교 육 학 석 사 논 문

원을 이용한 삼각함수 지도방법에 관한 연구

2013년 8월

부경대학교교육대학원

수학교육전공

최형민

교 육 학 석 사 논 문

원을 이용한 삼각함수 지도방법에 관한 연구

지도교수 이 규 명

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2013년 8월

부경대학교교육대학원

수학교육전공

최형민

최형민의 교육학석사 학위논문을

인준함.

2013년 8월 23일

주 심 이학박사 송 현 종 (인)

위 원 이학박사 신 준 용 (인)

위 원 이학박사 이 규 명 (인)

목 차

그 림 목 차

A STUDY ON TEACHING METHOD OF TRIGONOMETRIC FUCTION
BY USING CIRCLES

Hyeong min Choi

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

This thesis is designed to study on teaching method of trigonometric fuction by using circles (especially unit circle). For Problems using trigonometric functions in high school courses - especially problems regarding trigonometric equation and trigonometric inequality - graphs are generally used as problem solving tasks. However, these problem solving tasks can be replaced by solutions using circles. By using circles, students can understand trigonometric function more intuitively and fundamentally. In chapter III, teaching methods in trigonometric function units in 2007 Revised Curriculum『Math』and『Math II』 have been analyzed. In chapter IV, new problem solving tasks using circles have been studied and suggested for problems usually solved by using graphs and algebraic methods in those units in texts『Math』and『Math II』.

Ⅰ. 서론

1. 연구 목적

수학이라는 교과의 목표는 기본적으로는 수학적 원리, 법칙을 이해하는 것이지만 궁극적으로는 이를 이용하여 논리적 사고를 해낼 수 있는 수학적 사고 능력을 키우는 데 있다 하겠다. 현대 사회에서는 계산 훈련이나 단순한 문제 해결 능력보다 앞서 언급한 수학적 사고 능력이 더욱 필요한 실정이다. 이러한 추세는 교육에도 반영되어 왔는데, 이를 잘 보여준 것이 1997년에 고시된 7차 교육 과정이라고 생각한다. 엄밀성이나 문제 해결 능력을 강조했던 이전 교육 과정과 달리 1997년 말에 고시된 7차 교육 과정에서는 이른바 '수학적 힘'을 강조하였다[1]. 여기서 말하는 수학적 힘은 창의적 사고력, 논리적 사고력, 비판적 사고력, 문제 해결 능력, 추론 능력, 의사소통 능력, 수학에 대한 자신감과 긍정적인 태도, 수학과 인접 학문과의 관련성 및 수학의 유용성 인식 등을 포함하는 포괄적인 개념이다[2]. 그러므로 7차 교육 과정은 단순한 반복과 암기에서 벗어난 조금 더 고등한 사고 능력을 목표로 하는 교육 과정이라 할 수 있다.

사실 근 50년간 고등학교에서 배우는 수학 단원들의 내용 자체는 거의 변한 것이 없다. 19세기에 개발된 집합론이 그나마 최근의 수학이라 할 수 있고 그 외에는 모두 개발된 지 몇백 년 이상이 지난 이론들이며 실제로 수학능력시험 문제에 이집트 유물에서 발굴되었다는 문제라고 소개하며 출

1) 교육과학기술부(2007),「고등학교 수학 교육과정 해설」, p.9.
2) 교육과학기술부(1998),「고등학교 수학 교육과정 해설」, p.1.

제된 수열 문제도 있었다. 수학 그 자체는 변함이 없는데 시대에 따라 교육목표는 계속 바뀌고 있다. 교사는 이에 어떻게 대처해야 하는가? 교수학습법에 답이 있을 것이다. 단순 암기가 아닌 수학적 사고, 논리적 사고로 문제에 접근하고 해결하며 비단 그 문제뿐 아니라 유사한 다른 문제들에도 적용할 수 있는 능력을 개발하는 수업이 목표가 되어야 할 것이다.

현 교육목표에 부합하는 수업의 예시로 원에 의한 삼각함수 지도가 적합하다고 판단되었고, 그래서 원에 의한 삼각함수 설명방법과 원으로 삼각함수 문제를 풀이하는 방법에 대한 연구를 하였다. 입시학원에서 10년 이상 일하면서 고등학생들을 관찰한 결과 삼각함수의 기하적 의미를 제대로 이해하지 못하고 삼각비 정도의 이해에서 그치는 경우가 절반 이상이었는데 이는 삼각방정식과 부등식 등의 단원에서 원보다는 그래프로 삼각함수의 값을 계산하는 풀이 방법에서 연유했다고 본다-실제로 대다수의 학생은 원을 이용하여 삼각함수 문제를 풀지 않았었다-. 하지만 그래프의 성질 자체를 묻는 문제가 아니라면 그래프를 도구 삼아 풀 수 있는 문제를 원으로도 풀이할 수 있고 장점 역시 가지고 있다고 생각한다. 이는 다음과 같다.

첫째, 삼각함수의 성질들을 본질적으로 이해할 수 있다. 원과 좌표라는 기하학적 이해를 통해 순환, 대칭, 회전등의 성질들로 삼각함수의 모든 성질을 이해할 수 있다.

둘째, 직관적으로 삼각함수를 이해하게 해준다. 삼각함수를 원으로 이해하지 못하면 결국 $\sin x$의 의미를 삼각비 이상으로 알기 쉽지 않다. $(\cos\theta, \sin\theta)$가 좌표평면 위에서 일반각 θ가 나타내는 동경과 단위원과의 점과의 교점이라는 것과 $\tan\theta$가 동경의 기울기라는 것을 이해하면 어떠한 삼각함수나 함숫값을 보았을 때 직관적으로 그 크기를 이해하고 평면상에 표현할 수 있다.

셋째, 두 번째 이유 덕분에 실제 문제 풀이에도 도움이 된다. 그래프보다 직관적인 이해를 통해 단위원으로 표현하는 게 더 손쉽고 다른 문제에 적용하기에도 용이한 경우가 많다. 삼각함수를 심층적으로 다루어야 하는 『수Ⅱ』선택 학생에게는 더욱 그렇다. 또한, 원으로 접근하지 않고서는 사실상 풀기 힘든 문제들도 존재한다.

넷째, 연계성이다. 삼각함수에 관한 모든 설명을 원으로 배웠기에 문제 역시 원으로 푼다면 연계성을 강화시킬 수 있다.

다섯째, 앞서 언급한 '수학적 힘' 을 키운다는 교육 목표에 부합한 방법이라고 생각된다. 원의 좌표 혹은 현의 길이에서 출발하여 삼각함수의 모든 성질을 이해할 수 있고 이를 기하적 문제는 물론 대수적 문제에까지 적용할 수 있다. 삼각함수 정의 하나로 이해, 문제 해결, 추론 능력까지 배양할 수 있다는 것이다. 이는 무척 큰 장점이다.

2. 연구 방법

우선 현재의 교과서(2007년 개정 교육 과정) 『수학』,『수학 Ⅱ』중 삼각함수 부분을 분석하였다(Ⅲ장). 교과서를 살펴본 결과, 대부분의 교과서가 방정식, 부등식 도입문제에는 그래프와 단위원 두 가지 방법으로 문제를 풀이했다. 하지만 그다음부터는 모든 방정식, 부등식 등의 문제가 삼각함수의 그래프로 풀이되어 있었다. 그렇기에 많은 학생들이 그래프로 문제를 풀었다고 생각된다.

교육부의 수학 교육과정 해설서에 따르면 삼각함수의 방정식과 부등식을 그래프'등'의 풀이로 풀 수 있게 하라고 명시되어있는데 여기서 언급한 그

래프 외의 다른 방법이 바로 원에 의한 풀이라고 보인다. 하지만 교과서에도 시중문제집에도 삼각함수의 그래프로 문제를 푸는 경우가 대부분이기 때문에 일반적으로 원으로 풀이하는 방법을 접하기 쉽지 않다. 현 교과서의 풀이 방식에는 타당한 이유가 있겠지만 원을 이용한 풀이라는 또 다른 시도 역시 장점을 가진다고 생각되기에 교과서 분석과 함께, 일반적으로 그래프를 이용하는 문제와 삼각함수를 이용한 대수적 문제 등을 원을 이용한 풀이를 연구하여 제시하였다(Ⅳ장).

3. 연구의 제한점

본 연구에서 전제가 되었던 내용들, 좀 더 수학적 성취도가 떨어지는 학생들이 그래프에 의한 풀이를 비교적 더 쉽게 받아들일 것이라는 부분이나 실제로 원을 이용한 풀이로 수업받은 학생들의 삼각함수에 대한 이해도의 변화가 있으리라는 부분 등은 검증되지 않은 추론들이다. 그렇기에 좀 더 엄밀하고 설득력 있는 연구결과를 위해 이에 대해 실제로 학생들을 대상으로 조사하여 추론의 검증이 필요하다고 생각된다.

Ⅱ. 이론적 배경

이 장에는 본 연구에 필요하다고 판단되는 내용들을 수학 교과 해설서와 수학 교사용 지도서 등에서 선별, 정리하였고 출처는 각 절 또는 항의 끝에 명시하였다. 지도 목표나 계통도, 삼각함수의 역사 등등은 이 연구에 필수적으로 선행연구 되어야 할 부분이다. 또한, 이 내용들은 비단 본 연구나 교사의 배경지식으로 필요할 뿐 아니라 수업 그 자체에도 도움이 될 수 있다고 본다. 가령 닮음으로 삼각함수의 역사를 소개하는 내용은 수업의 머리말로도 적합하다고 생각된다.

