



저작자표시-비영리 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교 육 학 석 사 학 위 논 문

학생들의 문제풀이 결과에 따른 방정식
개념들 간의 연결에 관한 연구

-고등학교 1학년을 대상으로-



2013 년 8 월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 아 란

교 육 학 석 사 학 위 논 문

학생들의 문제풀이 결과에 따른 방정식
개념들 간의 연결에 관한 연구

-고등학교 1학년을 대상으로-

지도교수 서 중 진

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.



2013 년 8 월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 아 란

김아란의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2013년 8월 23일



주 심 이학박사 조 성 진 (인)



위 원 이학박사 박 진 한 (인)



위 원 교육학박사 서 중 진 (인)



목 차

Abstract	v
I. 서론	1
1. 연구의 필요성 및 목적	1
2. 연구 문제	2
3. 연구의 제한점	3
II. 이론적 배경	4
1. 문제해결과 발견술	4
2. 문제해결력 강조의 배경	6
III. 연구 방법 및 절차	8
1. 연구 대상	8
2. 연구 절차	8
3. 연구 도구	9
4. 자료 분석	10
IV. 연구 결과 및 분석	14
1. 일차방정식과 일차연립방정식에 대한 분석	14
2. 이차 및 삼차방정식에 대한 분석	29
3. 일차, 이차, 삼차방정식의 개념들 간의 분석	41

V. 요약 및 결론	50
1. 요약	50
2. 결론	51
참고문헌	52
부 록	54

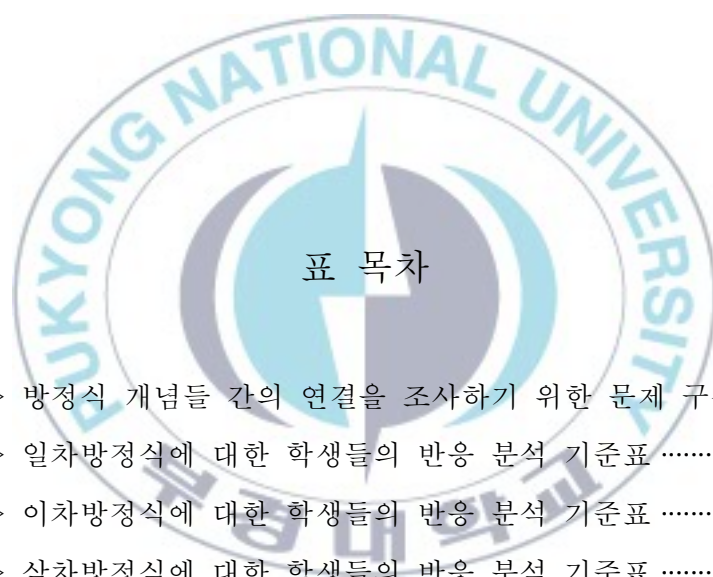


표 목차

<표 III-1> 방정식 개념들 간의 연결을 조사하기 위한 문제 구성	9
<표 III-2> 일차방정식에 대한 학생들의 반응 분석 기준표	11
<표 III-3> 이차방정식에 대한 학생들의 반응 분석 기준표	11
<표 III-4> 삼차방정식에 대한 학생들의 반응 분석 기준표	12
<표 IV-1> 1번 문항에 대한 학생들의 반응	14
<표 IV-2> 2번 문항에 대한 학생들의 반응	14
<표 IV-3> 3번 문항에 대한 학생들의 반응	15
<표 IV-4> 4번 문항에 대한 학생들의 반응	15
<표 IV-5> 3번 문항과 4번 문항에 대한 학생들의 반응	16
<표 IV-6> 5번 문항에 대한 학생들의 반응	16
<표 IV-7> 6번 문항에 대한 학생들의 반응	17

<표 IV-8> 7번 문항에 대한 학생들의 반응	17
<표 IV-9> 8번 문항에 대한 학생들의 반응	17
<표 IV-10> 3번 문항과 8번 문항에 대한 학생들의 반응	18
<표 IV-11> 9번 문항에 대한 학생들의 반응	19
<표 IV-12> 4번 문항과 9번 문항에 대한 학생들의 반응	19
<표 IV-13> 3번, 8번 문항과 4번, 9번 문항에 대한 학생들의 반응	20
<표 IV-14> 10번 문항에 대한 학생들의 반응	21
<표 IV-15> 11번 문항에 대한 학생들의 반응	22
<표 IV-16> 9번 문항과 11번 문항에 대한 학생들의 반응	22
<표 IV-17> 12번 문항에 대한 학생들의 반응	23
<표 IV-18> 13번 문항에 대한 학생들의 반응	25
<표 IV-19> 14번 문항에 대한 학생들의 반응	26
<표 IV-20> 13번 문항과 14번 문항에 대한 학생들의 반응	28
<표 IV-21> 15번 문항에 대한 학생들의 반응	29
<표 IV-22> 16번 문항에 대한 학생들의 반응	30
<표 IV-23> 17번 문항에 대한 학생들의 반응	31
<표 IV-24> 15번, 16번, 17번 문항에 대한 학생들의 반응	32
<표 IV-25> 18번 문항에 대한 학생들의 반응	33
<표 IV-26> 19번 문항에 대한 학생들의 반응	35
<표 IV-27> 20번 문항에 대한 학생들의 반응	36
<표 IV-28> 21번 문항에 대한 학생들의 반응	38
<표 IV-29> 22번 문항에 대한 학생들의 반응	39
<표 IV-30> 8번 문항과 15번 문항에 대한 학생들의 반응	41
<표 IV-31> 8번 문항과 16번 문항에 대한 학생들의 반응	42
<표 IV-32> 8번 문항과 17번 문항에 대한 학생들의 반응	44

<표 IV-33> 15번 문항과 21번 문항에 대한 학생들의 반응	46
<표 IV-34> 16번 문항과 21번 문항에 대한 학생들의 반응	47
<표 IV-35> 17번 문항과 21번 문항에 대한 학생들의 반응	48

그림 목차

<그림 IV-1> 12번 문항에 대한 학생(3명) 반응의 한 예	25
<그림 IV-2> 14번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	27
<그림 IV-3> 15번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	30
<그림 IV-4> 17번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	32
<그림 IV-5> 18번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	34
<그림 IV-6> 19번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	36
<그림 IV-7> 20번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	37
<그림 IV-8> 21번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	39
<그림 IV-9> 22번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예	40

A Study on the connection between concepts of equation
based on the results of the students' problem-solving
- the first grade students at High school -

Kim A Ran

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

This research illustrates how well students can solve various types of equations. Equations including but not limited to linear, quadratic, and cubic equations. It also investigates to what extent students can connect one notion of an equation to another. The results of the study read as follows.

First, students can solve linear equations and evaluate the resulting values using transposition. However, they often have difficulty solving linear equations using principles of equality. The students can easily solve linear equations which integer coefficients, but they tend to think it is difficult to evaluate linear equations with fractional coefficients.

Second, when evaluating simultaneous equations, students consider the method of substitution more difficult than solving problems using

methods involving addition and subtraction.

Third, it is shown that about 80% of the students are able to solve a quadratic equation using factorization. On the other hand, only 50% of the students solved the problem by making a perfect square expression.

Fourth, the students have more difficulty solving a simultaneous quadratic equation than a simultaneous quadratic equation. They often do not know the solution to cubic equations regardless of the method they use to solve it. Students seem unfamiliar with certain mathematical concepts such as the notion of real roots and imaginary roots.

To conclude, it is necessary to instruct students how to solve equations using a variety of methods such as factorization, perfect square expression and the quadratic formula. It is also essential to analyze students on the results of their problem solving abilities in order to make programs designed for individual students. Last but not least, the instructors should provide students with constructive feedback based on the results of their problem solving assessments.

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

초등학교 저학년에서 수학을 좋아하던 학생들이 고학년으로 진급할수록 수학을 싫어하고 어려워하는 경향이 나타나기 시작한다. 그리고 중등학교로 진급하여 점차적으로 수학을 포기하는 현상까지 나타나기도 한다. 이러한 현상은 단순히 학생들 자신의 문제가 아니라 수학교육의 문제로 야기된다. 왜 이러한 현상이 나타나는지에 대한 많은 연구가 이루어지고 해결방안을 강구하여 수학교육 현장에서 많은 노력을 하고 있지만 여전히 이러한 문제가 발생하고 있다. 이러한 문제는 한 국가의 교육시스템과 사회 현상 등 여러 가지 이유가 있겠지만, 학교 현장에서 ‘어떠한 일을 해야 하는가?’에 대한 반문을 가지고 학생들의 사고 수준과 현재 학생들의 내재된 수학 지식 그리고 교수학적 변환을 고려할 때 많은 해결책이 마련 될 것이다.

학생들이 수학을 어려워하는 여러 가지 이유 중 하나는, 하위 수학 개념들과 상위 수학 개념들 간의 연결을 잘 짓지 못하고 있기 때문이다. 그러면 하위 수학 개념을 이해하지 못하고 있으면 상위 수학 개념을 이해하지 못한다고 할 수 있는가? 꼭 그러한 것은 아니다. 상위 수학 과제를 해결하는 과정에서 하위 수학 과제를 이해할 수도 있다. 실제로 학생들은 상위 과제를 해결하는 과정에서 하위 개념을 이해하고 그 것을 적용하는 능력을 기를 수 있다.

학습위계에서 하위 과제들보다 상위 과제가 학습하기 어렵다거나 학습하는데 더 많은 시간과 노력이 더 필요하다는 것을 의미하지는 않는다. 하위

과제의 모든 요소들로 이루어진 상위 과제가 하위 과제보다 복잡하다는 것이다. 하위 기능들은 새로운 기능을 수용하기 위하여 사고방법이 재조직되어야 한다는 것과 통달하는데 필요한 시간을 고려할 경우, 가장 학습하기 어려울 수도 있다는 것이다. 그러면 학습에서 주어진 과제를 효율적으로 달성하기 위하여 항상 위계적으로 구성하여 순차적으로 학습하여야 할 것인가?. Gagné는 순차적으로 학습할 것을 주장하고 있다. 하지만, 어떤 아동은 선행 요건들을 건너뛸 때도 있다는 것이다(Carroll, 1973; Gagné, 1970, 1974; Lauren B. Resnick & Wendy W. Ford 1981). 실제로, 학생들은 학교 수학에서 이차방정식의 해를 구할 수 있는 방법이 몇 가지 있는지 잘 모르고 이차방정식의 해를 도구적으로 구한다는 것이다. 여기서 우리는 관계적 이해가 부족한 학생들이 과연 상위 개념을 학습하는데 지장을 초래하여 수학을 성공적으로 수행하지 못할 것이라는 주장에 동의 할 것인가? 이것에 대한 해답을 찾는 일은 매우 어려운 작업이 될 것 이지만, 기초 개념들 간의 연결을 어느 정도 시키고 있는가를 조사하여 기초 개념들을 성공적으로 연결시킬 수 있는 방안을 찾을 수 있다.

본 논문에서는, 고등학교 1학년 학생들이 방정식(일차방정식, 이차방정식, 삼차방정식)의 기본 유형을 어느 정도 해결할 수 있는지 조사 분석하고 교수학습 방안을 모색하였다.

2. 연구 문제

본 연구에서는, 고등학교 1학년 학생들이 중학교에서 학습한 일차방정식, 일차연립방정식, 이차방정식과 고등학교에서 학습한 삼차방정식을 어느 정

도 알고 일차와 이차 그리고 삼차방정식들 간의 개념을 연결하고 있는지
알아보기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제1. 일차방정식과 연립일차방정식에 대하여 어느 정도 해결하였
는가?

