. 너무도 짐이 무거워 당나귀가 한탄하고 있습니다. 노새가 당나귀에게 말했습니다. "연약한 소녀가 울듯이 어째서 너는 한탄하고 있니? 니가 진 짐의 한 자루만 내 등에다 옮겨 놓으면 내 짐은 너의 배가 되는 걸. 내 짐 한 자루를 네 등에다 옮기면 나와 너는 같은 수가 되는 거다." 수학을 아는 사람들이여! 어서 가르쳐 주세요. 노새와 당나귀의 짐이 몇 자루인지를!

(풀이) 노새의 짐을 당나귀에게 옮기면 노새와 당나귀의 짐의 수가 같아지므로 노새의 짐은 당나귀의 짐보다 2자루 더 많음을 알 수 있다. 따라서 당나귀의 짐의 수를 x라 두면 노새의 짐은 $x+2$이다. 당나귀의 짐 한자루를 노새에게 옮기면 노새의 짐은 당나귀의 짐의 2배가 되므로 이를 식으로 나타내면 $2(x-1)=(x+2)+1$이다. 이를 계산하면 $x=5$이다.

따라서 당나귀의 짐은 5자루, 노새의 짐은 7자루임을 알 수 있다.

라. 함수

(1) 함수의 역사[3][22]

(가) 함수 기호의 역사

함수의 용어는 function의 중국어 음영인 함수를 다시 한국어로 음역한 것으로, 기호로 f(x)로 나타낸다. 수학자 오일러가 도입한 기호 f(x)로 정착되기 전까지 다양한 기호가 사용되었다. 요한 베르누이는 문자 n 또는 그

리스 알파벳의 하나인 ξ(크사이)을 사용하였고 야곱 베르누이는 문자 p와 q를 사용했다. 클레로는 괄호가 없는 Πx, Φx 또는 Δx를 사용했다.

(나) 함수 개념의 역사

함수의 개념은 오랜 세월이 지나면서 계속 진화하였다. 처음에는 한 종류의 값이 변함에 따른 다른 종류의 값이 변화하는 관계였으나 오늘날에는 두 대상 사이의 관계를 설명하는 넓은 개념으로 변하였다.

함수 개념은 고대 바빌로니아 시대에서부터 찾을 수 있다. 고대 바빌로니아인들은 천체의 운동을 관찰하여 주기성을 발견하기 위해 함수의 수치를 표로 정리한 수표를 사용했다. 이 당시의 함수는 천체 운동을 기술하기 위한 수단이었을 뿐 함수가 무엇인지에 대한 의식은 없었다. 17세기에 이르러 함수는 물체의 운동을 곡선으로 나타내어 연구하는 가운데 시간과 거리와 같은 변량 사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 니콜 오렘은 물체의 운동을 관찰하여 어떤 기준이 되는 양에 대한 다른 양의 변화를 나타내기 위한 그래프를 나타내었고 이는 발달하여 갈릴레이에 의해 '두 변량 사이의 관계를 나타내는 것'이 함수라는 개념으로 발달하기 시작했다. 18세기에 라이프니츠와 베르누이 사이의 서신 교환에서 함수라는 용어가 처음 사용되었는데 이 때 함수의 개념은 '변하는 것과 어떤 상수가 결합된 크기'를 의미하는 것이었다. 이 시기에 오일러는 함수의 기호 f(x)를 도입하였으며 변수와 상수가 결합되어 있는 종류와 방식에 따라 유리함수, 무리함수, 초월함수ㅡ 대수함수 등으로 구분했다. 그 후 19세기에 디리클레는 '주어진 구간에서 x의 각 값에 y의 유일한 값이 대응할 때 y는 x의 함수'라고 정의했는데 이는 두 수의 집합 사이의 대응관계를 강조하는 것으로 오늘날의 함수 개념이라 볼 수 있다.

규칙적으로 변화하는 두 양 사이의 관계를 나타내기 위해 함수의 개념은 발전하게 되었고, 오랜 시간을 거쳐 오늘날의 개념으로 확장되게 되었다.

(2) 함수관련 수학자[3][26]

(가)데카르트

함수에서 좌표평면을 도입한 데카르트는 뛰어난 수학자요 물리학자요 천문학자였다.