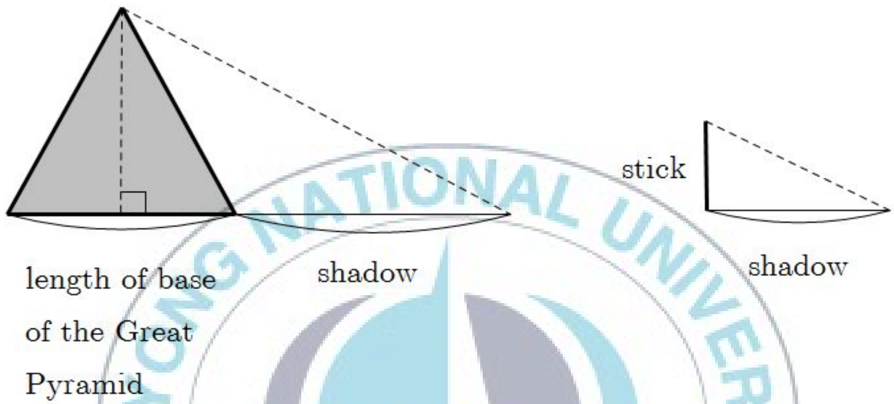
1. 삼각함수의 도입

가. 삼각함수의 역사

삼각법은 삼각형의 6요소인 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이의 관계를 연구하는 학문으로 영어로는 Trigometric이라고 하는데 이 말은 그리스어의 trigon(삼각형)이라는 단어와 metria(측량)라는 단어가 합성되어 만들어진 것이다. 이러한 사실에서도 알 수 있듯이 삼각법은 측량과 깊은 관련이 있으며 고대로부터 토지의 측량, 천문학과 같은 실용적인 필요에 의하여 발달해 왔다.

삼각법의 기원은 고대 이집트 시대로 거슬러 올라간다. 삼각법의 최초 활용은 이집트의 상형문자에서 발견되는 린트 파피루스에서 찾을 수 있다.

여기에서 피라미드의 건설과 관련하여 사각뿔의 네 빗면의 기울기를 일정하게 유지하기 위해 직각삼각형과 그 사잇각이 이루는 비례에 대해 삼각비를 활용하여 접근하고 있음을 볼 수 있다. 또한 피라미드의 크기를 측정하기 위하여 <그림 Ⅱ-1>과 같이 그림자를 한 변으로 하는 피라미드와 막대기에 의한 삼각형의 닮음을 이용하였다.

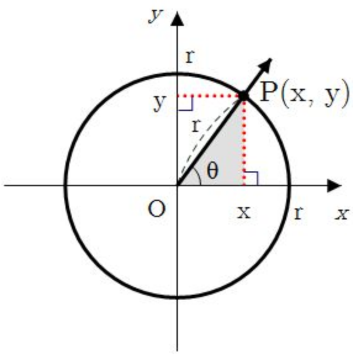


<그림 Ⅱ-1> 피라미드와 막대기에 의한 삼각형의 닮음

이러한 삼각법은 더욱 발전하여 고대 이집트에서 피라미드의 건설, 경작지 정리 등 토목공사를 비롯하여 천체의 관측, 항해술 등에 이용되었다.[17]

나. 삼각함수의 기본 이론

좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r\,(r<0)$인 원 위의 점 $P(x,y)\,(x\neq 0,\, y\neq 0)$에 대하여<그림 Ⅱ-2> 반직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.



<그림 Ⅱ-2> 원과 각이 θ인 동경 OP

여기에서 여섯 개의 비의 값

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x},$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x},\ \mathrm{cosec}\theta = \frac{r}{y},\ \cot\theta = \frac{x}{y}$$

를 θ에 대한 삼각함수(trigonometric function)라고 한다. [21]

2. 삼각함수의 지도 의의

자연 현상이나 사회 현상 가운데는 주기적인 현상이 매우 많다. 특히 소리, 빛, 교류 전류, 원자 내의 운동등과 같은 현상은 삼각함수로 표현되어 연구되고 있다. 삼각함수는 과거에는 도형의 넓이 구하기, 천체의 위치 계산과 같은 측정에 주로 활용되었으나 근대에는 과학 기술 발전에 중추적인

역할을 담당하였다. 특히, 최근에는 현대 생활에 가장 밀접한 전기, 전자, 통신 공학의 발전에 중요한 역할을 담당하고 있다. 여러 가지 삼각함수들 사이의 관계는 삼각함수의 미분과 적분의 계산에도 반드시 필요한 것이며 복소수의 표현 및 그들 사이의 사칙 계산 이해에도 도움이 된다. [2]

3. 삼각함수의 지도 계통

선행 학습 내용
[중 3] · 피타고라스의 정리 · 삼각비 [고 1] ·함수의 뜻과 그래프

→

고 1 『수학』
· 일반각과 호도법 · 삼각함수 · 삼각함수의 성질 · 삼각함수의 그래프 · 삼각방정식과 삼각부등식 · 사인법칙과 코사인법칙 · 삼각형의 넓이

→ (선택)

고 2 『수학Ⅱ』
· 삼각함수의 덧셈정리 · 삼각함수의 여러 가지 공식 · 삼각방정식

→

학습할 내용
[수학 Ⅱ] · 함수의 극한과 연속 · 여러 가지 함수의 미분법 [적분과 통계] · 부정적분 · 정적분 [기하와 벡터] · 일차변환과 행렬

<그림 Ⅱ-3> 삼각함수의 지도 계통도 [21], [23]

4. 삼각함수의 지도 목표와 유의점

가. 『수학』에서의 삼각함수 지도 목표

(1) 일반각과 호도법의 뜻을 안다.

① 일반각의 뜻을 알게 한다.

시초선을 기준으로 동경이 회전한 양과 방향으로 각의 크기를 나타낼 수 있음을 알게 한다. 일반각은 $360^\circ \times n + \alpha^\circ$로 나타낼 수 있음을 알게 한다. 또한, 일반각으로 나타내어진 각이 좌표평면에서 몇 사분면의 각인지 말할 수 있게 한다.

② 호도법의 뜻을 알고, 각의 크기를 호도법으로 나타나게 한다.

육십분법 이외에도 각의 크기를 재는 방법이 있음을 알게 한다. 반지름과 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각을 1라디안으로 정의하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 측정하는 방법이 호도법임을 알게 한다. 라디안인 관계를 이용하여 육십분법을 호도법으로, 호도법을 육십분법으로 나타낼 수 있게 한다.

(2) 삼각함수의 뜻을 안다.

삼각비를 일반각으로 확장하여 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수로 정의하고, 이를 삼각함수라고 함을 알게 한다. 동경의 위치가 몇 사분면에 있는가에 따라 삼각함수 값의 부호를 결정할 수 있음을 알게 한다.

(3) 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 $P(x, y)$라 할 때 삼각함수의 정의에 의하여 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$, $y=\tan\theta$의 그래프를 그리고, 삼각함수는 주기함수임을 이해하게 한다. 각 함수의 정의역과 치역, 대칭성, 주기 등의 특징을 비교하게 한다. 삼각함수 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$, $y=\tan\theta$를 x축, y축의 방향으로 평행이동한 함수의 그래프도 그릴 수 있게 한다.

(4) 삼각함수의 성질을 이해한다.

① 삼각함수의 여러 가지 성질과 그 관계를 이해하게 한다.

단위원을 이용하여 삼각함수 사이의 관계

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

등을 이해하게 한다. 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

② $-\theta, \pi\pm\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수를 θ의 삼각함수로 고칠 수 있게 한다.

단위원이나 그래프를 이용하여 $-\theta, \pi\pm\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수를 θ의 삼각함수로 나타낼 수 있음을 이해하고, 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

(5) 간단한 삼각방정식과 삼각부등식을 풀 수 있다.

삼각함수에서 각의 크기를 미지수로 하는 방정식과 부등식을 각각 삼각방정식과 삼각부등식이라 함을 알게 한다. 삼각함수의 그래프 등을 이용하여 삼각방정식과 삼각부등식의 해를 구할 수 있게 한다. 이때, 삼각방정식과 삼각부등식에서 일반해는 다루지 않고, $0\leq\theta<2\pi$의 범위에서만 해를

구하게 한다.

(6) 사인법칙과 코사인법칙을 이해한다.

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 R일 때, 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

이 성립함을 이해하게 한다. 또한, 변과 각 사이의 관계인 코사인 법칙

$$a=b\cos C+c\cos B,\ \ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

등이 성립함을 이해하게 한다. 이를 사용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

(7) 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

사인법칙과 코사인법칙 등을 활용하여 여러 가지 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

나. 『수학』에서의 삼각함수 용어와 기호

대응, 일대일 대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리함수, 분수함수, 점근선, 무리함수, 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 삼각함수, 주기, 주기함수, 삼각방정식, 삼각부등식, 사인법칙, 코사인법칙, $f:X\rightarrow Y$, $g\circ f$, $(g\circ f)(x)$, f^{-1}, $y=f^{-1}(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

다. 『수학』에서의 삼각함수 교수·학습 상의 유의점

(1) 합성함수와 역함수는 이차 이하의 다항함수, 유리함수, 무리함수를 통해 이해한다.

(2) 삼각방정식과 삼각부등식의 일반해는 다루지 않는다.

라. 『수학Ⅱ』에서의 삼각함수 지도 목표

(1) 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

① 삼각함수 $\sec x$, $\mathrm{cosec}\, x$, $\cot x$의 뜻을 알게 한다.

삼각함수 $\sec x$, $\mathrm{cosec}\, x$, $\cot x$의 뜻을 알고, 여러 가지 삼각함수들 사이의 관계를 이해할 수 있게 한다.

② 삼각함수의 덧셈정리를 이해하게 한다.

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면 삼각비의 표를 이용하지 않고도 그 삼각비를 구할 수 있는 각이 많이 있음을 이해하게 한다. 또한, 삼각함수의 덧셈정리를 유도하는 과정을 이해하게 한다.

