교 육 학 석 사 학 위 논 문

Maple을 이용한 고등학교 통계 단원의 수업 모형 탐색

2002년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

엄 용 섭

교 육 학 석 사 학 위 논 문

Maple을 이용한 고등학교 통계 단원의 수업 모형 탐색

지도교수 박 용 범

이 논문을 교육학석사 학위 논문으로 제출함

2002년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

엄 용 섭

엄용섭의 교육학석사 학위논문을 인준함

2002년 6월 21일

주 심 이학박사 표 용 수 (인)

위 원 이학박사 장 대 흥 (인)

위 원 이학박사 박 용 범 (인)

목 차

표목차

그림목차

A STUDY ON THE TEACHING MODEL IN STATISTICS WITH THE USE OF MAPLE

Yong-sup Eom

Graduate School of Education

Pukyong National University

Abstract

The purpose of the study is to establish a teaching model with the use of Maple, a symbolic manipulation computer program.

The expected effects are:

1) to motivate passive students to get involved in the class activities.

2) to motivate students to explore mathematical objects by transforming abstract and formal concepts into visual and intuitional ones.

3) to motivate students to form mathematical concepts of the learning contents for themselves by the use of interactive worksheets.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

학창시절에 가장 어려워했던 과목을 말하라고 하면 많은 사람들이 수학을 이야기한다. 이와 같은 결과가 나온 이유는 여러 가지가 있겠지만 학교에서 배운 수학의 많은 부분이 현실 생활에서 이용되지 않는다는 생각과 조금의 실수로 많은 시간과 노력을 들인 풀이가 엉망이 되어버린 경험이 있었기 때문일 것이다.
많은 학생들은 수학 수업에 적극적이지 않으며 단지 진학을 위하여 수학을 하는 경우가 많아 수학적인 사고력의 배양보다는 수학의 결과를 암기하는 방향으로 이어져 현대 수학에서 중요하게 여기는 구성주의적 수학 지식의 확립과는 동떨어진 수업이 되고 만다.

따라서 학생들의 흥미를 자극하여 적극적으로 수업에 끌어들이는 것이 우선적으로 필요하며 현재의 수업처럼 주입식, 강의식 수업은 지양하여야 한다. 확률과 통계단원은 실제 생활에서 많이 접하고 있는 단원이다.

매일 뉴스에서 날씨를 나타낼 때 사용되는 강수확률이나 각 방송사가 하는 프로그램 시청률조사, 상품의 시장점유율 조사, 선거 때마다 방송되는 여론조사 그리고 선거 개표가 완료되기 전에 우리나라의 모든 방송사가 경쟁적으로 발표하는 당선확률 방송 등이 그것이다.

하지만 학교수업의 현장에서 확률과 통계단원은 별로 중요하지도 않은 것으로 보이는 복잡한 계산공식과 한가지 결과를 얻기 위해 해야하는 단순한 계산이 너무 많아 결과를 보기 전에 지치는 경향이 있다.

수학교육의 중요한 부분인 ‘수학적인 사고의 배양’을 위해서는 계산의 엄밀성보다 자료를 해석하는 논리적인 능력이 중요시되어야 함은 너무나 당연하므로 많은 시간이 소요되는 단순한 계산을 통한 결과 도출을 강조하기보다는 학생의 주변에서 찾을 수 있는 현실적인 자료와 이 자료의 처리를 통한 통계의 결과를 해석하는 것을 강화하여 반영적 추상화를 통한 수학적 지식의 형성에 학습 목표를 두는 것이 필요하다.

수학교육용 소프트웨어는 수학 교수에서 생기는 여러 가지 문제점을 해결하는 역할을 할 수 있으며 학생들이 단순하면서 시간이 많이 소요되는 반복적인 계산에서 벗어나 수학교육목표에 맞는 창의적인 생각을 키울 수 있도록 도와준다.

오늘날의 지식정보화사회에서 능동적이고 창의적인 삶을 영위하려면 일상생활이나 학습에서 유용한 정보통신기술을 활용하여 스스로 새로운 지식과 정보를 선별하여 습득하고 자신의 목적에 맞게 가공-활용하여 다른 사람과 의사를 소통하고 공유하면서 새로운 지식을 창출하는 능력이 있어야 한다.

통계학은 주어진 자료를 그림이나 표로 정리하거나 간단한 수치로 요약하는 것이 전부가 아니라, 주어진 자료를 기초로 해서 보편 타당한 이론을 추론해 내는 학문의 한 분야로 그 중요성을 인정받고 있다.

학교교육에서도 컴퓨터를 비롯한 멀티미디어 시설과 초고속 정보 통신망의 구축, 인적 자원의 컴퓨터 활용을 위한 지속적인 연수 등으로 해서 컴퓨터와 컴퓨터 관련 테크놀러지를 교육의 중심으로 이끌어 나가는 추세이며 더불어 컴퓨터의 활용을 통한 교수·학습의 여건은 어느 때보다도 좋아졌다고 볼 수 있다. 이미 수학, 과학, 공학, 테크놀러지 분야에서는 컴퓨터가 활발히 이용되고 있다. 교육공학적인 측면에서 학생들이 흥미를 가지고 적극적으로 참여할 수 있는 교수·학습 방법으로 수학교육용 응용프로그램의 활용을 들 수 있다. 수학교육용

응용프로그램을 활용함으로써 이해하기 힘든 수학적 개념을 시각적·직관적으로 표현하고 조작과정에서 다양하고 새로운 경험을 제공받아 자율적인 문제해결능력과 수학적 창의성을 키울 수 있음에 대부분 공감하고 있다.

그럼에도 불구하고 많은 중등학교 수학교육에서 지식이 구체적 조작 없이 수동적으로 교사로부터 학생에게 옮겨지는 교사 중심적 수업에 주로 의존하며, 학생들은 수학하는(Doing Mathematics) 것이 아니라 단순히 교사의 행동을 흉내내고 있음으로 해서 새로운 개념이 확고한 수학적 지식으로 자리잡지 못하고 있는 실정이다. 실제로 컴퓨터를 수학교육에 활용하는 교사와 학생 수는 기대에 못 미치고 있고, 학교 현장에서 수학수업에 쉽게 적용할 소프트웨어 개발이 아직 부족하며 컴퓨터를 활용한 구체적인 교수·학습 방법론의 미비가 수학 교육에의 컴퓨터 도입에 큰 장애가 되고 있기 때문이다.

본 연구에서는 기호연산 실행조작이 가능한 컴퓨터 응용소프트웨어인 Maple을 사용하여 대화형 실행매체를 작성하고, 학생들로 하여금 스스로 탐구하고 문제를 해결해나가는 창의적인 학습을 수행할 수 있도록 하기 위해 Maple의 계산기능과 그래픽 기능을 사용한 학습프로그램 자료를 개발하여 교사-매체-학생간의 원활한 상호작용으로 학생들이 수학에 대한 긍정적인 태도를 가질 수 있고, 자신의 생각이나 학습에 대한 자신감과 추측 능력을 기르게 하며, 수학적 모델을 탐구하는 실제적인 지도 방안을 제시코자 한다.

2. 연구의 내용 및 방법

미국수학교사협의회(National Council of Teacher of Mathematics : NCTM)의 Standard series(1989, 1991)에서 수학교실의 새로운 변화에 대한 필요성과 방향을 제시하면서 수학을 안다는 것은 수학을 실제 직접 함으로써 이루어지며, 학습자가 무엇을 배우는 가는 그들이 어떻게 배우느냐에 달려있다고 단언하고 있다. 또 Standard 2000에서는 확률과 통계의 교육을 통해 학생들이 문제를 제기하고, 그 문제에 답하기 위하여 자료를 수집하고, 조작하며 표현할 수 있어야 하며, 탐색적인 방법으로 자료를 해석할 수 있어야 하고, 자료에 근거한 추론, 예측, 논의를 발전시키고 평가할 수 있어야 하며, 확률의 기본개념을 이해하고 적용할 수 있어야 한다고 제안하고 있다. 오늘날 수학 교육의 방향은 수학적 사고력과 문제해결력의 신장에 역점을 두면서 수학의 실용성을 강조해야한다. 이를 달성하고 학습의 효과를 극대화하기 위해 '교재의 재구성'과 학습자 스스로가 학습내용에 대하여 능동적인 태도로 수학적 개념을 찾아가도록 하는 '학습수행지(Work-Sheet)'의 개발이 필요하다. 그래서 본 연구에서는 Maple의 내장함수를 이용하여 수업을 하는데 필요한 기본적인 내용을 미리 제시하여 학습의 핵심적인 내용에 관심을 갖도록 유도하고 선행 학습 정도를 확인하며 능동적으로 단계적 풀이과정과 수학적 개념을 구성하도록 한다. '학습수행지'는 Maple 명령어를 사용하여 문제를 해결하도록 하고 결과를 해석하는 '자료의 분석'을 강조하는 방향으로 제작하여 통계의 잠재력과 유용성 및 탐구를 통한 발견의 기쁨을 느낄 수 있도록 통계 단원의 교수·학습모형을 탐색하고자 한다.

3. 용어의 정리

가. 문제 해결

문제해결에 대한 정의는 학자마다 다소 다르기 때문에 여러 가지가 있다고 할 수 있다. 여기서는 그 중에서 두 가지 정의를 소개하기로 한다[6].

우선 박한식과 구광조(1982)에 따르면, 수학에서의 문제해결은

①구체적인 문제(일상생활은 물론 널리 사회현상, 자연현상 등 수학을 사용해서 해결하는 것이 적당한 문제)에 한정이나 가정을 더해서 이것을 수학적인 문제로 구성하고,

②이것에 수학적 처리(수·식·도형·표·그래프 등의 수학적 형식으로 표현하고, 계산·식 변환·방정식 해법·도형 조작·표나 그래프의 사용 등의 수학적 조작을 시행하는 일)에 의하여 수학적으로 해결하고,

③그 결과에 구체적인 해석을 주어서 구체적인 해결을 한다고 하는 일련의 과정을 의미한다.

보다 간단한 정의로는 다음과 같은 크루릭과 루드닉(Stephen Krulik & Jesse A Rudnick, 1987)의 정의가 있다. 문제 해결은 하나의 과정(process)으로, 어떤 친숙하지 않은 문제 상황이 요구하고 있는 것을 만족시키기 위해, 개인이 이전에 획득한 지식, 기능 및 이해한 것(understanding)을 사용하기 위한 수단이다.

나. 반영적 추상화(reflective abstraction)

반영적 추상화는 피아제(Jean Piaget)가 논리·수학적 개념이 획득되는 과정을 나타내기 위해 사용한 용어이다. 피아제에 의하면 논리·수학적 개념은 대상으로부터의 단순 추상에 의한 정적인 이미지가 아니라, 대상에 대한 주체의 행동의 일반적인 조정으로부터 반영적 추상화에 의해 구성된 것이다. 반영적 추상화는 행동으로부터의 추상화로, 인식 주체로의 방향을 지향하고 있다. 반영적 추상화는 반사와 반성의 두 상보적인 과정으로 이루어진다. 인식 주체의 행동이나 조작인 '내용'을 상위의 수준으로 옮기는 것이 반사이고, 반사된 것을 '형식'으로 구

성하는 것이 반성이다. 반성은 전단계에서 이전된 것을 새로운 면에서 재구성 하거나 혹은 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전단계의 요소를 관련짓는다는 의미이다. 반성에 의해 구성적으로 창조된 새로운 형식은 다음 단계의 반사과정에서는 더 세련된 내용으로 기능하고, 그것이 다시 다음 단계의 반성 과정에서 더 새로운 형식으로 구성된다. 그리고 결과적으로 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어지게 된다. 반사의 과정은 내용에 대한 내면화에서 시작하여 주제화로 귀착된다. 주제화는 하위단계에서 사고의 도구였던 것이 사고의 대상이 되는 것을 의미한다. 주제화가 이루어지기 위해서는 인식의 재료인 내용을 정신에 떠올리는 표상이 선행되어야 한다. 한편, 반성의 메커니즘은 반사로 인해 인지체계가 맞이한 불균형 상태를 '동화-조절'과 '조직'을 통해 안정된 상태로 바꾸어 나가는 균형화이다[7].

다. ITs(Interactive Texts:상호작용학습지), 학습 수행지(Worksheet)

학생들의 의도에 따라 자유롭게 조건을 바꾸어 실행 조작을 할 수 있도록 시간을 주어 실험을 하는 것처럼 만든 수학응용프로그램을 활용한 학습지를 말한다. 이때, 계수나 조건을 변경시키는 학습자의 질문에, 컴퓨터는 계산결과도 자동적으로 변경됨으로써, 학습자와 컴퓨터가 서로 상호작용을 가지면서 학습을 하게 된다.

4. 연구의 제한점

가. 본 연구의 대상은 인문계 고등학교 2학년 학생에 한한다.

나. 본 연구의 범위는 제6차 교육과정의 수학Ⅰ의 통계 단원에 한한다.