그는 프랑스의 귀족 출신으로 부유하지는 않았으나 안락한 생활을 했다. 어릴 때부터 약했던 데카르트는 아침에 늦잠을 자는 습관을 갖고 있었는데 그는 후에 이를 회상하며 "조용하고 긴 아침의 명상은 자신의 철학과 수학의 참다운 원천이 되었다 말하였다.

데카르트는 처음에는 푸아티에 대학에서 법을 공부하여 학자가 되었으나 학교 공부에 회의를 느껴 군인이 되었고 이 때 천장의 파리의 위치를 어떻게 설명할 수 있을까 고민하다 좌표평면을 고안하게 되었다. 후에 20년간을 오스트리아에서 연구에 몰두하였으며 '방법서설'을 저술하였고 이로 인해 해석기하학이 탄생하게 되었다.

1641년 가을에는 오스트리아에 머물고 있던 여왕 엘리자베스의 스승으로 그녀를 가르쳤으며 그의 유명세는 점점 커졌다. 50세 되던 해 스웨덴의 여왕 크리스티나에게 철학을 가르치다 지병을 얻은 데카르트는 54살의 젊은 나이로 세상을 떠났다.

(나) 오일러

1707년 스위스에서 태어난 오일러는 처음에 아버지의 영향으로 신학을 공부했지만 후에 수학에 대한 재능을 깨닫고 수학을 공부하기 시작했다. 그는 19세에 당시 돛을 달고 바다를 항해하는 배가 없었음에도 배에 돛을 다는 최적 위치에 관한 해석을 하여 프랑스 학술원에서 상을 받을 정도로 똑똑한 사람이었다. 오일러의 연구는 수학, 천문학, 물리학 뿐 아니라, 의학, 식물학, 화학 등 많은 분야에 걸쳐있었으며 수학의 역사상 가장 많은 저술을 하였다. 그는 전 생애동안 530편의 책과 논문을 발간했고 후에 그

가 저술한 것들을 스위스에서 만들었는데 그 완성본은 사절판 73권에 이르는 분량이었다.

마. 통계[2]

통계학은 17세기에 독일, 영국, 프랑스에서 정치, 경제, 토지, 인구 등 국가의 중요한 사항을 수량적으로 기술하고 그 특징을 알아보고자 생겨났다. 영국은 해운국으로 크게 발전해 막대한 부를 얻었을 뿐 아니라 전 세계에 수많은 식민지와 통상국을 가지고 있어 전 세계의 물자가 런던항을 통해 들어왔다. 그런데 이 항구에서 시내로 운반되는 물자에 여러 종류의 전염병이 옮겨와 매년 많은 사람들이 전염병 때문에 사망하게 되었고 런던시는 각 교회에서 만든 자료를 모아 매년 사망표를 발표했다.

영국의 상인이자 수학자 그랜트(Graunt)는 한 장의 수표로는 아무것도 알 수 없지만 그 동안의 표를 모아 살펴보면 무언가 발견할 수 있을지도 모른다고 생각하였고 1662년 「사망표에 관한 자연적 및 지역적 관찰」에서 교회의 기록을 기초로 삼아 최초로 사망표를 작성하였다. 그는 태어난 아이의 성별, 결혼 등에 대해 기록하고 정리하여 비교 분석했는데 이 관찰의 결과로부터 사회현상의 규칙성을 알아내려고 했다. 그랜트의 연구를 발전시킨 사람은 페티(Petty)이다. 그는 인구 통계표를 만들어 세계의 인구가 3억 6,000만명임을 확인했으며 천문학자 핼리(Halley)는 인구통계표를 작성했고 이를 의거하여 보험회사에서는 보험료를 산출하기도 했다.

독일에서는 콘링(Conring)과 아켄월(Achenwell)이 정치, 경제, 토지, 인구 등의 국가적인 상황을 계통적으로 기술하고, 한 나라가 어떤 국토와 어떤 민족으로 구성되어 있으며 얼마만큼의 부를 가지고 있는가를 정확히 파악하려 하였다.