③ 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 여러 가지 문제를 풀 수 있게 한다.

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 삼각함수를 합성한 삼각함수의 주기, 최댓값, 최솟값을 구할 수 있게 한다. 이때, 시각적으로 이해하는 데 도움이 되도록 컴퓨터를 활용할 수도 있다.

(2) 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식을 이해한다.

① 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식을 이해하게 한다.

덧셈정리에서 배각의 공식, 배각의 공식에서 반각의 공식을 유도하게 하고, 공식을 써서 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

② 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로, 곱을 합 또는 차로 고치는 공식을 이해하게 한다.

덧셈정리에서 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로, 곱을 합 또는 차로 고치는 공식의 유도 과정을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

(3) 간단한 삼각방정식을 풀 수 있다.

간단한 소재를 택하여 삼각방정식의 특수해와 일반해의 뜻을 알게 하고, 삼각방정식의 일반해를 구할 수 있게 한다. 이때, 일반해는 특수해를 곧바로 알 수 있는 경우에 한하여 다루고, 비교적 복잡한 과정을 통하여 특수해를 알 수 있는 삼각방정식의 경우에는 주어진 구간 안에서 해를 구하는 경우에만 다룬다. 일반해는 같은 결과에 대해서도 표현 방법에서 차이가 있을 수 도 있음에 유의하여 지도한다.

마. 『수학Ⅱ』에서의 삼각함수 용어와 기호

덧셈정리, 배각의 공식, 반각의 공식, 일반해, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$

바. 『수학Ⅱ』에서의 삼각함수 교수·학습 상의 유의점

(1) 삼각함수의 여러 가지 공식 사이의 관계를 이해하게 하고, 이를 활용하게 하는 데 중점을 둔다.

(2) 삼각방정식은 주어진 구간 안에서 해를 구하는 경우만 다룬다.

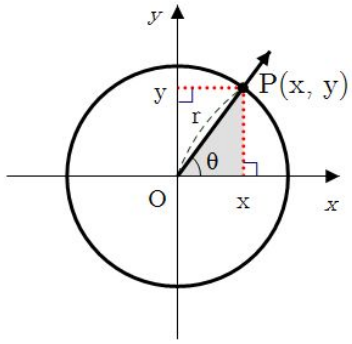
Ⅲ. 교과서 연구

국민 공통 기본 교육과정『수학』에 나타난 원에 의한 삼각함수 지도를 연구하기 위해 교학사, 금성출판사, 더텍스트, 두산동아, 미래엔, 좋은책 신사고, 중앙교육진흥연구소, 지학사, 천재교육 9개 출판사의 검·인정 교과서를 분석하였다. 또한 선택 중심 교육과정 『수학Ⅱ』에 나타난 원에 의한 삼각함수 지도를 연구하기 위해 교학사, 금성출판사, 두산동아, 미래엔, 좋은책 신사고, 지학사, 천재교육 7개 교과서를 살펴보았다. 원과 좌표로 설명되어있는 주요 내용을 정리하고 교과서와 똑같은 그림을 그려서 첨부하였다. 같은 내용이지만 순서나 문자 선택 등 구성에 약간의 차이가 있을 경우에는 비교적 더 많은 출판사가 택한 순서와 구성 방식으로 기술했고 설명의 방법에 차이가 있을 때는 모든 방법을 소개하였다.

1. 『수학』

가. 삼각함수의 정의

9개 교과서 모두 반지름이 r인 원을 이용해서 삼각함수의 정의를 설명했다. cos함수와 sin함수가 단위원 위의 x좌표, y좌표라는 직접적인 언급은 없었지만 이를 충분히 유추할 수 있는 설명이다. 내용은 다음과 같다.



<그림 Ⅲ-1> 원과 각이 θ인 동경 OP

<그림 Ⅲ-1>과 같이 좌표평면 위에서 x축의 양의 부분을 시초선으로 하고, 일반각 θ가 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 만나는 점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면

$$\frac{b}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{a}\ \ (a \neq 0)$$

의 값은 r에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 하나씩 결정된다.

따라서 임의의 실수 θ와 위의 비의 값 사이의 대응 관계

$$\theta \rightarrow \frac{b}{r},\ \theta \rightarrow \frac{a}{r},\ \theta \rightarrow \frac{b}{a}\ \ (a \neq 0)$$

는 함수이다.

이들 함수 관계를 각각 θ의 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 하며, 이것을 기호로 각각

$$\sin\theta = \frac{b}{r},\ \cos\theta = \frac{a}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

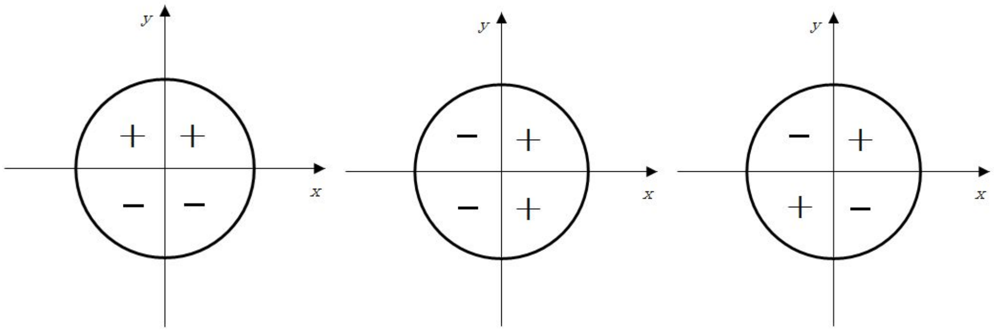
와 같이 나타낸다.

나. 삼각함수의 값의 부호

9개 출판사 모두 <그림 Ⅲ-2>와 유사한 그림을 삽입하여 삼각함수의 값의 부호를 설명했으며 금성출판사와 두산동아의 경우 반지름이 r인 원의 그림을 추가로, 좋은책 신사고의 경우 반지름이 1인 원의 그림을 추가로 삽입하여 설명을 도왔다. 중앙교육진흥연구소의 경우는 교과서의 경우 함께 풀기 형식으로 문제를 제시했고 해설은 수학익힘책에 실었다.

지학사와 천재교육을 제외한 나머지 7개 출판사는 설명 속이나 첨부한 표 등에 '좌표' 라는 직접적인 표현이나 혹은 $P(a, b)$라는 좌표로 삼각함수를 제시하면서 이해를 도왔다. 아직 고등학교 1학년 학생들에게 삼각함수의 정의만 보고 기하적 의미를 유추하기 어려움이 따를 수 있기에 좌표라는 표현을 넣은 것은 매우 훌륭해 보인다. 반면 지학사와 천재교육은 좌표에 대한 소개가 없었다.

우선 좌표라는 표현이 들어간 경우 출판사마다 구성은 조금씩 달랐지만, 일반적 해설은 다음과 같다.



$\sin\theta$의 부호　　　　$\cos\theta$의 부호　　　　$\tan\theta$의 부호

<그림 Ⅲ-2> 삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 각θ를 나타내는 동경 위의 점 $P(x,\, y)$의 좌표, y의 좌표의 부호에 의해서 결정된다.

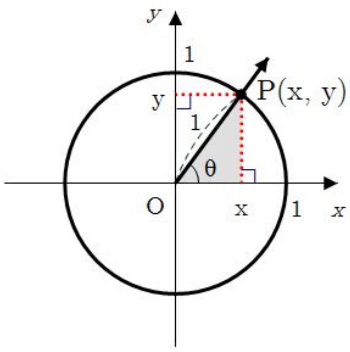
반면 지학사와 천재교육은 좌표에 대한 소개없이

동경이 어느 사분면에 있는가에 따라 삼각함수의 부호가 정해진다

라는 설명만 실었다.

다. 삼각함수 사이의 관계

조금 더 구체적으로 삼각함수가 단위원 위의 좌표임을 설명하는 이 부분은 모든 출판사의 설명이 거의 동일하다. 여기서는 $x^2+y^2=1$라는 원의 식이 등장하므로 좀 더 원과의 연계성을 학생들에게 강하게 이해시킬 수 있다고 보인다.



<그림 Ⅲ-3> 단위원과 각이 θ인 동경 OP

<그림 Ⅲ-3>과 같이 원점 O를 중심으로 하는 단위원과 각 θ의 동경의 교점을 $P(x,\, y)$라고 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y,\ \cos\theta = \frac{x}{1} \ \text{ 이므로}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

또한 위의 그림에서 $P(x,\, y)$는 단위원 위의 점이므로 $x^2 + y^2 = 1$이다. 따라서

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

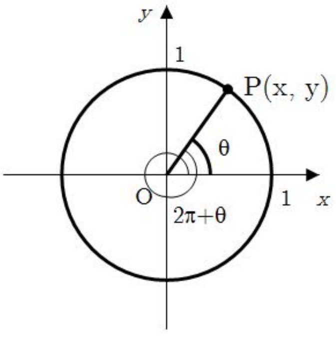
임을 알 수 있다.

다만 좋은책 신사고 같은 경우에는 ‘단위원 위의 점이므로 $x^2+y^2=1$‘ 이라는 표현 대신 ’피타고라스의 정리에 의해 $x^2+y^2=1$‘ 이라는 표현이 실려 있었다. 이도 물론 옳은 표현이고 본질적으로 같은 내용이지만 학생들에게 단위원 위의 점임을 전달한다는 부분에선 전자의 표현을 사용하는 것이 더 좋지 않았을까 하는 생각이다.

라. 삼각함수의 성질

모든 교과서가 교육 목표에 맞게 $2n\pi+\theta,\ -\theta, \pi\pm\theta,\ \frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수를 소개했으며 어느 교과서나 이 부분은 절대적으로 삼각함수가 단위원의 좌표임을 이용하여 삼각형의 합동, 대칭, 회전등으로 설명하고 있다. 그러므로 학생들이 알고 있는 삼각비를 이용하며 길이, 부호 등을 이용하여 효과적으로 삼각비에서 삼각함수로 확장하며 설명하기에 좋은 부분이라 생각된다.

