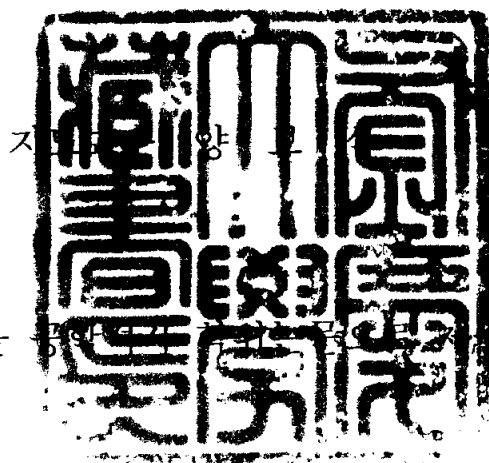


공학석사 학위논문

Simulated Annealing법을 이용한 저널베어링의 최적 설계



이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함

2003年 12月

부경대학교 대학원

기계설계학과

구 형 은

구형은의 공학석사 학위논문을 인준함

2003년 12월

주 심 공학박사 김 형 자



위 원 공학박사 이 수 종



위 원 공학박사 양 보 석



목 차

ABSTRACT	2
1. 서 론	3
2. 저널 베어링 해석	4
2.1 일반적인 저널베어링 이론	4
2.2 유막 온도를 고려하지 않은 해석	6
2.3 유막 온도를 고려한 해석	14
3. 시뮬레이티드 어닐링(SA)	19
3.1 최적설계의 개념	19
3.2 국부 탐색법	21
3.3 SA의 원리 및 기본 형태	22
3.4 SA 수치해석 결과	28
4. 회전축계의 해석 이론	33
4.1 운동방정식과 안정한계속도	33
4.2 고유치해석	39
4.3 위험속도 회피 기준	41
5. 계산 결과	42
5.1 저널베어링 해석	42
5.2 회전체 시스템의 최적설계	48
5.2.1 단순 저널베어링 최적설계	48
5.2.2 결과 및 고찰	52
6. 결 론	57
참고문헌	58
감사의 글	60

Optimum Design of Journal Bearing Using Simulated Annealing Method

Hyong-Eun Goo

*Department of the mechanical design
The Graduate School
Pukyong National University*

ABSTRACT

In general, the dynamic design of a rotor system is to steady the system at the operating speed and the unbalance response in the vicinity of the rotor critical speed, and to minimize the system weight considering economics and the transmitted force at the bearings and the foundation. This process is regarded as an optimization.

This paper describes the optimum design for journal bearing by using simulated annealing(SA) method. Simulated annealing algorithm is an optimum design method to calculate global and local optimum solution. The principle of SA is based on iterative improvement method and permit a movement of cost increase at a probability. Kirkpartick et al. proposed an algorithm, which is based on the analogy between the annealing of solids and the problem of solving combinatorial optimization problems. Dynamic characteristics of a journal bearing are calculated by using finite difference method(FDM), and these values are used for the procedure of journal bearing optimization. The objective is to minimize the resonance response (Q factor). Clearance and length to diameter ratio are used as the design variables.

1. 서 론

일반적으로 회전기계의 성능을 향상시키는 데는 진동과 소음의 발생이 부가적으로 발생된다. 즉, 기계의 에너지 효율을 향상시키기 위해 소형화, 경량화, 고속화 및 고온화 등을 통하여 에너지 손실을 최소화하지 않으면 안되나, 이러한 과정은 진동 및 소음을 발생시키는 요인이 되는 경우가 많다. 그 중에서 회전기계를 지지하는 베어링은 회전기계의 동력 손실 및 안정성을 좌우하는 핵심 부품 중의 하나라고 할 수 있으며, 따라서 이에 대한 연구는 회전체 설계기술 자립을 위해 필수적이라고 할 수 있다.

저널베어링의 강성과 감쇠계수는 회전체의 위험속도와 불안정현상과 같은 시스템의 고속안정성에 직접 영향을 미치고, 특히 베어링 유막의 영향으로 발생하는 자려진동으로 인해 회전체에서 불안정화(instability)가 발생한다. 그러므로 고속안정성이 우수한 시스템을 설계하기 위해서는 먼저 베어링의 동특성이 정확하게 예측되고, 이 베어링의 정확한 설계가 회전체에서 고려되어야 할 중요한 요인으로 자리 잡고 있다. 이 베어링의 최적화의 목적은 시스템의 저진동을 위한 베어링 요소의 설계변수들에 대한 최적값을 찾는 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 많은 최적화 탐색 방법들이 개발되어 왔다^(1,2). 본 연구에서는 그 중 하나인 시뮬레이티드 어닐링(simulated annealing) 알고리즘을 사용하여 회전체와 지지 베어링의 저 진동화를 위한 최적설계를 수행하고 그 결과를 나타내었다. 실제 설계에서 공진배율인 Q 계수(quality factor)는 위험속도에서 진동진폭을 예측하기 위해 사용된다. 회전체 베어링 시스템에서 진동진폭이 아주 크게 되면, 이로 인한 과도한 불평형, 정렬불량 및 접촉(rubbing) 등의 문제에 기인하여 발생될 수 있다. 본 논문에서는 유한차분법(finite different method)을 사용하여 저널 베어링의 지지강성 및 감쇠계수인 동특성 계수를 구하였다. 그리고, 시뮬레이티드 어닐링(SA) 최적화 알고리즘을 이용하여, 시스템의 Q 계수를 최소화하는 목적함수로 베어링 형상의 최적화를 수행하였다. 계산에 사용되는 Q 계수 값은 FDM으로 구한 저널 베어링의 동특성계수를 이용하였다.

2. 저널 베어링 해석

저널 베어링은 높은 부하하중 뿐 아니라 고유의 감쇠 특성을 지니고 있기 때문에 고속회전 기계에 널리 사용된다. 볼 베어링과는 달리 저널 베어링은 회전체의 안정성을 보장하는 지지강성과 충분한 감쇠를 제공한다. 저널 베어링의 강성과 감쇠 특성은 회전체의 위험속도와 불평형 응답을 바꾸는 중요한 요인이다. 더구나, 대형, 고속 저널 베어링에서 축이 고속으로 회전할 때 축의 어느 회전속도 이상에서는 유막 효과의 자려진동(self excited vibration)의 발생으로 oil whip이라는 불안정 현상이 나타나는 경우가 있다. 이 oil whip 현상은 공진현상과는 달리 축의 회전속도를 증가시킬수록 축의 진동진폭이 급격히 커져서 결국 시스템의 운전이 불가능하게 된다. 따라서 이 현상은 베어링 설계시 시스템에 적합한가를 판정하기 위해 반드시 고려되어야 할 중요한 요인이다.

2.1 일반적인 저널 베어링 이론⁽³⁾

Fig. 2.1에 일반적인 저널 베어링의 구조를 보이고 있다. O_b 는 베어링의 중심, O_j 는 저널의 중심, R_b 는 베어링의 반지름, R_j 는 저널의 반지름, R_b 와 R_j 의 차이가 베어링의 틈새(clearance) C_r 이 되고, e 는 저널 베어링의 편심(eccentricity), 틈새와 편심의 비가 편심률(eccentricity ratio) $\epsilon(=e/C_r)$ 이 된다. ω 는 저널의 회전속도, θ 는 원주방향의 위치를 나타내고, h 는 임의의 θ 에서의 유막 두께가 되므로, $h = C_r(1 + \epsilon \cos \theta)$ 의 값을 가지고, ϕ 는 베어링과 저널을 잇는 중심선과 하중의 방향과 이루는 사이각(attitude angle)이다.

저널 베어링이 편심되어 운전될 때, 양(positive)의 압력이 발생하는 converging 영역과 음(negative)의 압력이 발생하는 diverging 영역이 있다. 따라서 저널 베어링 내의 압력 분포를 구하기 위하여 다음과 같은 경계 조건을 설정한다.

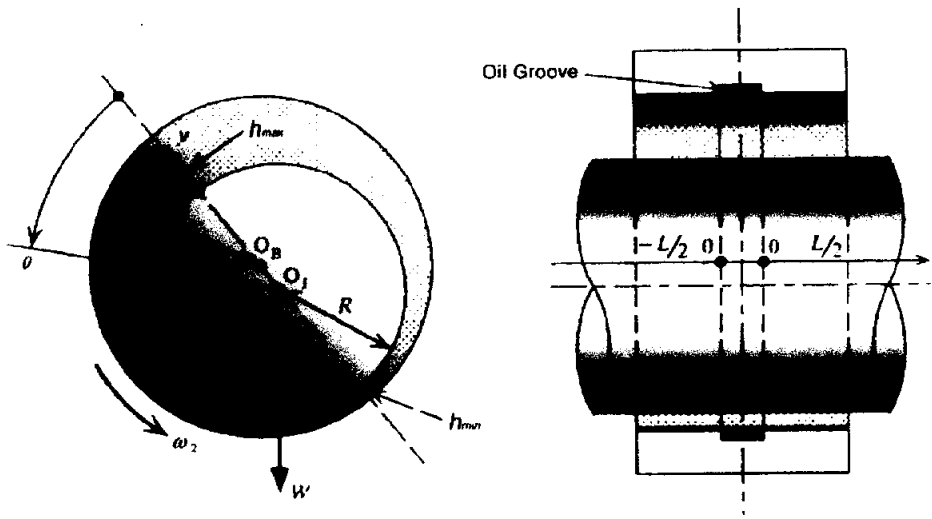
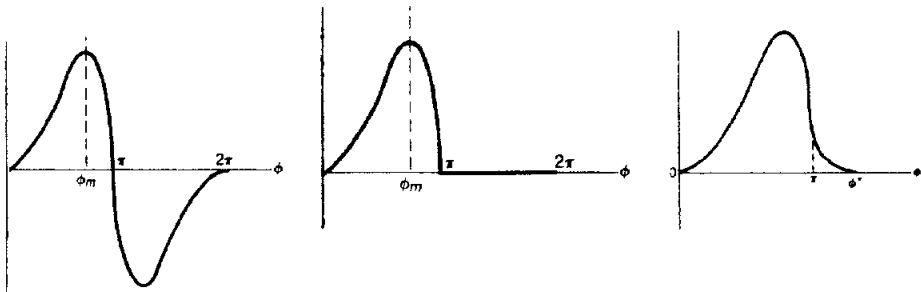


Fig. 2.1 Construction of journal bearing

- a) Sommerfeld condition : $\bar{P}=0$ at $\theta=0, \pi, 2\pi$
- b) Half-Sommerfeld condition : $\bar{P}=0$ at $\theta=0, \pi \leq \theta \leq 2\pi$
- c) Reynolds condition : $\bar{P}=0$ at $\theta=0, \pi + \alpha \leq \theta \leq 2\pi$

$$d\frac{\bar{P}}{d\theta}=0 \text{ at } \theta=\pi + \alpha$$

Fig. 2.2는 각 경계조건에 대해 압력 분포를 나타낸 것이다.