다. 본 연구에서 사용할 평가 도구 중 일부는 표준화된 것을 사용하지 않고 자작 도구를 사용한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학 교육에서의 구성주의 이론

오늘날의 지식정보화사회는 수학교육계에서도 수학 교수·학습과정에서 많은 변화를 요구하고 있다. 그리고 컴퓨터와 소프트웨어의 발달은 학생들이 ‘수학을 하는’ 방법을 변화시키고 있다. 교사의 설명을 듣고 보는 전통적인 교사중심적인 수학수업에서 벗어나 실습실에서 컴퓨터를 이용한 구체적인 조작 활동을 통하여 수학을 직접 체험하고 탐구하며, 반성하고 스스로 수학 지식을 ‘구성’할 수 있게 된 것이다. 과거에는 지식이 교사로부터 학생에게 전달되는 것으로 생각하였으나 오늘날 수학지식은 교사의 도움을 받아 학생이 스스로 구성한다는 구성주의의 이론이 일반적으로 받아들여지고 있다[2].

구성주의의 심리학적 기초는 Piaget 의 발생적 인식론에 바탕을 두고 있다. 구성주의가 특히 주목하는 것은 지식의 자주적 구성의 심리적 메커니즘이며 핵심적인 내용은 경험적 추상화, 표상, 반성으로 이루어진 반영적 추상화이다. 경험적 추상화는 표상의 메커니즘이 되고, 표상은 반성의 메커니즘이 되며, 결국 반성에 의해 새로운 추상화가 이어지게 된다. 그리고 이러한 일련의 과정을 거쳐 일어나는 최종적인 추상화가 반영적 추상화이다.

구성주의는 인식론의 발달과 함께 끊임없이 진화·형성되어 왔으며 1960년대와 70년대를 거치면서 그 이론적 체계를 갖추게 되었다고 볼 수 있다. 베텐코트(A. Bettencourt)는 전통적 인식론에서 주된 논의의 대상이었던 지식의 진리성에 대하여 어떤 태도를 취하는 가에 따라 구성주의를 급진적 구성주의(Radical constructivism), 가설적 사실주의(Hypothetical Realism), 통속적 구성주의(Trivial constructivism)의 세 가지로 분류하고 있다.

지식과 실제 사이의 관계를 포기하고 대신 적합성(fitness)을 검정 기준으로

대체하는 것이 급진적 구성주의이고 지식을 실재에 관한 하나의 가설로 여기며, 그 실재에 대한 완전한 지식을 위해서 지식을 실재에 점근적으로 진화시켜 나아갈 것으로 보는 것이 가설적 구성주의이다. 그리고 지식을 사물의 본질에 대한 실재로서, 하나의 구성되어진 사진으로 보는 것이 통속적 구성주의이다.

구성주의의 개념적 다양성에도 불구하고 현재의 구성주의자들의 견해는 다음 4가지 면에서 서로 일치하고 있다.

첫째, 모든 지식은 구성되어지며, 수학적 지식은, 적어도 부분적으로는 반영적 추상화의 과정을 통해 구성된다.

둘째, 지식 구성의 과정에서 활동에 의해 만들어 진 인지적 구조가 존재한다. 그리고 이들 구조들이 지식의 구성을 설명한다. 인지적 구조는 다소 덜 다듬어진 방법으로 설명하긴 하지만 인지적 활동의 결과를 설명한다.

셋째, 인지적 구조들은 연속적인 발달 아래 있으며, 합목적적 행동성은 기존 구조들의 변환을 야기한다. 또 주변 환경은 유기체가 적응하도록 압력을 가한다.

넷째 인지적 입장에서 구성주의를 인정한다는 것은 방법론적 구성주의의 채택을 의미한다는 것이다. 그래서 연구하는데 있어서의 방법론적 구성주의는 인지적 구성주의의 가정과 일치하는 연구방법들을 개발하게 되며 또 교육학적 구성주의는 인지적 구성주의와 일치하는 교수방법들을 제안하게 된다[14].

구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수·학습의 원리는 다음과 같이 네 가지로 나타낼 수 있다. 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 관점에서 ‘학생 중심적 개별화’와 교사가 적절한 발문을 통해 학생의 응답을 유도해 냄으로서 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 하는 ‘발문 중심적 상호작용’, 학교 수학이 학생들에게 의미가 있어 학생들이 학습 활동에 참여하고자 하는 의지를 갖도록 하는 ‘의미 지향적 활동’, 자주적 지식 구성의 메카니즘인 ‘반영적 추상화’가 바로 그것이다.

2. 수학 교육에서의 CAS의 필요성

수학은 다른 여러 가지 학문을 연구하는데 있어서 기본적으로 필요한 도구이며, 수학적 재능은 다른 일반적인 지적 능력을 판단하는 척도가 되고 있다. 따라서 많은 대학들이 학생들을 선발하는 기준으로 수학을 중요시하고 있다. 그러나 학생들은 이러한 수학의 중요성과 가치를 제대로 인식하지 못하고 있다. 그 까닭은 학교수학이 탐구하고 반성하고 구성하는 과정으로서의 수학보다는 이미 완성된 수학적 대상을 '가르치는' 형태로 제시되어 온 것이 그 원인이다. 그리고 실제적인 실용성보다는 연역적 추론과 추상성을 강조하는 학교수학은 많은 학생들로 하여금 수학에 흥미를 잃게 하였으며 교사는 실제적 상황에서 적용이 가능하다는 믿음을 갖고 이론적 지식을 주로 가르치지만 학교에서 획득된 지식은 실제 상황에서 제대로 적용되지 못하고 있다.

컴퓨터의 수학 교수학적 가능성은 이런 문제상황에서 하나의 대안이 될 수 있다. 컴퓨터 대수 시스템(CAS: Computer Algebra System)은 수학학습의 동기 유발에서부터 추상적이고 형식적인 수학적 대상을 구체적으로 탐구할 수 있는 환경을 제공한다. 또 학문적인 학교수학과 실제수학 사이를 연결해 줄 수 있으며, 여러 가지 수학적 활동과 반영적 추상화, 사회적 상호작용 결과로서의 수학학습을 촉진하는 데 필요한 지적 자원, 학습환경, 학습도구를 창조하고 지원할 수 있다.

학생들은 컴퓨터가 복잡한 계산과정을 대신함으로서 계산에 대한 부담에서 벗어나 문제의 핵심 탐구에 집중할 수 있고 반복적인 계산이나 의미 없는 절차 연습 등은 줄어들고 수학화, 비교적 복잡한 상황의 모델링과 시뮬레이션, 컴퓨터 상에서의 표현의 명료화, 다양한 수학적 표상사이의 번역, 역동적인 도형들의 변화 탐구 등의 기회가 많아지고 학생들의 능동적인 수학적 의미 구성에 도움을 준다.

학생들은 교사의 설명을 듣고 보는 수동적인 자세에서 벗어나 CAS를 통하여 직접 체험하고 탐구하며 반성하고 구성하는 경험을 할 수 있으며, CAS는 실제 해보는 활동을 통하여 학생들이 수학에 대한 자신감을 갖고 수학적 아이디어를 탐구하는 데 능동적으로 참여할 수 있도록 해준다.

3. CAS 활용으로 인한 교사의 역할 변화

기존 사회는 교육의 대상으로 많은 학생들을 동일한 장소에 모아 놓고 지식 사회의 대표자인 교사와 마주 보는 형태로 지식의 전수가 이루어져 왔다. 나중에는 쓸모가 있겠지만 학습하는 당시에는 아무런 쓸모가 없는 지식을 학생들은 교사를 만족시키기 위해서 구성한다. 이런 상황에서는 학생들이 지식의 의미를 제대로 구성할 수 없다. 교사와 학생이 직접상호 작용함으로서 생기는 이러한 어려움을 극복하기 위해 브루소(Guy Brousseau)는 교수학적 상황론을 제시했다. 교수학적 상황론에서는 수학 학습이 행동 - 공식화 - 타당화 - 제도화의 네 단계를 밟아 이루어지도록 교수학적 상황을 구성할 것을 제안한다. 행동 단계에서는 여러 가지 관련성 또는 규칙에 따라 결론을 내리지만 그러한 규칙을 의식하지 못하는 단계이다. 공식화의 단계는 행동 속에서 암묵적으로 사용했던 규칙을 의식하고 표현하는 단계이다. 타당화의 단계는 공식화 단계에서 의식되고 표현된 규칙이 타당한 것인지를 따져보는 단계이다. 이 단계에서는 규칙 자체가 사고의 대상 또는 탐구의 주제가 된다. 제도화 단계는 타당화된 규칙이 하나의 관습으로 공고히 자리를 잡는 단계이다. 교사는 수학적 지식을 재조직하고 상황을 설정하며 그 상황의 안내자, 보조자, 중재자가 되어야 한다. 또 제도화 과정에서 중심적인 역할을 해야 한다.

NCTM 에서는 중등학교에서의 수학 학습에 컴퓨터를 사용한 효과에 관하여 여러 측면에서 연구한 결과 기호연산 조작도구(Symbolic Manipulation Tool)의 사용은 개념 이해에 덜 효과적일 것이라는 예상과는 달리 적은 시간에 개념적 이해가 더 잘 이루어진다는 것을 확인하였으며, NCTM에서 제공하는 학교수학

의 원리와 규준[31]에서는 수학 교수에 모든 학생들의 수학적 이해를 돕기 위하여 공학을 사용하여야 하며, 점차 증가하고 있는 기술 세계에서 수학을 사용하도록 학생들을 준비시킬 것을 주장하고 있다.

교사가 컴퓨터를 수단으로 교수학적 상황을 조직하는 경우, 교사는 컴퓨터가 지식을 어떻게 표현하며, 정보를 어떻게 다루는지를 알아야 한다. 뿐만 아니라 학생들도 이에 대해 어느 정도 알고 있어야 컴퓨터와 상호작용을 위한 의사소통이 가능할 것이다.

교육용 소프트웨어와 학생 사이의 상호작용의 목적은 지식의 습득이다. 교사는 컴퓨터 소프트웨어와 학생의 만남을 조직하여야 하고, 언제 만남이 이루어져야 할지를 결정하여야 한다. 또한 교수학적 과정의 맥락에서 그러한 만남이 왜 일어나야 하는지를 알고 있어야 한다.

그러므로 교육용 소프트웨어는 교사가 교수학적 상황을 조직하는 수단이 된다. 한편 수학교육용 컴퓨터 소프트웨어의 활용에서 그 목적은 도외시하고 방법에만 매달릴 때, 가르치고자 하는 수학지식의 상당부분이 변하게 된다. 컴퓨터에 의한 수학 지식의 교수학적변환에 의한 극단적인 교수현상은 메타-인지이동, 형식적 고착, 토파즈 효과, 죠르단 효과가 있다. 메타-인지 이동은 개인 교수형 소프트웨어를 이용하는 교수학적 상황에서 학생들의 사고가 주어진 과제를 해결하거나 의도하는 수학 지식을 학습하는데 집중하기보다는 주어진 과제를 해결하기 위한 힌트를 효과적으로 얻는 방법을 찾는 것에 집중하는 것이다. 형식적 고착이란 CAS를 활용하면 사용되는 문자나 대수식에 대한 어떠한 배경 지식 없이도 인수분해, 두 다항식의 곱, 미분, 적분, 극한값 등을 계산할 수 있지만 이러한 조작들은 결과적으로 공식화된 지식의 논리적 표현만을 배우는 결과가 된다. 토파즈 효과는 교사가 학생이 어떤 문제를 해결하는데 어려움을 겪고 있을 때, 학생에게 힌트를 준다면서 일련의 유도 질문을 통하여 답을 가르쳐 주는 것으로 학생이 학습할 수 있는 환경을 교사가 제거하는 것이다. 죠르단 효과란 컴퓨터 환경에서 학생들이 컴퓨터가 안내하는 대로 특정 조작을 수행하여 원하는 결과를 얻었을 때, 그런 조작 이면에 들어 있는 수학적 개념을 학생들이 이해했다고 할 수 없음

에도 불구하고 학생들이 수학 개념을 이해했다고 파악하는 것이다.

컴퓨터 환경에서 생길 수 있는 여러 가지 문제에 대한 책임은 전적으로 교사의 것이다. 학생들은 교사의 의도, 교육용 소프트웨어 제작자의 의도와는 전혀 다른 경험을 컴퓨터 환경에서 할 수 있고, 이런 환경에서 다루어지는 수학적 지식이 우리가 가르치려는 지식과 동떨어진 것일 수 있다. 따라서 교사는 컴퓨터와 교육용 소프트웨어에서 사용하는 수학적 지식의 한계를 이해하여 교수학적 상황을 제공할 때, 이를 적절히 통제할 수 있어야 한다. 그리고 컴퓨터 환경에서 다루어지는 수학적 지식에 대해 항상 경계를 하여야 한다. 이는 교사에게 주어진 컴퓨터 환경에서의 커다란 역할이 될 것이다[16].