연구문제2. 이차방정식과 삼차방정식에 대하여 어느 정도 해결하였는가?

연구문제3. 문제해결 결과 방정식(일차, 이차, 삼차)들 간의 개념을 어느
정도 연결하고 있는가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 B시에 소재한 고등학교 1학년 108명을 대상으로 조사하였으
므로, 본 연구의 결과가 전국 고등학교 상황을 대표하기에는 어려움이 있
다. 하지만, 조사 도구를 약간 수정·보완하여 다른 학교에 적용할 경우 그
결과를 학생들을 지도하기 위한 자료로 활용할 수 있다.

II. 이론적 배경

1. 문제해결과 발견술

문제의 정의는 학자들마다 다양하게 정의하고 있다. 국어사전에서는 ‘해답을 요구하는 물음’, ‘연구에 의하여 해결해야 할 사항’으로 정의하고 있다. 영어 사전의 어원을 살펴보면 ‘pro’와 ‘ballein’가 합쳐진 단어로서, ‘명료하지 않다’, ‘모른다’, ‘알고 싶다’, ‘해결하고 있다’ 등의 뜻을 내포하고 있다.

문제를 분류하는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 ‘정형문제’와 ‘비정형문제’로 구분하는 것이다(황혜정 외 5인, 2012). 정형문제는 이미 학습한 수학적 개념, 원리, 법칙을 적용하여 이미 알려진 절차에 따라 해결할 수 있는 문장제 문제이다. 비정형문제는 교과서를 통해 학습한 수학적 개념, 원리, 법칙 등 수학적 지식이 뒷받침이 되어야 하지만, 이들을 기계적으로 적용하는 것이 아니라 이들 중에서 몇 가지 복합적으로 적용하여 해결하되 이미 알려진 절차뿐만 아니라 학습자의 창의적인 아이디어가 요구되는 유형의 문제이다(남승인, 2004).

수학교육의 초점은 문제해결이라 할 수 있다. 즉, 문제해결은 학교에서 학습을 수행하는 동안이나 학교를 떠난 후에도 계속 사용해야하는 기초 기능들 중의 하나 라는 것이다. 그러면 학생들에게 문제해결을 어떻게 지도할 것인가?. 여러 가지 접근 방법으로 구분하여 지도할 수 있다. 여기서는 Schroeder와 Lester의 세 가지 접근 방법을 살펴보기로 한다. 첫째, 문제해결에 대한 수업(teaching about problem)에서는 문제를 해결하기 위하여 전략에 초점을 두어 지도한다. 둘째, 문제해결을 위한 수업(teaching for

problem solving)에서는 적용에 초점을 둔다, 즉, 학습한 수학적 내용을 정형적이거나 비정형적인 문제에 적용하는 데에 초점이 있다. 셋째, 문제해결을 통한 수업(teaching via problem solving) 역시 적용을 중요하게 여기지만, 이미 정의된 수학을 단순히 사용하는 것이 아니라, 이 접근 방법은 문제를 새로운 수학적 아이디어를 학습하기 위한 수단으로, 이미 구성된 수학적 개념과 새로운 아이디어를 연결하기 위하여 사용한다. 즉, 새로운 수학적 개념, 수학적 관계를 조사하거나 또는 더 깊은 수학적 아이디어를 조사하기 위하여 문제가 사용될 수 있다(남승인, 2004; Krulik, 1980; Schroeder와 Lester, 1989).

일반화된 문제해결 기능을 가르치는 개념은 Polya(1957)와 Wickelgren(1974)에 의해 연구되었다. Polya(1957)는 문제에 대한 접근 방법이나 사고 과정을 발견술의 용어로 표현하였다. 그의 문제해결 교육론의 핵심은 수학적 발견술이다. 발견술은 역사적으로 Pappus, Descartes, Leibniz 등에 걸쳐 연구되어 왔다. 수학적 발견술 중에 가장 강력하고 오래된 것은 분석법으로 이것을 처음 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기경의 Pappus이다. Pappus에 이어 Descartes는 모든 문제를 해결할 수 있는 보편적인 방법을 찾으려는 시도 하에, 첫째, 어떤 문제이든 수학문제로 환원하라. 둘째, 어떤 수학문제이든 대수문제로 환원하라. 셋째, 어떤 대수문제이든 한 방정식의 풀이로 환원하라. 세 단계를 두었다. 결과적으로, 해석학은 이러한 패턴에 따른 연구로, 유클리드적인 종합기하학의 전통에 도전하여 대수적 방법을 우선함으로써 현대수학과 과학 발전에 결정적인 역할을 하게 되었다. Leibniz는 모든 문제를 해결할 수 있는 일반적인 알고리즘을 찾으려고 하였다. 그러한 노력은 미적분학의 창안으로 귀결되었다. Pappus, Descartes, Leibniz 등에 의해 연구되어 온 발견술에 대한 기록을 정리하고 문제해결에 전형적으로 유용한 사고 조작을 추출하여 이를 상식적인 질문과 권고의 형태의

대화체로 표현하여 적절한 순서로 배열한 사람은 Poyla이다. Polya는 귀납과 유추에 의한 추측을 통한 발견적 사고와 문제해결 교육의 중요성을 강조하였다(황혜정 외 5인, 2012).

2. 문제해결력 강조의 배경

문제해결력 신장은 교육의 중요한 목표이다. 이것은 오래전부터 강조되어왔다. 미국에서는 1930년대부터 논의되기 시작하여, 1960년대의 소위 새수학 운동에 의해 학교수학에 새로 도입된 수학적 개념들에 대한 학생들의 이해가 저조하고 기본적인 계산 능력 저하를 초래하여 1970년대의 기본으로 돌아가기 운동(The Back-to-basics Movement)이 전개되었다. 그러나 기본으로 돌아가기 운동으로 우수한 학생들의 학력저하와 응용력과 문제해결 능력이 감소 등의 현상이 나타났다. 미국의 수학교육 지도자들은 새로운 대안을 마련하기 위해 노력하였으며, 그 결과 미국교사협회(NCTM)에서 1980년 4월에 학교수학을 위한 다음과 같은 제언을 하게 이른다.

문제해결의 강조, 계산 기능보다 폭넓은 기본 기능의 강조, 컴퓨터와 계산기를 이용한 수학교육, 효과와 효율을 동시에 고려하는 엄격한 기준 설정, 다양하고 폭넓은 평가 방법의 적용, 학생의 선택권이 다양한 유연한 교육과정의 구성, 수학 교사의 전문성 제고, 수학교육을 위한 공공 지원의 확대

NCTM(1980)에서는 문제해결이 수학의 초점이 되어야 한다고 결의 하고, 수학과 교육과정은 문제해결을 중심으로 구성되고 조직되어야 하고, 수학 문

제 해결을 지도하기 위한 적절한 학습 활동 자료가 각 학년별로 개발되어야 한다고 주장하고 있다. 그리고 1989년 학교수학의 교육과정과 평가 기준(NCTM, 1989)과 학교 수학의 원리와 기준(NCTM, 2000)이 제시되면서 지금까지 문제해결의 중요성이 강조되어 오고 있다. 우리나라에서는 제5차 수학과 교육과정 이후부터 현재의 교육과정까지 문제해결력을 강조하여오고 있다.

이와 같이 문제해결력은 수학 교육에서 매우 중요한 위치를 차지하고 역할을 하고 있다. 그러므로 수학 교사가 기초 개념과 관련된 문제를 어느 정도 해결하고 연결시키고 있는지 파악하여 지도 방안을 찾아 수업계획을 세우고 학생들의 문제해결력의 향상에 기여할 수 있다는 것이다.



Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 B시의 고등학교 1학년 108명을 연구 대상으로 하였다. 연구 대상 학교는 B시에서 중위권 정도의 수준이고, 연구 대상은 학업수준이 이질적으로 구성되었다.

2. 연구 절차

본 연구에서는 고등학교 1학년 학생들이 방정식에 대하여 어느 정도 이해하고, 방정식의 개념들 간의 연결 정도에 대하여 어느 정도 알고 있는지 알아보기 위하여 다음과 같은 절차에 따라 연구를 진행하였다.

첫째, 초등학교에서 학습한 $\square$ 를 사용하여 미지수를 구하는 문제와 도형의 넓이 구하기, 중학교 1학년에서 학습한 일차방정식 문제, 중학교 2학년에서 학습한 일차연립방정식 문제, 중학교 3학년에서 학습한 이차방정식 문제, 그리고 고등학교에서 학습한 이차 연립방정식 문제와 삼차방정식 문제를 수집하여 분석하였다.

둘째, 수집한 자료를 분석한 결과를 토대로 검사 도구를 구성하여 수학 교사 및 수학 전문가의 자문을 받아 수정·보완하였다.

셋째, 고등학교 108명을 대상으로 조사하여 학생들의 자료를 비교 분석

하였다.

3. 연구 도구

본 연구에서는, 방정식에 대하여 어느 정도 이해하고, 방정식 개념들 간의 연결에 대하여 어느 정도 알고 있는지 조사하기 위하여 초등학교 수학 영역 중 를 사용하여 미지수를 구하기 2문항과 도형의 넓이 구하기 1문항, 중학교 1학년에서 학습한 방정식, 일차방정식, 일차방정식의 활용 8문항, 중학교 2학년에서 학습한 연립일차방정식, 연립방정식의 활용 3문항, 중학교 3학년에서 학습한 이차방정식, 이차방정식의 활용 6문항, 그리고 고등학교에서 학습한 삼차방정식, 삼차방정식의 활용 2문항을 <표 III-1>와 같이 구성하였다.

<표 III-1> 방정식 개념들 간의 연결을 조사하기 위한 문제 구성

학교	영역	문제 유형	내용	문항 수
초등학교	규칙성과 문제해결	덧셈식	$\square + 5 = 8,$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$	2
		도형의 넓이 구하기	사각형의 넓이를 사용하여 다각형의 넓이 구하기	1
중학교	일차방정식	일차방정식, 일차방정식의 활용, 연립일차방정식, 연립방정식의 활용	$x + 4 = 9,$ $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3},$ $4(x + 2) = 20,$ 일차방정식의 활용 문제,	11

			$x - 3 = 2,$ $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7},$ $0.4x + 2.3 = 4.5,$ $\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x,$ 일차연립방정식의 활용 문제, $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases},$ $\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$	
	이차방정식	이차방정식, 이차방정식의 활용	$x^2 - 2x - 3 = 0,$ $x^2 + 6x - 2 = 0,$ $x^2 + 6x - 2 = 0,$ $x^2 - x + 3 = 3,$ 이차방정식의 활용(도형)문제, $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$	6
고등학교	삼차방정식	삼차방정식, 삼차방정식의 활용	$x^3 + 1 = 0$ 삼차방정식의 활용(도형)문제	2

4. 자료 분석

수집된 자료를 대상으로 다음과 같은 평가기준을 작성하여 각 영역별로 분석하였다.