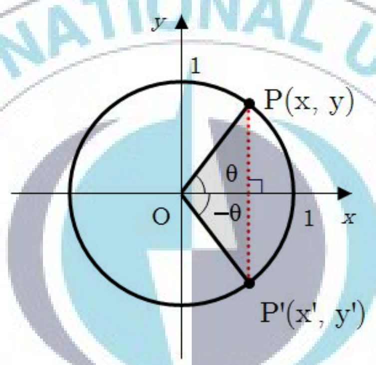
(1) $2n\pi+\theta$의 삼각함수



<그림 Ⅲ-4> $2n\pi+\theta$의 삼각함수

<그림 Ⅲ-4> 와 같이 각 θ와 각 $2\pi+\theta$가 나타내는 동경은 일치하므로 각 θ와 각 $2n\pi+\theta$의 삼각함수 값은 같고 일반적으로 임의의 정수 n에 대하여 각 θ와 각 $2n\pi+\theta$의 동경은 일치하므로 각 θ와 각 $2n\pi+\theta$의 삼각함수의 값은 같다.

(2) $-\theta$의 삼각함수



<그림 Ⅲ-5> $-\theta$의 삼각함수

<그림 Ⅲ-5>와 같이 각 θ와 각 $-\theta$를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$ 라 하면 두 점은 x축에 관하여 대칭이므로

$$x=x',\ y=y'$$

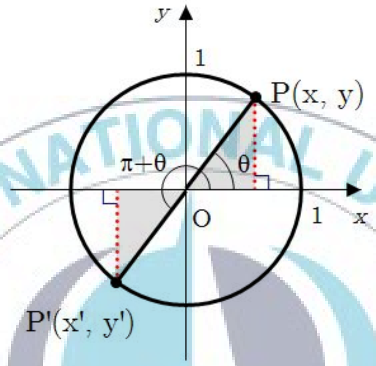
따라서

$$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = x' = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$$

(3) $\pi \pm \theta$의 삼각함수



<그림 Ⅲ-6> $\pi \pm \theta$의 삼각함수

<그림 Ⅲ-6>과 같이 각 θ와 각 $\pi \pm \theta$를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$ 라 하면 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로

$$x = -x',\ y = -y'$$

이므로

$$\sin(\pi+\theta) = y' = -y = -\sin\theta$$

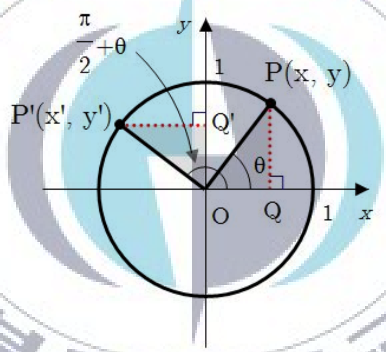
$$\cos(\pi+\theta) = x' = -x = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-x} = \tan\theta$$

또 위의 식에 θ대신 $-\theta$를 대입하면

$$\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

(4) $\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수



<그림 Ⅲ-7> $\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수

<그림 Ⅲ-7>과 같이 각 θ와 각 $\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$를 나태내는 동경과 단위원과의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$ 라 하고, 점P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q, 점P'에서 y축에 내린 수선의 발을 Q'라고 하면 $\triangle POQ \equiv \triangle P'OQ'$이므로

$$x' = -y,\ y' = x$$

이다. 따라서

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = y' = x = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = x' = -y = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

또한 위의 식에 θ대신 $-\theta$를 대입하면

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = -\sin(\theta -) = \sin\theta$$

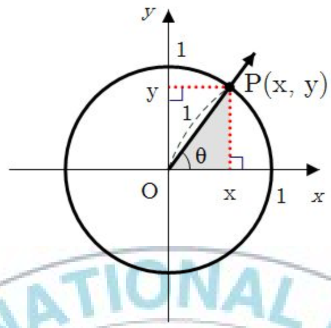
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = -\frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{\tan\theta}$$

마. 삼각함수의 그래프

모든 교과서에서 단위원에서의 좌표를 이용해 삼각함수의 그래프를 설명하므로 좀 더 직접적으로 $\sin\theta$가 단위원 위의 y좌표, $\cos\theta$가 단위원 위의 x좌표라고 그래프를 첨부하여 설명하고 있다. 그래프와 함께 정의역, 치역, 우함수·기함수 여부, 주기 등을 설명하고 있다. 다만 $\tan\theta$의 경우는 기울기

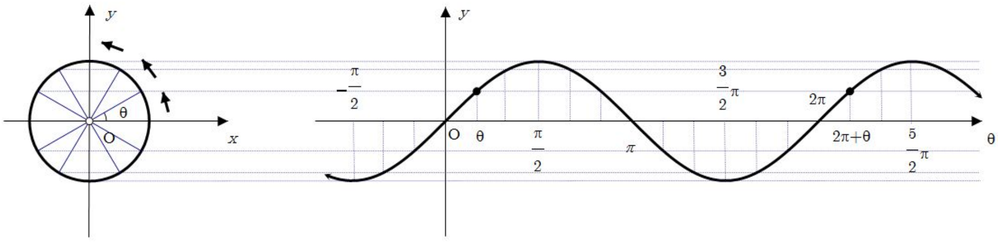
라는 언급이 없었다. cosθ의 경우는 sinθ의 경우와 동일하여 생략하였다.

(1) sin 함수의 그래프



<그림 Ⅲ-8> 단위원과 각이 θ인 동경 OP

그림<그림 Ⅲ-8>과 같이 각θ를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 $P(x, y)$라고 하면 $\sin\theta = y$이다. 따라서 점 P가 단위원 위를 움직일 때, 점 P의 y좌표가 sinθ의 값이 된다. 이를 이용하여 θ의 값을 가로축에, 그에 대응하는 sinθ의 값을 세로축에 나타내어 $y = \sin\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



<그림 Ⅲ-9> $y = \sin\theta$의 그래프

삼각함수 $y = \sin\theta$의 그래프에서 알 수 있듯이 이 함수의 정의역은 실수

전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1 \le y \le 1\}$이다.

또한 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$이므로 $y = \sin\theta$의 그래프는 원점에 대칭이다.

한편 $y = \sin\theta$의 그래프는 2π간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉 임의의 실수θ와 정수n에 대하여

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$$

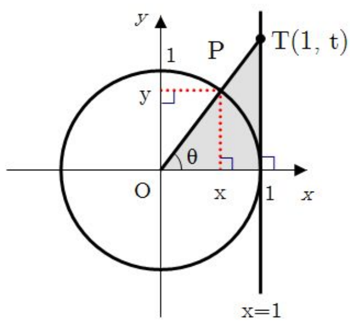
가 성립한다.

함수 $y = f(x)$에서 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

를 만족하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, 함수 $y = f(x)$를 주기함수라고 하고, 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다. 따라서 $y = \sin x$는 주기가 2π인 주기함수이다.

(2) tan함수

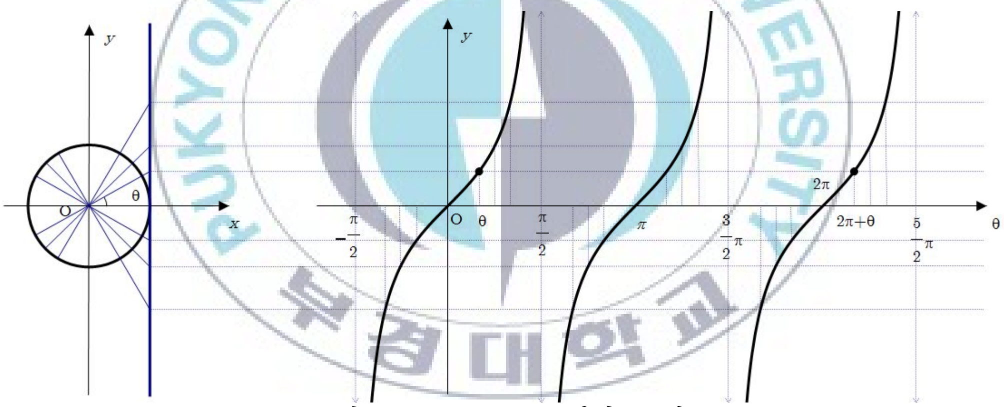


<그림 Ⅲ-10> 단위원과 접선 $x=1$

<그림Ⅲ-10>과 같이 각θ를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 $P(x, y)$, 단위원 위의 점 $A(1, 0)$에서의 접선 t와 동경OP의 연장선과 만나는 점을 $T(1, t)$라고 하면

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

이다. 따라서 점 P가 단위원 위를 움직일 때, 점 T의 y좌표가 $\tan\theta$의 값이 된다. 이를 이용하여 θ의 값을 가로축에, 그에 대응하는 $\tan\theta$의 값을 세로축에 나타내어 $y = \tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



<그림 Ⅲ-11> $y = \tan\theta$의 그래프

<그림 Ⅲ-11>에서 θ가 $n\pi + \frac{\pi}{2}$(n은 정수)일 때, 점 P의 x좌표는 0이므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않는다. 따라서 $y = \tan\theta$의 정의역은 $n\pi + \frac{\pi}{2}$(n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 직선 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$($n$은 정수)는 $y = \tan\theta$의 점근선이다. 또, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$이므로

$y = \tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

한편, $y = \tan\theta$의 그래프는 π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉, 임의의 실수 θ에 대하여

$$\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta$$

가 성립하는 주기가 π인 함수이다.