전통적 패러다임에서의 컴퓨터의 활용에 해당하는 CAI(Computer assisted instruction)는 교사의 질문 - 학생의 반응 - 교사의 평가로 이어지는 상호작용 모델로서 교사의 역할을 컴퓨터가 대신한다. 개인교수형 CAI프로그램은 개별 학습을 가능하게 하고 학습의 효율을 높이는 결과를 가져온다는 연구결과가 여러 번 발표되었다. 그러나 CAI에서 학생들은 교사나 컴퓨터가 제공하는 수학을 받아들이는 수동적인 존재가 된다. 따라서 구성주의의 입장에서 컴퓨터의 활용은 전통적인 CAI이상의 것이어야 한다.

CAS(Computer Algebra System)는 기호연산 실행조작이 가능하며, 필요한 경우 함수를 그래픽으로 나타내는 시스템으로 수학개념 이해와 응용에 적합하게 만들어진 수학적 도구이다. 이것은 기호를 사용한 수학적 연산을 수행한 후에 연산을 결과를 대수적인 정확한 결과와 함께 수치적으로 근사값을 계산해 내는 특징을 가지고 있으며 2차원 및 3차원 그래픽 기능을 이용하여 학생들에게 모형 제시가 가능하고 복잡한 계산 능력을 활용할 수 있고, 시뮬레이션도 가능하고 애니메이션 기능을 이용하여 시각적으로 개념을 설명할 수 있어 학생들은 이론적인 전개와 개념 이해에 몰두할 수 있다. CAS를 활용한 수학 교수 학습은 수학을 표현하는 방법이 지필에서의 경우와 차이가 있기 때문에 교수 방법뿐만 아니라 교수 목적까지도 다르다. 이러한 CAS를 학교수학에 활용하려면 대화형 실행매체의 작성과 기호연산 실행조작의 환경은 필수적이라 할 수 있다.

Ⅲ. Maple을 활용한 통계단원 교수학습모형 탐색 및 적용

1. 第6차 고등학교 교육과정에서 통계단원 분석

수학Ⅰ 과목의 학습에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 습득하고 이를 활용하여 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하게 하고, 단계적인 과정을 밟아 문제를 해결하는 습관을 가지도록 한다. 또한 기본적인 지식의 습득과 기능의 숙달을 통하여 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하고 처리할 수 있도록 하는 데 중점을 둔다.

높은 수준의 수학을 학습하기 위한 첫 단계 과목으로 확률과 통계 단원의 학습 목표는 기본 개념과 원리를 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 실생활 문제를 해결하는 것이다. 구체적인 학습 내용은 확률분포에서 이항분포와 정규분포의 뜻을 이해하고 평균과 표준편차를 구하는 것과 통계적 추정에서 모집단과 표본의 뜻을 알고 표본평균과 모평균의 관계를 이해하며 모평균을 추정하는 것이다.

통계단원은 중단원으로 1. 도수분포, 2. 확률분포, 3. 통계적 추측으로 구성되어있다. 도수분포에서는 다시 자료의 평균과 자료의 표준편차 두 소단원으로 되어있으며, 확률분포에는 확률변수와 활률분포, 확률변수의 평균과 표준편차, 이항분포, 정규분포를 구성되며, 통계적 추측은 모집단과 표본, 통계적 추정, 통계적 검정을 소단원으로 하고 있다.

시간의 분배는 도수분포에 5차시, 확률분포에 13차시, 통계적 추측에 9차시를 배정하여 전체적으로 27차시에 전 단원을 지도하도록 하고 있다.

<표 1> 6차 교육과정에서 통계단원의 학습목표

대단원	소단원	학습요소	학습목표	시간
	1. 도수 분포	•자료의 정리와 요약 •평균 •분산, 표준편차	1. 생활 주변에서 볼 수 있는 여러 가지 자료를 정리하고 요약, 해석하는 능력을 향상. 2. 가장 많이 쓰이는 대표값인 평균을 여러 가지 방법으로 구해본다. 3. 분산과 표준편차의 뜻과 구하는 방법을 이해한다.	1 5 차시
Ⅶ.통계	2. 확률 분포	•확률변수, 확률분포 •평균 표준편차 •이항분포 •정규분포	1. 확률변수와 확률분포의 뜻을 이해한다. 2. 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차를 알아본다. 3. 이항분포의 뜻과 특징, 큰수의 법칙의 의미를 이해한다. 4. 연속확률변수, 확률밀도함수의 뜻을 이해하고 연속확률변수의 평균, 분산을 구하고 정규분포의 특징을 알아보자.	6 15 차시
	3. 통계적 추측	•모집단, 표본 •표본평균의 확률분포 •모평균 추정	1. 전수조사와 표본조사 2. 모집단의 성질이 잘 나타나는 표본추출과 표본평균의 분포를 알아보자 3. 표본평균을 이용하여 모평균을 추정한다.	16 20 차시

지도상의 유의점은 다음과 같다.

첫째, 복잡한 계산은 컴퓨터로 처리할 수 있으므로 계산 중심의 통계가 아니라 사회생활에 이용될 수 있도록 이론 중심으로 통계의 기초 개념을 이해할 수 있도록 지도한다.

둘째, 이항분포는 확률분포의 중요한 하나의 보기이므로, 충분한 반복지도로 이를 이해하도록 한다.

셋째, 정규분포는 연속확률분포 중에서 가장 중요한 것이므로 철저히 이해하도록 지도한다.

넷째, 모집단과 표본은 통계적 추측에서 기초적 사항이므로 충분히 이해되도록

지도한다.

다섯째, 추정과 검정은 밀접한 관계가 있으므로 추정에서 신뢰도, 신뢰구간과 검정에서의 유의수준, 기각역과의 관계를 충분히 이해하도록 지도한다.

여섯째, 추정과 검정은 모평균에 대한 것만 지도하고, 검정에서는 양측검정에 한하여 지도한다.

도수분포와 확률분포에서 이항분포와 정규분포, 통계적 추측에서는 모집단과 분포, 표본평균 과 모평균의 추정을 지도한다.

특히 큰 수의 법칙은 n 이 충분히 클 때에 사건 A 의 상대도수가 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 의 근사값이 됨을 보여주는 근거임을 예를 통하여 인식시켜주는 정도로만 다룬다.

지도방법으로 흥미롭고 다양한 소재로 실험을 통한 학습을 강조하고 있으며, 학교실정에 따라 계산기와 컴퓨터를 이용하여 수학적 개념의 이해 정도와 문제 해결 능력을 평가하도록 하고 있다.

<표 2> 확률·통계 단원의 지도 계통도

선수학습	관련단원	주요개념 및 학습내용	기타
중학교 1학년	자료의 정리	도수분포, 변량, 계급(값), 계급의 크기, 도수, 상대도수, 누적도수, 여러 가지 도수분포표	히스토그램
중학교 2학년 3학년	확 률 통 계	확률의 계산, 확률의 합과 곱의 법칙, 기대값, 대표값, 평균, 가평균, 산포도, 편차, 분산, 표준편차	상관관계 상관도(표)
수학 I	확 률 통 계	통계적확률, 수학적확률, 표본공간, 사건, 시행, 이항정리, 확률의 계산법칙, 독립시행 확률변수, 확률분포, 이항분포, 정규분포, 표준정규분포, 모집단과분포, 통계적 추정, 통계적 검정	큰 수의 법칙 신뢰도 유의수준

2. 第7次 교육 과정에서의 통계단원

교육부가 1997년에 고시한 第7次 교육과정에 의하면 국민공통기본교육과정에서 수학 내용은 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수의 6개 영역으로 구성되어 있으며 확률과 통계 영역에서는 현실적인 과제, 즉 실생활에서 접하는 자료를 효율적으로 조사, 정리, 분석해 봄으로서 유용한 정보를 얻는데 효과적인 방법이 통계적 방법임을 알 수 있게 하며, 창의적인 문제 해결에 적용할 수 있도록 실제적이면서 통합적인 지도를 하도록 하고 있다.

그 구체적인 지도 내용에서는 경우의 수를 바탕으로 확률의 의미 이해 및 자료의 정리와 표현을 다루고 있다. 특히 통계에서의 학습목표는 산포도와 표준편차를 이해하고 이를 구할 수 있도록 하는 것이며 신문, 잡지 등에서 볼 수 있는 자료를 통해서 표준편차를 구하고, 이를 해석할 수 있도록 하는 것이다.

<표 3> 第7次 교육과정 "수학10-가"에서 통계영역 내용

영 역		내 용
통계	산포도와 표준편차	대표값으로는 분포상태를 파악하는데 충분하지 않음을 이해하게 하여 산포도의 필요성을 알게 한다. 산포도의 뜻을 알게 한다. 평균을 중심으로 변량이 흩어진 정도를 나타내는 값인 분산과 표준편차를 알게 한다. 분산과 표준편차를 가능한 한 구체적인 자료를 이용하여 구하고, 이를 해석할 수 있게 한다.
	심화과정	신문 잡지 등에서 볼 수 있는 자료를 통해서 표준편차를 구하고, 이를 해석할 수 있게 한다.

第7次 교육과정은 교수 학습 전 과정에 적절하고 다양한 교육 기자재를 적극 활용하여 학습의 효과를 높이도록 하고 복잡한 계산, 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 권장하고 있다.

확률과 통계 과목은 정보화 시대에 필요한 자료 처리 능력과 통계적 추론 능력을 신장시키고 여러 가지 확률 통계적 사회 현상 및 자연 현상을 이해하고 해석하는 능력과 태도를 기르기 위한 과목이다. 학습목표로는 관찰된 자료를 정리하고, 자료의 분포와 특성을 파악하며 이항분포와 정규분포를 이해하고 이와 관련된 실생활의 문제를 해결할 수 있도록 한다. 그리고 통계적 추정을 이해하고 여론조사, 설문조사 등의 결과를 해석할 수 있도록 한다.

<표 4> 제7차 교육과정 "수학10-가"에서 통계영역학습지도 계획

단원	중단원	소단원	교과서 쪽수	차시	배당 시간
Ⅶ 통계	1. 산포도와 표준편차	단원개관 및 준비 학습	177 179	1	1
		탐구활동	180	1	
		1. 대표값과 산포도	181 183	2 3	5
		2. 분산과 표준편차	184 189	4 6	
		평가문제	192 193	7	1
		심화과정	194 195	7	
	보충 과정		198 199	8	1
	단원 평가 문제		200	8	
	단원 발전 문제		201	8	
	모둠 학습 문제		202 203	9	1
	수행 과제		204	9	

제7차 수학과 교육과정은 1학년부터 10학년까지의 10년 동안을 국민공통기본 교육기간으로 설정하여 단계형 수준별 교육과정으로 구성·운영하도록 되어있다. 이에 따라 교과목명, 편제, 성격과 목표, 영역명, 내용, 교수, 학습방법, 평가에 걸쳐 제6차 수학과 교육과정에 비하여 상당히 많은 변화를 가져왔다.
그 내용을 요약하면 다음과 같다.

<표 5> 제6차 교육과정과 제7차 교육과정 비교

구분	제6차 교육 과정	제7차 교육 과정	비 고
과목명	공통 수학	10단계 수학	
시수	136	136	
교육과정체제	1. 성격 2. 목표 3. 내용 가. 내용체계 나. 학년별 내용 내용 진술 용어와 기호 4. 방법 5. 평가	1. 성격 2. 목표 3. 내용 가. 내용체계 나. 단계별 내용 (1) 목표 (2) 내용 내용진술 용어와 기호 학습지도상의 유의점 심화과정 4. 교수·학습방법 5. 평가	◦ 교육과정전체 체계 통일 ◦ 단계적 목표 진술 ◦ 영역별로 학습 지도상의 유의점 제시 ◦ 영역별로 심화과정 제시
성격	◦ 수학과 교과 성격 규명 · 논리적 사고력, 합리적인 문제해결 능력과 태도 육성 · 필수적인 도구 교과로서의 필요성 강조 · 학습지도 중점 및 내용과 방법제시	◦ 수학과 교과 성격 제시 · 단계형 수준별 교육과정으로 구성, 기본 과정과 심화 과정을 둠. · 능력에 따라 학습할 수 있는 기회를 제공	◦ 학생들의 인지 발달 수준과 능력에 따른 차별적 학습의 기회 제공
목표	◦ 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙의 이해 ◦ 용어와 기호를 정확하게 사용, 수학적 사고 능력을 배양하여 실생활에 적용 ◦ 수학에 대한 지속적인 흥미와 관심, 합리적인 문제해결 태도 형성	◦ 수학적인 경험을 통한 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계 이해 ◦ 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활주변의 여러 가지 문제해결 ◦ 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도 형성	◦ 수학적 힘의 신장 강조
영역명	◦ 5개 영역으로 구성 · 수와 식, 방정식과 부등식, 함수, 통계, 도형	◦ 6개 영역으로 구성 · 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수	◦ 1 10단계 영역명 통일

3. Maple의 소개 및 사용법

가. Maple의 소개

Maple은 컴퓨터를 통해 수학 문제를 풀어주는 가장 강력한 program중의 하나이다.