		답을 맞음 (근의공식사용)
		풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음 (완전제곱식사용)
		등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음
		인수분해는 잘 하였으나 해를 구하지 못함
		풀이과정은 잘 아는듯하나 답을 구하지 못함
		올바른 식은 잡았으나 답을 구하지 못함
		답 틀림
		해를 다 구하지 못함
		풀지 않음

<표 III-4> 삼차방정식에 대한 학생들의 반응 분석 기준표

영역	문제유형	분석 내용 기준
삼차방정식	삼차방정식, 삼차방정식의 활용	풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음
		인수분해는 하였으나 해를 구하지 못함
		실근만 구하고 허근을 구하지 못함
		허근만 구하고 실근을 구하지 못함
		등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음

		올바른 식은 잡았으나 답을 구하지 못함
		답 틀림
		해를 다 구하지 못함
		풀지 않음
		풀지 않음



IV. 연구결과 및 분석

1. 일차방정식과 일차연립방정식에 대한 분석

가. 일차방정식에 대한 학생들의 반응 분석

<표 IV-1> 1번 문항($\square + 5 = 8$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
답 맞음	108 (100%)	108 (100%)

1번 문항($\square + 5 = 8$)은 $\square$ 을 사용하여 식의 미지수 구하도록 하였다. 답이 맞은 학생은 100%(108명)로 나타났다(<표 IV-1>).

<표 IV-2> 2번 문항($\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
답 맞음	107 (99.1%)	108 (100%)
답 틀림	1 (0.9%)	108 (100%)

2번 문항($\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$)은 $\square$ 을 사용하여 식의 미지수를 구하도록 하였다. 답이 맞은 학생은 100%(108명)로 나타났다(<표 IV-2>).

1번 문항($\square + 5 = 8$)과 2번 문항($\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$)에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하면 99.9%의 학생들이 기본적인 덧셈식이나 분수계산식을 알고 있음을 알 수 있다(<표 IV-1>, <표 IV-2>).

<표 IV-3> 3번 문항($x + 4 = 9$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
답 맞음	107 (99.1%)	108 (100%)
풀지 않음	1 (0.9%)	108 (100%)

3번 문항($x + 4 = 9$)은 일차방정식의 해를 구하도록 하였다. 답이 맞은 학생은 99.1%(107명)로 나타났고, 답이 틀린 학생은 0.9% (1명)로 나타났다(<표 IV-3>).

<표 IV-4> 4번 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	104 (96.3%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	2 (1.9%)	108 (100%)
통분에 대한 실수로 답을 틀림	1 (0.9%)	108 (100%)
답 틀림	1 (0.9%)	108 (100%)

4번 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)은 분수가 포함된 일차방정식의 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 96.3% (104명)로 나타났고, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 1.9% (2명)로 나타났으며, 통분에 대한 실수로 답을 틀린 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 그리고 답이 틀린 학생은 0.9% (1명)로 나타났다(<표 IV-4>).

<표 IV-5> 3번 문항($x + 4 = 9$)과 4번 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
3번 문항 맞음	107 (99.1%)	108 (100%)
4번 문항 맞음	104 (96.3%)	108 (100%)

3번 문항($x + 4 = 9$)과 4번 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하면 97.7%의 학생들이 기본적인 일차방정식의 해를 구할 수 있음을 알 수 있다(<표 IV-5>).

<표 IV-6> 5번 문항($4(x + 2) = 20$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	101 (93.5%)	108 (100%)
답만 맞음	1 (0.9%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	3 (2.8%)	108 (100%)
이항에 대한 실수로 답을 틀림	2 (1.9%)	108 (100%)
수치대입법으로 문제 풀이	1 (0.9%)	108 (100%)

5번 문항($4(x + 2) = 20$)은 일차방정식의 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 93.5% (101명)로 나타났고, 답만 맞은 학생은 0.9% (1명)로 나타났으며, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 2.8% (3명)로 나타났다. 이항에 대한 실수로 답을 틀린 학생은 1.9% (2명)로 나타났고, 수치대입법으로 문제 풀이를 한 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 이러한 결과는 몇몇의 학생들이 등호나 이항에 대한 실수를 하지만 대부분의 학생들은 일차방정식의 해를 잘 구할 수 있음을 알 수 있다(<표 IV-6>).

<표 IV-7> 6번 문항(도형의 넓이)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	106 (98.1%)	108 (100%)
답 틀림	2 (1.9%)	108 (100%)

6번 문항(도형의 넓이에 대한 학생들의 반응)은 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 98.1% (106명)로 나타났고, 답이 틀린 학생은 1.9% (2명)로 나타났다(<표 IV-7>).

<표 IV-8> 7번 문항(일차방정식의 활용)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
답 맞음	108 (100%)	108 (100%)

7번 문항(일차방정식의 활용)은 답을 맞은 학생은 100% (108명)로 나타났다. 이러한 결과는 기본적인 일차방정식의 활용 문제는 학생들이 잘 알고 있음을 의미한다(<표 IV-8>).

<표 IV-9> 8번 문항($x - 3 = 2$ 이항사용하지 말 것)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	69 (63.8%)	108 (100%)
답만 맞음 (이항사용)	30 (27.8%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	4 (3.7%)	108 (100%)
답 틀림	2 (1.9%)	108 (100%)
풀지 않음	3 (2.8%)	108 (100%)

8번 문항($x - 3 = 2$)은 일차방정식의 해를 이항을 사용하지 않고 등식의

성질을 사용하여 해결하도록 하였다. 풀이 과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생(등식의 성질 사용)은 63.8% (69명)로 나타났고, 답만 맞은(이상 사용) 학생은 27.8% (30명)로 나타났으며, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 3.7% (4명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 1.9% (2명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 2.8% (3명)로 나타났다(<표 IV-9>).

<표 IV-10> 3번 문항($x + 4 = 9$)과 8번 문항($x - 3 = 2$ 이항사용하지 말 것)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
3번과 8번 모두 맞음	68 (63.0%)	108 (100%)
3번 맞고, 8번 틀림	30 (27.8%)	108 (100%)
3번 틀리고, 8번 맞음	1 (0.9%)	108 (100%)
두 문제 모두 이항을 사용하여 맞음	9 (8.3%)	108 (100%)
3번과 8번 모두 틀림	0 (0%)	108 (100%)

3번 문항($x + 4 = 9$)은 주어진 풀이방법을 제시하지 않고 해결하도록 하고, 8번 문항($x - 3 = 2$)은 이항을 사용하지 않고 등식의 성질을 사용하여 해결하도록 하였다. 두 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하면 다음과 같다. 3번 문항과 8번 문항을 모두 맞은 학생은 63.0%(68명)로 나타났으며, 3번 문항은 맞고 8번 문항은 틀린 학생은 27.8%(30명), 8번 문항은 맞고 3번 문항은 틀린 학생은 0.9%(1명)로 나타났다. 문제해결 과정에서 두 문제 모두 이항을 사용하여 해결한 학생들은 8.3%(9명)로 나타났고, 3번과 8번 모두 틀린 학생은 0%(0명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 이항을 사용하여 일차방식을 해결할 수 있으나 등식의 성질을 이용하여 일차방정식을 해결하기 어려운 것을 의미한다(<표 IV-10>).

<표 IV-11> 9번 문항($-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$ 이항사용하지 말 것) 에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	48 (44.4%)	108 (100%)
이항을 사용하여 답이 맞음	14 (13.0%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	1 (0.9%)	108 (100%)
답 틀림	16 (14.8%)	108 (100%)
풀지 않음	29 (26.9%)	108 (100%)

9번 문항($-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$)은 계수가 분수인 일차방정식의 해를 이항을 사용하지 않고 등식의 성질을 사용하여 해결하도록 하였다. 풀이 과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 44.4% (48명)로 나타났고, 이항을 사용하여 답을 맞은 학생은 13.0% (14명)로 나타났으며, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 14.8% (16명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 26.9% (29명)로 나타났다. 이러한 결과는 분수를 계수로 가지는 일차방정식의 해를 구하기 어려운 것을 의미한다(<표 IV-11>).

<표 IV-12> 4번 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)과 9번 문항($-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
4번과 9번 모두 맞음	48 (44.4%)	108 (100%)
4번 맞고, 9번 틀림	42 (38.9%)	108 (100%)
4번 틀리고, 9번 맞음	1 (0.9%)	108 (100%)
두 문제 모두 이항을 사용하여 맞음	14 (13.0%)	108 (100%)
4번과 9번 모두 틀림	3 (2.8%)	108 (100%)

4번 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)은 주어진 풀이방법을 제시하지 않고 해결하도록 하고, 9번 문항($-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$)은 이항을 사용하지 않고 등식의 성질을 사용하여 해결하도록 하였다. 두 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하면 다음과 같다. 4번 문항과 9번 문항을 모두 맞은 학생은 44.4%(44명)로 나타났으며, 4번 문항은 맞고 9번 문항은 틀린 학생은 38.9%(42명), 9번 문항은 맞고 4번 문항은 틀린 학생은 0.9%(1명). 그리고 문제해결 과정에서 두 문제 모두 이항을 사용하여 해결한 학생들은 13.0%(14명), 4번 문항과 9번 문항을 모두 틀린 학생은 2.8%(3명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 이항을 사용하여 일차방식을 해결할 수 있으나 등식의 성질을 이용하여 일차방정식을 해결하기 어려운 것을 의미한다. 또한 분수를 계수로 가지는 일차방정식의 해를 구하기 더 어려워함을 알 수 있다(<표 IV-12>).

<표 IV-13> 3번, 8번 문항(정수를 계수로 가지는 일차방정식)과 4번, 9번 문항(분수를 계수로 가지는 일차방정식)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
3번과 8번 모두 맞음	68 (63.0%)	108 (100%)
4번과 9번 모두 맞음	48 (44.4%)	108 (100%)

3번과 8번 문항에 대한 학생들의 반응과 4번과 9번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 모두 일차방정식 문제이다. 하지만 3번과 8번을 모두 맞은 학생은 63.0%(68명)이고, 4번 문항과 9번 문항을 모두 맞은 학생은 44.4%(44명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 정수를 계수로 가지는 일차방정식은 해결할 수 있으나 분수를 포함한 일차 방정식이나 분수를 계수로 가지는 일차방정식을 해결하기 어려운 것을 의미한다(<표 IV-13>).

<표 IV-14> 10번 문항($0.4x + 2.3 = 4.5$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	77 (71.3%)	108 (100%)
답만 맞음	1 (0.9%)	108 (100%)
풀이과정을 잘 알고 있으나 약분하지 않음	10 (9.3%)	108 (100%)
푸는 방법은 잘 알고 있으나 잘못된 표기방법	4 (3.7%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	3 (2.8%)	108 (100%)
답 틀림	4 (3.7%)	108 (100%)
풀지 않음	9 (8.3%)	108 (100%)

10번 문항($0.4x + 2.3 = 4.5$)은 소수를 계수로 가지는 일차방정식의 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 71.3% (77명)로 나타났고, 답만 맞은 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 풀이과정을 잘 알고 있으나 약분하지 않은 학생은 9.3% (10명)로 나타났고, 푸는 방법은 잘 알고 있으나 잘못된 표기방법을 사용한 학생은 3.7% (4명)로 나타났으며, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 2.7% (3명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 3.7% (4명)로 나타났으며, 풀지 않은 학생은 8.3% (9명)로 나타났다(<표 IV-14>).

<표 IV-15>에서, 11번 문항($\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$)은 각 변 일차식의 계수가 분수인 일차방정식의 해를 이항을 사용하지 않고 등식의 성질을 사용하여 해결하도록 하였다. 풀이 과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 32.4% (35명)로 나타났고, 이항을 사용하여 답을 맞은 학생은 18.5% (20명)로 나타났다. 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 0.9% (1명)로 나타났고, 푸는 방법은 잘 알고 있으나 잘못된 표기방법을 사용한 학생은 1.9% (2명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 12.0% (13명)로 나타났고, 풀지 않은

학생은 34.3% (37명)로 나타났다. 이러한 결과는 분수를 계수로 가지는 일차방정식의 해를 구하기 어려운 것을 의미한다.