18세기에는 유럽 각국에서 통계학이 발달하였는데 통계학을 과학적으로 체계화시킨 사람은 벨기에의 케틀레(Quetelet)로 확률의 이론을 사회현상의 통계적 연구에 적용시켰다. 20세기에는 대상이 되는 모든 자료를 조사하는 것이 아니라 일정한 양의 자료만 조사하여 전체를 추측하는 추측 통계학이 연구되었다.

바. 기본도형과 작도

(1) 눈금없는 자로 작도하는 이유는?[18]

아테네를 중심으로 한 옛 그리스 도시국가들은 민주주의가 시작된 곳이다. 하지만 당시의 민주주의는 노예를 제외한 소수를 위한 민주주의였기에 당시 시민들은 노예들에게 생산 활동과 자녀의 교육까지 모두 맡긴 채 즐겁게 생활을 즐겼다. 그리스 시민들은 노동은 노예들이 하는 일이라 생각하여 노동을 멸시했다. 따라서 수학 중에서도 길이나 넓이를 재는 측량술이나 실용적인 계산은 노예들이나 하는 천한 기술이라 생각했다. 따라서 시민들은 그 지식 자체를 가만히 앉아서 탐구하는 일을 즐겼으며 제한된 조건 내에서 결과에 이르는 멋있는 놀이에 가치를 두게 되었다.

도형을 작도하는데 눈금 없는 자를 사용해야 한다는 조건도 이런 발상에서 나오게 되었다. 당시 시민들은 작도를 할 때 길이를 나타내는 눈금을 읽는 것은 노예들이 하는 계산술과 관계있는 일로 간주했기 때문이다.

이렇듯 작도는 고대 그리스인들의 노동이 아닌 하나의 놀이 문화로서 그리스 문화에 큰 영향을 주었다. 그리스의 웅장하고 아름다운 신전도 역시 자와 컴퍼스란 간단한 도구로 설계하여 세운 것이다.

(2) 기하학의 역사[5]

이집트 문명은 나일강 유역에서 일어났다. 나일강은 아프리카 내부에서 시작하여 사막을 누비며 흐르는데 해마다 상류지방의 눈이 녹으면 물이 하류일대에 범람하게 된다. 이런 나일강의 정기적인 범람은 상류지방의 비옥한 흙을 가져다주었고 이는 농사에 큰 도움이 되었다. 하지만 이런 장점도 있었지만 강의 범람으로 인해 그들의 논의 경계선을 지워 버렸고 그들은 홍수가 지난 후 논을 다시 구분할 필요가 있었다. 이런 토지의 경계를 재조정하기 위해 측량술이 발전하게 되었고 오늘날의 기하학이 탄생하게 되었다. 기하학을 의미하는 Geometry는 토지의 geo와 측량한다는 뜻의 metry에서 유래된 것이다.

사. 도형의 성질

(1) 원주율(π)[19]

원은 그 크기에 상관없이 둘레를 그 원의 지름으로 나누면 항상 일정한 값을 갖는다. 우리는 이 값을 원주율이라 부르며 π 쓴다. 지금은 무한한 수라고 알려진 원주율 π의 값은 어떻게 변화되었을까?

원주율의 가장 오래된 기록은 1650년 이집트 아메스 파피루스라는 문서에서 발견할 수 있다. 여기서 원주율은 “지름의 1/9을 잘라내고 나머지로 정사각형을 만들 때 정사각형의 넓이는 원의 넓이와 같아진다.”고 적혀있으며 이 값을 계산하면 $(\frac{4}{3})^4$으로 약 3.1605가 된다.

기원전 200년경 그리스의 아르키메데스는 원의 둘레는 원에 내접하는 다각형보다는 길고 원에 외접하는 다각형보다는 짧다는 사실을 이용하여 원주율의 값을 계산했다. 먼저 원에 내접하는 정6각형과 외접하는 정6각형을 그렸고 이로부터 변의 개수를 두 배씩 늘려 정12각형, 정 24각형, 정 48각

형을 그리고 마지막으로 정 96각형을 그려간다. 그는 원의 둘레가 내접하는 정 96각형의 둘레의 길이보다는 크고 외접하는 정96각형의 둘레의 길이보다 작다는 사실로부터 원주율의 값이 $\frac{223}{71}$과 $\frac{22}{7}$사이에 있음을 알아냈는데 이 값은 소수점아래 둘째짜리까지 정확히 구해낸 것이다.