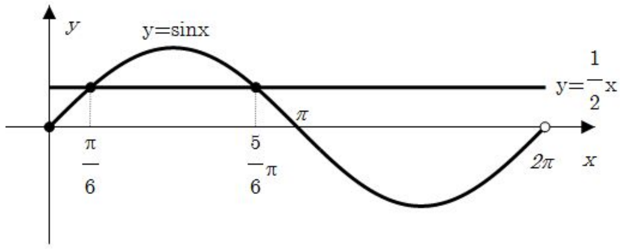
바. 삼각함수의 방정식

삼각방정식의 경우에는 모든 교과서에서 그래프를 이용하여 풀이했고 거의 모든 출판사에서 풀이2, 참고 혹은 설명 옆의 보조설명란에 원을 이용한 풀이를 넣었다. 한군데 천재교육만이 오로지 그래프만을 이용해 풀이했다. 하지만 문제와 풀이가 함께 제시되어있는 단원의 첫 번째 문제를 제외한 모든 연습문제, 수학익힘책 등 문제만 제시되어있는 문제들은 해답지에 그래프만을 이용해서 풀이되어 있었다. 그리고 이는 부등식의 경우도 마찬가지 였기에 부등식의 경우는 생략하겠다. 좋은책 신사고에 실려있는 설명은 다음과 같다.

예제1. 삼각방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

풀이1. 함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$과의 교점을 P, Q라고 하면,

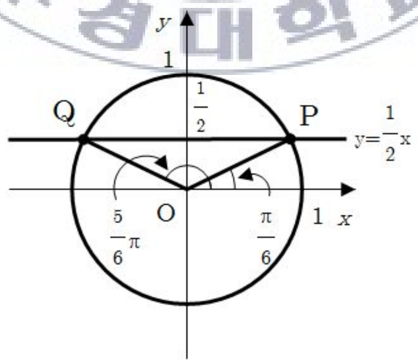
두 점 P, Q의 x의 좌표가 구하는 해이다.



<그림 Ⅲ-12> $y=\sin x$와 $y=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 해는 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ 이다.

풀이2. <그림Ⅲ-12>와 같이 직선 $y=\dfrac{1}{2}$과 단위원의 교점을 P, Q라 하면, 동경 OP와 OQ가 나타내는 각 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$가 구하는 해이다.



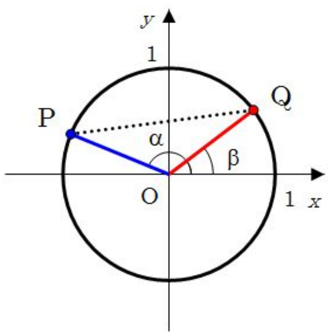
<그림 Ⅲ-13> 단위원과 $y=\dfrac{1}{2}$

2. 『수학Ⅱ』

교학사만이 $\sec\theta$, $\mathrm{cosec}\theta$, $\cot\theta$의 정의에 관한 설명을 원 없이 단순히 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$의 역수로 설명했고 나머지 교과서들은 원을 이용하여 정의했다. 이 설명은 1장『수학』에서 삼각함수의 정의 부분의 설명과 동일하기 때문에 생략하였다.

가. 삼각함수의 덧셈정리

모든 교과서가 단위원 상의 두 점과 원점이 이루는 삼각형에서의 cos법칙으로 cos함수에 대한 덧셈정리를 유도했다. 그리고 삼각함수 사이의 관계를 이용해 나머지 삼각함수의 덧셈정리를 증명했다.



<그림 Ⅲ-14> 삼각함수의 덧셈정리 증명

<그림Ⅲ-14>와 같이 좌표평면 위에서 두 각 α, β를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 P, Q라고 하면 두 점의 좌표는

$$P(\cos\alpha, \sin\alpha),\ Q(\cos\beta, \sin\beta)$$

이고, $\angle POQ = \alpha - \beta$이다.

이때 삼각형 POQ에서 cos법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

이다.

여기서 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$이므로 이 식은

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

이고, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$이므로 이 식을 정리하면

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots①$$

이다.

①에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots②$$

한편 ②에서 α 대신에 $\frac{\pi}{2}-\alpha$를 대입하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ③$$

③에서 β대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ④$$

또한 ②와 ④를 이용하면 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

즉 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cdots\cdots⑤$$

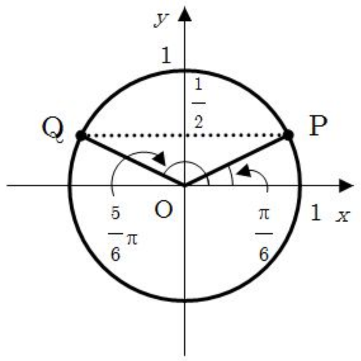
⑤에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cdots\cdots⑥$$

이상의 ①~⑥을 삼각함수의 덧셈정리라고 한다.

나. 삼각방정식

모든 교과서가 삼각방정식의 특수해를 제시하고, 거기에서 일반해를 추론할 수 있게 하였다. 여태까지 교과서와 익힘책의 풀이에서는 쭉 삼각방정식을 그래프로 풀어왔는데 여기서는 다시 원으로 풀고 있다. 고1 때 삼각함수를 배운 후 고2 때 삼각함수를 접하기까지 최소 몇 개월이 소요되는데, 그동안 계속 그래프로 삼각방정식을 풀어온 학생들에게는 생소하거나 어색하게 느껴질 수도 있다고 보인다. 대부분 교과서가 sin$x$의 경우만 예를 들고 cos$x$와 tan$x$의 경우는 별다른 설명 없이 결과만을 제시해 놓았다. 다음은 좋은책 신사고에 제시된 설명이다.



<그림 Ⅲ-15> 단위원 위의 y좌표가 $\dfrac{1}{2}$인 점

$0 \le x < 2\pi$에서 삼각방정식 $\sin x = \dfrac{1}{2}$를 풀면

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

이다.

삼각함수 $y = \sin x$는 주기가 2π인 주기함수이므로 임의의 정수 m에 대하여

$$x = 2m\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = 2m\pi + \frac{5}{6}\pi \qquad \cdots\cdots①$$

도 방정식 $\sin x = \dfrac{1}{2}$의 해이다.

그런데 ①에서

$$2m\pi+\frac{5}{6}\pi=(2m+1)-\frac{\pi}{6}$$

이므로 ①을 하나의 식으로 나타내면

$$x=n\pi+(-1)^{n}\frac{\pi}{6}\ \ (n\text{은 정수})$$

이다.

Ⅳ. 문제풀이 연구

다음은 일반적으로 그래프를 이용하는 문제와 삼각함수를 이용한 대수적 문제 등을 원을 이용하여 풀이한 문제들과 원을 이용하는 것이 훨씬 용이한 문제들의 예시이다. 고등학교 1학년 학생이 이해할 수 있는 수준의 문제와 『수학Ⅱ』와 『기하와 벡터』를 선택해야만 이해할 수 있는 풀이로 나누어 실었고 교과서나 문제집 등에서 쓰이는 일반적인 풀이와 다른 경우 그 풀이도 함께 제시하였다.

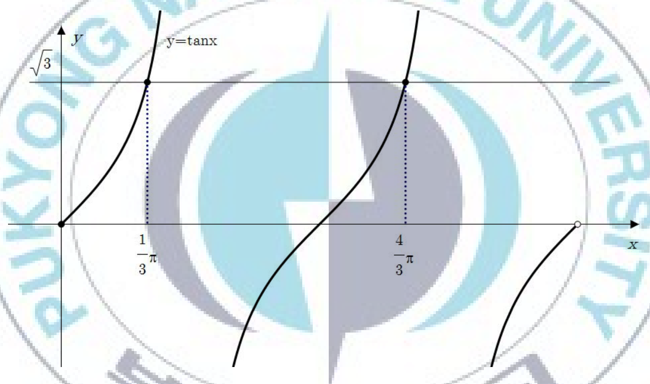
이 풀이들은 꼭 문제를 간편히 푸는 데에 그 목적이 있지 않다. 여는말에서 제시하였듯 삼각함수에 대한 본질적이고 직관적인 이해를 키우고, 그로 인해 삼각함수의 내용과 문제들을 스스로 재구성하고 응용할 수 있는 수학적 힘을 키우는 것이 그 목적이다. 물론 예로 제시한 문제들 중 대부분 문제는 원을 이용하여 풀이가 간편해지고 원으로 접근하지 않고서는 풀이가 사실상 힘들어진다. 그래프 자체의 성질을 묻는 것이 아니라면 실제로 학생들이 접하게 될 삼각함수 문제들 역시 원으로 접근하는 것이 그래프를 이용하는 것보다 더 빠르게 풀 수 있다고 생각한다. 하지만 일부 문제-특히 벡터를 이용하는 경우--는 오히려 문제를 해결하는 데에 걸리는 시간은 더 오래 걸리게 되고 이 경우엔 일반적으로 항상 적용시킬 수 없다는 단점도 있다. 그렇지만 이런 풀이의 소개 역시 학생들의 삼각함수에 대한 접근과 추론 능력 배양에 도움이 될 수 있다고 생각한다.

수년간 보아왔던 각종 시험의 기출문제와 문제집에서 봤던 문제 등을 기억으로 재구성했기에 문제의 정확한 출처가 없는 경우가 다수라는 점이 아쉬운 부분이다.

1. 『수학』 과정

<문제 1> $0 \le x < 2\pi$ 일때 $\tan x = \sqrt{3}$ 인 x를 구하라.

일반적인 풀이는 삼각함수의 그래프에 의해서다.