<표 IV-15> 11번 문항($\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$ 이항사용하지 말 것)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음 (이항사용안함)	35 (32.4%)	108 (100%)
답만 맞음 (이항사용)	20 (18.5%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	1 (0.9%)	108(100%)
푸는 방법은 잘 알고 있으나 잘못된 표기방법	2 (1.9%)	108 (100%)
답 틀림	13 (12.0%)	108 (100%)
풀지 않음	37 (34.3%)	108 (100%)

<표 IV-16> 9번 문항($-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$)과 11번 문항($\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
9번 맞음	48 (44.4%)	108 (100%)
11번 맞음	35 (32.4%)	108 (100%)

9번 문항($-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$)과 11번 문항($\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$)에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 모두 계수가 분수인 일차방정식의 해를 이항을 사용하지 않고 등식의 성질을 사용하여 해결하도록 하였다. 하지만 9번 문항을 맞은 학생은 44.4% (48명)로 나타났고, 11번 문항을 맞은 학생은 32.4% (35명)로 나타났다. 이러한 결과는 한 번에 일차식 하나가 주어졌을

때보다 각 변에 일차식이 주어졌을 때 학생들이 일차방정식의 해를 구하기 어려웠음을 알 수 있다. 또한 각 변의 일차식의 계수가 분수로 주어졌을 때에는 이항을 사용하지 않고 등식의 성질만을 사용하여 해결하기 어려웠음을 의미한다(<표 IV-16>).

나. 일차연립방정식에 대한 학생들의 반응 분석

<표 IV-17> 12번 문항(연립방정식의 활용)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
가감법과 대입법 두 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구함	13 (12.0%)	108 (100%)
가감법과 수치대입법 두 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구함	7 (6.5%)	108 (100%)
대입법과 수치대입법 두 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구함	1 (0.9%)	108 (100%)
가감법 한 가지 방법만을 사용하여 연립 방정식의 해를 구함	34 (31.5%)	108 (100%)
대입법 한 가지 방법만을 사용하여 연립 방정식의 해를 구함	14 (13.0%)	108 (100%)
수치대입법 한 가지 방법만을 사용하여 연립 방정식의 해를 구함	15 (13.9%)	108(100%)
가감법 한 가지 방법을 두 가지 방법이라 생각하여 연립 방정식의 해를 구함	5 (4.6%)	108(100%)
연립 방정식의 해를 구하지 못함	19 (17.6%)	108(100%)

12번 문항(철수는 문구점에서 한 개에 80원 하는 연필과 한 개에 50원 하는 지우개를 합쳐 35개를 샀다. 그 35개의 값은 2350원 이었다. 철수는

연필과 지우개를 각각 몇 개씩 샀는가?)은 연립방정식의 활용 문제를 두 가지 방법을 사용하여 해결하도록 하였다. 12번 문항에 대한 학생들의 반응을 분석하면 다음과 같다. 두 가지 방법을 알고 있는 학생은 각각 가감법과 대입법 두 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구한 학생은 12.0% (13명)로 나타났으며, 가감법과 수치대입법 두 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구한 학생은 6.5% (7명)로 나타났고, 대입법과 수치대입법 두 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구한 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 한 가지 방법을 알고 있는 학생은 각각 가감법 한 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구한 학생은 31.5% (34명)로 나타났으며, 대입법 한 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구한 학생은 13.0% (14명)로 나타났고, 수치대입법 한 가지 방법을 사용하여 연립 방정식의 해를 구한 학생은 13.9% (15명)로 나타났다. 그리고 연립방정식의 해를 구하지 못하는 학생이 17.6% (19명)로 나타났고, 가감법 한 가지 방법으로 x 를 소거하는 방법과 y 를 소거하는 방법이 서로 다른 방법인줄 알고 연립 방정식의 해를 구한 학생이 4.6% (5명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 연립 방정식의 활용을 연립방정식의 수식으로 표현하기 힘들어 함을 알 수 있으며 연립방정식의 해를 구할 때 가감법은 잘 사용할 수 있으나 대입법이나 수치대입법에 대해서는 어려워하는 것을 의미한다. 또한 가감법에서 x 를 소거하는 방법과 y 를 소거하는 방법이 둘 다 같은 가감법을 사용한 방법임을 잘 알지 못하고 있음을 알 수 있다. 그러므로 연립 방정식의 교수·학습 과정에서 여러 가지 방법을 사용하여 연립 방정식 활용의 해를 구할 수 있도록 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-17>).

<그림 IV-1> 12번 문항에 대한 학생(3명) 반응의 한 예

풀이과정-방법1)

$$\begin{array}{r} x+y=35 \\ 80x+50y=2350 \\ -50x+50y=1150 \\ \hline 30x=-600 \\ x=20 \\ y=15 \end{array}$$

풀이과정-방법2)

$$\begin{array}{r} x+y=35 \\ 80x+50y=2350 \\ -80x+80y=2800 \\ \hline 30y=450 \\ y=15 \\ x=20 \end{array}$$

풀이과정-방법1)

$$\begin{array}{r} x+y=35 \\ 80x+50y=2350 \\ -50x+50y=1150 \\ \hline 30x=-600 \\ x=20 \\ y=15 \end{array}$$

풀이과정-방법2)

$$\begin{array}{r} x+y=35 \\ 80x+50y=2350 \\ -80x+80y=2800 \\ \hline 30y=450 \\ y=15 \\ x=20 \end{array}$$

풀이과정-방법1) 연립: x , 지우개: y

$$\begin{array}{r} 80x+50y=2350 \\ x+y=35 \quad \times 50 \\ \hline 80x+50y=2350 \\ 50x+50y=1750 \\ \hline 30x=600 \\ x=20, y=15 \end{array}$$

풀이과정-방법2) 연립: y , 지우개: x

$$\begin{array}{r} y+x=35 \quad \times 50 \\ 50y+50x=2350 \\ -50y+50x=1150 \\ \hline 30x=600 \\ x=20, y=15 \end{array}$$

<그림 IV-1>에서, 학생들이 풀이방법1에서 가감법을 사용하여 y 를 소거하였고, 풀이방법2에서도 가감법을 사용하여 x 값을 소거하였다. 가감법 한 가지 방법을 두 가지 방법이라 생각하여 연립 방정식의 해를 구한 예로 볼 수 있다(<그림 IV-1>).

<표 IV-18> 13번 문항($\begin{cases} 5x+4y=7 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞춤	85 (78.7%)	108 (100%)
해를 다 구하지 않음	15 (13.9%)	108 (100%)
답 틀림	8 (7.4%)	108 (100%)

13번 문항($\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$)은 미지수가 2개인 연립일차방정식의 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 78.7% (85명)로 나타났고, 해를 다 구하지 않은 학생은 13.9% (15명)로 나타났으며, 답을 틀린 학생은 7.4% (8명)로 나타났다. 이러한 결과는 미지수가 2개인 연립일차방정식의 해를 구하는데 78.7%의 학생들이 2개의 미지수의 값을 구할 수 있음을 알 수 있고, 13.9%의 학생들이 미지수가 2개인 것을 확인하지 못하고 1개의 미지수의 값만 구한다는 것을 알 수 있다(<표 IV-18>).

<표 IV-19> 14번 문항($\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞춤	55 (50.9%)	108 (100%)
연립방정식 푸는 방법은 아는 듯하나 세 미지수에 대하여 정리를 하지 못함	14 (13.0%)	108 (100%)
해를 다 구하지 못함	9 (8.3%)	108 (100%)
답 틀림	14 (13.0%)	108 (100%)
풀지 않음	16 (14.8%)	108 (100%)

14번 문항($\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$)은 미지수가 3개인 연립일차방정식의 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 50.9% (55명)로 나타났고, 연립방정식 푸는 방법은 아는 듯하나 세 미지수에 대하여 정리를 하지 못하는 학생은 13.0% (14명)로 나타났으며, 해를 다 구하지 못한 학생은 8.3% (9명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 13.0% (14명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 14.8% (16명)로 나타났다. 이러한 결과는 연립일차방정식의 해결방

<그림 IV-2> 14번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

(a)

$$\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

– 27 –

<표 IV-20> 13번 문항($\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$)과 14번 문항($\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$)에

대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
13번과 14번 모두 맞음	55 (50.9%)	108 (100%)
13번 맞고, 14번 틀림	30 (27.8%)	108 (100%)
13번 틀리고, 14번 맞음	13 (12.0%)	108 (100%)
13번과 14번 모두 틀림	10 (9.3%)	108 (100%)

13번 문항($\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$)은 미지수가 2개인 일차 연립 방정식의 해를 구하게 하였고, 14번 문항($\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$)은 미지수가 3개인 일차 연립 방정식의 해를 구하도록 하였다. 두 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하면 다음과 같다. 13번 문항과 14번 문항을 모두 맞은 학생은 50.9%(55명)로 나타났으며, 13번 문항은 맞고 14번 문항은 틀린 학생은 27.8%(30명), 14번 문항은 맞고 13번 문항은 틀린 학생은 12.0%(13명), 그리고 13번 문항과 14번 문항을 모두 틀린 학생은 9.3% (10명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 가감법 또는 대입법 등을 이용하여 미지수가 2개인 일차 연립 방정식을 해결할 수 있으나 미지수가 3개인 일차 연립 방정식에 대해서 해를 구하기 어려운 것을 의미한다. 또한 14번 문항을 분석하였을 때 연립 방정식을 해결하는 방법에 대해서는 알고 있으나 미지수가 3개인 일차 연립 방정식에 대하여 어떻게 정리를 해야 하는지 그 방법을 알지 못하여 해를 구하지 못하고 있는 학생이 13.0% (14명)로 나타났다. 이는 일차 연립 방정식의 교수·학습 과정에서 미지수가 2개인 일차 연립 방정식의 해를 구하는 방법 이외에 미지수가 3개인 일차 연립식의 해를 구하는 방법을 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-20>).

2. 이차 및 삼차방정식에 대한 분석

가. 이차방정식에 학생들의 반응 분석

<표 IV-21> 15번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$ 인수분해)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음 (인수분해 사용)	88 (81.4%)	108 (100%)
인수분해는 잘 하였으나 해를 구하지 못함	14 (13.0%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	2 (1.9%)	108 (100%)
답 틀림	3 (2.8%)	108 (100%)
풀지 않음	1 (0.9%)	108 (100%)

15번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$)은 이차 방정식을 인수분해를 사용하여 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 81.4% (88명)로 나타났고, 인수분해는 잘 하였으나 해를 구하지 못한 학생은 13.0% (14명)로 나타났으며, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 1.9% (2명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 2.8% (3명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 이러한 결과는 81.5%의 학생들이 인수분해를 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있음을 의미한다. 그리고 13.0%의 학생이 인수분해를 어떻게 하는지는 알고 있으나 인수분해 결과에 따라 이차 방정식의 해를 구하는 데 어려움이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-21>).

<그림 IV-3> 15번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
 $a+b = -2$ $ab = -3$
 $\therefore a = -3$ $b = 1$
 $(x-3)(x+1)$

풀이과정)
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 3 = -3x$
 $x^2 + 1 = -1x$
 $-1x \quad | 0$
 $\therefore (x-3)(x+1)$

<그림 IV-3>에서, 학생들이 올바른 풀이과정을 사용하여 인수분해까지는 잘 하였으나 이차방정식의 해를 구하지 못하였다.