(a) Sommerfeld condition (b) Half-Sommerfeld condition (c) Reynolds condition

Fig. 2.2 Pressure distribution for each condition

Fig. 2.2에서 보듯이 Sommerfeld 조건은 이론적인 sine파의 압력을 가지나, 실제 베어링에서는 음의 압력이 발생하지 않기 때문에 거의 사용하지 않는다. 저널이 회전을 하면 유막도 함께 회전을 하면서, 유막 내에서는 공동(cavitation) 영역이 발생하며, 이 공동영역을 고려하는 것이 바로 half-Sommerfeld 조건과 Reynolds 조건으로, half-Sommerfeld 조건은 Sommerfeld 조건의 음의 압력을 대기압으로 둔 경우이다. 그렇지만 $\theta = \pi$ 에서 불연속이므로 물리적 조건을 만족하지 못하며, $\theta = \pi$ 에서 $d\bar{P}/d\theta = 0$ 을 만족시키는 연속조건이 바로 Reynolds 조건이다. 그렇지만, 유한차분법을 사용한 베어링내의 압력을 계산할 때는 계산의 편의를 위해 주로 half-Sommerfeld 조건을 많이 사용한다. 그리고 저널베어링의 해석 시, 경계조건에 따라 무한소폭 베어링(short bearing), 유한폭 베어링(finite bearing), 무한폭 베어링(long bearing)으로 모델링을 할 수 있으나, 무한소폭 베어링이나 무한폭 베어링은 실제 베어링의 모델링에 한계가 있으므로, 유한폭 베어링 이론을 많이 사용한다. 그러나 유한폭 베어링은 수치계산이 복잡하다는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는 유한폭 베어링으로 저널 베어링을 모델링 하였고, 경계조건으로는 half-Sommerfeld 조건을 사용하였다. 베어링 해석에 가정되는 조건으로는 다음과 같다.

- (1) 공급되는 윤활유 비압축성(incompressible)
- (2) 유막 두께 방향으로의 일정 압력
- (3) Newtonian 유체
- (4) 점도는 온도만의 함수
- (5) 저널과 베어링의 중심축은 평행

2.2 유막 온도를 고려하지 않은 해석⁽⁴⁾

베어링의 원주방향을 x , 축 방향을 z 라 하면, 저널베어링 유막의 지배방정식인 Reynolds 방정식은 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.1)$$

계산의 편의를 위해 무차원 식으로 표현을 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

여기서, $\bar{x} = \frac{x}{R} = \theta$, $\bar{z} = \frac{z}{L}$, $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_i}$, $\bar{P} = \frac{P}{6\eta_i \omega} \left(\frac{C}{R} \right)^2$, $\bar{h} = 1 + \cos \phi$ 이고, η_i 는 베어링의 윤활유 입구 단의 오일 점도이고, $\bar{h}$ 는 무차원 유막 두께이며, ϕ 는 베어링에 가해지는 정적 하중과 베어링과 저널 중심을 잇는 선과 이루는 각도이다(Fig. 2.1).

저널 베어링의 동특성 계수를 구하기 위한 과정으로 먼저, 정적 평형 상태 해석이 수행되어야 한다. 즉, 편심률 ε 과 위치각(attitude angle) ϕ 가 계산되어진 후 정적 평형위치에서의 미소 변동에 대한 힘을 계산함으로써 동특성 계수들이 계산되어진다. 정적 평형상태에서 미소 변위 Δx , Δy 에 의해 $\bar{h}$ 는 다음 식과 같이 된다.

$$\bar{h} = \bar{h}_0 + \Delta x \cdot \cos(\theta + \phi) + \Delta y \cdot \sin(\theta + \phi) \quad (2.3)$$

여기서, $\bar{h}_0$ 는 정적 평형 상태의 유막두께이며

$$\bar{h}_0 = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (2.4)$$

가 된다. 섭동법에 의해 압력 변화를 Taylor 급수 전개하여 2차 이상의 항을 무시하면, 무차원 압력 $\bar{P}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} d\bar{x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} d\bar{y} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \dot{x}} d\dot{\bar{x}} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \dot{y}} d\dot{\bar{y}} \quad (2.5)$$

식 (2.3)과 식 (2.5)를 식 (2.2)에 대입하면, 베어링 유막의 압력분포와 동특성을 계산하기 위한 지배방정식을 얻을 수가 있다. 이것을 다음과 같은 항

$$\bar{P}_0, \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial \bar{P}}{\partial \dot{z}}$$

으로 각각 나누어서 표현하면 다음과 같이 된다.

(1) $\overline{P_0}$:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} [\overline{P_0}] = \frac{\partial \overline{h_0}}{\partial \theta} \quad (2.6)$$

(2) $\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} [\overline{P_1}] \\ &= \sin(\theta + \phi) - \frac{3 \cos(\theta + \phi)}{\overline{h_0}} \frac{\partial \overline{h_0}}{\partial \theta} - \frac{3 \overline{h_0}}{\eta} \frac{\partial \overline{P_0}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos(\theta + \phi)}{\overline{h_0}} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

(3) $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} [\overline{P_2}] \\ &= \cos(\theta + \phi) - \frac{3 \sin(\theta + \phi)}{\overline{h_0}} \frac{\partial \overline{h_0}}{\partial \theta} - \frac{3 \overline{h_0}}{\eta} \frac{\partial \overline{P_0}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin(\theta + \phi)}{\overline{h_0}} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

(4) $\frac{\partial \overline{P}}{\partial \dot{x}}$:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} [\overline{P_3}] = 2 \cos(\theta + \phi) \quad (2.9)$$

(5) $\frac{\partial \overline{P}}{\partial \dot{y}}$:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{h_0^3}}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} [\overline{P_4}] = 2 \sin(\theta + \phi) \quad (2.10)$$

여기서 $\overline{P_1}$ 는 $\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}$ 를 나타내고, $\overline{P_2}$ 는 $\frac{\partial \overline{P}}{\partial z}$, $\overline{P_3}$ 는 $\frac{\partial \overline{P}}{\partial \dot{x}}$, $\overline{P_4}$ 는 $\frac{\partial \overline{P}}{\partial \dot{z}}$ 이다.

(1)항은 유막 내의 정압력 분포를 나타내고, 부하용량(load capacity)과 위치각

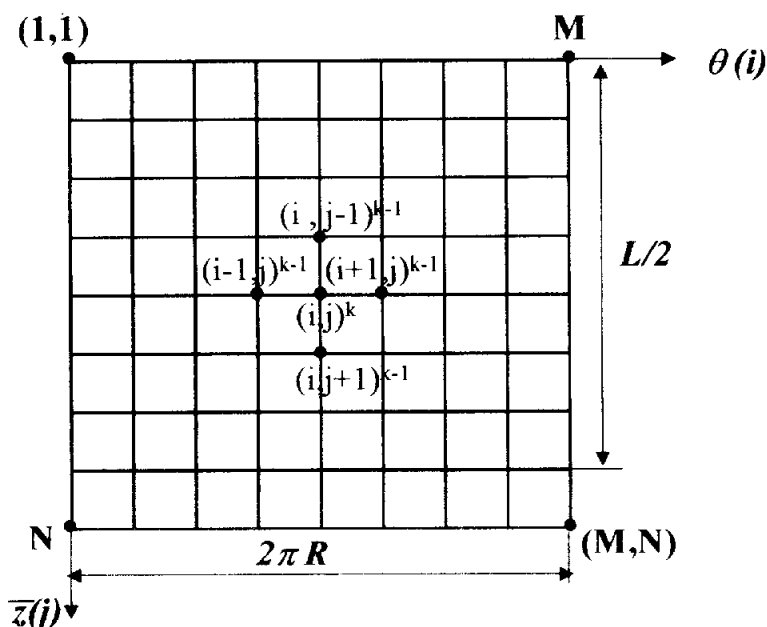


Fig. 2.3 Mesh point of journal bearing for FDM

을 계산하는데 사용되며, (2)~(5)항은 유막 내의 동압 성분을 나타내고, 힘의 분포를 나타내므로 동특성 계수를 계산하는데 사용된다.

베어링 내 유동에 대한 지배방정식의 해를 구하기 위하여 Fig. 2.3과 같이 베어링 면을 원주방향과 축방향으로 각각 M 개와 N 개로 분할하여 각 노드 (node)의 해를 유한차분법(finite different method)으로 계산한다. 여기서 저널베어링은 폭 중심선에 의해 대칭을 이루므로, 축방향의 반에 대해서만 각 압력 분포를 구하고, 얻어진 압력분포에 대한 식을 유한차분식화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{P}_0^k(i,j) = & X_1 \hat{P}_0^{k-1}(i+1,j) + X_2 \hat{P}_0^{k-1}(i-1,j) \\ & + X_3 \hat{P}_0^{k-1}(i,j+1) + X_4 \hat{P}_0^{k-1}(i,j-1) + C_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

여기서 k 는 반복회수이고, X_1, X_2, X_3, X_4, C_0 등은 각 노드 (i,j) 에 관계하는 상수로 다음과 같다.

$$X_1 = X_2 = 1/(\Delta\theta^2 \cdot HS)$$

$$X_3 = X_4 = (R/L)^2 / [\Delta \bar{z}^2 \cdot HS]$$

$$HS = 2/\Delta\theta^2 + 2\left(\frac{R}{L}\right)^2 \left[\Delta \bar{z}^2 + 0.75/A^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \right)^2 + 2A \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] \right] \quad (2.12)$$

$\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3, \hat{P}_4$ 에 대해서도 같은 방법으로 해를 구할 수 있다. Fig. 2.4는 ε 의 값을 달리하여 계산된 정압력을 도시한 것이다. 예측되는 바와 같이, ε 값이 커짐에 따라서 피크점에서 압력의 크기 역시 커지고, 그 피크점은 점점 trailing edge 쪽으로 움직이고 있음을 볼 수 있다.