Maple은 지난 1980년대에 처음 개발된 이후 20년 동안 유용하게 사용되어온 수치 해석적 응용 프로그램으로써, 사용하기 쉽고, 계산 결과가 정확하며, 내부 source code가 공개되어있고 국제적으로 표준화된 연결기능을 사용하므로 수정, 추가, 확장하기가 쉽다. 또한 실행에 있어서 가장 작은 memory를 요구하면서도, 사용 가능한 3000개 이상의 math routine을 가지고 있으며, numerical mathematics 뿐만 아니라, symbolic mathematics를 수행할 수 있다. 또한, 2차, 3차원의 graphics을 만들 수 있으며 필요하면 애니메이션으로 보여줄 수 있다. 다른 소프트웨어와는 달리 계산 결과를 수치가 아닌 mathematical notation을 사용하여 결과를 나타낼 수 있다.

Maple은 Macintosh, MS Windows, MS DOS, UNIX, VMS, NeXT, Ultrix, UNICOS를 포함하여 거의 모든 operating system에서 사용 가능하다. 최근에는 수학적인 처리 능력을 강화하고 타 프로그램과의 연결성 및 모든 분야에서 사용할 수 있는 풍부한 자원을 지원하는 방향으로 프로그램을 계속적으로 개선하여 제공하고 있다.

나. 수학 교육용 언어로서 Maple의 특징

Maple은 대표적인 CAS(Computer Algebra System)으로 기호를 포함하는 수식이나 방정식 등을 대수적으로 처리하는 능력을 가진 획기적인 프로그램이다. 특히 여러 가지 시각적인 그래픽과 애니메이션을 통하여 수학식을 그래프로 직접 보여주고 조작함으로서 수학 개념의 구성을 도울 수 있으며, 반복적인 계산과정에 치우치지 않고 즉각적인 결과 확인과 오류수정으로 문제해결능력을 향상시

킬 수 있는 수학 학습을 위한 언어이다.

Maple은 다음과 같은 여러 가지 특징을 가진다.

첫째, 바로 수식 그 자체이기 때문에 배우기 쉽고 사용하기도 쉽다.

Maple은 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 정의할 수 있으며 표현이 매우 쉽다. 예를 들면 $f(x) = 2x^2 + 3$ 와 같은 수식 그 자체를 입출력에 사용할 수 있다.

```
> f(x)=2*x^2+3;
```

$$f(x) = 2\,x^2 + 3$$

둘째, Maple은 기호연산(Symbolic computation)이 가능하다.

일반적인 프로그램은 수치계산만이 가능하다. 그러나 Maple에서는 수식의 전개, 인수분해, 통분, 부분분수로 분해하기, 약분하기, 내림차순으로 정돈하기 등을 할 수 있을 뿐만 아니라 극한, 미분, 적분, 미분방정식, 멱급수 등에서도 기호연산이 가능하다.

셋째, 다양한 그래픽과 애니메이션 기능을 갖고있으며, 고정도(unlimited precision)의 수치계산을 할 수 있다.

Maple은 여러 가지 식을 그래프로 나타낼 수 있다. 복잡한 그림은 시점을 이동하여 여러 각도에서 매우 자세히 관찰할 수도 있으며 애니메이션 기능을 이용하여 수학적 개념의 설명에 다양하게 응용할 수 있다.

또 Maple은 일반적인 계산기와는 달리 무리수나 순환소수 등의 연산 결과도 참값으로 출력한다. 필요할 경우 소수점 이하 몇째 자리까지도 지정하여 근사값으로 보여줄 수 있다.

넷째, 표준화된 연결기능을 사용하여 Maple을 web이나 Excel 등 다른 software와 연결사용이 가능하다.

Microsoft Excel 2000의 추가 기능을 이용하여 Excel 2000에서 Maple의 도움말이나 명령어들을 사용할 수 있고, Excel 2000과 Maple 사이에 자료교환과 서로 복사와 붙이기도 가능하다. 또 인터넷의 data를 Maple에 가져올 수 있고, Maple로 작성한 내용을 Web 상에서 발표를 할 수도 있다.

다섯째, Maple은 수학교육에 있어서 정보통신기술(ICT : Information & Com-munication Technology)의 도구적 활용을 위한 좋은 프로그램이다.

수학교육에서 정보통신기술의 매체적 활용인 CAI(Computer Aided Instruc-tion) 프로그램은 교사가 직접 CAI 프로그램을 개발하여 컴퓨터에 수록해 놓으면 학생은 이 프로그램을 통해 학습내용을 전달받아 학습을 진행하는 방식으로 학생은 수동적인 정보 수용자에 머무르게 된다. 그러나 컴퓨터의 도구적 활용은 컴퓨터에 구비되어 있는 다양한 소프트웨어들을 활용하여 문제를 효과적으로 해결하는 과정으로 학생들 자신이 정보를 찾고, 분석하고, 종합하며, 평가하고, 정리·전달하는 과정에 중점을 둔다. 이 때 학생들은 자신이 해결하고자 하는 문제나 수행해야 할 과제와 보다 유의미한 관계를 가지게될 가능성이 크며 이와 같은 경험은 긍정적인 경험으로 더 유용하게 활용될 것으로 생각된다.

제7차 교육과정은 학생의 경험의 질을 높이고, 학생 중심의 교육을 구현하는 것을 강조하는 과정이므로 학생이 스스로 문제를 해결하는 과정을 경험할 수 있도록 지원하는 정보통신기술의 도구적 활용은 매우 유용하고도 중요하다.

여섯째, Maple은 높은 수준의 프로그래밍 언어이다.

Maple에는 수백 개가 넘는 내장함수가 있다. 이 내장함수를 이용하면 높은 수준의 프로그래밍이 가능하다. 일반적인 프로그래밍 언어(C, FORTRAN, COBO-L, 등)를 이용할 경우 다중반복구조를 이용하여야 해결할 수 있는 문제도 Maple의 내장함수를 이용하면 소위 벡터화 프로그래밍에 의하여 간단히 해결할

수도 있다. 물론 필요한 경우에는 일반 프로그래밍 언어에서처럼 확장성이 뛰어나 사용자 정의 함수나 서브루틴 등을 작성하여 사용할 수도 있다.

이밖에 수백 명의 수학자들과 과학자들이 만들어 놓은 자료와 add-on packages를 무료로 제공받을 수 있는 장점도 있다.

다. Maple의 사용법

(1) 기본적인 사용규칙

㈎ 연산기호는 덧셈(+), 뺄셈(-), 곱셈(*), 나눗셈(/), 거듭제곱(^)을 사용한다.

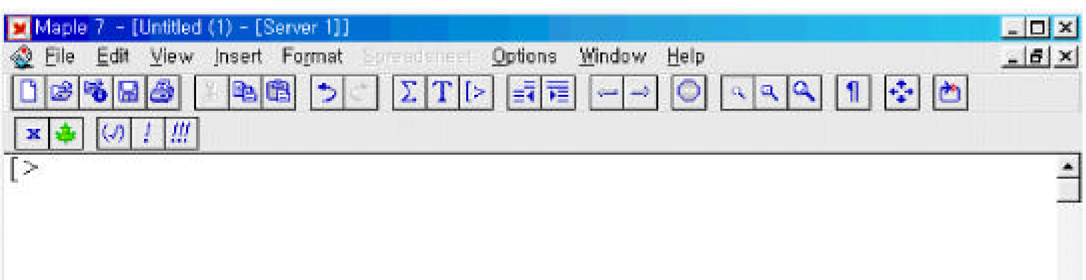
㈏ 명령의 끝에는 항상 세미콜론(;)이나 콜론(:)이 붙는다. 세미콜론은 명령이 끝났음을 알리고 명령의 결과를 화면에 프린트할 것을 지시하는 명령이고, 콜론은 명령이 끝났음을 알리는 것은 같으나 그 결과를 화면에 나타내지는 않도록 하는 명령이다.

㈐ 함수나 변수는 영문, 한글을 모두 사용할 수 있으나 예약되어 있는 변수명은 사용할 수 없다.

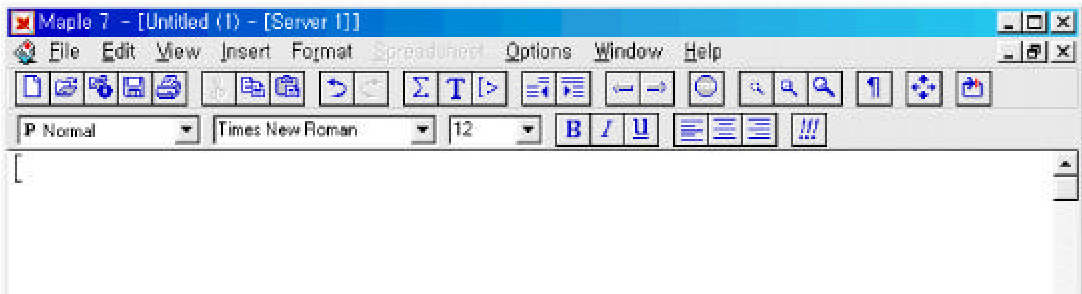
㈑ 모든 명령어의 변수나 인자는 괄호( ) 안에 포함되어야 한다.

㈒ 이전에 사용했거나 입력했던 것을 다시 이용할 때에는 Ditto(%,%%,%%%)명령을 사용한다.

<그림1> 일반적인 작업을 위한 초기화면



<그림2> TEXT문을 입력할 때의 초기화면



(2) 기본적인 수식 입력방법

수학 계산에서 자주 사용하는 수식이나 수학적 용어를 입력해 보자.

계수, 변수, 인수 사이에는 반드시 곱셈기호(*)를 입력해야 한다. 예를 들면

다음과 같은 방정식을 입력해보자. $3x^3 + 6x^2 - 7xy - \frac{x}{y} + 7 = 0$

```
> 3*x^3 +6*y^2 -7*x*y- x/y+7=0;
```

$$3x^3 + 6y^2 - 7xy - \frac{x}{y} + 7 = 0$$

절대값은 abs로 입력하고 삼각함수는 수학에서 쓰는 용어 자체를 입력한다.

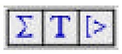
```
> abs(sin(x))-tan(x);
```

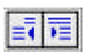
$$|\sin(x)| - \tan(x)$$

 처음 아이콘은 새로운 작업창을 만드는 아이콘이고, 두 번째 아이콘은 이미 만들어져 있는 파일을 불러오는 것이고, 세 번째 아이콘은 인터넷의 주소를 입력하여 자료를 받아올 수 있는 아이콘이며, 네 번째 아이콘은 현재 작업중인 파일을 저장하는 아이콘이고, 다섯 번째 아이콘은 작업중인 파일을 인쇄하는 아이콘이다.

 편집을 위한 아이콘으로 처음 것은 잘라내기(Ctrl + X), 두 번째 것은 복사(Ctrl + C), 세 번째 것은 붙이기(Ctrl + V) 이다.
일반적인 windows용 프로그램에서 공통적으로 쓸 수 있는 단축키이다.

 잘못된 작업을 실행했을 경우 되돌리는 아이콘이다. Maple 7에서는 15번까지 되돌릴 수 있다.

 처음 아이콘은 TEXT문에서 수학식을 입력하는 아이콘이고, 두 번째 것은 TEXT문을 입력하기 위한 아이콘이다.
이 아이콘을 누르면 명령어 대기상태([>)에서 TEXT문 입력대기 상태([ )가 된다. 세 번째 것을 누르면 다시 명령어 대기 상태가 된다.

 현재의 줄을 한 단계 높이거나 낮추는 역할을 한다. 만일 한 단계 낮추면(즉 두 번째 아이콘을 누르면) 그 줄은 감출 수 있다.

 실행중인 작업을 정지시키는 아이콘이다. 만일 무한연산에 빠진 연산이나 생각보다 길게 작업 중인 명령어를 중지할 수 있다.

 화면을 크게 보여주는 아이콘이다.

 가운데 아이콘은 실행 아이콘으로 자판의 enter키와 같은 역할을 한다.

이상으로 많이 쓰이는 아이콘을 위주로 간략하게 설명을 하였다.

4. Maple을 활용한 통계수업 모형 탐색

NCTM은 1990년대의 수학교육의 목표를 수학을 소중히 여길 줄 알고, 수학하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통 할 수 있고, 수학적으로 추론 할 수 있어야 한다는 것을 제시했다.
이것은 이전까지 교사가 제시하는 알고리즘을 적용해서 연습문제를 해결하는 계산기능 위주의 학습에서 벗어나 학습자의 능동적인 참여를 통해서 수학적 문제해결력, 의사소통력, 추론능력과 같은 고등사고기능의 함양을 교육목표로 규정한 것으로 학습자를 능동적으로 의미와 이해를 구성하는 주체로 보는 구성주의의 패러다임을 바탕으로 하고있다.

통계 단원의 교육목표를 구체적으로 열거하면 다음과 같다.