<표 IV-22> 16번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$ 근의 공식)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음 (근의 공식 사용)	85 (78.7%)	108 (100%)
답 틀림	19 (17.6%)	108 (100%)
풀지 않음	4 (3.7%)	108 (100%)

16번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$)은 이차 방정식을 근의 공식을 사용하여 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 78.7% (85명)로 나타났고, 답이 틀린 학생은 17.6% (19명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 3.7% (4명)로 나타났다. 이러한 결과는 78.7%의 학생들이 근의 공식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있을 의미한다. 그리고 21.3%의 학생이 근의 공식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하는데 어려움이 있음을 의미하고 있다.

<표 IV-23> 17번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$ 완전제곱식)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음 (완전제곱식 사용)	55 (50.9%)	108 (100%)
답만 맞음 (완전제곱식 사용 안함)	2 (1.9%)	108 (100%)
$(x+3)^2 = 11$ 에서 더 이상 풀지 못하거나 잘못 풀이함	24 (22.2%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞음	1 (0.9%)	108(100%)
답 틀림	4 (3.7%)	108 (100%)
풀지 않음	22 (20.4%)	108 (100%)

17번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$)은 이차 방정식을 완전제곱식을 사용하여 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 50.9% (55명)로 나타났고, 완전제곱식을 사용하지 않고 이차방정식의 해를 구한 학생은 1.9% (2명)로 나타났다. $(x+3)^2 = 11$ 에서 더 이상 풀지 못하거나 잘못 풀이한 학생은 22.2% (24명)로 나타났고, 등호에 대한 실수가 있는 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 3.7% (4명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 20.4% (22명)로 나타났다. 이러한 결과는 50.9%의 학생들이 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있을 의미한다. 그리고 22.2%의 학생이 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하는 방법을 정확히 알고 있지 못함을 알 수 있고, 26.1%의 학생들은 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 없음을 의미하고 있다(<표 IV-23>).

<그림 IV-4> 17번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정)

$$x^2 + 6x - 2 + 11 = 11$$

$$x^2 + 6x + 9 = 11$$

$$(x+3)^2 = 11$$

풀이과정)

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 2 + \frac{36}{4}$$

$$\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 = \frac{8 + 36}{4} = \frac{44}{4} = 11$$

<그림 IV-4>에서, 학생들이 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 때 $(x+3)^2 = 11$ 에서 더 이상 정리를 하지 못하였다.

<표 IV-24> 15번($x^2 - 2x - 3 = 0$ 인수분해), 16번($x^2 + 6x - 2 = 0$ 근의 공식), 17번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$ 완전제곱식)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
15번, 16번, 17번 모두 맞음	41 (37.8%)	108(100%)
15번과 16번 맞음	30 (27.8%)	108(100%)
16번과 17번 맞음	6 (5.6%)	108(100%)
15번과 17번 맞음	8 (7.4%)	108(100%)
15번만 맞음	11 (10.2%)	108(100%)
16번만 맞음	6 (5.6%)	108(100%)
17번만 맞음	0 (0%)	108(100%)
15번, 16번, 17번 모두 틀림	6 (5.6%)	108(100%)

15번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$)은 이차 방정식을 인수분해를 사용하여 해를 구하도록 하였고, 16번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$)은 이차 방정식을 근의 공식을 사용하여 해를 구하도록 하였으며, 17번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$)은 이차 방정식을 완전

제곱식을 사용하여 해를 구하도록 하였다. 세 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하면 다음과 같다. 이차 방정식의 해를 세 가지 방법을 사용하여 15번 문항, 16번 문항, 17번 문항을 모두 맞은 학생은 37.8% (41명)로 나타났다. 이차 방정식의 해를 두 가지 방법을 사용하여 각각 15번 문항과 16번 문항을 맞은 학생은 27.8% (30명)로 나타났으며, 16번 문항과 17번 문항을 맞은 학생은 5.6% (6명)로 나타났고, 15번 문항과 17번 문항을 맞은 학생은 7.4% (8명)로 나타났다. 이차 방정식의 해를 한 가지 방법을 사용하여 각각 15번만 맞은 학생은 10.2% (11명)로 나타났으며, 16번만 맞은 학생은 5.6% (6명)로 나타났고, 17번만 맞은 학생은 0% (0명)로 나타났다. 이차 방정식의 해를 구하지 못하는 학생은 5.6% (6명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 인수분해를 사용하여 이차 방정식을 해결할 수 있으나 근의 공식이나 완전제곱식을 사용하여 이차 방정식을 해결하기 어려운 것을 의미한다. 그러므로 이차 방정식의 교수·학습 과정에서 인수분해 공식 이외에 근의 공식과 완전제곱식 사용하여 이차 방정식을 해결할 수 있도록 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-24>).

<표 IV-25> 18번 문항 ($x^2 - x + 3 = 3$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞춤	85 (78.6%)	108 (100%)
풀이 과정은 잘 아는듯하나 해를 구하지 못함	1 (0.9%)	108 (100%)
등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞춤	3 (2.8%)	108 (100%)
$x = 0$ 만 구함	1 (0.9%)	108(100%)
$x = 1$ 만 구함	14 (13.0%)	108(100%)
답 틀림	2 (1.9%)	108 (100%)
풀지 않음	2 (1.9%)	108 (100%)

18번 문항 ($x^2 - x + 3 = 3$)은 우변이 0이 아닌 이차방정식의 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 78.6% (85명)로 나타났고, 풀이 과정은 잘 아는듯하나 해를 구하지 못하는 학생은 0.9% (1명)로 나타났으며, 등호에 대한 실수가 있으나 답은 맞은 학생은 2.8% (3명)로 나타났다. 해를 다 구하지 못한 학생은 $x = 0$ 만 해라고 생각한 학생은 0.9% (1명)로 나타났고, $x = 1$ 만 해라고 생각한 학생은 13.0% (14명)로 나타났다. 답이 틀린 학생은 1.9% (2명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 1.9% (2명)로 나타났다. 이러한 결과는 81.5%의 학생은 우변이 0이 아닌 이차방정식의 해를 구할 수 있음 알 수 있고, 18.5%의 학생이 우변이 0이 아닌 이차방정식의 해를 구하는데 어려움이 있음을 의미한다. 그 중 0.9%의 학생은 수치대입법을 이용하여 이차방정식의 해를 $x = 0$ 이라고 하였고, 13.0%의 학생은 $x(x-1) = 0$ 에서 $x = 1$ 만 해가 된다고 하였으므로, 우변이 0이 아닌 이차방정식에서 해를 구하는 방법과 인수분해 결과에 따라 이차방정식의 해를 구하는 데 어려움이 있음을 시사하고 있다. 그러므로 이차방정식의 교수·학습 과정에서 우변이 0이 아닌 이차방정식의 해를 구하는 방법과 인수분해 결과에 따라 어떻게 이차방정식의 해가 구해지는지 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-25>).

<그림 IV-5> 18번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정) $x^2 - x + 3 = 3$	풀이과정) $x^2 - x + 3 = 3$
$x^2 - x = 0$	$x^2 - x = 0$
$x(x-1) = 0$	$x(x-1) = 0$
$x = 1$	$x - 1 = 0$
	$x = 1$

<그림 IV-5>에서, 학생들이 올바른 풀이과정을 사용하여 인수분해까지는 하였으나 해를 다 구하지 못하고 $x = 1$ 만 해가 된다고 하였다.

<표 IV-26> 19번 문항(이차방정식의 활용(도형))에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	76 (70.3%)	108 (100%)
답만 맞음	3 (2.8%)	108 (100%)
올바른 식은 잡았으나 답을 구하지 못함	11 (10.2%)	108 (100%)
답 틀림	3 (2.8%)	108 (100%)
풀지 않음	15 (13.9%)	108 (100%)

19번 문항(가로의 길이가 $15cm$, 세로의 길이가 $10cm$ 인 직사각형에서 가로, 세로를 똑같이 xcm 씩 늘였더니 처음보다 넓이가 $150cm^2$ 만큼 넓어졌다. 이때 늘어난 길이를 구하여라.)은 이차방정식을 활용하여 도형의 길이를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 70.3% (76명)로 나타났고, 답만 맞은 학생은 2.8% (3명)로 나타났으며, 올바른 식은 잡았으나 답을 구하지 못한 학생은 10.2% (11명)로 나타났다. 답을 틀린 학생은 2.8% (3명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 13.9%(15명)로 나타났다. 이러한 결과는 70.3%가 이차방정식을 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있음을 알 수 있고, 10.2%가 문제와 도형을 보고 이차방정식은 잡을 수 있으나 여러 가지 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구하는데 어려움이 있음을 알 수 있다. 그리고 16.7%의 학생은 이차방정식을 활용하여 도형의 길이를 구할 수 없음을 의미하고 있다(<표 IV-26>).

<그림 IV-6> 19번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정)	풀이과정)
차음 넓이 = 10x10	차음 넓이 = 150
넓이 = 차음 + 150	넓이 = 차음 + 150
$= (10+x)(10+x)$	$(15+x)(10+x) = 300$
$(10+x)(10+x) = 100 + 150 = 250$	$150 + 25x + x^2 = 300$
$150 + 25x + x^2 = 300$	$x^2 + 25x - 150 = 0$
$x^2 + 25x - 150 = 0$	
$(x+10)(x-5) = 0$	
$\therefore x = 5$	

<그림 IV-6>에서, 왼쪽 풀이과정에서는 학생이 올바른 풀이과정으로 답을 구하였으나 조건에 맞는 답을 찾지 못하였고, 오른쪽 풀이과정에서는 학생이 올바른 식은 잡았으나 이차방정식에서 더 이상 문제를 해결하지 못하였다.

나. 이차연립방정식 및 삼차방정식에 대한 학생들의 반응 분석

<표 IV-27> 20번 문항($\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞춤	46 (42.6%)	108 (100%)
해를 다 구하지 못함	27 (25.0%)	108 (100%)
답 틀림	11 (10.2%)	108 (100%)
풀지 않음	24 (22.2%)	108 (100%)

20번 문항($\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$)은 미지수가 2개인 일차방정식과 미지수가 2개인 이차방정식을 연립하여 해를 구하도록 하였다. 풀이과정을 잘 알고 있

으며 답을 맞은 학생은 42.6% (46명)로 나타났고, 해를 다 구하지 못한 학생은 25.0% (27명)로 나타났다. 답을 틀린 학생은 10.2% (11명)로 나타났고, 풀지 않은 학생은 22.2% (24명)로 나타났다. 이러한 결과는 42.6%의 학생이 미지수가 각각 2개인 일차방정식과 이차방정식을 연립하여 해를 구하는데 어려움이 없음을 의미하고, 25.0%의 학생이 미지수가 2개인 것을 확인하지 못하고 미지수의 값을 다 구하지 않았음을 확인할 수 있다. 32.4%의 학생들은 미지수가 2개인 일차방정식과 미지수가 2개인 이차방정식을 연립하여 해를 구하는데 어려움이 있음을 의미한다. 그러므로 일차방정식과 이차방정식, 그리고 연립방정식의 교수·학습 과정에서 미지수가 2개인 일차방정식과 미지수가 2개인 이차방정식을 연립하여 해를 구할 수 있도록 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-27>).

<그림 IV-7> 20번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정)	풀이과정)
$x = y + 2$	$x = y + 2$
$(y+2)^2 - y^2 = 34$	$y^2 + 3y + 4 - y^2 = 34$
$= y^2 + 4y + 4 - y^2 = 34$	$2y^2 + 4y - 30 = 0$
$= 2y^2 + 4y - 30 = 0$	$2y^2 + 4y - 30 = 0$
$= y^2 + 2y - 15 = 0$	$(2y-6)(y+5) = 0$
$\begin{matrix} 1 & y & + & 3 \\ 1 & y & - & 5 \end{matrix} \quad y = 3 \text{ (제거)}$	$y = 3$
$x - 3 = 2$	$x = 5$
$x = 5$	
$x = 5$	
$y = 3$	

<그림 IV-7>에서, 학생들이 올바른 풀이과정을 사용하여 문제를 풀었으나 y 에 대한 이차방정식의 y 값이 두개인데 하나만 구해서 주어진 문제의 해를 다 구하지 못하였다.