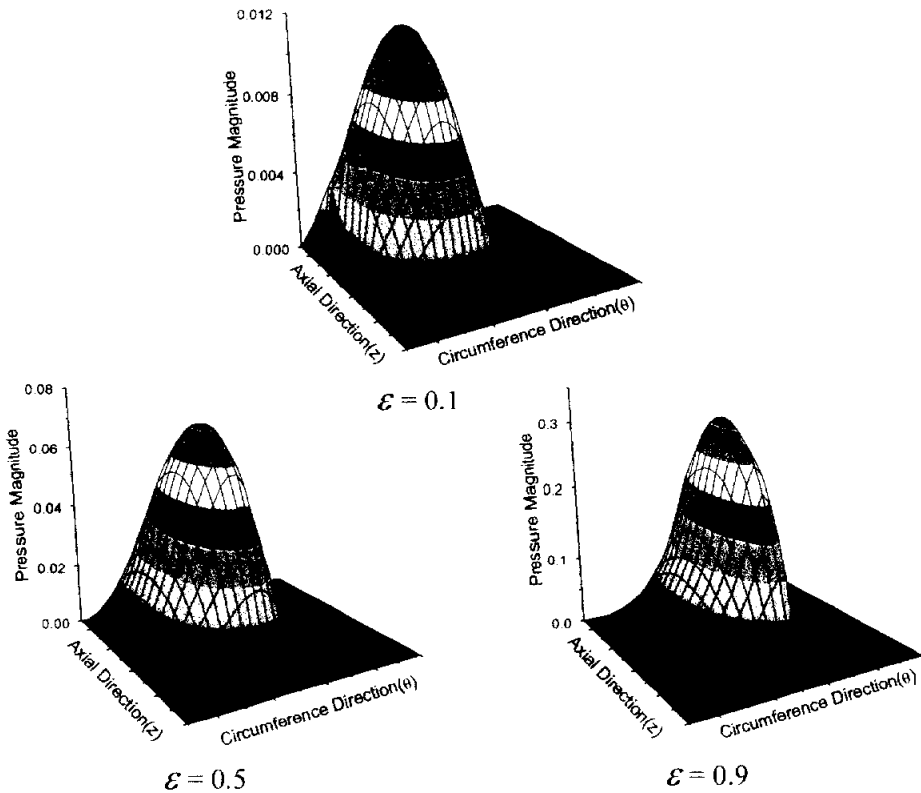


Fig. 2.4 Pressure distribution compare with epsilon value

정압력이 계산되면, 편심률과 위치각이 계산되어지고, x 와 y 방향의 힘을 계산하여 유막의 반력을 계산하면, 식 (2.13)과 같이 된다. 따라서 유막이 저널을 떠날 수 있는 힘인 부하용량은 식 (2.14)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F_x &= 6\eta\omega R(R/C_r)^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \bar{P} \cos\theta d\theta d\bar{z} \\ F_y &= 6\eta\omega R(R/C_r)^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \bar{P} \sin\theta d\theta d\bar{z} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$W = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} \quad (2.14)$$

베어링의 강성계수는 베어링 유막의 힘이 미소 변동할 때의 값으로 주어지므로, 강성계수는

$$K_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial x}, \quad K_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad K_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad K_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (2.15)$$

이 된다. 감쇠계수는 베어링 유막의 힘이 미소 변위에 대한 시간의 요소로 주어지므로, 감쇠계수는

$$C_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}, \quad C_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}, \quad C_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}, \quad C_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \quad (2.16)$$

가 된다.

따라서 강성계수는 식 (2.17)과 같고

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{K}_{xx} \\ \bar{K}_{yx} \end{Bmatrix} &= - \int_0^1 \int_0^\pi \bar{P}_1 \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{Bmatrix} d\theta d\bar{z} \\ \begin{Bmatrix} \bar{K}_{xy} \\ \bar{K}_{yy} \end{Bmatrix} &= - \int_0^1 \int_0^\pi \bar{P}_2 \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{Bmatrix} d\theta d\bar{z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

감쇠계수는 식 (2.18)과 같다.

$$\begin{cases} \overline{C}_{xx} \\ \overline{C}_{yx} \end{cases} = - \int_0^1 \int_0^\pi \overline{P}_3 \begin{cases} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{cases} d\theta d\bar{z}$$

$$\begin{cases} \overline{C}_{xy} \\ \overline{C}_{yy} \end{cases} = - \int_0^1 \int_0^\pi \overline{P}_4 \begin{cases} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{cases} d\theta d\bar{z} \quad (2.18)$$

Fig. 2.5는 온도가 고려되지 않은 저널베어링을 유한차분법을 이용하여 동특성 계수를 계산하는 흐름도로서, 먼저 변수와 레이놀즈 방정식을 무차원화시키고, 저널의 회전속도를 입력한다. 그 후, 정적 평형상태에서의 편심률을 가정하여 유막 내의 압력분포를 계산하는데, 압력분포는 전 단계의 압력분포와 계산된 압력분포의 차가 변화가 없을 때까지 반복계산을 하고, 이것이 만족되면 베어링의 부하용량과 저널의 무게를 비교하게 된다. 만약 부하용량과 저널의 하중이 같으면, 압력분포가 계산되어지고, 그렇지 않을 때에는 편심률을 변화시켜 앞의 단계를 반복 계산하여 유막 내의 압력분포를 계산한다. 유막 내의 압력분포가 계산되어지면, 이 값을 이용하여 식 (2.17), (2.18)의 값들을 계산하여 무차원의 동특성 계수를 계산하게 되고, 이를 다시 유차원화시키면 된다. 다시 저널의 속도를 증가시켜서 다음 저널 회전속도에 대하여 앞의 단계를 반복 계산함으로써 각각의 저널 회전속도에 대한 동특성 계수들을 계산한다.

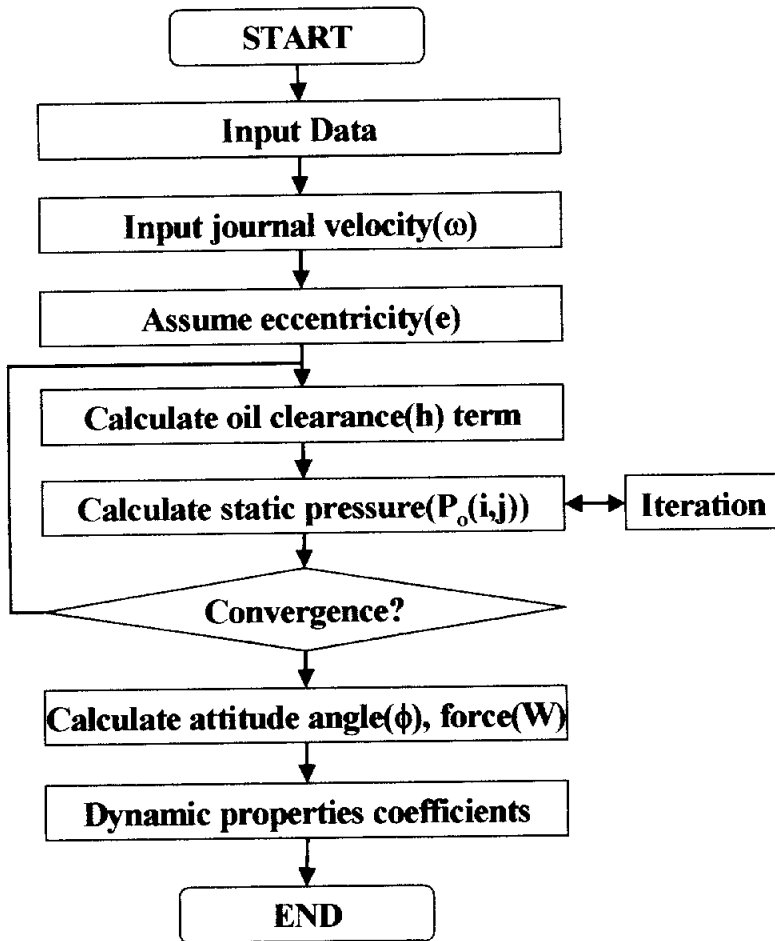


Fig. 2.5 Flowchart for calculation of dynamic characteristics using finite difference method

2.3 유막 온도를 고려한 해석

앞 절에서는 저널 베어링의 유막온도를 고려하지 않은 상태, 즉 점도는 일정하게 $\bar{\eta}=1$ 로 두고 그리고, 에너지 방정식에 의한 온도분포를 고려하지 않은 상태에서 동특성 계수를 구하였다. 이 절에서는 유막온도를 고려하여 동특성 계수를 구하고자 한다.

먼저 점도와 밀도는 아래 식과 같이 온도만의 함수라고 가정한다.

$$\eta = \eta_i e^{-\alpha \Delta T}, \quad \rho = \rho_i e^{-\lambda \Delta T} \quad (2.19)$$

여기서, η_i , ρ_i 는 윤활 입구에서의 점도와 밀도이다. 그리고 베어링이 정상적인 유막을 형성하여 운전되려면 적절한 양의 윤활유가 공급되어야 한다. 베어링 내에 압력이 발생하여 외부 대기압과의 차에 의해서 side flow가 생기게 되는데 베어링 압력이 형성되는 leading suction을 통과하는 유량 Q_1 과 $\partial P / \partial \theta = 0$ 가 되는 trailing suction을 통과하는 유량 Q_2 와의 차가 side flow 양이다. Q_1 과 Q_2 의 무차원화된 값은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{Q_1}_{\theta=0} &= -\frac{1}{2\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} (1+\epsilon)^3 + \frac{(1+\epsilon)}{2} \\ \overline{Q_2}_{\theta=\pi+\alpha} &= \frac{(1-\epsilon \cos \alpha)}{2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Trailing edge를 통과하는 유량은 더 이상 side flow가 없고 ($\because dp/dz=0$), 실제 공급유량 Q_s 와 섞여 leading edge로 재공유(recirculation)된다. 따라서

$$Q_i = Q_s + Q_R \quad (2.21)$$

이 되므로, 에너지 보존법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} Q_i T_i &= Q_s T_s + Q_R T_R \\ &= (Q_1 - Q_2) T_s + Q_2 T_R \end{aligned} \quad (2.22)$$

이 된다.