중국과 인도에서는 실용적인 이유 때문에 원주율의 값을 계산했다. 중국의 수학자 유희는 192개의 변을 가진 다각형을 이용해 원주율을 계산했고 조충지는 변이 24,576개인 다각형을 만들어 계산했는데 이는 현재 얻어진 값과 비교하여 8백만분의 1퍼센트의 오차에 불과하다.

원주율의 가장 정확한 값은 2009년 프랑스에서 슈퍼컴퓨터로 2조 7천억자리까지 계산되었다. 현재 원주율은 슈퍼컴퓨터를 개발할 때 성능을 평가하는 척도로 사용되고 있다.

(2)정다면체는 다섯 개?[17]

모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져 있고 면과 면이 만나는 모서리의 각의 크기가 모두 같은 3차원 입체를 정다각형이라 한다.

고대 이집트 사람들은 정사면체, 정육면체, 정팔면체인 세 종류의 정다면체를 알고 있었고 이를 발전시킨 피타고라스학파는 정사면체와 정육면체 정팔면체 외의 정십이면체와 정이십면체가 존재한다는 사실을 발견하였으며 이 정다면체는 이 다섯 개 밖에 없음을 증명하였다. 피타고라스학파는 이를 다음과 같은 방법으로 증명하였다.

먼저 정삼각형으로 이루어진 정다면체를 생각해보자.

정삼각형을 모아서 입체를 만들려면 최소한 3개의 정삼각형이 필요하다. 정삼각형의 한 꼭짓점에 3개의 정삼각형을 붙이면 밑면도 역시 정삼각형이 되므로 정삼각형 4개로 이루어진 정사면체를 얻게 된다.

다음으로 한 꼭짓점에 4개의 정삼각형을 붙이면 피라미드 모양의 입체를 얻을 수 있고 똑같은 모형을 뒤집어 아래쪽에 붙이면 정삼각형 8개로 이루어진 정팔면체를 얻게 된다. 같은 방법으로 한 꼭짓점에 5개의 정삼각형을 붙이면 정삼각형 20개로 이루어진 다이아몬드형의 정십이면체를 얻는다.

마찬가지 방법으로 한 꼭짓점에 정삼각형 6개를 붙여보자. 정삼각형의 한 내각은 60° 이므로 정삼각형 6개를 붙이면 360° 가 되어 평면이 나오게 되어 입체가 만들어지지 않는다. 그러므로 정삼각형으로 만들 수 있는 정다면체는 정사면체, 정팔면체, 정이십면체 세 가지 뿐임을 알 수 있다.

두 번째로 정사각형으로 이루어진 정다면체를 생각하자.

정사각형을 모아서 입체를 만들기 위해서는 최소한 3개의 정사각형이 필요 하며 한 꼭짓점에 세 개의 정사각형을 모으면 정사면체를 얻게 된다.

마찬가지 방법으로 한 꼭짓점에 정사각형 4개를 모아보자. 정사각형 한 내각은 90° 가 되어 평면이 나오게 되어 입체가 만들어지지 않는다. 그러므로 정사각형으로 만들 수 있는 정다면체는 정육면체 한 가지 뿐이다.

세 번째로 정오각형으로 이루어진 정다면체를 생각하자. 한 꼭짓점에 정오각형을 세 개를 모으면 정십이면체를 얻게 된다.

마찬가지 방법으로 정오각형 4개를 붙여보자. 정오각형의 한 내각은 108° 이므로 432° 가 되어 볼록한 입체가 되지 않는다. 그러므로 정오각형으로 이루어진 정다면체는 정육면체 한 가지 뿐임을 알 수 있다.

정육각형은 한 내각이 120° 이므로 세 개만 붙여도 360° 가 되어 평면이 되므로 입체가 되지 않는다. 마찬가지 방법으로 생각하면 정칠각형, 정팔각형 등으로 이루어진 정다면체가 존재하지 않는다는 걸 알 수 있다.

따라서 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 5가지가 존재한다.