1) 정보화 사회에서 요구되는 각종 정보와 데이터를 신속하고 정확하게 수집하는 능력의 배양
2) 수집된 정보와 데이터를 정리, 요약하는 기법을 습득하고 이를 활용할 수 있는 능력의 배양
3) 위의 목표를 달성하는데 필요한 도구인 컴퓨터를 자유롭게 활용할 수 있는 능력의 배양

정보화 사회에서는 수치로 표현되고 있는 정보(자료)를 효율적으로 수집하고 정리, 분석하는 일이 필수적이기 때문에 정보의 가공(수집,정리,분석)에 필요한 지식과 도구 또한 절실히 요구되고 있다. 통계학이 바로 그러한 역할을 담당하고 있는 한 학문분야이기 때문에 본 연구에서는 대표적인 Computer Algebra System 인 Maple을 이용하여 학생들이 흥미와 관심을 가질 수 있도록 자료를 선택하여 복잡한 계산은 컴퓨터에 맡기고 자료의 해석에 주안점을 둔 수업을 구안하고자 한다.

본 장에서는 현 교육과정 고등학교 수학교과서에 제시되어있는 통계단원에 대한 일반적인 개념의 도입과 형성 및 활용을 통하여 자료 해석에 주안점을 둔 수업 모형을 제시한 것이다.

통계 단원의 지도는 확률에서 학습한 내용을 바탕으로 도수의 분포에서 평균과 분산, 표준편차를 알아보고 확률분포에서는 확률변수의 평균과 표준편차를 알아본다. 그리고 이항분포와 정규분포를 비교하면서 그래프를 이용하여 관계를 확인한다. 최종목표는 자료를 해석하는 능력을 길러 미래를 예측하고 문제를 해결할 수 있도록 지도하는 것이다.

통계 단원은 추상성, 형식성, 논리성의 수학적 특성을 가지고 있어 단순한 공식의 암기와 기계적인 계산을 강조하는 것은 수학을 하는 목적과 관련이 없는 일에 치중을 하는 결과를 가져온다. 이에 본 연구에서는 Maple을 이용하여 반복적이고 기계적인 계산을 컴퓨터에 맡기고 시각적인 그래프와 여러 가지 상황에 따른 결과를 신속하게 보여줌으로서 자료를 구조의 이해하고 결과를 해석할 수 있는 능력을 기르는 것에 초점을 두고자 한다. 따라서 여러 가지 값을 대입하여 그래프의 변화 과정을 비교해 볼 수 있는 프로시저와 애니메이션 기능을 활용하여 상호작용적 교재를 구성하고, 사고 과정과 개념 구성 단계에 맞춘 학습수행지(Work-Sheet)를 활용하였다.

1. 통계에 대한 학습 내용

1) 자료의 평균을 계산하여 본다.
2) 자료의 표준편차의 뜻을 알아보고, 이를 구하여 본다.
(단 계산의 간편성을 위해서 사용하는 가평균을 이용한 평균과 분산 구하기는 Maple과 같은 수학 프로그램의 계산기능을 사용할 경우 아무런 의미가 없는 부분이므로 제외한다.)
3) 확률변수와 확률분포의 의미를 알아본다.
4) 확률변수의 평균과 표준편차를 계산해 본다.
5) 이항분포와 정규분포를 알아본다.

학생들에게 기본적인 용어에 대한 설명과 함께 개념을 정확하게 이해시킨 후 단순하면서 반복적인 계산은 Maple의 계산기능에 맡기도록 한다.

(문제) 오른쪽 표는 어느 고등학교 A반의 키를 측정한 결과다. A반 키의 평균과 분산, 표준편차를 구하여라.

키(cm)	학생수
152.5	1
157.5	3
162.5	4
167.5	10
172.5	15
177.5	17
182.5	3
계	53

도입 : 도수 분포에서의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 공식을 살펴보면 다음과 같다.

평균 $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$

분산 $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 f_i$

표준편차 $s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 f_i}$

곱하기 기호는 *을 사용하는 것을 제외하면 일반 필기방식과 같은 식으로 계산이 가능하다. 따라서 아래 내용은 학생들이 직접 입력해 봄으로서 공식을 정확하게 알고 있으며 그것을 이용해서 계산할 수 있는지 확인이 가능하다.

```
> 평균:=(1/53)*(152.5*1+157.5*3+162.5*4+167.5*10
  +172.5*15+177.5*17+182.5*3);
                    평균:= 171.7452830
```

```
> 분산:=(1/53)*((152.5-171.7)^2 *1+(157.5-171.7)^2
  *3+(162.5-171.7)^2 *4+(167.5-171.7)^2 *10
  +(172.5-171.7)^2 *15+(177.5-171.7)^2 *17
  +(182.5-171.7)^2 *3 );
                    분산:= 45.65886792
```

```
> 표준편차:=sqrt(분산);
                    표준편차:= 6.757134594
```

다음은 확률밀도 함수의 성질과 연속확률변수의 의미를 알아보자.

먼저 확률밀도함수의 성질은 다음과 같다.

확률밀도함수 $f(x)$ 의 정의역을 $[a,\ b]$라고 하면

(1) $f(x) \geqq 0$ (2) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차를 알아보면 다음과 같다.

평균 $E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$

분산 $V(X) = \int_a^b \{x - E(X)\}^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \{E(X)\}^2$

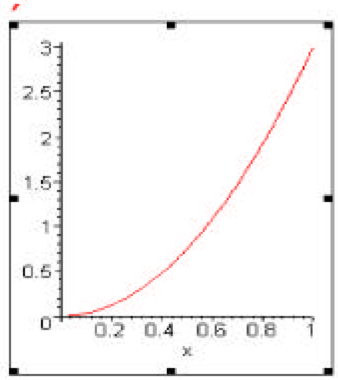
표준편차 $S(X) = \sqrt{\int_a^b x^2 f(x)\,dx - \{E(X)\}^2}$

(문제) $0 \leqq X \leqq 1$인 값을 가지는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x) = 3x^2$ 에 대하여 평균, 분산, 표준편차와 $P\left(\frac{1}{3} \leqq X \leqq \frac{2}{3}\right)$을 구하여라.

문제의 뜻을 정확하게 이해하기 위해서 활률밀도함수의 그래프를 그려보고 그림을 보면서 평균과 분산, 표준편차 그리고 $P\left(\frac{1}{3} \leqq X \leqq \frac{2}{3}\right)$를 구해보자.

<그림3> $y = 3x^2$ 의 그래프

```
> plot(3*x^2,x=0..1);
```



Maple의 계산기능을 이용하여 구간 [0, 1]에서 곡선과 x축사이의 넓이를 계산하여 함수 $y = 3x^2$ 이 확률밀도함수임을 확인해보자. 계산식은 $\int_0^1 3x^2\,dx$ 이다.

```
> Int(3*x^2,x=0..1)=int(3*x^2,x=0..1);
```

$$\int_0^1 3\,x^2\,dx = 1$$

공식을 생각하면서 평균과 분산 표준편차를 계산해보자.

```
> E(X):=Int(3*x^3,x=0..1)=int(3*x^3,x=0..1);
```

$$E(X) := \int_0^1 3\,x^3\,dx = \frac{3}{4}$$

```
> E(X):=3/4:
> V(X):=Int(3*x^4,x=0..1)-(E(X))^2
  =int(3*x^4,x=0..1)-(E(X))^2;
```

$$V(X) := \int_0^1 3\,x^4\,dx - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

```
> V(X):=3/80:
> S(X):=sqrt(V(X));
```

$$S(X) := \frac{1}{20}\sqrt{15}$$

확률 $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$은 위 그래프에서 x 축과 직선 $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ 사이의 넓이와 같음을 이해시킨다.

Maple의 계산기능을 이용하여 정적분의 값을 계산하면 다음과 같다.

```
> P:=Int(3*x^2,x=1/3..2/3)
    =int(3*x^2,x=1/3..2/3);
```

$$P := \int_{1/3}^{2/3} 3\,x^2\,dx = \frac{7}{27}$$

다음은 1999학년도부터 2001학년도까지 P고등학교 신입생의 키를 조사한 자료이다. 이 자료를 이용하여 여러 가지 그래프를 그리고 그것들의 토대로 어떤 해석을 할 수 있는지 생각해보자. 실제로는 전체자료를 사용하였으나 전체자료를 여기에 표시하기에는 어려움이 있어 키99, 키00, 키01로 구분하고 10cm를 단위로 나누어 도수를 표시하면 아래와 같다.

Weight(140..150,8)은 키가 140cm이상 150cm미만의 학생수가 8명 있다는 것을 나타낸다.

```
> transform[tallyinto](키99,[140..150,150..160,
  160..170,170..180,180..190]);
[Weight(140 .. 150, 8), Weight(150 .. 160, 126), Weight(160 .. 170, 224), Weight(170 .. 180, 118),
  Weight(180 .. 190, 16)]
```

```
> transform[tallyinto](키00,[140..150,150..160,
  160..170,170..180,180..190]);
[140 .. 150, Weight(150 .. 160, 133), Weight(160 .. 170, 221), Weight(170 .. 180, 117),
  Weight(180 .. 190, 16)]
```

```
> transform[tallyinto](키01,[140..150,150..160,
  160..170,170..180,180..190]);
[Weight(140 .. 150, 7), Weight(150 .. 160, 167), Weight(160 .. 170, 192), Weight(170 .. 180, 108),
  Weight(180 .. 190, 16)]
```

우선 각 자료들의 도수를 구해보자. 3년간의 자료를 한꺼번에 표시하였다.

```
> describe[count](키99);describe[count](키00);
  describe[count](키01);
                                492
                                488
                                490
```

다음은 각 자료의 평균, 분산, 표준편차를 구해보자. 여기서는 Maple의 계산 기능을 사용하였으나 학생들에게는 기본공식을 확인시킨 후 실행하는 것이 옳다.

```
> describe[mean](키99);describe[mean](키00);
  describe[mean](키01);
                          165.1306911
                          164.5125000
                          164.1183673
```

```
> describe[variance](키99);describe[variance](키00);
  describe[variance](키01);
                          58.84598890
                          56.12400615
                          66.46105037
```

```
> describe[standarddeviation](키99);
  describe[standarddeviation](키00);
  describe[standarddeviation](키01);
                          7.671113928
                          7.491595701
                          8.152364710
```

여기서 각 자료에 대한 표준편차가 다르다는 것을 알 수 있다. 그것이 무엇을 나타내는지 한번 발표해보자.

다음은 1999학년도 신입생 키에 대한 히스토그램을 그려보자.

히스토그램은 기둥그래프 또는 기둥모양그림 이라고도 한다. 관측한 자료의 분포의 특징이 한눈에 보이도록 기둥 모양으로 나타낸 것으로 가로축에 각 계급의 계급간격을 나타내는 점을 표시하고, 이들 계급간격에 대한 구간 위에 이 계급의 도수에 비례하는 높이의 기둥을 세운 것이다. 히스토그램을 작성하면 자료만으로는 알아보기 어려웠던 전체의 모습을 간단하게 알 수 있고 대체적인 평균이나 산포의 모습 및 크기를 간단하게 알 수 있다.

히스토그램은

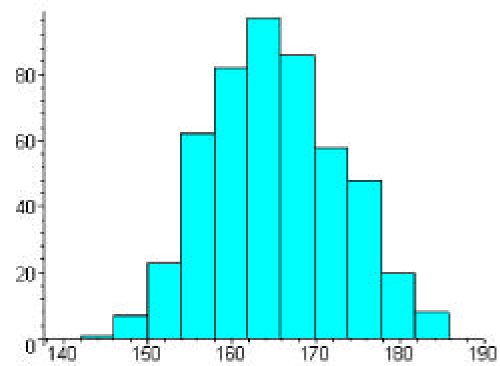
첫째, 분포의 중심위치는 어디인가?

둘째, 데이터의 분포상태는 어떠한가?

셋째, 분포의 형상은 어떠한가? 하는 점을 우선적으로 관찰해야 하며 다소의 기복은 무시하고 전체의 형상을 눈여겨보아야 한다.

<그림4> 99학년도 신입생 키에 대한 히스토그램

```
> with(stats[statplots]):
> histogram(키99,area=count,color=cyan);
```

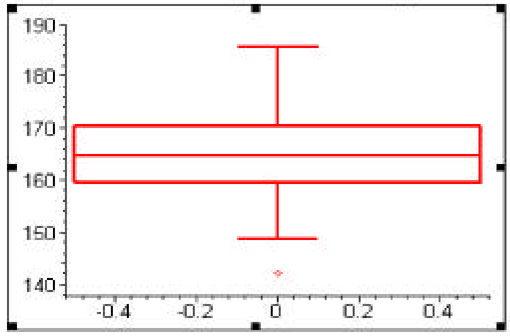


상자와 수염그래프는 아래로부터 최소값, 제1사분위값, 중앙값, 제3사분위값, 최대값으로 구성되어 있으며 분포의 중심위치, 산포도, 왜도, 꼬리 길이 및 이상치 등의 정보를 모두 제공해주는 그래프이다. 그러나 상자와 수염그래프는 봉우리가 하나 있는 분포를 갖는다고 가정하여 만들어졌다. 따라서 봉우리를 여러 개 가진 분포는 효과적으로 분석할 수 없다.

우선 99학년도 학생에 대한 상자와 수염그래프를 그리고 다음으로 3개 자료의 상자와 수염그래프를 동시에 그려보자.