유체의 온도분포를 구하기 위한 지배방정식을 고려하기 위해 식 (2.23)과 같은 기본적인 에너지 방정식을 도입한다.

$$\begin{aligned} & \left[\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} + \rho w \frac{\partial E}{\partial z} \right] + [P\Delta] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi \end{aligned} \quad (2.23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Delta &: \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \\ \Phi &= \eta \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}^2 - \frac{2}{3} \Delta \right] \end{aligned}$$

이다.

위 식에서 첫 번째 항은 내부에너지에서의 변화율, 두 번째 항은 유체 압축이 한 일, 세 번째 항은 열의 전도율이며 마지막 항은 점도에 대한 일률을 나타낸다.

일반적으로 베어링 유동의 조건식은 다음과 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &\gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\gg \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} > \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

이 조건식을 식 (2.23)에 적용하면 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\begin{aligned} & \rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p w \frac{\partial T}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ K \frac{\partial T}{\partial z} \right\} + \eta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

일반적으로 베어링 유막에서 발생한 열은 베어링 셸(shell)이나 축으로의 열 전달은 거의 없고 대부분이 유체의 흐름으로 밖으로 빠져나가는 convection만 일어난다. 따라서 위 식을 비압축성, 단열(adiabatic) 유동에 적용하면 아래 식과 같이 된다.

$$\rho C_p \left\{ u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = \eta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (2.25)$$

두 평판 사이의 흐름에서 ($y=0 \rightarrow u=w=0$, $y=h \rightarrow u=U, w=0$)

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{U}{h} y, \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{U}{h}$$

$$w = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} (y^2 - hy), \quad \frac{dw}{dy} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \left(y - \frac{h}{2} \right)$$

을 구해 식 (2.25)에 대입하여 유막 두께에 대해 적분하면 베어링 유막에서의 에너지 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\rho C_p \left\{ \left(\frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left(-\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right\}$$

$$= \eta \left\{ \frac{U^2}{h} + \frac{h^3}{12\eta^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{h^3}{12\eta^2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (2.26)$$

베어링내의 압력분포를 구하여 식 (2.26)에 대입하여 T 를 구하면 베어링 원주방향, 축방향으로의 온도분포를 알 수 있다. 무차원화된 에너지 방정식은 다음 식과 같다.

$$\left\{ \bar{h} - \frac{\bar{h}^3}{\eta} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) \right\} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{\eta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$= \frac{2\eta_r \omega}{\rho C_p} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \left\{ \frac{\bar{\eta}}{\bar{h}} + 3 \frac{\bar{h}^3}{\eta} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right)^2 \right\} \right\} \quad (2.27)$$

식 (2.19)에서

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_i} = \exp(-\alpha(T - T_i))$$

이므로, $\ln(\bar{\eta}) = -\alpha(T - T_i)$ 로 된다.

이것을 $\theta, \bar{z}$ 에 대해 각각 편미분하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} &= -\alpha \frac{\partial T}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{\alpha \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{z}} &= -\alpha \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\alpha \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

의 관계를 얻을 수 있고, 식 (2.28)을 식 (2.27)에 대입하여 정리하면 아래식과 같다.

$$\begin{aligned} &\left(\bar{h} - \frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) \right) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \theta} - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{z}} \\ &= -E \left\{ \frac{\bar{h}^2}{\bar{h}} + 3\bar{h}^3 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

여기서, $E = \frac{2\alpha\eta_i\omega}{\rho C_p} \left(\frac{R}{C} \right)^2$ 이다. 위 식에서 $\bar{T} = \alpha T$ 로 두어 $\bar{T}$ 에 대해서 정리하면

$$\begin{aligned} &\left(\bar{h} - \frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \\ &= E \left\{ \frac{\bar{\eta}}{\bar{h}} + 3\frac{\bar{h}^3}{\bar{\eta}} \left[\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Fig. 2.6은 유막의 온도를 고려하여 저널 베어링의 동특성 계수를 구하는 과정으로 유량과 온도에 대한 과정을 제외하면 앞 절에서 설명한 과정과 동일하다. 온도분포 역시 압력분포 계산과 마찬가지로 전 단계의 온도분포와 계산된 온도분포의 차가 변화가 없을 때까지 반복계산을 하고, 이를 만족하는 경우 압력계산과 온도계산의 공통 변수인 점도(η) 값을 비교하여, 이 점도 값이 수

렴할 때까지 반복 계산한다. 그 이후의 과정 또한 앞 절에서 설명한 과정과 동일하게 계산하면, 유막의 온도가 고려된 저널 베어링의 동특성 계수를 구할 수 있다.

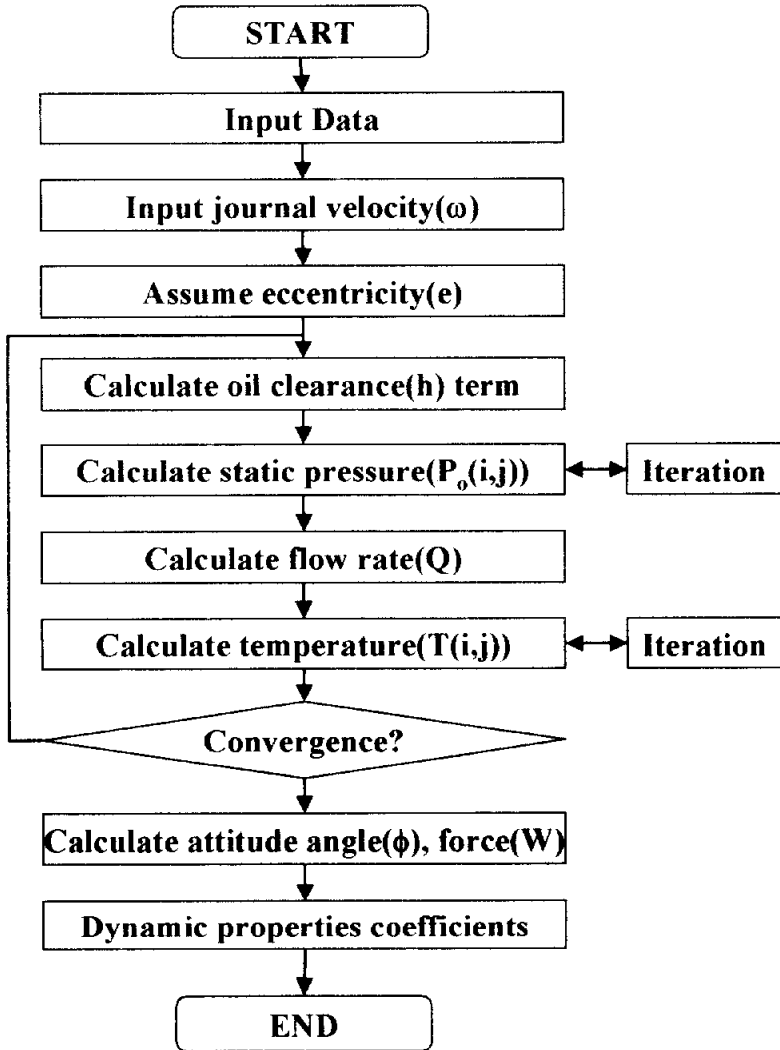


Fig. 2.6 Flowchart for calculation of dynamic characteristics by considering temperature of oil film

3. 시뮬레이티드 어닐링(Simulated annealing)

전통적 최적화 방법들은 점차 복잡해져 가는 대규모 조합 최적화(combinatorial optimization) 문제와 구속 조건이 많은 이산 문제들을 해결하는 데 많은 한계를 보이고 있다. 최근 여러 분야에서 대규모 시스템의 최적화의 필요에 의한, 새로운 최적화 방법의 개발이 요구되고 있다. 이러한 조합 최적화 문제를 해결하는 알고리즘은 크게 전역 최적해(global optimum)를 찾는 최적화 알고리즘(optimization algorithm)과 전역 최적해에 가까운 값을 찾는 근사 알고리즘(approximation algorithm)으로 분류할 수 있다. 그러나 현실적으로 조합 최적화 문제는 복잡한 목적함수와 여러 개의 국부 최소해(local minimum)를 가지는 문제이기 때문에, 최적화 알고리즘을 찾아내기가 힘들고, 최적화 알고리즘이 존재해도 문제의 크기가 커짐에 따라 전체 최적해를 찾는 것은 장시간을 요구한다. 따라서 조합 최적화문제는 대부분 그 문제의 구조 및 특성에 알맞은 근사 알고리즘을 개발하는 방식으로 접근하게 되는데, 다양한 형태의 조합 최적화 문제에 포괄적으로 적용될 수 있는 범용의 근사알고리즘이 존재하면 새로운 조합 최적화문제가 나타날 때마다 새로운 알고리즘을 개발하여야 하는 부담을 덜 수 있어 매우 유용할 것이다.

3.1 최적설계의 개념⁽²⁾

대부분의 공학 시스템 설계는 상당히 복잡한 과정이다. 이용 가능한 방법들을 동원하여 해석하는 모형을 개발하는 데는 여러 가지 가정이 수반되어야 하며 이러한 모형들은 실험을 통해 검증되어야 한다. 문제의 정식화 단계 전반을 통하여 여러 가지 가능성과 수많은 인자들을 고려해야 한다.

최적설계문제의 정식화는 문장으로 기술된 문제를 잘 다듬어진 수학적 표현으로 변환하는 것이다. 정식화의 단계로서 설계변수, 구속조건, 목적함수 설정의 과정을 거치는데, 각 과정은 다음과 같다.