그리스 사람들은 불, 흙, 공기, 물 네 가지의 원소로 우주가 이루어져 있

다고 믿었는데, 이 원소들은 모두 정다면체의 모양을 갖고 있다고 믿었다. 불은 정사면체, 흙은 정육면체, 공기는 정팔면체, 물은 정이십면체이며 이 네 원소는 모두 정십이면체인 우주 속에 있다고 생각했다.

(3) 아르키메데스의 일화[17]

아르키메데스는 시칠리아섬의 시라쿠사 사람으로 수학, 물리학, 기계학, 수력학 등 여러 분야에 능통한 수학자이자 과학자로 알려져 있다. 그는 로마와 시라쿠사가 전쟁을 하는 동안 많은 기발한 무기를 개발하여 국가에 기여했다. 반사경을 이용하여 태양광선을 반사시켜 로마의 군함을 불태웠고 돌을 날리는 기계 등을 만들어 적을 크게 물리쳤다. 그럼에도 불구하고 시라쿠사가 함락되고 말았는데, 이 때 로마의 장군 마르케루스는 그의 재능을 귀하게 여겨 아르키메데스를 살려두도록 부하들에게 명령했다.

시라쿠사가 함락되어 로마군이 집안에 들어왔을 때도 아르키메데스는 모래판위에 원을 그려 연구하고 있었는데, 병사 중 한사람이 원을 밟자 아르키메데스는 밟지 말라고 고함을 쳤다. 병사는 그가 대학자임을 몰랐고 언어가 달랐기에 그 자리에서 아르키메데스를 찔러 죽였다. 최후의 순간까지도 원을 그려놓고 연구하던 아르키메데스를 애석하게 생각한 로마의 장군 마르케루스는 그를 위해 묘비를 세웠는데 이 묘비에는 아르키메데스가 연구한 원기둥에 구가 내접한 모양이 새겨져 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

수학의 분야는 간단한 계산부터 시작해서 복잡한 과학기술까지 우리의 삶에 깊게 관여하고 있으며 점점 확대되고 있다. 복잡하고 전문화되어가는 미래 사회에서 사회 구성원에게는 창의적사고 능력, 문제 해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등이 요구되는데 이는 수학적 추론, 수학적 문제해결, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수·학습을 통하여 증진시킬 수 있다. 이렇듯 수학교육의 중요성은 날로 커지고 있으나 학생들의 수학과목에 대한 인식은 입시를 위한 필수과목, 계산을 하여 답을 내는 문제풀이 과목일 뿐이며 재미없는 과목 일 뿐이다. 따라서 본 연구에서는 학생들의 수학에 대한 흥미를 유발하고 동기를 부여하기 위한 방안으로 수학사를 활용한 수업에 대해 고찰해 보았다.

수학사를 활용한 수업은 학생들에게 수학에 대한 흥미를 유발시킬 뿐 아니라 수학에 대한 긍정적인 태도를 함양시킨다. 수학이 오랫동안 수학자들의 고뇌와 시행착오를 통해 오랜 시간을 걸쳐 만들어진 학문이라는 사실은 학생들이 느끼는 수학학습의 어려움을 이해시킬 수 있으며 수학의 역사적 가치를 느끼게 한다. 또한 예전 수학자들의 풀이방법과 증명과정을 보며 문제를 해결하는 방법에 있어서 다양한 접근 방법을 제시해줄 수 있다.

이런 수학사의 유용성을 바탕으로 수학교과서의 수학사 내용을 분석해보았다. 교과서의 수학사 내용은 단원에 관련된 수학자의 업적과 사진을 여백에 제시하는 경우가 대부분이었으며 학생들이 그 내용을 읽고 흥미를 느끼기에는 부족해 보였다. 또한 수학의 역사적 흐름을 알게 해주기 위해 학습내용에 관련 있는 수학자들을 연대표로 나열한 경우도 있었지만 단원과

직접 관련이 없는 수학자까지 소개하여 학생들의 학습에 도움을 주기에는 부족해보였다. 물론 읽기 자료로 제시한 수학사 내용도 있었지만 단원의 마지막 부분에 위치해있어서 교사가 언급하지 않으면 지나치기 쉬웠다. 따라서 교과서의 수학사 내용을 보완하기 위해 학생들의 흥미를 유발하고 학습에 도움이 될 수 있는 수학사 내용을 단원별로 제시하였다.