<그림5> 99학년도 신입생 키에 대한 상자와 수염그래프

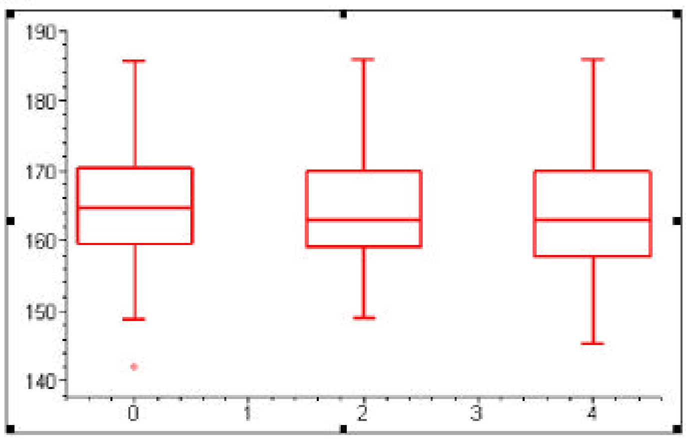
```
> statplots[boxplot](키99,axes=framed,color=red);
```



그래프에서 가장 키가 큰 학생의 키는 185쯤 되며 가장 키가 작은 학생은 148가량 될 것으로 보여진다. 최소값의 아래쪽에 있는 점은 타 학생에 비해서 현저하게 키가 작은 학생이 1명이 있다는 것을 의미한다. 이 점을 이상점이라 한다.

<그림6> 3개학년 동안 신입생 키에 대한 상자와 수염그래프

```
> statplots[boxplot](키99,키00,키01,axes=framed,
  color=red);
```

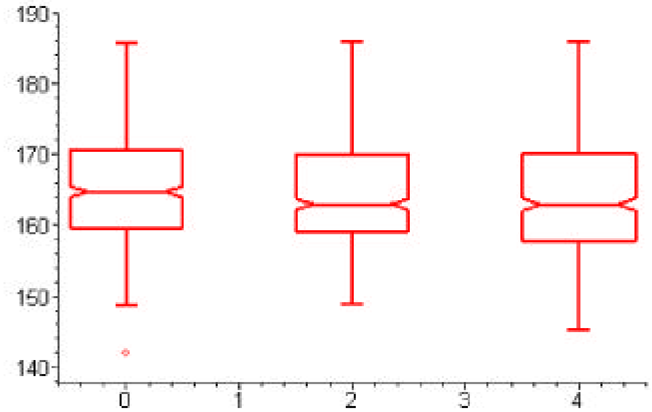


상자그림의 장점은 분포의 다양한 특성을 하나의 그림에 함축시키는 것으로 자료의 중심위치, 퍼진 정도 등의 주어진 수치 이외에도 분포의 대칭성, 분포의 집중정도, 대부분의 자료값들에서 동떨어진 이상관측점 등을 알 수 있다.

상자 대신에 쐐기 모양의 그래프를 그려보자.

<그림7> 99학년도 신입생 키에 대한 쐐기 모양의 그래프

```
> statplots[boxplot](키99,키00,키01,format=
  notched,axes=framed,color=red);
```

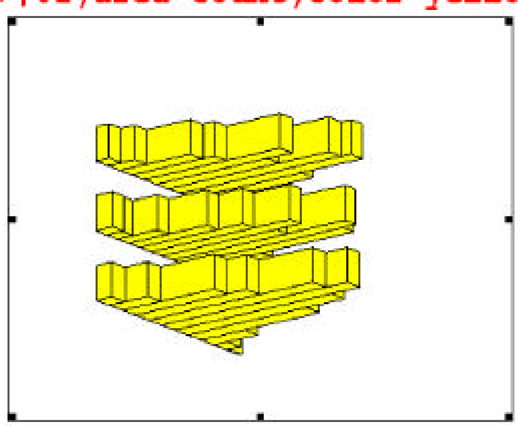


쐐기 모양의 그래프는 여러 개의 중앙값을 비교하기 위하여 쐐기를 표시한다. 쐐기들이 겹치면 중앙값들에 차이가 없다는 의미이고, 겹치지 않으면 중앙값들에 차이가 있다는 의미이다.

다음은 3개 학년의 키의 분포를 막대그래프로 3차원 공간에 한꺼번에 그려보자. 하지만 아래 그림은 실제적으로 자료를 서로 비교하기보다는 한꺼번에 그려 비교해 볼 수 있다는 상징적인 의미가 강하다.

<그림8> 3차원 공간에서의 히스토그램

```
> histogram(키99,키00,키01,area=count,color=yellow);
```



99학년도 신입생의 몸무게의 자료를 조사해보자.

```
> transform[tallyinto](몸무게,[35..45,45..55,55..65,65..75,
  75..85,85..95,95..105]);
```

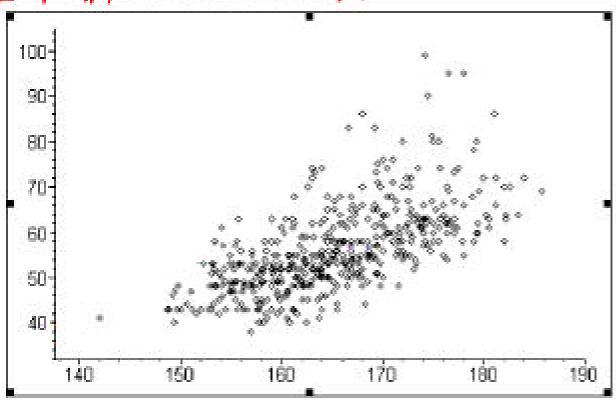
[Weight(35 .. 45, 47), Weight(45 .. 55, 198), Weight(55 .. 65, 165), Weight(65 .. 75, 64), Weight(75 .. 85, 11), Weight(85 .. 95, 3), Weight(95 .. 105, 4)]

산점도란 2가지 데이터의 상호 관계를 알아보기 위해 한쪽을 x축에 다른 한쪽을 y축에 잡아 측정값을 매긴 것으로 짝으로 된 특정값의 관계를 알아볼 수 있는 그래프이다.

키는 x 축의 원소로, 몸무게는 y 축의 원소로 하여 산점도를 그려보자.
그림에서 상관관계가 있음을 직관적으로 알 수 있다.

<그림9> 키와 몸무게의 산점도

```
> scatterplot(키99,몸무게,color=black);
```



다음은 정규분포에 대하여 알아보자.

연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 정규분포곡선 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 로 표시될 때, X의 확률분포를 정규분포라 하고 기호 $N(m, \sigma^2)$로 나타낸다.

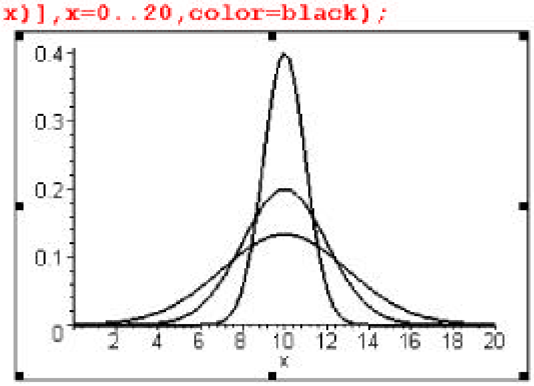
정규분포는 확률밀도함수의 그래프가 평균값을 중심으로 하여 좌우대칭인 종모양을 이루는 것으로 곡선은 $x = m$ 에서 최대이고 m 에서 멀어짐에 따라 하강하여 $x = m \pm \sigma$ 에서 변곡점을 갖는다. 즉, 아래쪽으로의 오목이 위쪽으로 오목으로 변하게 된다. 또한 m 에서 멀어짐에 따라 x축으로 한없이 접근하며 확률밀도함수의 곡선과 x 축으로 둘러싸인 넓이가 도수를 나타낸다. 확률밀도함수의 그래

프와 x 축 사이의 넓이는 1 이며, 이 넓이는 $m \pm \sigma$의 범위 내에서는 68.3 %, $m \pm 2\sigma$의 범위 내에서는 95.5 %, $m \pm 3\sigma$의 범위 내에서는 99.7 %가 된다.

실제로 우리들이 보는 많은 현상이 정규분포와 같은 경우는 거의 없다. 그러나 많은 경우 평균이나 여타 다른 추정치 들은 자료가 아주 많을 경우 정규분포와 아주 근사한 분포를 갖기 때문에 정규분포는 많이 사용되고 있다.

<그림10> 평균 10, 표준편차가 각각 1, 2, 3인 정규분포의 그래프

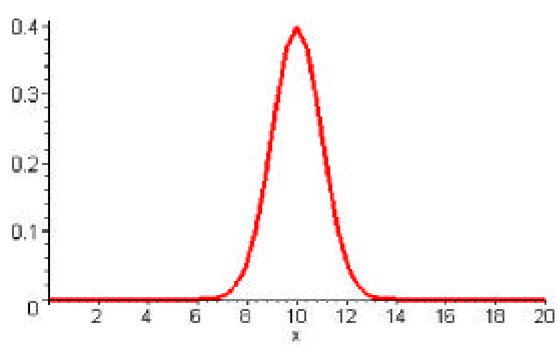
```
> p:=x->exp(-((x-10)^2)/(2* 1^2))/(1*sqrt(2*Pi)):
> pp:=x->exp(-((x-10)^2)/(2* 2^2))/(2*sqrt(2*Pi)):
> f:=x->exp(-((x-10)^2)/(2* 3^2))/(3*sqrt(2*Pi)):
> plot([p(x),pp(x),f(x)],x=0..20,color=black);
```



Maple의 애니메이션 기능을 사용하여 평균이 일정할 때, 표준편차가 증가하면 그래프의 모양이 어떻게 변화하는지 알아보고 또 표준편차가 일정할 때, 평균이 증가하면 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 알아보고 산포도의 개념을 다시 확인해보자.

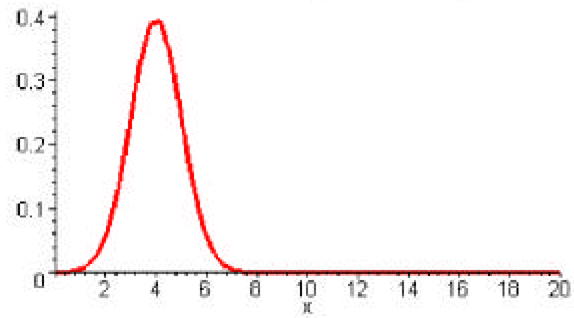
<그림11> 평균 10, 표준편차가 1에서 3사이인 정규분포 애니메이션

```
> animate(exp(-((x-10)^2)/(2* sigma^2))/(sigma*sqrt(2*Pi)), x=0..20,
  sigma=1..3);
```



<그림12> 표준편차가 1이고 평균이 4에서 16사이인 정규분포 애니메이션

```
> animate(exp(-((x-m)^2)/(2* 1^2))/(1*sqrt(2*Pi)), x=0..20, m=4..16);
```



다음은 표준정규분포에 대하여 알아보자.

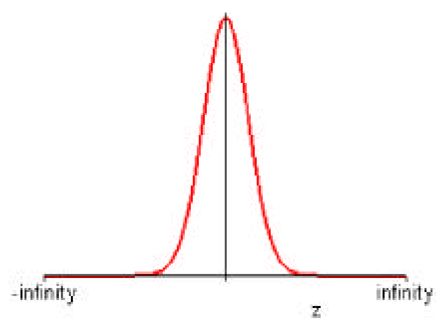
정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 중에서 $m = 0$, $\sigma = 1$일 때의 정규분포 $N(0, 1)$을 표준정규분포라고 한다. 표준정규분포에서 확률밀도함수는 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$이다.

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 표준화 $\left(Z = \frac{X - m}{\sigma}\right)$하면 표준정규분포 $N(0, 1)$가 된다.

표준정규분포 $N(0, 1)$의 그래프를 그려보자.