1) **설계변수(design variable)** : 시스템을 묘사하는 변수의 집합을 설정하는 것으로서 이 변수를 설계변수라 부른다. 변경된 설계를 얻기 위해서는 이 변수들을 독립적으로 변화시킬 수 있어야 한다. 즉, 설계변수들은 가능한 한 서로 상호 독립적이어야 한다.

2) **구속조건(constrain condition)** : 모든 시스템은 주어진 구속조건 내에서 기능을 발휘하도록 설계된다. 이 구속조건들은 시스템의 설계변수에 의한 영향을 받는데, 이러한 경우에만 제약이 가해질 수 있기 때문이다.

3) **목적함수(objective function)** : 어떤 설계가 다른 설계와 비교해서 더 좋은지 아닌지를 판단하기 위해서는 기준이 필요하다. 이러한 기준을 목적함수 또는 비용함수(cost function)라 한다. 타당한 목적함수는 설계변수에 의해 영향을 받아야 하고 그렇지 않은 경우는 무의미한 것이 되고 만다.

최적해는 이러한 정식화 과정에 의해 좌우되기 때문에 최적설계 문제에서 명확히 제시되어야 한다. Fig. 3.1에서 최적설계 과정의 흐름도를 보여주고 있다. 앞에서 설명한 정식화의 과정을 거치고, 자료를 수집하여 초기 설계를 추출하게 된다. 그 후 시스템을 해석하는 단계를 거치고, 구속조건을 만족하는지 확인한다. 이 변수들은 설계자가 원하는 목적함수를 만족하는 확인 과정을 거치는데, 이 조건을 만족하면 위 설계변수가 설계자가 원하는 최적의 변수가 되고, 만족하지 않을 경우에는 설계변수들을 최적화 방법에 의해 수정한 후에 다시 위의 과정을 반복하여 최적설계변수를 구하는 과정이다.

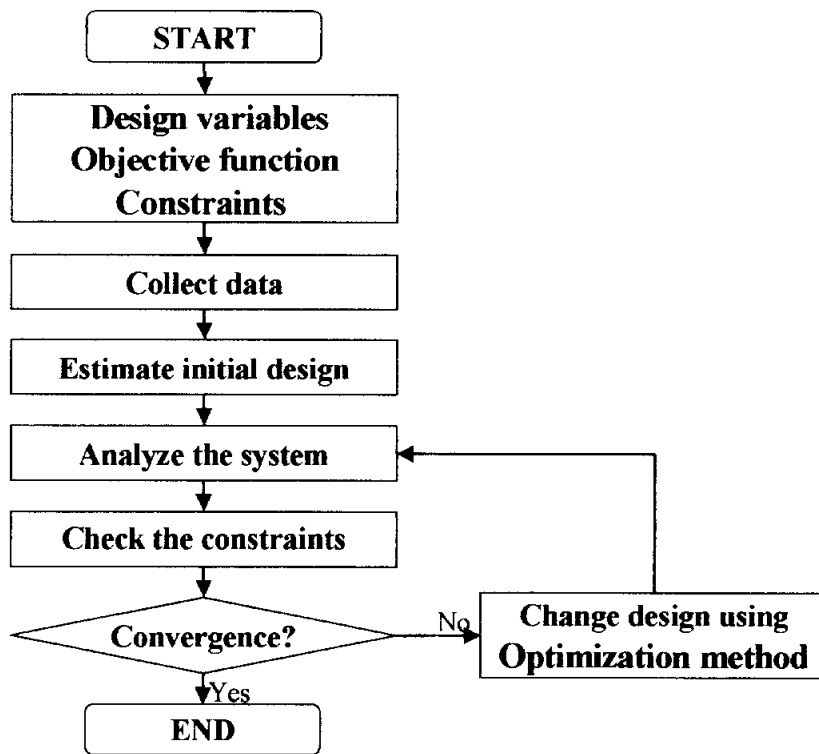


Fig. 3.1 Flowchart for optimum design

3.2 국부 탐색법(local search method)

조합 최적화 문제를 해결하기 위해서 흔히 사용하는 방법이 반복적 개선법 (iterative improvement)이다. 이 방법은 적절한 초기해에서 시작하여 이미 고안된 해 발생장치에 의해 현재 해 x 의 근방 S_x 에서 해를 하나 새로 만든 후, 새로 만든 해의 목적함수 값이 현재의 해의 목적함수 값 보다 작으면 새로 만든 해로 이동하여 현재를 갱신한 후 다시 새로운 해를 만들고, 그렇지 않으면 현재의 해를 고수한 채 새로운 해를 만드는 과정을 계속 반복하여 해를 개선해 나가는 방법이다. 이 반복적 개선법은 현재의 해의 근방의 모든 해들이 현재의 해의 목적함수 값보다 큰 값을 가져 더 이상 새로운 해로의 이동이 불가능할 때 종료하게 되는데, 이 때 얻어지는 해를 국부 최소해(local minimum)라고 한다. 즉, 현재의 해는 해집합의 일부분에서는 최소해지만 종료할 때까지 만들어지지 않은 해 중에 보다 작은 비용함수 값을 주는 해가 존재할 가능성

```

Algorithm LOCAL SEARCH
begin
  INITIALIZE(x);
  repeat
    y:=GENERATE( $x \in S_x$ );
    if  $f(y) < f(x)$  then  $x:=y$ ;
  until  $f(y) > f(x)$  for all  $y \in S_x$ ;
end

```

Fig. 3.2 Local search algorithm

이 있게 된다. 대부분의 경우 반복적 개선법은 전체 해집합 중에서 얻어진 전역 최소해(global minimum)가 아닌 국부 최소해를 제공하고 종료하게 되는데 이런 이유에서 이 방법을 국부 탐색법이라 부르고, Fig. 3.2에 그 알고리즘을 보여주고 있다.

이 국부 탐색법을 이용하여 최적에 가까운 해를 얻는 방법으로서 초기해를 달리하여 여러 번의 국부 탐색을 시도하는 방법이나 해집합의 보다 많은 부분을 탐색할 수 있도록 부근의 구조를 더욱 정교하게 바꾸는 방법, 국부 탐색을 수정하여 비용이 증가하는 이동도 제한적으로 허용하는 방법 등 다양한 방법이 있으나, 알고리즘의 효율성 등에서 문제가 되고 있다.

3.3 SA의 원리 및 기본 형태

조합 최적화문제의 한 해법으로서 Kirkpatrick 등(1983)에 의해 제안된 시뮬레이티드 어닐링[SA(simulated annealing)]법은 기존의 반복적인 개선(iterative improvement)에 근거한 발견적 기법들이 국부 최소점(local minimum point)에 빠져버리는 단점을 개선한 범용의 최적화 기법으로 많은 분야에서 응용되고 있다⁽⁵⁾. 이 시뮬레이티드 어닐링의 원리는 반복적 개선법을 기본으로 하되 비용증가의 이동을 확률적으로 허용하는데 있는데, 기본 아이디어는 고체를 열탕에 넣어 액체상태가 될 때까지 가열한 후 온도를 서서히 낮추어 에너지 수준이 가장 낮은 상태 즉, 안정한 결정 상태를 얻기 위해 사용하는 어닐링의 물리적 과정을 조합 최적화 문제에 모사한 방법이다.

Table. 3.1 Relationship between physical annealing and simulated annealing

Matter	Combinatorial optimization problem
Feasible state	Feasible solution
Energy	Cost(objective) function
Ground state	Optimum solution
Annealing	Simulated annealing
Quenching	Local search method

물리적인 구조를 조합 문제에서의 하나의 가능해의 구조로 대응시키면 가장 낮은 에너지 수준을 주는 상태에 대응하는 것이 바로 최적해가 될 것이고 온도를 급격히 내려 에너지 수준을 급히 내리는 **quenching**에 해당하는 것이 바로 국부 탐색법이고, 서서히 내리면서 분자들이 배열을 바꾸면서 에너지 수준을 오르내리도록 허용하는 어닐링에 대응하는 것이 바로 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘이다. 이와 같이 물리적 상태 변화 과정을 조합 최적화문제와 연계시키면 Table 3.1과 같이 요약할 수 있다.

어닐링의 확률적 모사의 기본 형태는 통계역학 분야에서 1953년 **Metropolis** 알고리즘⁽⁶⁾으로 개발되어 있다. **Metropolis** 알고리즘은 열탕에서 고체가 열평형 상태(**thermal equilibrium**)에 도달하는 과정의 확률적 시뮬레이티드 방법으로서 그 과정은 다음과 같다.

Step 1. 고체의 초기 상태를 무작위로 선택 (X)

Step 2. 현재상태에서 약간의 변동을 주어 다음 상태 생성 (Y)

Step 3. 두 상태의 에너지 차이 계산 ($\Delta = E(Y) - E(X)$)

Step 4. 차이 값이 0보다 작거나 같을 때(나중상태 에너지가 더 작을 때)는 변동을 허용하고, 차이 값이 0보다 클 때(나중상태 에너지가 더 클 때)는 변동을 확률로 결정한다. 이 때 확률로서 받아들이는 식은 다음과 같다.

$$(\exp(-\Delta/k_B T)) > 0 \quad (3.1)$$

여기서 k_B 는 볼츠만 상수이고, T 는 온도이다.

Step 5. 온도를 고정하고 위 과정을 충분히 반복하면 고체의 상태분포가 열평형을 이룬다⁽⁷⁾.

시뮬레이티드 어닐링은 Metropolis 알고리즘을 기본으로 하여 어닐링에서의 온도를 낮추는 과정을 추가되는데, 이 때 온도는 알고리즘의 제어 파라미터 역할을 하게 된다. 현재 실용적으로 쓰이고 있는 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘의 기본형태는 Fig. 3.3과 같다.