<표 IV-28> 21번 문항($x^3 + 1 = 0$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	54 (50.0%)	108 (100%)
인수분해는 하였으나 해를 구하지 못함	13 (12.0%)	108 (100%)
실근만 구하고 허근을 구하지 못함	14 (13.0%)	108 (100%)
허근만 구하고 실근을 구하지 못함	1 (0.9%)	108 (100%)
풀지 않음	26 (24.1%)	108 (100%)

21번 문항($x^3 + 1 = 0$)은 삼차 방정식의 해를 구하도록 하였다. 21번 문항에 대한 학생들의 반응을 분석하면 다음과 같다. 21번 문항에 대하여 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 50.0% (54명)로 나타났으며, 인수분해는 하였으나 해를 구하지 못한 학생은 12.0% (13명)로 나타났다. 근을 다 구하지 못한 학생은 각각 실근만 구하고 허근을 구하지 못한 학생은 13.0% (14명)로 나타났고, 허근만 구하고 실근을 구하지 못한 학생은 0.9% (1명)로 나타났다. 그리고 삼차 방정식의 해를 구하지 못한 학생들은 24.1% (26명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 인수분해 공식은 잘 알고 있으나 인수분해를 한 뒤 해를 구하는 방법을 모르거나 허근은 해가 되지 않는다고 생각하는 경우가 많음을 알 수 있다. 또한 삼차 방정식의 인수분해 공식을 알지 못하여 삼차 방정식의 해를 구할 수 없다는 것을 의미한다. 그러므로 삼차 방정식의 교수·학습 과정에서 삼차 방정식을 해결할 수 있도록 인수분해 공식과 함께 실근과 허근의 개념에 대한 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-28>).

<그림 IV-8> 21번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정) $(x+1)(x^2-x+1)=0$
 $\therefore x = -1$

풀이과정)
 $x^2-x+1=0$
 $(x+1)(x+1)$
 $x^2-x+1=0$
 $b^2-4ac = 1-4 = -3$
 $\therefore$ 실근 없음
 $\rightarrow (x+1)x(x^2-x+1)=0$
 $x = -1$

<그림 IV-8>에서, 학생들이 올바른 풀이방법으로 문제를 풀었으나 실근만 구하고 허근을 구하지 못하거나 허근은 해가 되지 않는다고 생각하였다.

<표 IV-29> 22번 문항(삼차방정식의 활용(도형))에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞음	1 (0.9%)	108 (100%)
올바른 식은 잡았으나 풀지 못함	13 (12.0%)	108 (100%)
삼차방정식의 해는 모두 구하였으나 그 중 답을 구하지 못함	12 (11.0%)	108(100%)
해를 다 구하지 못함 (실근만 구함)	22 (20.4%)	108 (100%)
$x^2 - 20x + 50 = 0$ 이 근을 가지지 않는다고 판단	2 (1.9%)	108(100%)
답 틀림	2 (1.9%)	108 (100%)
풀지 않음	56 (51.9%)	108 (100%)

22번 문항은 도형을 이용한 삼차 방정식의 활용 문제를 해결 하도록 하였다. 22번 문항에 대한 학생들의 반응을 분석하면 다음과 같다. 22번 문항에

대하여 풀이과정을 잘 알고 있으며 답을 맞은 학생은 0.9% (1명)로 나타났으며, 도형을 보고 올바른 식을 잡았으나 문제를 해결하지 못한 학생은 12.0% (13명)로 나타났다. 삼차 방정식의 해는 모두 구하였으나 그 중 답을 구하지 못한 학생은 11.0% (12명)로 나타났고, 해를 다 구하지 못하거나 실근만 해라고 생각한 학생은 20.4% (22명)로 나타났으며, 특히 $x^2 - 20x + 50 = 0$ 이 근을 가지지 않는다고 잘 못 판단하여 답을 구한 학생은 1.9% (2명)로 나타났다. 답이 틀리거나 삼차 방정식의 해를 구하지 못하는 학생은 53.8% (58명)로 나타났다. 이러한 결과는 학생들이 도형에 관한 삼차 방정식의 활용 문제를 해결하기 어려움을 알 수 있다. 올바른 식을 잡았으나 풀지 못하는 학생들은 조립제법을 활용할 수 없음을 의미하고, 많은 학생들이 21번 문항에서도 볼 수 있었듯이 허근은 삼차 방정식의 해가 될 수 없는 것으로 알고 있거나 $x^2 - 20x + 50 = 0$ 의 판별을 잘 못하여 근을 가지지 않는다고 생각하는 경우가 존재하였다. 도형을 이용한 삼차 방정식을 풀지 못하는 학생이 다수 존재하는 것으로 보아 삼차 방정식의 교수·학습 과정에서 도형을 이용한 삼차 방정식의 활용 문제를 해결할 수 있도록 조립제법을 이용하여 삼차 방정식의 해를 구하는 방법과 함께 실근과 허근의 개념, 근의 판별식에 대한 피드백 할 필요성이 있음을 시사하고 있다(<표 IV-29>).

<그림 IV-9> 22번 문항에 대한 학생(2명) 반응의 한 예

풀이과정) $(20-2x)(30-2x)(x) = 1000$ $(4x^3 - 100x^2 + 600x - 1000) = 1000$ $4x^3 - 100x^2 + 600x - 1000 = 0$ $x^3 - 25x^2 + 150x - 250 = 0$ $\begin{array}{r rrrr} x & 1 & -25 & 150 & -250 \\ & & +5 & -100 & 250 \\ \hline & 1 & -20 & 50 & 0 \end{array}$ $(x-5)(x^2-20x+50)=0$ $x=5$	풀이과정) $x(30-20)(20-2x) = 1000$ $600 - 40x + 40x^2 - 4x^3 = 0$ $4x^3 - 40x^2 + 40x - 600 = 0$ $x^3 - 10x^2 + 10x - 150 = 0$ $\begin{array}{r rrrr} x & 1 & -10 & 10 & -150 \\ & & +5 & -50 & 50 \\ \hline & 1 & -5 & -40 & -100 \end{array}$ $(x-5)(x^2-20x+50)=0$ $\therefore x=5 \quad \therefore 10+5\sqrt{2} \quad \therefore 10-5\sqrt{2}$ $\therefore x=5$
--	---

<그림 IV-9>에서, 학생들이 올바른 풀이방법으로 문제를 풀었으나 실근만 구하고 허근을 구하지 못하거나 허근은 해가 되지 않는다고 생각하였다.

3. 일차, 이차, 삼차방정식의 개념들 간의 분석

가. 일차방정식과 이차방정식에 대한 학생들의 반응 분석

<표 IV-30> 8번 문항($x - 3 = 2$)과 15번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$ 인수분해)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
8번 문항 맞음	103 (95.3%)	108 (100%)
8번과 15번 문항 모두 맞음	84 (77.8%)	108 (100%)
8번 문항 맞고 15번 틀림	19 (17.6%)	108 (100%)
8번 문항 틀리고 15번 문항 맞음	5 (4.6%)	108(100%)
8번과 15번 모두 틀림	0 (0%)	108(100%)

8번($x - 3 = 2$) 문항은 일차방정식의 해를 구하도록 하였고, 15번($x^2 - 2x - 3 = 0$) 문항은 인수분해를 사용하여 이차방정식의 해를 구하도록 하였다. 8번 문항과 15번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 8번과 15번 문항을 모두 맞은 학생은 77.8% (84명)로 나타났고, 8번 문항만 맞은 학생은 17.6% (19명)로 나타났으며, 15번만 맞은 학생은 4.6% (5명)로 나타났다. 8번과 15번 문항을 모두 틀린 학생은 0% (0명)로 나타났다. 8번 문항을 해결하는 95.3% (103명)의 학생 중에서 15번 문항을 해결할 수 있는 학생이 81.6% (84명)이고, 해결할 수 없는 학생이 18.4% (19명)임을 알 수 있다. 이러한 결

과는 대부분의 학생들(81.6%)이 일차방정식을 해결할 수 있고 이차방정식을 인수분해를 사용하여 해결할 수 있다는 것이다. 또한, 일부 학생들(18.4%)은 일차방정식을 해결할 수 있으나 인수분해를 사용하여 이차방정식은 해결하지 못하였다는 것이다. 8번 문항을 해결하지 못 하는 47% (5명)의 학생 중에서 15번 문항을 해결할 수 있는 학생이 100% (5명)이고, 15번 문항을 해결할 수 없는 학생이 0% (0명)임을 알 수 있다. 이는 일차방정식을 해결하지 못하는 학생 중에서 인수분해를 사용하여 이차방정식은 해결할 수 있는 학생이 100%이고, 일차방정식을 해결하지 못하는 학생 중에서 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결하지 못하는 학생이 0%임을 알 수 있다. 이러한 결과는 일차방정식을 해결할 수 있는 학생의 80% 이상이 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있음을 의미하고, 일차방정식을 해결할 수 없는 학생 중 100%가 인수분해 공식만을 이용하여 이차방정식의 해를 구하고 있음을 의미한다. 또한 일차방정식을 해결하기 위해서는 등식의 성질과 이항을 사용하여 해를 구해야하나 이차방정식은 문제에 따라 인수분해 공식만 외워서 구할 수 있으므로 일차방정식을 풀지 못하는 학생이 이차방정식을 풀 수 없다고 할 수 없음을 의미한다. 그러므로 일차방정식과 이차방정식의 교수·학습 과정에서 어떠한 방정식 사이에 연계가 있는지 피드백 할 필요성을 시사하고 있다(<표 IV-30>).

<표 IV-31> 8번 문항($x - 3 = 2$)과 16번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$ 근의 공식)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
8번 문항 맞은 학생	103 (95.3%)	108 (100%)
8번과 16번 문항 모두 맞음	83 (76.8%)	108 (100%)
8번 문항 맞고 16번 틀림	20 (18.5%)	108 (100%)
8번 문항 틀리고 16번 문항 맞음	2 (1.9%)	108(100%)
8번과 16번 모두 틀림	3 (2.8%)	108(100%)

8번($x - 3 = 2$) 문항은 일차방정식의 해를 구하도록 하였고, 16번($x^2 + 6x - 2 = 0$) 문항은 근의 공식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하도록 하였다. 8번 문항과 16번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 8번과 16번 문항을 모두 맞은 학생은 76.8% (83명)로 나타났고,, 8번 문항만 맞은 학생은 18.5% (20명)로 나타났으며, 16번만 맞은 학생은 1.9% (2명)로 나타났다. 8번과 16번 문항을 모두 틀린 학생은 2.8% (3명)로 나타났다. 8번 문항을 해결하는 95.3% (103명)의 학생 중에서 16번 문항을 해결할 수 있는 학생이 80.6% (83명)이고, 해결할 수 없는 학생이 19.4% (20명)임을 알 수 있다. 이러한 결과는 대부분의 학생들(80.6%)이 일차방정식을 해결할 수 있고 이차방정식을 근의 공식을 사용하여 해결할 수 있다는 것이다. 또한, 일부 학생들(19.4%)은 일차방정식을 해결할 수 있으나 근의 공식을 사용하여 이차방정식은 해결하지 못하였다는 것이다. 8번 문항을 해결하지 못 하는 4.7% (5명)의 학생 중에서 16번 문항을 해결할 수 있는 학생이 40% (2명)이고, 16번 문항을 해결할 수 없는 학생이 60% (3명)임을 알 수 있다. 이는 일차방정식을 해결하지 못하는 학생 중에서 근의 공식을 사용하여 이차방정식은 해결할 수 있는 학생이 40%이고, 일차방정식을 해결하지 못하는 학생 중에서 근의 공식을 사용하여 이차방정식을 해결하지 못하는 학생이 60%임을 알 수 있다. 이러한 결과는 일차방정식을 해결할 수 있는 학생의 80% 이상이 근의 공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있음을 의미하고, 일차방정식을 해결할 수 없는 학생 중 40%는 근의 공식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있고, 60%의 학생은 근의 공식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 없음을 의미한다. 또한 일차방정식을 해결하기 위해서는 등식의 성질과 이항을 사용하여 해를 구해야하나 이차방정식은 문제에 따라 근의 공식만 외워서 구할 수 있으므로 일차방정식을 풀지 못하는 학생이 이차방정식을 풀 수 없다고 할 수 없음을 의미한다. 그러므

로 일차방정식과 이차방정식의 교수·학습 과정에서 어떠한 방정식 사이에 연계가 있는지 피드백 할 필요성을 시사하고 있다(<표 IV-31>).