<그림13> 표준정규분포 $N(0, 1)$의 그래프

```
> plot(exp(-z^2/2)/sqrt(2*Pi),z=-infinity..infinity);
```



정규분포를 조금 변형시켜서 단순화한 것이 표준정규분포이다. 표준 정규분포에서는 우선 평균을 0 이라고 놓은 다음 평균에서 떨어진 정도를 표준편차의 몇 배 인가로 표시한다. 곡선 아랫부분의 넓이를 계산해보자.

```
> Int(exp(-z^2/2)/sqrt(2*Pi),z=-infinity..infinity)
  =int(exp(-z^2/2)/sqrt(2*Pi),z=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,dz = 1$$

(문제) 학생 100명의 키의 분포가 평균이 164㎝, 표준편차가 8.2 인 정규분포 $N(164, 8.2^2)$를 따른다고 할 때, 정규분포의 확률밀도 함수 그래프를 그리고, 키가 172.2㎝ 이상인 학생은 몇 명이라고 말 할 수 있는가?

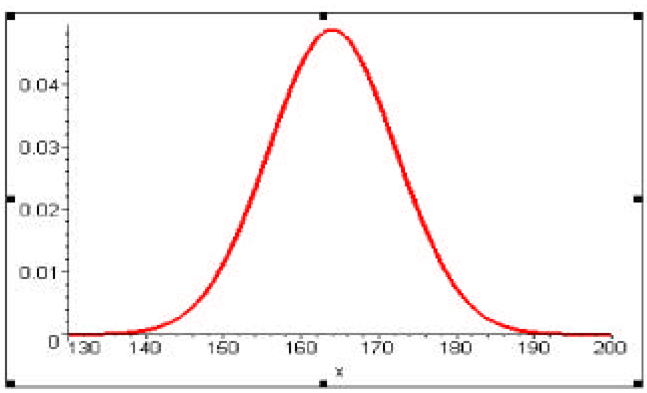
우선 정규분포 $N(164, 8.2^2)$의 그래프를 보면서 우리가 구하려고 하는 값의 의미를 생각해보자.

확률밀도함수 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 에서 $m = 164$, $\sigma = 8.2$ 이므로 Maple의 그래핑 기능을 이용해서 나타내면 다음과 같다.

여기서 평균 m의 값과 표준편차 σ값을 변화시키면서 그래프의 변화를 직접 관찰해보고 표준편차의 의미를 다시 한번 상기해보자.

<그림14> 정규분포 $N(164, 8.2^2)$의 그래프

```
> f:=x->exp(-(x-164)^2/(2*8.2^2))/(8.2*sqrt(2*Pi)):
> plot(f(x),x=130..200);
```



x가 172.2이상일 확률 $P(X \geq 172.2)$의 계산식은 $\int_{172.2}^{\infty} f(x)\, dx$ 이다.

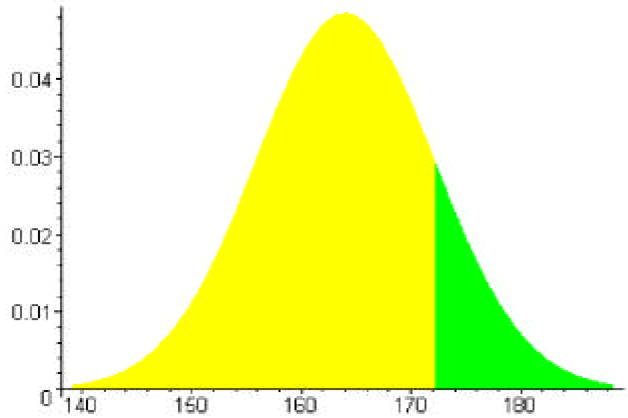
여기서 세 가지의 값(X 의 값과 평균: m , 표준편차: σ)을 순서대로 입력하면 정규분포의 그래프에서 영역별로 색을 달리해서 보여주는 Maple의 프로시저를 사용해서 위의 결과를 확인해보자.

```
> with(plots):
  x_plot := proc(x, mean, sd)
  local xvalue, f, p, delta, index, n, area, Left, Right;
  f:= u -> exp( -((u-mean)^2)/ (2*sd^2) )/(sd*sqrt(2*Pi));
  Right := fsolve( f(mean)/100 = f(xvalue), xvalue,
  mean..((1+mean)*4));
  Left := mean - (Right-mean);
  Print(Left, Right);
  n := 120; delta := (Right - Left)/n;  index := 1;
  for xvalue from Left to Right by delta do

    if( xvalue >= x)
      then  p[index] := polygonplot( [[xvalue, 0],
  [xvalue,f(xvalue)],
                             [xvalue + delta, f(xvalue + delta)],
  [xvalue + delta, 0]],
                             color = coral, style = patchnogrid );
      else   p[index] := polygonplot( [[xvalue,0 ],
  [xvalue,f(xvalue)],
                             [xvalue + delta, f(xvalue + delta)],
  [xvalue + delta, 0]],
                             color = khaki, style = patchnogrid ) ;
    fi;
  index := index + 1;
  od;

  area := int( f(u), u = x..infinity);
  plots[display](seq( p[i], i = 1..n-1) );

  end:
```

x_Plot(x, mean, sd)에서 x에 변량, mean에 평균값, sd에 표준편차의 값을 넣으면 다음과 같이 그래프를 볼 수 있다.

<그림15> x_Plot(x, mean, sd) 프로시저의 그래프

```
> x_plot(172.2,164,8.2);
```



그림에서 그래프와 x **축 사이의 넓이가 얼마일까**?

그림에서 오른쪽 부분의 넓이가 얼마일까?

x_Plot(x, mean, sd)**에서 표준편차의 값을 바꾸어 입력하여 실행시키면 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 관찰해보자**.

그림에서 오른쪽 부분이 키가 172.2㎝ **이상일 확률이다**.

키가 172.2㎝ **이상인 학생수는** $100\times\int_{172.2}^{\infty} f(x)\,dx$ **이므로 이것을** Maple**의 계산 기능을 이용하여 계산하면 다음과 같다**.

```
> f:=x->exp(-(x-164)^2/(2*8.2^2))/(8.2*sqrt(2*Pi)):
> 100*(Int(f(x),x=172.2..infinity))
  =100*(int(f(x),x=172.2..infinity));
```

$$100\int_{172.2}^{\infty} .06097560975\,\frac{e^{(-.007436049970\,(x-164)^2)}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,dx = 15.86552539$$

따라서 키가 172.2㎝ **이상인 학생수는 약** 16**명이다**.

위 문제에서 X **를 표준화** $\left(Z = \frac{X - m}{\sigma}\right)$**시키면 표준정규분포** $N(1,\ 0)$ **가 된다**.

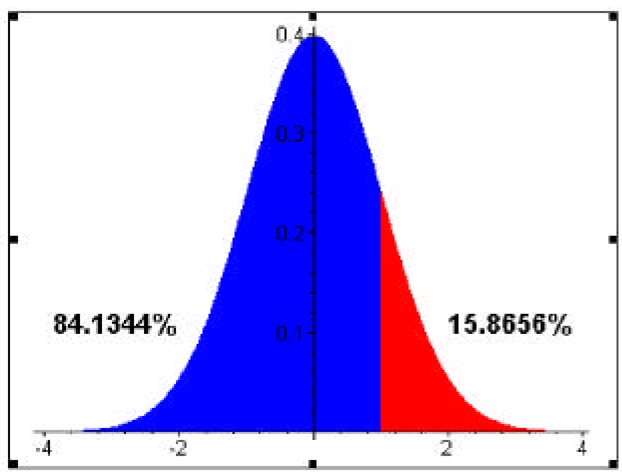
여기서 $P(X \geqq 172.2) = P(Z \geqq 1)$ 이므로, 확률 $P(Z \geqq 1)$ 을 Maple의 z_Plot(z) 프로시저를 이용하여 그림으로 나타내면 다음과 같다.

```
> z_plot := proc(z)
  local x, xvalue, f, p, delta, index, n, area;
      f:= x -> exp( ( -x^2)/2)/sqrt(2*Pi);
      n := 120;  delta := 8/n;  index := 1;
      for xvalue from -4 to 4 by delta do
  if( xvalue >= z) then  p[index] := plots[polygonplot]( [[xvalue,
   0 ],[xvalue,f(xvalue)], [xvalue + delta,f(xvalue + delta)],
  [xvalue + delta, 0]], color = red, style = patchnogrid );
        else

  p[index] := plots[polygonplot]( [[xvalue,0],[xvalue,f(xvalue)],
   [xvalue + delta,f(xvalue + delta)],[xvalue + delta,0]],
    color = blue, style = patchnogrid ) ;                    fi;
    index := index + 1;                                      od;
   area := int( f(x), x = z..infinity);
   plots[display](seq( p[i], i = 1..n-1),
   textplot([-2,.1, cat(convert( evalf(100*(1 - area), 6),
  string),"%")], align = {ABOVE, LEFT} , font = [HELVETICA, BOLD, 14]),
   textplot([2,.1, cat(convert( evalf(100*(area), 6), string),"%")],
      align = {ABOVE, RIGHT} , font = [HELVETICA, BOLD, 14])):
  end:
```

z_Plot(z)에서 z의 값으로 1을 넣으면 $P(Z \geqq 1)$ 일 확률을 보여준다.

<그림16> z_Plot(z) 프로시저의 그래프

```
> z_plot(1);
```



위 그림에서 $P(Z \geqq 1)$ **일 확률을 바로 알 수 있다.**

키가 172.2㎝ **이상인 학생수는** $100 \times \int_1^{\infty} f(z)\,dz$ **이므로 이것을** Maple**의 계산 기능을 이용하여 계산하면 다음과 같다.**