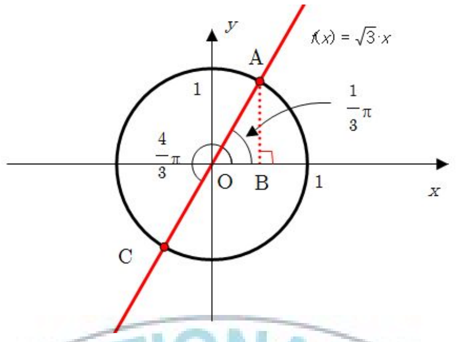
<그림 Ⅳ-1> $y=\tan x$와 $y=\sqrt{3}$

<그림 Ⅳ-1>에서 $y=\tan x$와 $y=\sqrt{3}$의 교점을 구하여 답을 구한다.

$$\therefore x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

이번에는 단위원을 이용하는 풀이를 살펴보자. $\tan x$가 x를 각으로 가지는 동경의 기울기이므로 단위원과 $y=\sqrt{3}\,x$의 교점의 위치를 살펴보면

된다.



<그림 Ⅳ-2> 단위원과 $y=\sqrt{3}x$

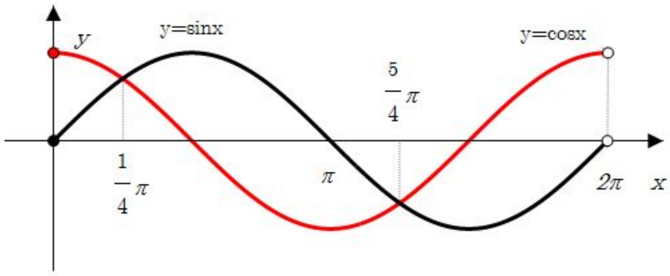
직각삼각형 OAB에서 $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\sqrt{3}$ 이므로 삼각비에 의해서 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$이고 $\angle BOC=\frac{4}{3}\pi$가 된다.

$$\therefore x=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

단위원으로 인한 풀이가 특수각에 대한 삼각함수의 함숫값을 사용하지 않아 더 직관적이라 하겠다.

<문제 2> $0 \le x < 2\pi$ 일때 $\sin x \ge \cos x$ 를 만족하는 x의 범위를 구하라.

일반적인 교과서의 풀이는 이 문제 역시 그래프를 이용한다.

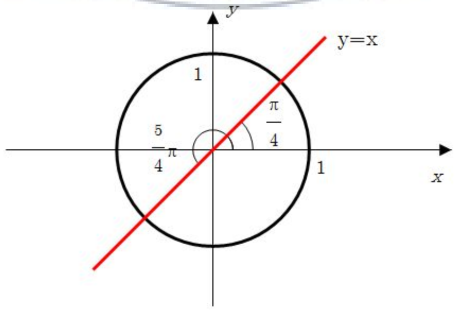


<그림 Ⅳ-3> $y=\sin x$와 $y=\cos x$

<그림 Ⅳ-3>에서 $\cos x$와 $\sin x$의 교점의 x좌표가 $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ 이다.

$$\therefore \frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$$

이를 단위원 위의 한 점 $(\cos x, \sin x)$으로 생각하면 다음과 같이 표현할 수 있다.



<그림 Ⅳ-4> 단위원과 $y=x$

$(\cos x, \sin x)$ 가 원 위의 점이므로 $x^2+y^2=1$과 $y \ge x$를 동시에 만족하는 점들의 모임이 답이 된다.

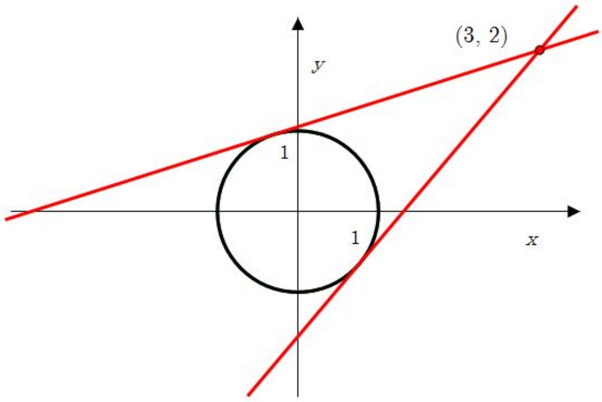
$$\therefore \frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$$

<문제3>처럼 삼각함수와 원의 관계를 이해하지 않고서는 풀기 힘든 문제도 존재한다.

<문제 3> 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{2-\sin x}{3-\cos x}$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

만약 $\dfrac{2-\sin x}{3-\cos x}=k$ 라 하고 판별식으로 풀이하면 k에 관한 4차식이 나오기 때문에 이 문제는 원으로 접근해서 풀이하는 것이 적합하다.

$\dfrac{2-\sin x}{3-\cos x}$는 $(3,2)$과 $(\cos x, \sin x)$사이의 기울기를 의미한다. 그러므로 $(3,2)$과 원 위의 한 점 사이의 기울기의 최댓값, 최솟값을 구하면 된다.



<그림 Ⅳ-5> (3, 2)에서 단위원에 그은 접선

$(3,2)$에서 원에 그은 두 접선의 기울기가 $\dfrac{2-\sin x}{3-\cos x}$의 최댓값, 최솟값이 된다. $(3,2)$를 지나는 접선을 $y=m(x-3)+2$라 하자. 그렇다면 원의 중심에서 접선까지의 거리가 반지름임을 이용하여

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$(3m-2)^2=m^2+1$$

$$m=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore$ 최댓값 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$, 최솟값 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

<**문제 4**> $0 \leq x < 2\pi$일때 $\sin x + \cos x = 1$을 만족하는 x를 구하여라.

먼저 고1 과정에서의 풀이는 다음과 같다.

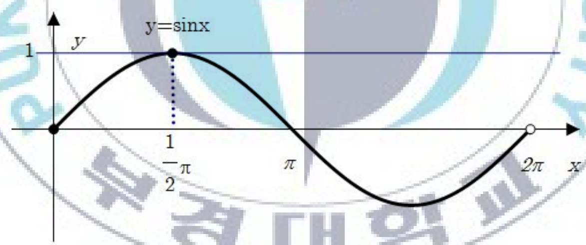
$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

두 식에서 $\cos x$를 소거하면

$$\sin^2 x + (1 - \sin x)^2 = 1$$

$$\sin x = 0, 1$$



<그림 Ⅳ-6> $y = \sin x$**와** $y = 1$

$$\therefore x = 0, \frac{1}{2}\pi$$

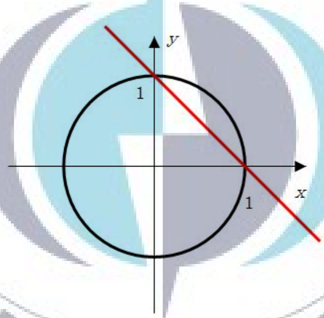
수Ⅱ과정에서는 일반적으로 합성을 이용하여 좀 더 손쉽게 풀 수 있다.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\, sin(x+\frac{1}{4}\pi) = 1$$

$$\sin(x+\frac{1}{4}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = 0,\ \frac{1}{2}\pi$$

한편 좌표평면 상에 이 문제를 표현하면 단위원과 $y+x=1$의 교점이 우리가 구하고자 하는 $(\cos x, \sin x)$가 된다.



<그림 Ⅳ-7> 단위원과 $y=-x+1$

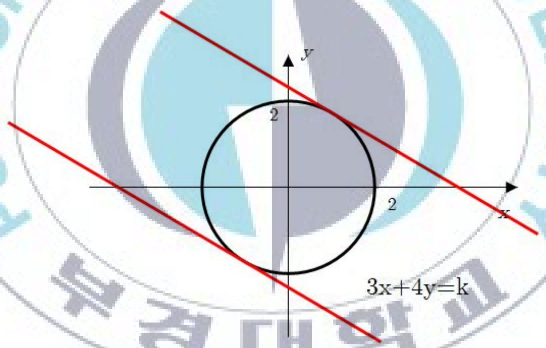
$$\therefore x = 0,\ \frac{1}{2}\pi$$

2. 『수학 Ⅱ』 과정

단위원이 아니라도 마찬가지로 풀이할 수 있다. 반지름이 r인 경우에는 $(x,y)=(rcos\theta, rsin\theta)$ 로 놓고 풀이한다.

<문제 5> $x^2+y^2=4$인 실수 x, y에 대하여 $3x+4y$의 범위를 구하라.

이 문제 자체는 고1 과정에서의 문제다. 교과서에서는 $3x+4y=k$라고 치환하여 풀이한다. 치환하면 직선 $3x+4y=k$ 가 원 $x^2+y^2=4$ 에 접할 때 k값이 최대 또는 최소이다.



<그림 Ⅳ-8> 단위원과 $3x+4y=k$

이 때 직선 $3x+4y=k$ 와 원점사이의 거리가 원의 반지름 길이 2와 같으므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}} \le 2$$

$$-10 \le k \le 10$$

$$\therefore -10 \leq 3x+4y \leq 10$$

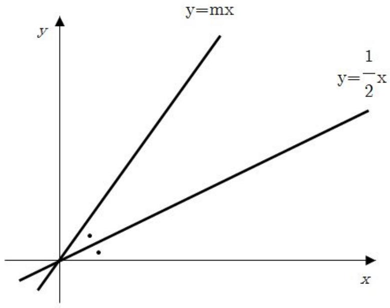
반지름이 2이므로 $(x,y)=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$라하면 삼각함수의 합성에 의해

$$3x+4y=6\cos\theta+8\sin\theta$$
$$=10\sin(\theta+\alpha)\ (\text{단, } \sin\alpha=\frac{4}{5}, \cos\alpha=\frac{3}{5})$$

$$\therefore -10 \leq 3x+4y \leq 10$$

<문제6>과 <문제7>의 경우 역시 <문제3>처럼 교과서에 실려있는 일반적인 풀이가 $(\cos\theta, \sin\theta)$가 좌표평면 위에서 일반각 θ가 나타내는 동경과 단위원과의 점과의 교점이라는 것과 $\tan\theta$가 동경의 기울기임을 이용하고 있다.