마지막으로 본 연구를 바탕으로 다음과 같이 제언한다.

첫째 교과서에 수록된 수학사 자료의 개선이 필요하다. 단원에 관련된 수학자의 업적을 간략하게 소개하는 것보다 좌표평면을 고안한 데카르트의 일화나 미지수의 기호로 x를 사용하게 된 배경 등 관련된 역사적 배경이나 일화 등을 소개하는 것이 학생들의 흥미를 유발할 수 있다. 또한 과거 풀이방법이나 증명, 수학적 개념이 형성된 과정 등을 수록하는 것은 학생들이 처음 접하는 개념을 학습하는데 도움을 줄 수 있다.

둘째 수학사를 활용하여 수업을 하기 위해서는 교사는 수학사에 대한 폭넓은 지식이 필요하다. 교사는 학생들의 학습에 필요한 수학사 자료를 선별하여 소개하고 흥미를 유발할 수 있도록 다양한 방면으로 제시해야한다. 단순히 단원에 관련된 수학사 자료를 읽기자료로 제시하는 것이 아니라 활동지나 탐구활동 등 직접 수학사를 접목시켜 학습에 도움이 되도록 해야한다. 또한 학생들이 직접 자료를 찾아보거나 수학사 도서를 읽는 과제를 내는 등 직접 참여할 수 있는 방안을 마련해야한다.

참고문헌

[1] 강신덕 외 4인(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)교학사

[2] 고상숙, 고호경(2006), 청소년을 위한 서양수학사, 두리미디어

[3] 김남희 외 5인(2006), 수학교육과정과 교재연구, 경문사

[4] 김용운, 김용국(2007), 재미있는 수학여행1 수의 세계, 김영사

[5] 김용운, 김용국(2007), 재미있는 수학여행3 기하의 세계, 김영사

[6] 김원경 외 6인(2009), 중학교 수학1 교과서, 비유와 상징

[7] 김홍종 외 3인(2009), 중학교 수학1 교과서, 성지출판(주)

[8] 박경미(2009), 수학비타민 플러스, 김영사

[9] 박영훈(2007), 멜론수학, 문예춘추

[10] 백석윤(1990), 수학사와 수학교육과정, 과학교육연구, vol.16, 진주교육대학교 과학교육연구소

[11] 신항균 외 3인(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)지학사

[12] 우정호(1998), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부

[13] 유세진(피터 벤틀리 지음,2008), 숫자 세상의 문을 여는 코드, 성균관대학교 출판부

[14] 유희찬 외 7인(2009), 중학교 수학1 교과서, 대한교과서(주)

[15] 육인선 외 2인(2007), 수학은 아름다워1, 동녘

[16] 윤재한 외 7인(2009), 중학교 수학1 교과서, 더텍스트

[17] 이만근, 오은영(1999), 흥미있는 수학 이야기, 수학사랑

[18] 이충근(2007), 수학사를 활용한 중학교 수학교과에 대한 연구, 충남대학교 석사학위논문

[19] 정갑수(2010), 세상을 움직이는 수학, 다른

[20] 정광식 외 3인(2009), 중학교 수학1 교과서, 대교

[21] 정순영 외 5인(2009), 중학교 수학1 교과서, (주)두산

[22] 정연우(2011), 수학사를 활용한 수업지도 방안 : 중학교 1학년 함수영역을 중심으로, 계명대학교 석사학위논문

[23] 정창현 외 4인(2009), 중학교 수학1 교과서, 대교

[24] 최용준 외 5인(2009), 중학교 수학1 교과서, 천재문화

[25] 황미숙(2003), 수학사적 내용의 도입을 통한 교수•학습 지도 자료 연구 : 중학교 1학년 수학교육과정을 중심으로, 중앙대학교 석사학위논문

[26] 허민(1997), 수학사를 활용한 수학교육, 기초과학연구소논문집, Vol.26, 광운대학교 기초과학연구소

[27] 현종익(2005), 교사를 위한 수학사, 교우사

[28] 현종익(2011), 세계수학사, 교우사

[29] 황선욱(샌더슨 스미스 지음,2002), 수학사 가볍게 읽기, 한승