```
> f:=Z->exp(-Z^2/2)/(sqrt(2*Pi)):
  100*Int(f(Z),Z=1..infinity)=evalf(100*int(f(Z),Z=1..infinity));
```

$$100 \int_1^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{\left(-\frac{1}{2} Z^2\right)} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, dZ = 15.86552539$$

따라서 키가 172.2㎝ **이상인 학생수는 약** 16**명이다.**

이것은 정규분포인 경우의 계산과 결과가 같다는 것을 알 수 있다.

그리고 위의 z_Plot(z)**에서** z**의 값을 바꾸어 넣어보고 그림이 어떻게 나타나는지 관찰해보자.**

Ⅳ. 결론 및 제언

현대 사회의 모든 분야에서 컴퓨터는 필수적인 장비로 위치를 확고히 하고 있고 학교에서도 많은 교사가 컴퓨터를 활용한 수업을 하고 있지만 수학수업에서 컴퓨터를 활용한다는 말은 아직도 생소한 느낌이다. 여러 가지 이유가 있겠지만 컴퓨터가 학생들의 수학적 지식 구성에 도움을 준다는 확실한 연구 결과가 아직 없으며 현실적으로 컴퓨터를 활용한 수업이 진학과 무관하다는 것이 큰 이유일 것이다.

따라서 지금과 같은 상황에 변화가 있으려면 컴퓨터와 소프트웨어를 활용하는 활동이 교육과정에 포함되어야 한다는 주장[21]이 설득력이 있다고 생각된다.

정보화 사회에서는 수치로 표현되고 있는 정보(자료)를 효율적으로 수집하고 정리, 분석하는 일이 필수적이기 때문에 정보의 가공(수집, 정리, 분석)에 필요한 지식과 도구 또한 절실히 요구되고 있다. 통계학이 바로 그러한 역할을 담당하고 있는 한 학문분야이다.

통계학은 국가 업무관장을 위해 시작되었으나 오늘날에는 사무 및 생산 자동화를 통하여 각종 정보자료의 축적이 이루어지고 있는 기업체에서 정보의 정리, 요약, 분석, 예측을 위하여 활용되고 있는 등 많은 분야에서 공통적으로 요구되는 도구학문으로 인식되고 있다. 따라서 주어진 자료를 그림이나 표로 정리하거나 간단한 수치로 요약하는 것이 전부가 아니라, 주어진 자료를 기초로 해서 보편 타당한 이론을 추론해 내는 학문의 한 분야로 그 중요성을 인정받고 있다. 그러나 현실적으로 학교에서의 통계 단원은 그것의 실용성에 비해 좋은 인상을 받지 못하고 있다. 그것은 통계단원이 수학적인 계산이나 복잡한 수학 공식을 강조하여 자료의 해석보다 통계처리 과정에 지나치게 집착하였기 때문이다.

본 논문은 고등학교 수학Ⅰ의 통계단원의 수업에서 Maple을 이용하여 단순하면서 시간이 많이 필요한 계산이나 통계처리과정은 가능한 컴퓨터의 계산 기능

에 맡기고 학생들은 통계처리 결과를 해석하는 방법에 대하여 생각하는 시간을 갖도록 수업모형을 작성하였다.

Maple을 이용한 수업을 하기 위해서는 컴퓨터를 충분히 갖춘 컴퓨터실과 컴퓨터실 사용 시간이 확보되어야 하고 또 Maple의 기본적인 사용법을 지도하는 시간을 별도로 확보하여야 한다. Maple을 이용한 실험적 수업에서 학생의 변화를 관찰하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 학생의 프로그램 조작 숙련도에 따라 학업성취 속도에 많은 차이가 나므로 그룹별로 상호 정보를 교환하면서 공동으로 문제를 해결하도록 지도하는 과정이 필요하다.
2) 대부분의 학생들은 새로운 수업방식에 흥미를 가지고 적극적으로 수업에 참가하며 평가로 인한 중압감이 없어 자연스러운 문제 제기와 활발한 수업이 이루어져 수학 학습에 대한 긍정적인 태도와 동기유발이 가능하다.
3) 상호 작용 학습수행지를 통하여 학생들이 스스로 탐구하고 문제를 해결해 나가는 창의적인 학습을 수행하고 있으며 학습에 대한 자신감을 갖는다.
4) 기본적인 계산 능력이 부족한 학생은 문제 해결을 위한 알고리즘이나 규칙 등을 학습하지 못하고 답만 확인하는 결과가 되어 문제해결력 신장에 도움이 되지 못할 수 있다.
5) 컴퓨터를 이용한 수업이 평가나 진학과 관련이 없으면 일회성, 전시성 수업이 될 가능성이 높다. 컴퓨터를 이용한 수업이 학생들의 수학적 사고력 신장에 도움이 되므로 컴퓨터를 이용한 수업이 교과에 포함되도록 교과서를 재편성할 필요가 있다고 생각한다.

참 고 문 헌

[1] 고왕경 (1999). 기초 Maple V 입문 -수학 및 통계학연구를 위한-, 경문사

[2] 교육부 (1995). 고등학교 교육과정 해설 -수학-

[3] 김도현·김석만(2001). Maple 6를 활용한 고등학교 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈E, 제12집 pp233-248

[4] 김동제 (2000). 스프레드시트 프로그램의 활용을 통한 통계 수업의 흥미도 신장 방안. 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.

[5] 김민경 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학적 교수-학습의 구성주의적 접근, 교육학 연구 제36권 제2호, pp183-202.

[6] 김연식, 우정호, 박영배, 박교식(1994). 대한수학교육학회 논문집 제4권 제2호 수학교육학 용어해설(1), pp245-260.

[7] 김연식, 우정호, 박영배, 박교식(2001). 대한수학교육학회지 <학교수학> 제3권 제1호 수학교육학 용어해설(8), pp185-213.

[8] 김응환 (2001). 실험을 통한 통계교육의 수업방법 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A, 제40권 제2호 pp345-350

[9] 김정희 (2000). 그래핑 계산기를 활용한 수학개념 연계 지도의 실제. 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.

[10] 김한희, 박일영, 박용범 (2000). 수학 응용소프트웨어를 활용한 효과적인 이차곡선의 지도방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 제 10집, pp125-141.

[11] 나귀수(2000). 수학교육에서 컴퓨터 활용에 대한 소고, 대한수학교육학회지<학교수학> 제2권 제1호 pp97-110

[12] 류희찬 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제, 대한수학교육학회 1998 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp29-43.

[13] 박경수 · 한동승 (2001). Maple VI(미적분학을 중심으로). 경문사.

[14] 박영배 (1996). 수학 교수 · 학습의 구성주의적 전개 과정에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문.

[15] 박재희·김래영·권오남(2000). 자료 주도적(Data-Driven)확률과 통계 학습에서의 그래픽 계산기의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈E, 제10집 pp155-168.

[16] 박한식 외 (1999). 고등학교 수학II, (주) 지학사.

[17] 우정호(2000). 통계교육의 개선방향 탐색, 대한수학교육학회지<학교수학> 제2권 제1호 pp1-27

[18] 이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

[19] 임기문 (2001). Maple 모듈을 활용한 교수·학습 모형 탐색, 부경대학교 교육대학원 석사학위논문.

[20] 전영국 (2000). 미적분 문제의 해를 단계별로 제시하는 웹기반 Mathematica 모듈, 대한수학교육

학회 2000 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp699-735.

[21] 정상권 · 추상목 (1999). 수학교육에서의 Maple의 활용방안. 대한 수학교육학회지 <학교수학> 제 1권 제 1호, pp157-185.

[22] 조완영·권성룡(2000). 컴퓨터 공학의 도입을 위한 수학 교육 연구의 방향. 한국수학교육학습지 시리즈A, 제39권 제2호, pp179-186

[23] 추인선 · 박용범 · 하회영 · 최재룡 (2000). Maple V와 미분적분학. 교우사.

[24] 한국교육과정평가원(1999). 수학Ⅰ 국가 교육과정에 근거한 성취기준 및 평가도구.

[25] 허만성 · 박용범 · 김부윤 (1999). 수학 교수-학습을 위한 컴퓨터 응용프로그램 모형 설계에 따른 대화형 실행매체(Interactive Mathematics Texts)의 작성에 관한 소고, 대한수학교육학회 논문집, 제 9권 제 1호, pp321-332.

[26] 황 일 (1996). 수학교육에서의 컴퓨터의 이용. 한국수학교육학회지 시리즈 A, 제 35권 제 1호, pp15-23.

[27] Helmut Heugl. (1999). *The Necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems*. Proceedings of the 5th ACDCA Summer Academy.

[28] James J. Kaput (1998). Mixing New Technology, New Curricula and New Pedagogies to Exteaordinary Performance from Ordinary People in the Next Century. *Department of mathematics, University of Messachusetts-Dartmouth. ICMI-EARCOME1 Proceeding Vol 1.* pp141-156.

[29] James J. Kaput & J. Roschelle (1999). The mathematics of change and variation from a Millennial perspective ; New content, New context. In Celia Hoyles, ⋯ (Eds.), *Rethinking the Mathematics Curriculum*, pp155-170, London : Falmer press.

[30] M. B Monagan; K. O. Geddes; K. M. Heal; G. Labahn; S. M. Vorkoetter & J. McCarron (2000). *Maple 6 Programming Guide*, Waterloo Maple Inc.

[31] NCTM (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. NCTM.

[부록]

학습수행지
(Worksheet)

단원	통 계	학습목표	정규분포곡선의 성질을 이해한다.		확인	
학번		성 명		일 시	2002 년 월 일 교시	

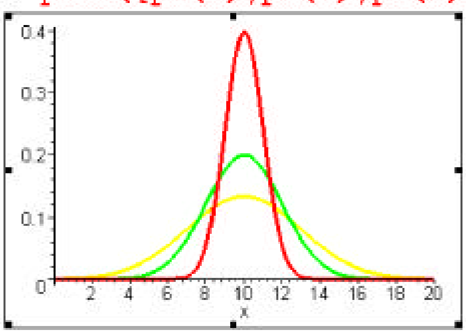
1. Maple**을 사용하여 다음을 실행해보고 관찰 내용을 적어보자.**
먼저 Maple**의 통계 패키지와 그래프 패키지를 로드시킨다.**

```
> with(stats): with(plots):
```

정규분포의 확률밀도함수는 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ **이다.**

평균이 $m = 10$ **이고 표준편차** σ**가** $\sigma = 1$, $\sigma = 2$, $\sigma = 3$ **인 정규분포의 확률밀도 함수 그래프를 그려서 비교해보자.**

```
> p1:=x->exp(-((x-10)^2)/(2*1^2))/(1*sqrt(2*Pi)):
> p2:=x->exp(-((x-10)^2)/(2*2^2))/(2*sqrt(2*Pi)):
> p3:=x->exp(-((x-10)^2)/(2*3^2))/(3*sqrt(2*Pi)):
> plot([p1(x),p2(x),p3(x)],x=0..20);
```



위의 수식을 입력하면 왼쪽의 그림이 화면에 나타난다.
이것은 표준편차가 1, 2, 3**인 경우의 정규분포곡선이다.**
표준편차가 1**인 정규분포곡선은 어느 것일까?**

다음은 평균이 $m = 10$ **으로 일정하면서 표준편차가** 1**에서** 3**사이로 변할 때, 정규분포 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 확인해 볼 수 있는** Maple**의 애니메이션 기능이다. 실행을 하여 어떻게 변화하는지 관찰해보자.**

```
> animate(exp(-((x-10)^2)/(2* sigma^2))/(sigma*sqrt(2*Pi)),
  x=0..20, sigma=1..3);
```

다음은 표준편차가 $\sigma = 1$**로 일정하면서 평균이** 4**에서** 16**사이로 변할 때, 정규분포 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 확인해 볼 수 있는** Maple**의 애니메이션 기능이다. 실행을 하여 어떻게 변화하는지 관찰해보자.**

```
> with(plots):
  animate(exp(-((x-m)^2)/(2* 1^2))/(1*sqrt(2*Pi)),x=0..20, m=4..16);
```

위 애니메이션의 실행 결과를 토대로 하여 정규분포곡선의 성질을 기록해보자.

< 정규분포 곡선의 성질 >

(1) 직선 [ ] 에 대하여 대칭이다.

(2) [ ]일 때, y 의 값은 최대이고, 점근선은 [ ]이다.

(3) 표준편차의 값이 커지면, 곡선의 산 모양이 [ ],
표준편차의 값이 작아지면, 곡선의 산 모양은 [ ].

(4)곡선과 x축 사이의 부분 중에서 $m-\sigma \leqq x \leqq m+\sigma$인 범위의 넓이 $\int_{9}^{11} p1(x)\,dx$ 를 Maple로 계산해보자.

```
> S:=evalf(int(p1(x), x=9..11));
```

[ ]

※ evalf는 근사값을 구하는 명령어이다.

위 식에서 정적분 범위를 나타내는 $x=9..11$ 을 $x=8..12$, $x=7..13$ 으로 바꾸어서 $m-2\sigma \leqq x \leqq m+2\sigma$인 범위의 넓이와 $m-3\sigma \leqq x \leqq m+3\sigma$인 범위의 넓이를 구해보자.

(5) 함수 $p2(x)$ 를 이용할 때, x 의 범위를 어떻게 잡아야 (4)와 같은 결과를 얻을 수 있는지 생각해 보자.

[부록]

학습수행지
(Worksheet)

단원	통 계	학습목표	표준정규분포곡선을 이해한다.		확인	
학번		성 명		일 시	2002 년 월 일 교시	

(문제) 어느 고등학교의 신입생 100명의 키를 조사하였더니 평균은 164㎝, 표준편차는 8.2㎝ 이었다. 이 키의 분포가 정규분포를 따른다고 할 때, 키가 172.2㎝ 이상인 학생은 몇 명이라고 말 할 수 있는지 알아보자.

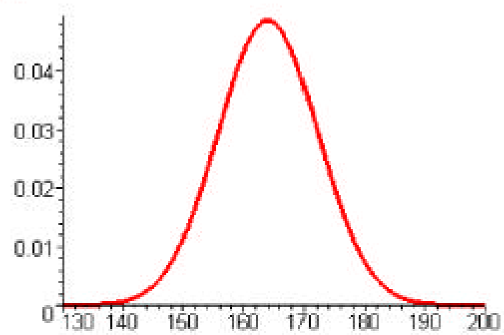
⑴ 키의 분포를 정규분포 기호로 표시하면 N(　　　　　)이다.

⑵ Maple을 이용하여 정규분포곡선을 그려보자.

확률밀도함수는 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 이다.

아래 식은 평균 $m = 164$ 과 표준편차 $\sigma = 8.2$ 인 정규분포곡선을 그리는 식이다. 그래프를 관찰해보자.

```
[> f:=x->exp(-(x-164)^2/(2*8.2^2))/(8.2*sqrt(2*Pi)):
[> plot(f(x),x=130..200);
```



⑶ 그림에 직선 $X = 172.2$ 을 그리고, $P(X \geqq 172.2)$ 인 영역에 빗금을 그어라.

Maple의 x_Plot(x, mean, sd) 프로시저를 이용해서 그래프를 확인해보자.

x_Plot(x, mean, sd)에서 변량 x=172.2, 평균 mean=164, 표준편차 sd=8.2의 값을 입력하고 실행시키면 $P(X \geqq 172.2)$ 인 정규분포 그래프를 볼 수 있다.

```
[> x_plot(172.2,164,8.2);
```

x의 값을 바꾸어 실행해보고 변화를 관찰해보자.

⑷ 키가 172.2㎝이상인 학생수를 Maple의 계산 기능을 이용하여 계산해보자.

학생수는 $100 \times P(X \geqq 172.2) = 100 \times \int_{172.2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 8.2} e^{-\frac{(x-164)^2}{2 \cdot (8.2)^2}} dx$ 이다.

```
> f:=x->exp(-(x-164)^2/(2*8.2^2))/(8.2*sqrt(2*Pi)):
  100*Int(f(x),x=172.2..infinity)
  =100*int(f(x),x=172.2..infinity);
```

위 계산의 결과를 확인하고 학생수를 구하면? [ ].

(5) 위 정규분포 $N(164,\ 8.2^2)$ 을 표준화 $\left(Z = \frac{X-m}{\sigma}\right)$하면 표준정규분포 $N(0,\ 1)$ 가 되므로 $P(X \geqq 172.2)$ 을 표준화시키면 [ ] 가 된다.

(6) 표준정규분포곡선을 이용하여 위 문제를 풀어보자. 확률밀도함수는 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ 이다. Maple을 이용하여 표준정규분포곡선을 그려보자.

```
> f:=z->exp(-z^2/2)/sqrt(2*Pi):
  plot(f(z),z=-infinity..infinity);
```

$P(Z \geqq 1)$ 이므로 학생수는 $100 \times P(Z \geqq 1) = 100 \times \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ 이다.

Maple의 계산 기능을 이용하여 학생수를 계산해보자.

```
> 100*evalf(int(f(z), z=1..infinity));
```

위 계산결과를 확인하고 (4)의 결과와 비교해보자.

이어서 Maple의 z_Plot(z) 프로시저를 이용해서 그래프를 확인해보자.

z_Plot(z)에서 z=1의 값을 입력하고 실행시키면 $P(Z \geqq 1)$ 인 표준정규분포 그래프를 볼 수 있다.

```
> z_plot(1);
```

z의 값을 바꾸어 실행해보고 변화를 관찰해보자.