각 단계에 대한 설명은 먼저 Initialize에서 초기온도 (T), 초기해 (X), 초기 반복수 (L)를 설정하는데, 여기서 반복수는 Metropolis 알고리즘에서의 고정된 온도 T 에서 평형상태에 도달할 때까지 필요한 반복수에 해당하는 파라미터이다. Pertube에서 현재의 해와 근접한 새로운 해 (Y)를 만들어, 새로운 해의 목적함수의 값이 현재 해의 그것보다 작으면 무조건 새로운 해를 현재 해로

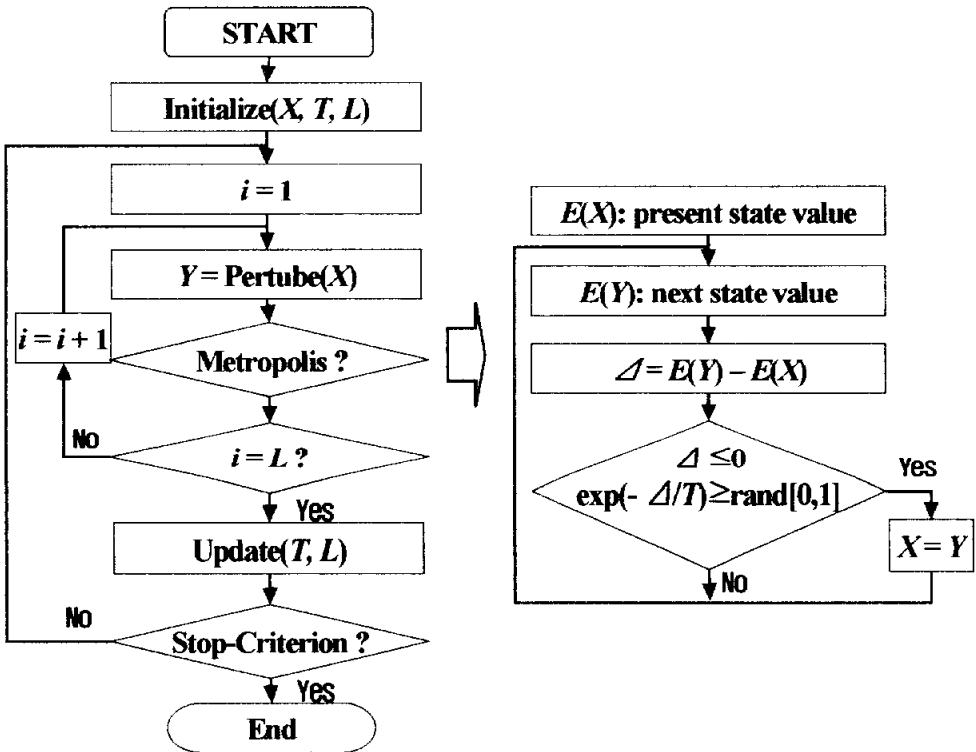


Fig. 3.3 Simulated annealing algorithm

받아들이고, 그렇지 않을 경우에도 무조건 기각하지는 않고 적절한 확률로 새로운 나쁜 해를 현재 해로 받아들이는 과정의 Metropolis 조건을 검토하여 새로운 해를 받아들이는 과정을 거친다. 내부 루프가 충분히 반복된 후, Update 과정에서 온도를 낮추고 적절히 내부루프 수도 수정하여 Stop-criterion 조건을 충족시킬 때까지 반복하여 해를 구할 수 있다.

내부 루프에서 현재 해보다 더 높은 비용함수 값을 갖는 해도 받아들일 가능성을 열어 둬으로써 국부 최소점에서 빠져 나올 수 있게 하여 전역 최소점을 찾아갈 가능성을 주게 된다. 외부 루프에서 T 를 낮추는 과정이 바로 어닐링에서의 냉각과정에 해당하는데 국부 최소점에 빠져버리지 않도록 충분히 느리고 주의 깊게 낮추어야 할 것이다.

시뮬레이티드 어닐링 알고리즘이 반복적 개선 알고리즘과는 다른 주요한 차이점은 새로운 구성이 더 나쁜 상태가 되었을 때 즉, 비용(cost)이 증가했을 때 도 그 새로운 구성을 받아들일 수 있는 확률이 주어진다는 점이다. 이러한 방법은 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘이 국부적인 최적해로부터 벗어나서 전역 최적인 결과에 도달할 수 있게 한다.

시뮬레이티드 어닐링은 이론적으로는 전체 최적해에 수렴하는 방법이지만 실제 적용상에서는 수렴속도를 가속하기 위해 이론적인 조건을 맞추지 않게 되어 결국은 근사적인 해를 얻게 된다. 아래에 실제 알고리즘을 적용할 때의 주의사항 및 고려사항에 대해 알아본다.

1) 해의 변동 공간

제약조건이 있는 최적화 문제에서 해의 변동은 가능해(feasible solution) 공간에서만 행할 수도 있고 비가능해(infeasible solution) 공간도 포함시켜 행할 수 있다. 전자는 항상 올바른 해를 유지할 수 있고 이동공간도 작아지는 장점이 있는 반면 제약조건을 고려하여 새로운 해를 만들어야 하기 때문에 그 과정이 복잡해지고 결과적으로 한번의 해의 이동에 걸리는 시간이 길어진다는 단점이 있다. 후자는 해의 이동이 보다 간단한 방식에 의해 신속히 행해질 수 있고 국부 최소점에서 빠져 나올 수 있는 가능성이 높아진다는 장점이 있으나 이동공간 및 근방이 커져서 그만큼 내부 루프에서 평형상태에 도달하기 위해 필요한 반복수가 많아지게 되고, 가능 최종해를 얻기 위해서는 비가능성을 벗어나는 특별한 장치가 마련되어야 한다.

2) 초기해의 설정

초기해의 상태는 수렴시간(수렴에 필요한 외부루프의 횟수)에는 분명히 영향

을 주므로 되도록 최적해에 가까운 해에서 시작하도록 해야 할 것이다.

3) 초기 온도의 설정

온도 T 는 물리학에서 결정상태를 얻기 위한 어닐링 과정에서의 온도와 같은 역할을 하는 제어 파라미터로 초기값이 충분히 높을 필요가 있다. 그리고 새로운 해를 만들어 내는 과정은 구체적인 문제의 특성에 따라 다르게 정해지는데 많은 회수의 반복이 계속되므로 되도록 단순한 과정으로 만드는 것이 좋다. 이 과정은 알고리즘의 성능에 직접적인 영향을 미치므로 문제의 구조에 따라 효율적인 생성방법을 찾아내는 노력이 요구된다.

4) 냉각 스케줄

온도를 낮추어 주는 냉각 스케줄의 과정은 알고리즘의 전체 최소점으로서의 수렴성에 직접적인 영향을 미치는 과정이므로 충분히 효율적이며 편리한 냉각 스케줄을 얻기 위해 많은 방법들이 제시되고 있다. 아래에서 몇 가지 냉각 스케줄의 방법을 설명하고 있다.

(1) 로그 스케줄

$$T_k = \frac{T_0 \log(k_0)}{T_0 \log(k_{k_0})}, \quad k_0 > 1$$

(2) 기하 스케줄

$$T_k = \alpha T_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, \quad 0 < \alpha < 1$$

로그 스케줄은 이론적인 수렴성을 보장하는 대신 수렴속도가 너무 늦어서 실제 적용에서는 기하 스케줄을 많이 사용한다. α 는 대개 0.5와 0.99 사이에서 정해지는데 보통은 0.9나 0.95를 사용한다.

(3) 연속되는 온도에서 평형상태의 확률의 차이가 작으면 내부 루프의 길이를 줄일 수 있다는 가상 평형(quasi equilibrium)의 개념을 이용⁽⁸⁾

$$T_{k+1} = T_k \{1 + \ln(1 + \delta) T_k / 3\sigma(T_k)\}^{-1}$$

(4) 목적함수의 평균이 온도의 로그값에 대해서 일률적으로 감소하도록 온도를 통제하는 가상 평형과 비용함수 분포의 표준편차를 이용⁽⁹⁾

$$T_{k+1} = T_k \cdot \exp\left(-\frac{\lambda T_k}{\sigma}\right), \quad 0 < \lambda < 1$$

5) 내부 루프의 반복수

내부 루프의 길이는 주어진 온도에서 안정상태가 될 때까지의 반복횟수를 뜻하는데, 내부 루프의 길이는 온도를 줄이는 냉각 스케줄과 서로 깊은 관계를 갖게 된다. 이것은 온도가 떨어지는 폭이 크면 각각의 온도에서의 평형상태의 목적함수 값의 차이가 커지므로 각 온도에서 평형상태를 이루는데 시간이 많이 걸리고, 폭이 작으면 적은 시간에도 쉽게 평형상태를 이룰 수 있기 때문이다. 보통 계산시간이 길어지면 해의 질이 향상되는데 이렇게 계산시간을 늘려서 해의 향상을 얻으려고 할 때 내부 루프의 길이를 늘이는 것보다 온도의 떨어지는 폭을 줄이는 것이 계산시간을 줄이면서 거의 같은 질의 해를 얻을 수 있다.

6) 종료 기준

이론적으로는 온도가 0에 수렴하는 곳에서 끝나야 하지만, 알고리즘이 낮은 온도에서 소비하는 시간이 너무 많기 때문에 보통 외부 루프가 일정횟수 반복될 때까지 해의 향상이 없으면 종료하는 방식을 취하고 있다. 경우에 따라서는 수락률이 일정 수준 이하로 떨어진 후에 해의 향상 여부에 따라 종료시점을 결정하기도 한다. 후자는 시뮬레이티드 어닐링에서 온도가 내려감에 따라 점점 해를 받아들이는 비율이 감소하게 되는 성질을 이용하는 것인데, 우선 해의 수락비율 한계치를 미리 정해놓은 다음 각각 온도에서의 반복이 끝나면 받아들인 비율을 계산하여 그 값이 한계치 아래가 되면 counter를 1씩 증가시키고 만약 목적함수 값이 이전의 목적함수 보다 좋은 값을 가지면 counter를 0으로 초기화시키면서 유지시켜 나가다가 counter가 어떤 상정치를 초과하면 끝나도록 하는 방식이다⁽¹⁰⁾.