<표 IV-32> 8번 문항($x - 3 = 2$)과 17번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$ 완전제곱식)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
8번 문항 맞음	103 (95.3%)	108 (100%)
8번과 17번 문항 모두 맞음	56 (51.9%)	108 (100%)
8번 문항 맞고 17번 틀림	47 (43.5%)	108 (100%)
8번 문항 틀리고 17번 문항 맞음	0 (0%)	108(100%)
8번과 17번 모두 틀림	5 (4.6%)	108(100%)

8번($x - 3 = 2$) 문항은 일차방정식의 해를 구하도록 하였고, 17번($x^2 + 6x - 2 = 0$) 문항은 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하도록 하였다. 8번 문항과 17번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 8번과 17번 문항을 모두 맞은 학생은 51.9% (56명)로 나타났고, 8번 문항만 맞은 학생은 43.5% (47명)로 나타났으며, 17번만 맞은 학생은 0% (0명)로 나타났다. 8번과 17번 문항을 모두 틀린 학생은 4.6% (5명)로 나타났다. 8번 문항을 해결하는 95.3% (103명)의 학생 중에서 17번 문항을 해결할 수 있는 학생이 54.4% (56명)이고, 해결할 수 없는 학생이 45.6% (47명)임을 알 수 있다. 이는 일차방정식을 해결할 수 있고, 완전제곱식을 사용하여 이차방정식도 해결할 수 있는 학생이 54.4%이고, 일차방정식을 해결할 수 있으나 완전제곱식을 사용하여 이차방정식은 해결하지 못하는 학생이 45.6%임을 알 수 있다. 8번 문항을 해결하지 못하는 4.7% (5명)의 학생 중에서 17번 문항을 해결할 수 있는 학생이 0% (0명)이고, 17번 문항을 해결할 수 없는 학생이 100% (5명)임을 알 수 있다. 이는 일차방정식을 해결하지 못하는 학생 중에서 완

전제곱식을 사용하여 이차방정식은 해결할 수 있는 학생이 0%이고, 일차방정식을 해결하지 못하는 학생 중에서 완전제곱식을 사용하여 이차방정식을 해결하지 못하는 학생이 100%임을 알 수 있다. 이러한 결과는 일차방정식을 해결할 수 있는 학생의 50% 이상이 이차방정식을 해결할 수 있음을 의미하고, 일차방정식을 해결할 수 없는 학생 중 100%가 완전제곱식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없음을 알 수 있다. 이는 일차방정식을 해결할 수 없으나 인수분해 공식 또는 근의 공식만을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생들은 다수 존재하나 일차방정식을 해결할 수 없으나 완전제곱식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수는 있는 학생은 존재하지 않음을 의미한다. 또한 일차방정식의 성질을 잘 알지 못하여도 인수분해 공식 또는 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구할 수 있지만, 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하기 위해서는 일차방정식의 성질을 잘 알고 있어야 한다는 것을 의미한다. 그러므로 교수·학습 과정에서 일차방정식과 완전제곱식을 사용하여 이차방정식을 해결 할 때 어떠한 방정식 사이에 연계가 있는지 피드백 할 필요성을 시사하고 있다(<표 IV-32>).

나. 이차방정식과 삼차방정식에 대한 학생들의 반응 분석

<표 IV-33>에서, 15번($x^2 - 2x - 3 = 0$) 문항은 인수분해를 사용하여 이차방정식의 해를 구하도록 하였고, 21번($x^3 + 1 = 0$) 문항은 삼차방정식의 해를 구하도록 하였다. 15번 문항과 21번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 15번과 21번 문항을 모두 맞은 학생은 43.5%(47명)이고, 15번 문항만 맞은 학생은 39.8% (43명)로 나타났고, 21번만 맞은 학생은 6.5% (7명)로 나타났으며 15번과 21번 문항을 모두 틀린 학생은 10.2% (11명)로 나타났다. 15번 문항을 해결하는 83.4% (90명)의 학생 중에서 21번 문항을 해결할 수 있는 학생이 52.2% (47명)이고, 21번 문항을 해결할 수

없는 학생이 47.8% (43명)임을 알 수 있다. 이는 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생 중에서 삼차방정식도 해결할 수 있는 학생이 52.2% (47명)이고, 인수분해를 사용하여 이차방정식은 해결할 수 있으나 삼차방정식은 해결할 수 없는 학생이 47.8% (43명)임을 알 수 있다. 15번 문항을 해결하지 못 하는 16.6% (18명)의 학생 중 21번 문항을 해결할 수 있는 학생이 38.8% (7명)이고, 21번 문항을 해결할 수 없는 학생이 61.2% (11명)임을 알 수 있다.

<표 IV-33> 15번 문항($x^2 - 2x - 3 = 0$ 인수분해)과 21번 문항($x^3 + 1 = 0$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
15번 문항 맞음	90 (83.4%)	108 (100%)
15번과 21번 문항 모두 맞음	47 (43.5%)	108 (100%)
15번 문항 맞고 21번 틀림	43 (39.8%)	108 (100%)
15번 문항 틀리고 21번 문항 맞음	7 (6.5%)	108(100%)
15번과 21번 모두 틀림	11 (10.2%)	108(100%)

이는 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생 중에서 삼차방정식은 해결할 수 있는 학생이 38.8% (7명)이고, 이차방정식을 해결할 수 없는 학생 중에서 삼차방정식도 해결할 수 없는 학생이 61.2% (11명)임을 알 수 있다. 이러한 결과는 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생의 약 50%가 삼차방정식도 풀 수 있음을 알 수 있고, 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생의 약 60%가 삼차방정식도 풀 수 없음을 의미한다(<표 IV-33>).

<표 IV-34> 16번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$ 근의 공식)과 21번 문항($x^3 + 1 = 0$)
에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
16번 문항 맞음	85 (78.7%)	108 (100%)
16번과 21번 문항 모두 맞음	47 (43.5%)	108 (100%)
16번 문항 맞고 21번 틀림	38 (35.2%)	108 (100%)
16번 문항 틀리고 21번 문항 맞음	7 (6.5%)	108(100%)
16번과 21번 모두 틀림	16 (14.8%)	108(100%)

16번($x^2 + 6x - 2 = 0$) 문항은 근의 공식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하도록 하였고, 21번($x^3 + 1 = 0$) 문항은 삼차방정식의 해를 구하도록 하였다. 16번 문항과 21번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 16번과 21번 문항을 모두 맞은 학생은 43.5%(47명)이고, 16번 문항만 맞은 학생은 35.2% (38명)로 나타났고, 21번만 맞은 학생은 6.5% (7명)로 나타났으며 16번과 21번 문항을 모두 틀린 학생은 14.8% (16명)로 나타났다. 16번 문항을 해결하는 78.7% (85명) 학생 중에서 21번 문항을 해결할 수 있는 학생이 55.3% (47명)이고, 21번 문항을 해결할 수 없는 학생이 44.7 % (38명)임을 알 수 있다. 이는 근의 공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생 중에서 삼차방정식도 해결할 수 있는 학생이 55.3% (47명)이고, 근의 공식을 사용하여 이차방정식은 해결할 수 있으나 삼차방정식은 해결할 수 없는 학생이 44.7% (38명)임을 알 수 있다. 16번 문항을 해결하지 못 하는 21.3% (23명)의 학생 중 21번 문항을 해결할 수 있는 학생이 30.4% (7명)이고, 21번 문항을 해결할 수 없는 학생이 69.6% (16명)임을 알 수 있다. 이는 근의 공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생 중에서 삼차방정식은 해결할 수 있는 학생이 30.4% (7명)이고, 근의 공식을 사용하여 이차방

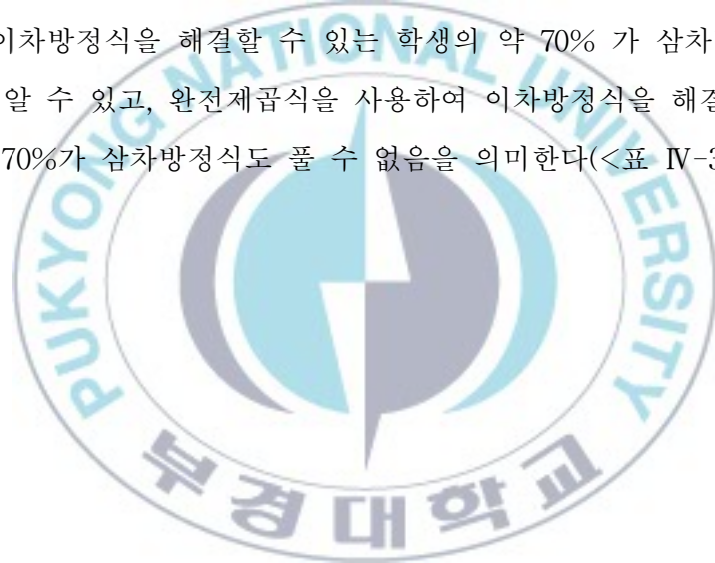
정식을 해결할 수 없는 학생 중에서 삼차방정식도 해결할 수 없는 학생이 69.6% (16명)임을 알 수 있다. 이러한 결과는 근의 공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생의 약 55%가 삼차방정식도 풀 수 있음을 알 수 있고, 근의 공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생의 약 70%가 삼차방정식도 풀 수 없음을 의미한다(<표 IV-34>).