<문제 6> <그림 Ⅳ-9>과 같이 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 직선 $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 이등분한다. 이때 상수 m의 값은?



<그림 Ⅳ-9> $y = mx$와 $y = \frac{1}{2}x$

일반적으로 tan$x$가 기울기를 의미한다는 것을 이용하여 배각공식을 사용해 풀이한다. 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

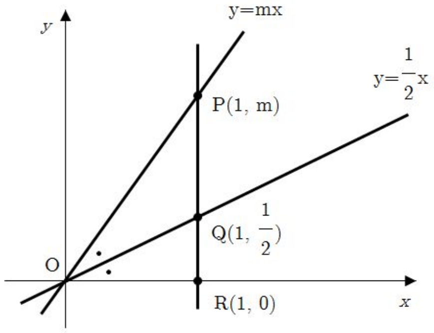
$$\tan\theta = \frac{1}{2}, \tan 2\theta = m$$

$$\rightarrow \ m = \tan 2\theta$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{4}{3}$$

tan$x$가 기울기를 의미한다는 것을 이용하지 않고 접근한다면 <그림 Ⅳ-10>에서처럼 $x=1$과 두 직선과의 교점을 각각 P, Q, R 이라고 한 뒤 $\triangle OPQ$와 $\triangle OQR$에서 cos법칙을 쓰는 등의 방법 등을 생각해 볼 수 있겠으나 계산이 매우 복잡하다.



<그림 Ⅳ-10> $y=mx$, $y=\frac{1}{2}x$와 $x=1$

<문제 7> $x^2+y^2=1$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x^2-2xy+5y^2$의 최댓값은?

반각공식과 2배각공식, 삼각함수의 합성을 이용해 풀이한다. (x, y)를 $(\cos\theta, \sin\theta)$라 하면

$$\begin{aligned} x^2-2xy+5y^2 &= \cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+5\sin^2\theta \\ &= -\sin2\theta+4\sin^2\theta+1 \\ &= -\sin2\theta+2(1-\cos2\theta)+1 \\ &= -(\sin2\theta+2\cos2\theta)+3 \\ &= -\sqrt{5}\,sin(2\theta+\alpha)+3 \end{aligned}$$

$$(\text{단, } \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5})$$

$\therefore$ 최댓값 $3+\sqrt{5}$

$x^2-2xy+5y^2=k$라 하고 $kx^2+ky^2=k$ 에서 k를 소거하여 판별식을 쓰는 방법도 생각할 수 있다. 학생들 입장에선 유도하기가 까다롭다는 것이 단점이다.

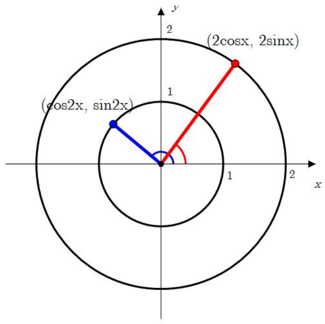
<문제 8> $0 \le x < 2\pi$일때 두 점 $(2\sin x, 2\cos x)$와 $(\sin 2x, \cos 2x)$사이의 거리의 최댓값M, 최솟값m을 구하라.

두 점 사이의 거리를 d라 하면

$$\begin{aligned} d^2 &= (2\sin x - \sin 2x)^2 + (2\cos x - \cos 2x)^2 \\ &= 5 - 4(\cos x cos2x + \sin x sin2x) \\ &= 5 - 4\cos(x - 2x) \\ &= 5 - 4\cos x \end{aligned}$$

$$\therefore M = 3, m = 1$$

이 역시 $(2\cos x, 2\sin x)$는 반지름이 2인 원과 각이 x인 동경과의 교점, $(\cos 2x, \sin 2x)$는 반지름이 1인 원과 각이 $2x$인 동경과의 교점이 되므로 다음과 같이 표현할 수 있고



<그림 Ⅳ-11> 좌표로 표현한 $(2\cos x, 2\sin x)$, $(\cos 2x, \sin 2x)$

이 두 점 사이의 거리는 직관적으로 $x=\pi$ 일때 최대, $x=0$ 일때 최소임을 알 수 있다.

$x=\pi$, $M=3$　　　　　　　　$x=0$, $m=1$

<그림 Ⅳ-12> 두 점 사이의 거리가 최대, 최소인 경우

$$\therefore M=3,\ m=1$$

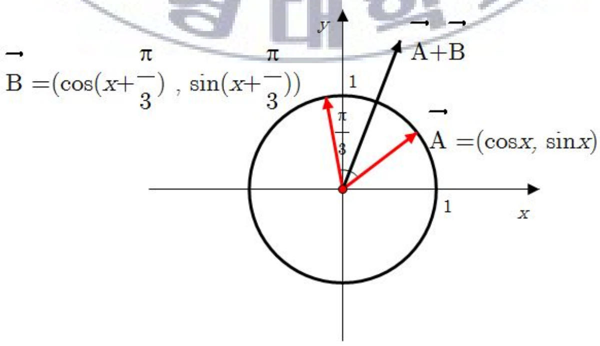
<문제 9> $\sin x + \sin(x+\frac{\pi}{3})$ 의 최대값을 구하라.

수Ⅱ 과정에서는 합을 곱으로 고치는 공식과 삼각함수의 합성을 이용하여 풀이할 수 있다.

$$\sin x + \sin(x+\frac{\pi}{3}) = 2\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})$$
$$= \sqrt{3}\, sin(x+\frac{\pi}{6})$$

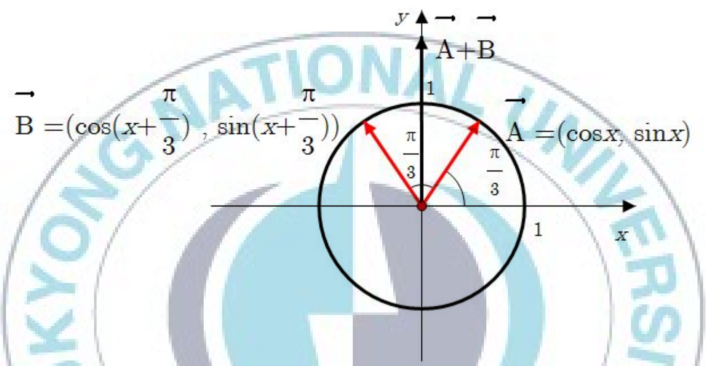
$$\therefore \text{최댓값 } \sqrt{3}$$

이를 단위원과 벡터를 이용하여 풀이할 수 있다. $(\cos x, \sin x)$를 $\overrightarrow{A}$, $(\cos(x+\frac{\pi}{3}), \sin(x+\frac{\pi}{3}))$를 $\overrightarrow{B}$라 하면 <그림 Ⅳ-12>과 같이 $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$를 표현 할 수 있다.



<그림 Ⅳ-13> $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$

여기에서 $\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{3})$는 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$의 y성분을 의미하게 되는데 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$의 크기는 $\sqrt{3}$으로 일정하므로 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$의 y좌표가 최대가 되는 경우는 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$가 x축에 수직하며 $\sin x>0$인 경우, 즉 <그림 Ⅳ-12>처럼 $\sin x=\sin(x+\frac{\pi}{3})>0$ 일 때가 된다.



<그림 Ⅳ-14> $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$의 y성분이 최대가 되는 경우

그러므로 $x=\frac{1}{3}\pi$ 일때 $\sin\frac{1}{3}\pi+\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$

$\therefore$ 최댓값 $\sqrt{3}$

두 삼각함수의 계수가 같은 <문제 9>와 달리 계수가 달라도 같은 방법으로 풀 수 있다.

<문제 10> 함수 $y=3\sin x-2\cos(x-\frac{\pi}{6})$의 최댓값 M, 최솟값 m을 구하라.

답안지에는 덧셈정리와 합성에 의해 풀이되어 있다.

$$3\sin x-2\cos(x-\frac{\pi}{6})=3\sin x-2(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6})$$

$$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x$$

$$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$$

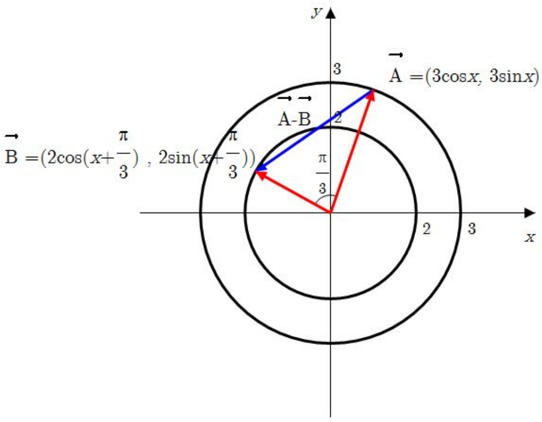
(단, $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$)

$$\therefore M=\sqrt{7},\ m=-\sqrt{7}$$

좀 더 쉽게 접근하기 위해 여각공식으로 $\cos x$를 $\sin x$로 변환하자.

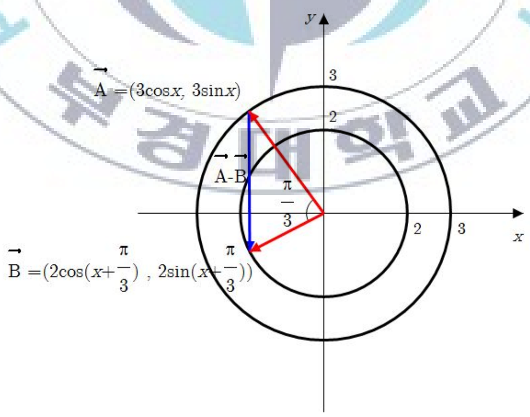
$$3\sin x-2\cos(x-\frac{\pi}{6})=3\sin x-2\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

마찬가지로 $(3\cos x, 3\sin x)$를 $\overrightarrow{A}$, $(2\cos(x+\frac{\pi}{3}), 2\sin(x+\frac{\pi}{3}))$를 $\overrightarrow{B}$라 하면 $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ 를 표현 할 수 있다.