이러한 기본적인 알고리즘을 바탕으로 하여 시뮬레이티드 어닐링의 계산시간을 줄이기 위해서 해의 이동방법, 목적함수의 계산 등에 있어서 다양한 변형을 할 수 있다. 시뮬레이티드의 변형⁽¹¹⁾, 병렬처리를 통한 방법⁽¹²⁾, 효과적인 냉각 스케줄을 찾는 방법⁽¹³⁾ 등 더 빠르고 정확한 탐색을 위해 개선되고 있다.

3.4 SA 수치 해석 결과

SA의 수치실험을 위해 몇 가지 평가함수를 이용하여 최적해 탐색을 수행하였다. 냉각률(cooling ratio)과 내부루프 횟수에 따른 해의 정확도와 계산에 걸리는 시간을 평가하였다.

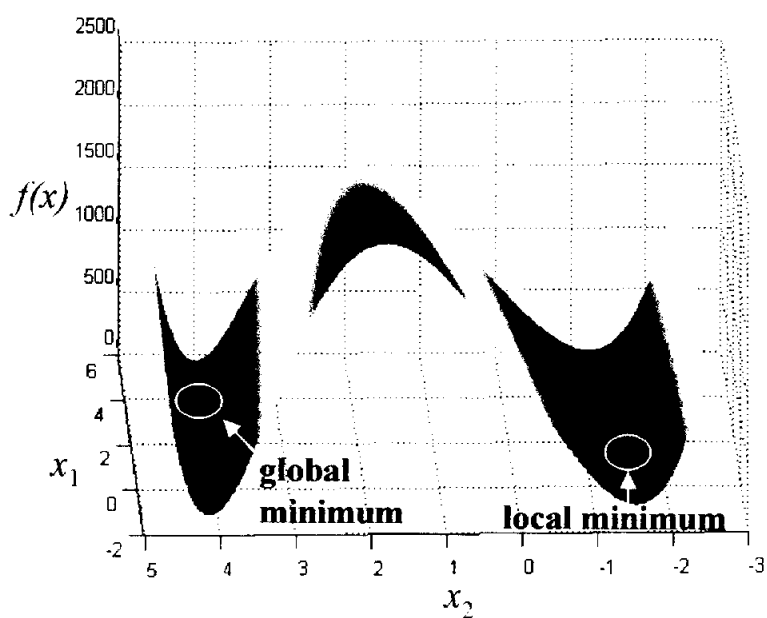
1) Freudenstein과 Roth 함수⁽¹⁾

$$f(x_1, x_2) = \{-13 + x_1 + [(5 - x_2)x_2 - 2]x_2\}^2 + \{-29 + x_1 + [(x_2 + 1)x_2 - 14]x_2\}^2 \quad (3.2)$$

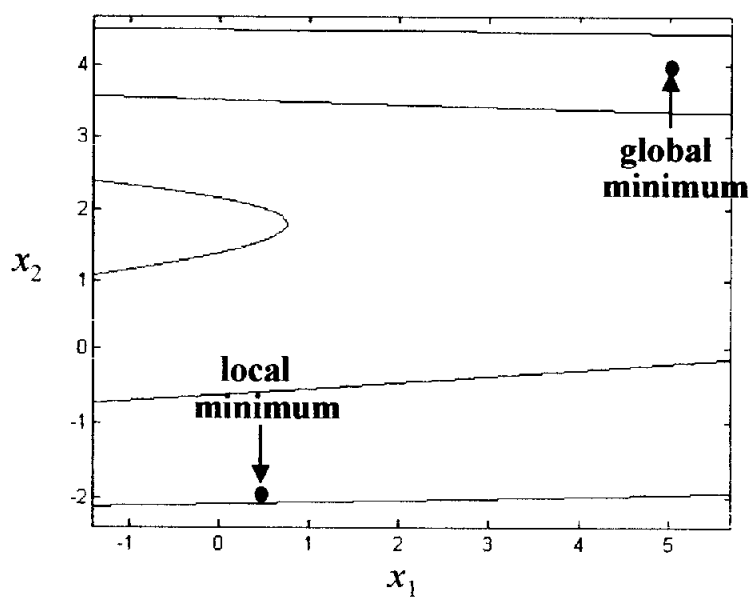
이 함수는 Fig. 3.4와 같이 1개의 전역 최소해와 1개의 국부 최소해를 가진다. 전역 최적해는 $\mathbf{X}^* = (5.0, 4.0)$ 에서 최적값 $f(\mathbf{X}^*) = 0.0$ 을 가지고, 국부 최소해는 $\mathbf{X} = (0.5, -2)$ 에서 최소값 $f(\mathbf{X}) = 400.5$ 을 가진다. 냉각 스케줄로 기하 스케줄을 사용하였고, 이 기하 스케줄의 냉각률과 내부루프 횟수를 각각 달리하여 계산을 하였다. Fig. 3.4에 함수의 3차원 형상을 그래프로 나타내었고, Table 3.2에 계산에 사용된 내부루프 수와 냉각률에 따른 최적해의 값과 함수 평가 횟수, 그리고 계산에 걸린 시간을 각각 나타내었고, Fig. 3.5에 그 변화 그래프를 나타내었다. 계산 결과와 그래프에서 알 수 있듯이, 내부루프 수가 커질수록 최적해를 구하는 시간은 길어지나 해의 정밀도는 좋아짐을 알 수 있고, 냉각률 또한 온도를 천천히 내릴수록 똑같은 결과가 얻어짐을 알 수 있다.

Table 3.2 Parameter and optimum solution of simulated annealing

Inner loop	Cooling ratio	X_1	X_2	$f(\mathbf{X}^*)$	Function evaluation	Time
100	0.90	5.02559	3.99960	9.53412e-4	11485	0.04
	0.95	5.02597	3.99997	6.19685e-5	23563	0.09
200	0.90	4.99252	4.00100	8.33151e-5	23085	0.07
	0.95	4.99885	4.0003	2.15666e-6	47363	0.13
500	0.90	5.00008	4.00000	1.31173e-8	57885	0.16
	0.95	4.99994	4.00000	5.99993e-9	118763	0.26

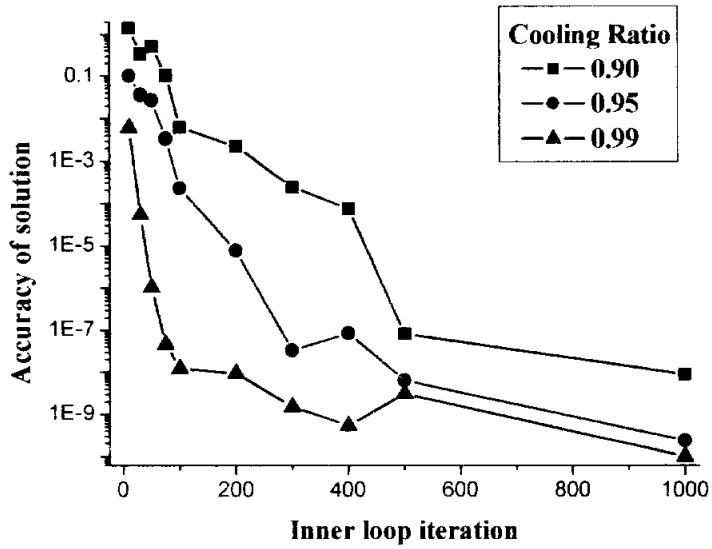


(a) 3D shape of function

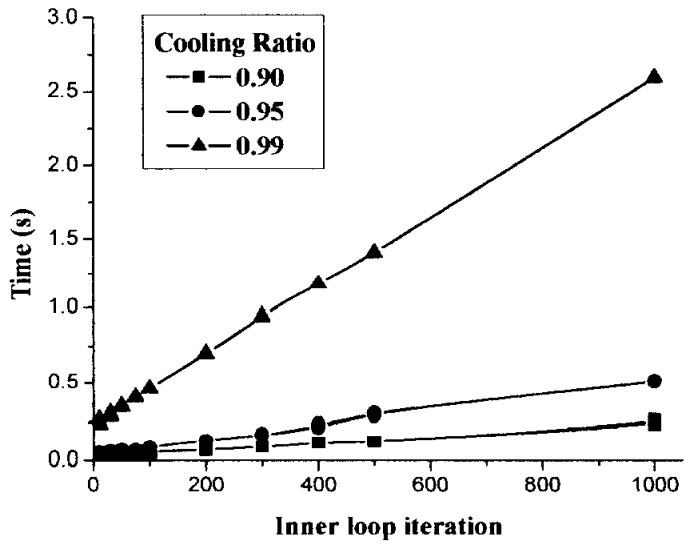


(b) Contour line and global and local minimum

Fig. 3.4 Shape of the multi-modal function



(a) Accuracy of solution



(b) Computation time

Fig. 3.5 Effects of number of inner loop iteration and cooling ratio

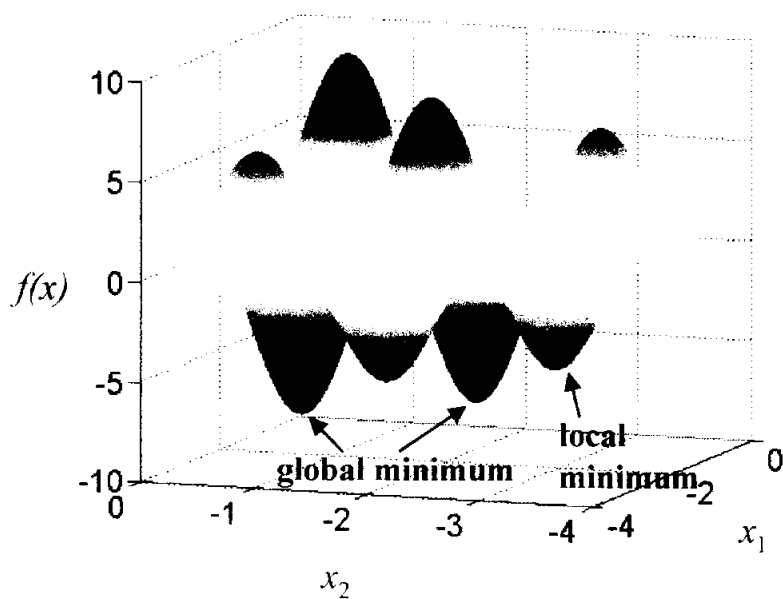
2) Multi-modal function

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 \{i \cos[(i+1)x_1 + i]\} \sum_{j=1}^2 \{j \cos[(j+1)x_2 + j]\} \\ (-3.5 < x_1, x_2 < 0) \quad (3.3)$$