<표 IV-35> 17번 문항($x^2 + 6x - 2 = 0$ 완전제곱식)과 21번 문항($x^3 + 1 = 0$)에 대한 학생들의 반응

반응 내용	반응 수 (%)	전체
17번 문항 맞음	56 (51.8%)	108 (100%)
17번과 21번 문항 모두 맞음	39 (36.1%)	108 (100%)
17번 문항 맞고 21번 틀림	17 (15.7%)	108 (100%)
17번 문항 틀리고 21번 문항 맞음	15 (13.9%)	108 (100%)
17번과 21번 모두 틀림	37 (34.3%)	108 (100%)

17번($x^2 + 6x - 2 = 0$) 문항은 완전제곱식을 사용하여 이차방정식의 해를 구하도록 하였고, 21번($x^3 + 1 = 0$) 문항은 삼차방정식의 해를 구하도록 하였다. 17번 문항과 21번 문항에 대한 학생들의 반응을 비교 분석하였을 때 17번과 21번 문항을 모두 맞은 학생은 36.1% (39명)이고, 17번 문항만 맞은 학생은 15.7% (17명)로 나타났고, 21번만 맞은 학생은 13.9% (15명)로 나타났으며 17번과 21번 문항을 모두 틀린 학생은 34.3% (37명)로 나타났다. 17번 문항을 해결하는 51.8% (56명) 학생 중에서 21번 문항을 해결할 수 있는 학생이 69.6% (39명)이고, 21번 문항을 해결할 수 없는 학생이 30.4% (17명)임을 알 수 있다. 이는 완전제곱식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생 중에서 삼차방정식도 해결할 수 있는 학생이 69.6% (39

명)이고, 완전제공식을 사용하여 이차방정식은 해결할 수 있으나 삼차방정식은 해결할 수 없는 학생이 30.4% (17명)임을 알 수 있다. 17번 문항을 해결하지 못 하는 48.2% (52명)의 학생 중 21번 문항을 해결할 수 있는 학생이 28.8% (15명)이고, 21번 문항을 해결할 수 없는 학생이 71.2% (37명)임을 알 수 있다. 이는 완전제공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생 중에서 삼차방정식은 해결할 수 있는 학생이 28.8% (15명)이고, 완전제공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생 중에서 삼차방정식도 해결할 수 없는 학생이 71.2% (37명)임을 알 수 있다. 이러한 결과는 완전제공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있는 학생의 약 70% 가 삼차방정식도 풀 수 있음을 알 수 있고, 완전제공식을 사용하여 이차방정식을 해결할 수 없는 학생의 약 70%가 삼차방정식도 풀 수 없음을 의미한다(<표 IV-35>).



V. 요약 및 결론

1. 요약

첫째, 학생들은 이항을 사용하여 일차방정식의 해를 구할 수 있으나 등식의 성질을 이용하여 일차방정식의 해를 구하기 어려워한다. 정수를 계수로 가지는 일차방정식의 해를 구할 수 있으나 분수를 계수로 가지는 일차방정식의 해를 구하기 어려워하며, 일차방정식의 미지수가 많아질수록 일차방정식의 해를 구하기 힘들어함을 알 수 있다.

둘째, 학생들은 연립일차방정식의 해를 구할 때 가감법은 잘 사용할 수 있으나 대입법이나 수치대입법에 대해서는 어려워하는 것을 알 수 있고, 연립방정식에서 미지수가 2개인 일차연립방정식보다 미지수가 3개인 일차연립방정식의 해를 구하기 어려워함을 알 수 있다.

셋째, 학생들은 인수분해를 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있으나 근의 공식이나 완전제곱식을 사용하여 이차방정식을 해결하기 어려운 것을 알 수 있다.

넷째, 학생들은 일차연립방정식보다 이차연립방정식의 해를 구하는데 어려움이 있음을 알 수 있다. 학생들은 삼차 방정식의 풀이방법(인수분해, 조립제법)을 알지 못하여 삼차 방정식의 해를 구하기 힘들어하며 실근과 허근의 개념을 잘 알지 못함을 알 수 있다.

2. 결론

첫째, 일차방정식의 교수·학습 과정에서 등식의 성질을 이용하여 이항을 사용할 수 있도록 지도한다. 일차방정식에서 정수 이외에 분수나 소수를 계수로 가지는 일차방정식의 해도 구할 수 있도록 학생 개개인의 문제 해결 결과를 분석하여 개별적인 프로그램을 구성하여 지도하도록 한다.

둘째, 연립일차방정식의 교수·학습 과정에서 가감법 이외에 대입법, 수치대입법과 같은 방법으로도 연립일차방정식을 해를 구할 수 있도록 지도한다. 미지수가 2개인 일차연립방정식과 미지수가 3개인 일차연립방정식의 풀이 과정에서 공통점과 차이점을 비교·분석하여 연립방정식의 해를 구할 수 있도록 지도한다.

셋째, 이차방정식의 교수·학습 과정에서 인수분해공식 이외에 근의 공식과 완전제곱식 사용하여 이차방정식을 해결할 수 있도록 한다.

넷째, 이차연립방정식과 삼차방정식의 교수·학습 과정에서 일차연립방정식과 이차연립방정식의 풀이 과정에서 공통점과 차이점을 비교·분석하여 이차연립방정식의 해를 모두 구할 수 있도록 지도한다. 삼차방정식을 해결할 수 있도록 여러 가지 공식(인수분해, 근의 공식, 조립제법, 완전제곱식 등)을 학생 개개인의 문제해결 결과를 분석하여 개별적인 교정 피드백을 할 수 있도록 지도한다.

참고 문헌

- [1] 남승인 (2004). 초등교사 교육을 위한 수학 교과교육 프로그램 개발, 교육인적자원부.
- [2] 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2012). 수학교육학신문, 서울:문음사.
- [3] Carroll, J. B. (1973) Discussant comments. In L. B. Resnick (Ed), Hierarchies in children's learning: A symposium. Instructional Science, 2, 311-362.
- [4] Gagné. R. M. (1970). The Conditions of Learning (2nd ed). New York: Holt Rinehart and Winstern.
- [5] Gagné. R. M. (1974). Task analysis: It's relations to content analysis, Presentation to Symposium' Content Analysis for Instructional Design,' Annual Meeting, AERA. Chicago, Illionis, April 18. p1-17.
- [6] Resnick Lauren B. & Ford Wendy W. (1981). The Psychology of Mathematics for Instruction. L. Erlbaum Associates.
- [7] NCTM (1980). An Agenda for Action : Recommendations for School mathematics of the 1980s. Reston, VA : The National Council of

Teachers of Mathematics, Inc.

- [8] NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics of the 1980s. Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- [9] NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- [10] Polya, G. (1957). How to solve it (2nd Ed.): A new aspect of mathematical method. 우정호(역) (1994). 어떻게 문제를 풀 것인가: 수학적 사고 방법. 서울: 천재교육.
- [11] Wickelgren, W. A. (1974). How to solve problem: Elements of a theory of problem and problem solving. San Francisco: W. H. Freeman & Co.

[부록]

학년	1	반		번호		이름		성별	남, 여
----	---	---	--	----	--	----	--	----	------

1. 방정식 $\square + 5 = 8$ 에 대한 해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

(답)

2. 방정식 $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$ 에 대한 해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

(답)

3. 방정식 $x + 4 = 9$ 에 대한 해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

(답)

4. 방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

(답)

5. 방정식 $4(x + 2) = 20$ 에 대한 해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

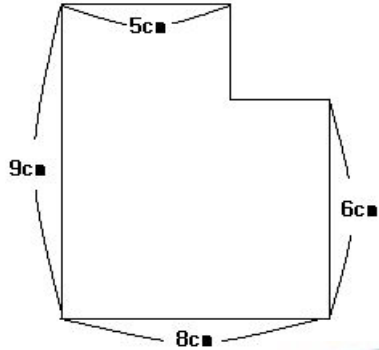
.....

.....

.....

(답)

6. 다음 [그림]에 주어진 도형의 넓이를 구하시오.



(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

7. 구슬이 12개 있다. 이 구슬을 한 주머니에 3개씩 넣으려고 한다. 몇 개의 주머니가 필요한가?

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

8. 방정식 $x - 3 = 2$ 에 대한 해를 등식의 성질을 이용하여 구하시오.

(단, 이항을 사용하여 풀지 말고, 꼭 등식의 성질을 이용하여 풀 것.)

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

9. 방정식 $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$ 에 대한 해를 등식의 성질을 이용하여 구하시오.

(단, 이항을 사용하여 풀지 말고, 꼭 등식의 성질을 이용하여 풀 것.)

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

10. 방정식 $0.4x + 2.3 = 4.5$ 에 대한
해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

12. 철수는 문구점에서 한 개에 80원 하는 연필과 한 개에 50원 하는 지우개를 합쳐 35개를 샀다. 그 35개의 값은 2350원 이었다. 철수는 연필과 지우개를 각각 몇 개 샀는가?

(위 12번 문제는 몇 가지 방법으로 풀 수 있습니다. 두 가지 방법으로 풀 수 있는 학생은 두 가지 방법으로 풀기 바랍니다. 만약 한 가지 방법으로 풀 수 있는 학생은 한 가지 방법으로 풀기 바랍니다.)

(풀이과정 - 방법1)

(답)

11. 방정식 $\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$ 에 대한
해를 구하시오.

(단, 이항을 사용하여 풀지 말고, 꼭 등식의 성질을 이용하여 풀 것.)

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

(답)

(풀이과정 - 방법2)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

13. 다음 연립방정식의 해를 구하시오.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

(풀이과정)

(답)

14. 다음 연립방정식의 해를 구하시오.

$$\begin{cases} x - y + z = 9 \\ 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 18 \end{cases}$$

(풀이과정)

(답)

15. 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 해를 인수분해를 이용하여 구하시오.

(단, 인수분해 이외의 방법으로는 풀지 말 것.)

(풀이과정)

(답)

16. 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 해를 근의 공식을 이용하여 구하시오.

(단, 근의 공식 이외의 방법으로는 풀지 말 것.)

(풀이과정)

(답)

17. 이차방정식 $x^2 + 6x - 2 = 0$ 의 해를
완전제곱식을 이용하여 구하시오.

(단, 완전제곱식 이외의 방법으로는 풀지 말 것.)

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

18. 이차방정식 $x^2 - x + 3 = 3$ 의 해를
구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

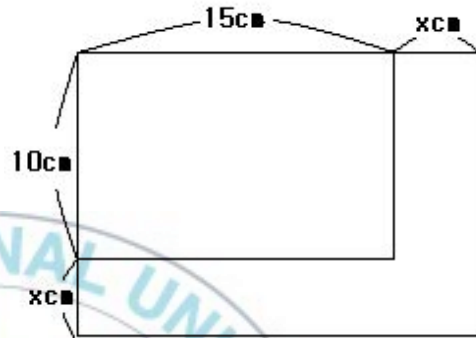
.....

.....

.....

(답)

19. 가로와 세로가 $15cm$, $10cm$ 인 직사각형에서 가로, 세로
를 똑같이 xcm 씩 늘였더니 처음
보다 넓이가 $150cm^2$ 만큼 넓어졌다.
이 때, 늘어난 길이를 구하여라.



(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

20. 다음 연립방정식의 해를 구하시오.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)

21. 삼차방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 해를 구하시오.

(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

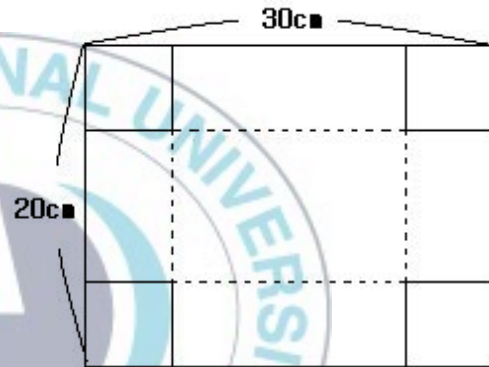
.....

.....

.....

(답)

22. 가로, 세로의 길이가 각각 $30cm$, $20cm$ 인 직사각형 모양의 두꺼운 종이의 네 모퉁이에서 [그림]과 같이 한 변의 길이가 xcm 정사각형 4개를 잘라 낸 다음, 점선을 따라 접어서 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피를 $1000cm^3$ 가 되게 하려면 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 얼마로 해야 하는가?



(풀이과정)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(답)