<그림 Ⅳ-15> $\vec{A},\vec{B},\vec{A}-\vec{B}$

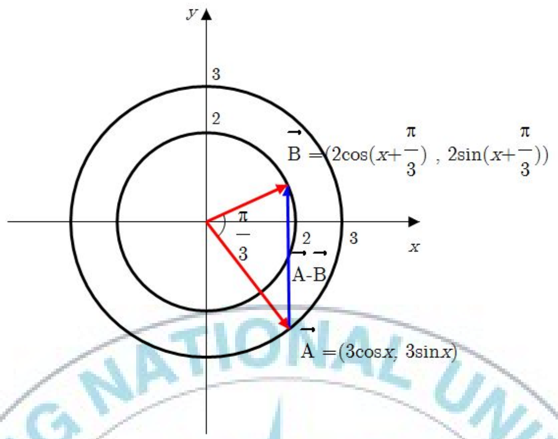
여기서 $3\sin x - 2\sin(x+\frac{\pi}{3})$는 $\vec{A}-\vec{B}$의 y성분 이므로 $\vec{A}-\vec{B}$가 x축과 수직일 때가 최대, 최소가 된다.



<그림 Ⅳ-16> $\vec{A}-\vec{B}$의 y성분이 최소가 되는 경우

위 그림처럼 $\vec{A}-\vec{B}$가 x축과 수직일때가 최소, 아래 그림처럼 $\vec{A},\vec{B}$를

원점에 대칭 했을때의 경우가 최대가 된다.



<그림 Ⅳ-17> $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$의 y성분이 최대가 되는 경우

$$\therefore \cos\text{법칙에의해 } M=\sqrt{7},\ m=-\sqrt{7}$$

<문제 11> $0<x<2\pi$ 에서 방정식 $a\sin x+b\cos x+c=0$ (a,b,c 는 상수, $b\neq 0,\ b\neq c$) 의 두 근을 α,β 라 할 때 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$를 a,b로 나타내어라.

$\tan\frac{x}{2}=t$로 치환하면 반각공식에 의해

$$t^2=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

또한 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$에 의하여 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 이므로

$$asinx + bcosx + c = 0$$

$$\rightarrow a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0$$

$$\rightarrow (c-b)t^2 + 2at + c + b = 0$$

이 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면 $t_1 = \tan\frac{\alpha}{2}$, $t_2 = \tan\frac{\beta}{2}$ 가 되고 삼각함수의 덧셈정리와 근과 계수의 관계에 의하여

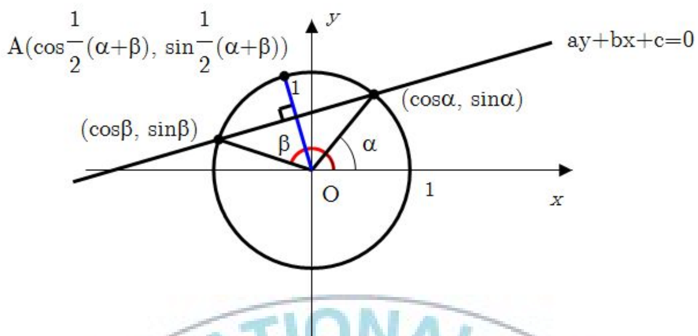
$$\tan(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{1 - \tan\frac{\alpha}{2}tan\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-2a}{c-b}}{1 - \frac{c+b}{c-b}}$$

$$= \frac{a}{b}$$

마찬가지로 이번에는 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$를 단위원 위에 표현해보자. α,β 가 준 식의 근이므로 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(\cos\beta, \sin\beta)$는 $asinx + bcosx + c = 0$와 단위원

의 교점이 된다.



<그림 Ⅳ-18> 단위원과 $asinx+bcosx+c=0$

점A를 $(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \sin\frac{\alpha+\beta}{2})$라 하면 $\overleftrightarrow{OA}$와 $asinx+bcosx+c=0$는 수직이다. 즉 $\overleftrightarrow{OA}$의 기울기가 $\frac{a}{b}$가 된다.

$$\therefore \tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b}$$

Ⅴ. 결론 및 제언

Ⅲ장의 연구결과 교과서에서 삼각함수의 정의와 모든 성질은 원으로 되어있는데 반해, 문제 풀이는 모두 그래프로 되어있음을 알 수 있었다. 또한 Ⅳ장에서는 일반적인 교과서 문제집들과는 달리 원을 이용한 풀이들을 제시했고 원을 이용하지 않으면 상당히 풀기 힘든 문제들의 예시도 살펴보았다.

본 연구의 목적이 '현 교과서의 풀이가 바뀌어야 한다는 것'에 있는 것은 아니다. 원을 이용해 삼각방정식 부등식 등의 문제를 풀 경우 학생들에게 생소할 수 있다는 단점도 존재한다[3]. 평면상에 표현된 함수에 익숙해져 있는 학생들에게 동경과 좌표에 의한 함수는 어렵게 느껴질 수 있다. 경험상 이런 문제는 수학의 기초가 부족한 학생들에게 더욱 두드러지게 나타났다. 또한, 삼각함수의 그래프 단원과의 연계도 고려해야 한다. 하지만 7차 교육과정에서 능력과 수준에 맞는 단계형 수준별 교육과정을 편성, 운영하도록 하였고 2007 개정 교육 과정은 이를 개선, 더욱 확대하는 것을 목표로 삼았다[4]. 그리하여 현재 상당수의 인문계 고등학교가 수학에서 수준별 수업을 채택하고 있다. 또한 2009년에 새로운 수학 교육 과정이 발표되어 2014년부터 고등학교에도 1학년부터 순차적으로 적용이 될 예정이다. 2009년 수학 교육 과정은 현재의 대학과정인 편미분, 극좌표 등을 포함한 『고급수학Ⅰ』,『고급수학Ⅱ』를 포함하는 등 선택영역을 더 넓히고 단위 학교의 교육과정 운영·편성의 자율성을 확대하는 내용을 담고있다[5]. 이를 볼

3) 조정수(2009), 「고등학교 일반각의 삼각 함수값 구하기에 대한 교수법적 분석과 논의」, p. 305
4) 교육과학기술부(2007),「고등학교 수학 교육과정 해설」, p. 8.
5) 교육과학기술부(2009),「고등학교 교육과정 해설 총론」, pp. 18-19..

때 앞으로도 수준별 수업이 유지 내지는 더욱 확대될 것으로 보인다.

이렇듯 좀 더 수학에 성취도가 높은 학생들을 대상으로 한 심화된 수업의 필요성은 분명해 보이고 이에 따라 현재 교과서의 풀이와 다르다고 하더라도 심화 수업에서 좀 더 본질적인 삼각함수 수업을 위해 원에 의한 풀이는 그 효용성을 가지고 있다고 생각한다. 실제로 내용에 차별성을 두는 것보다 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두는 것이 수준별 수업의 바람직한 방향이기도 하다[6].

전문가들의 많은 논의와 검토를 거쳤을 현재 교과서의 내용과 교수학습법이 엄밀하고 적절하다는 것에는 의심의 여지가 없겠지만 본 연구와 같은 다양한 상황에 대한 시도 역시 의미가 있다고 본다.

6) 교육과학기술부(2009),「고등학교 수학 교육과정 해설」, p. 66.

참고문헌

[1] 교육과학기술부(1998),「고등학교 수학 교육과정 해설」, 대한교과서주식회사

[2] 교육과학기술부(2007),「고등학교 수학 교육과정 해설」, 대한교과서주식회사

[3] 교육과학기술부(2009),「고등학교 수학 교육과정 해설」, 대한교과서주식회사

[4] 교육과학기술부(2009),「고등학교 교육과정 해설 총론」, 대한교과서주식회사

[5] 김수환 외9인(2009), 고등학교 수학, 교학사

[6] 양승갑 외7인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 금성출판사

[7] 우정호 외9인(2009), 고등학교 수학, 두산동아

[8] 우정호 외7인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 두산동아

[9] 유희찬 외12인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 미래엔

[10] 윤재한 외7인(2009), 고등학교 수학, 더텍스트

[11] 이강섭 외3인(2009), 고등학교 수학, 지학사

[12] 이강섭 외3인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 지학사

[13] 이재학 외 6인(2009), 고등학교 수학, 금성출판사

[14] 이준열 외6인(2009), 고등학교 수학, 천재교육

[15] 이준열 외9인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 천재교육

[16] 조정수(2009), 「고등학교 일반각의 삼각 함수값 구하기에 대한 교수법적 분석과 논의」,『數學教育 論文集』제 22집 제 3호, 2008. 9.

[17] 최광우(2012), 「삼각함수 : 항공기 형상 설계」, KAI 에비에이션 센터 항공과학 원리

(http://www.kaicamp.com/html/mn03/030102.php?CgCode=04&mode=view&idx=51
)

[18] 최봉대 외5인(2009), 고등학교 수학, 중앙교육진흥연구소

[19] 황석근 외12인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 교학사

[20] 황선욱 외2인(2009), 고등학교 수학, 좋은책 신사고

[21] 황선욱 외2인(2009), 고등학교 수학 교사용 지도서, 좋은책 신사고

[22] 황선욱 외12인(2009), 고등학교 수학Ⅱ, 좋은책 신사고

[23] 황선욱 외12인(2009), 고등학교 수학Ⅱ 교사용 지도서, 좋은책 신사고

[24] 황우형 외10인(2009), 고등학교 수학, 미래엔