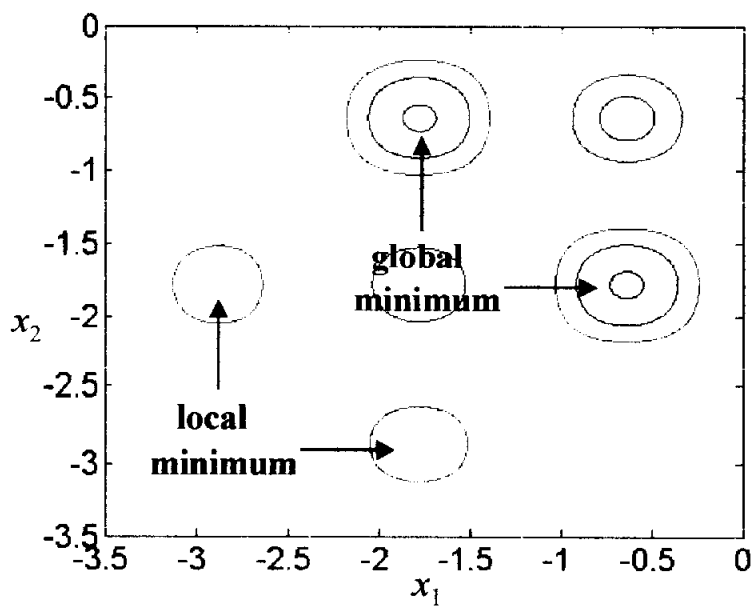
전역 최적해는 $\mathbf{X}^* = (-0.6366, -1.766)$, $(-1.776, -0.6366)$ 이고, 국부 최소해는 $\mathbf{X} = (-1.776, -2.874)$, $(-2.876, -1.776)$ 이다. Fig. 3.6에 함수의 3차원 형상을 그래프로 나타내었고, Table 3.3에 계산에 사용된 내부루프 수와 냉각률에 따른 최적해의 값과 계산 시간을 나타내었다. 시뮬레이티드 어닐링은 한번의 탐색에 1개의 해만을 찾기 때문에 다봉성 함수의 문제에서는 여러 번의 탐색을 수행하여 각각의 최적해를 구하였다. 앞 절에서의 결과와 마찬가지로 내부루프 수가 길어질수록, 온도의 하강폭이 좁을수록 최적해는 더욱 정확해지나 탐색 시간은 더 길어짐을 알 수가 있다.

Table 3.3 Parameter and optimum solution of simulated annealing

Inner loop	Cooling ratio	X_1	X_2	$f(\mathbf{X}^*)$	Function evaluation	Time
10	0.90	-1.77376	-0.64983	-8.25764	1045	0.01
	0.95	-1.77594	-0.63660	-8.26311	2143	0.01
50	0.90	-1.77602	-0.63665	-8.26311	5685	0.03
	0.95	-0.63669	-1.77598	-8.26311	11663	0.07
100	0.90	-0.63663	-1.77605	-8.26311	11485	0.08
	0.95	-1.77601	-0.63663	-8.26311	23563	0.15



(a) 3D shape of function



(b) Contour line and global and local minimum

Fig. 3.6 Shape of the multi-modal function

4. 회전축계의 이론 해석^{(14),(15),(16)}

4.1 운동방정식과 안정한계속도

저널베어링은 회전 중에 저널이 유체의 동력학적인 힘을 받아서 베어링 면에서 떠있는 상태이다. 축이 빠르게 회전할수록 저널 중심은 베어링 중심 방향으로 이동하고, Fig. 4.1에 그 이동 상태를 보이고 있다.

베어링의 거동을 표현하는 값들은 대부분 Sommerfeld 수의 함수로서 주어지고 아래 식과 같이 표현된다.

$$S_0 = \frac{W\phi^2}{BD\eta_0\omega}$$

여기서, W 는 정적 베어링 하중, ϕ 는 상대 베어링 틈새, B 는 베어링 폭, D 는 베어링 지름이다.

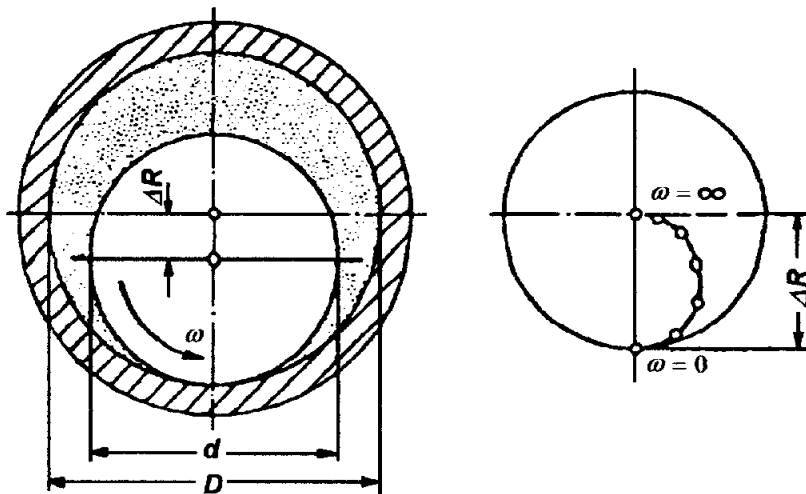


Fig. 4.1 Orbit plot of journal center point in journal bearing

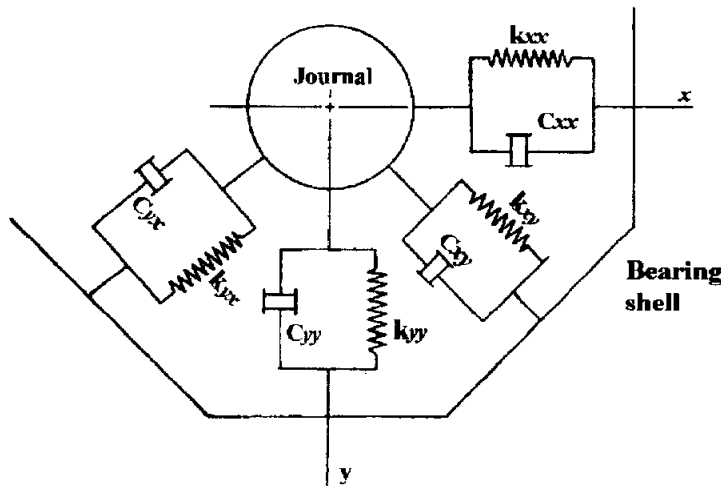


Fig. 4.2 Modeling of damping and stiffness coefficient

저널베어링의 유막력(oil film force)은 저널의 평형위치 부근에서 미소진동을 한다고 가정하여 선형화하면, Fig. 4.2와 같이 4개의 강성계수와 4개의 감쇠계수로 모델링할 수 있고, 베어링의 강성과 감쇠의 성질은 선형으로 가정해도 좋다.

4.1.1 강성 rotor의 운동방정식과 안정한계, 한계속도

베어링에서 단순 지지된 대칭 강성 rotor(Fig. 4.3)의 운동방정식은

$$\frac{m}{2} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{zz} & c_{zy} \\ c_{yz} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{zz} & k_{zy} \\ k_{yz} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \epsilon \omega^2 \frac{m}{2} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

로 표현된다. 베어링 반경 틈새를 $\Delta R = R - r$, 베어링의 정적하중을 $W = mg/2$ 로 하고, 양변에 $S_0 \Delta R / W$ 을 곱하면 아래와 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{S_0 \Delta R}{g} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \beta_{zz} & \beta_{zy} \\ \beta_{yz} & \beta_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{zz} & \gamma_{zy} \\ \gamma_{yz} & \gamma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \\ = \epsilon \omega^2 \frac{S_0 \Delta R}{g} \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

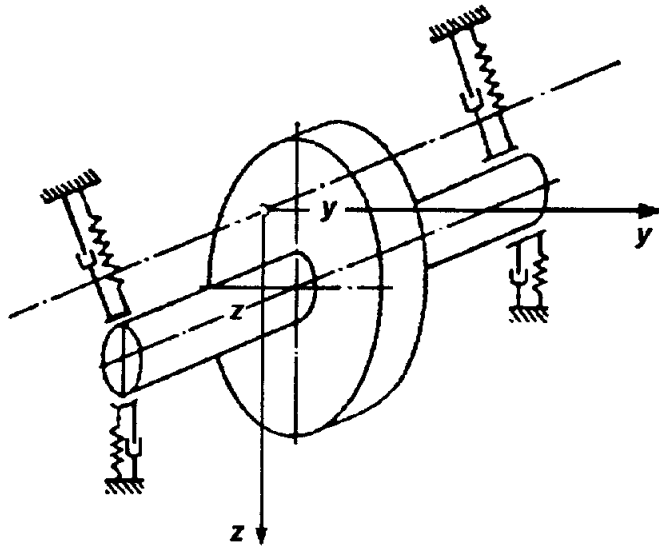


Fig. 4.3 Rigid rotor supported by journal bearing

이렇게 해서 차원을 가지는 베어링 강성 k_{ij} 와 감쇠계수 c_{ij} 대신에 다음의 무차원 항

$$\gamma_{ij} = k_{ij} \frac{S_0 \Delta R}{W}, \quad \beta_{ij} = c_{ij} \frac{S_0 \Delta R \omega}{W} \quad (4.3)$$

이 나타난다. 베어링의 물성치가 주어지면 이 값들은 단지 Sommerfeld 수만의 함수로 표현된다.

식 (4.2)의 동차해를 가정하면 특성 방정식이 얻어지고, 이것은 4차의 다항식으로 된다.

$$\alpha^2 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^4 + \alpha A_3 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^3 + (\alpha A_4 + A_2) \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2 + A_1 \left(\frac{\lambda}{\omega} \right) + A_0 = 0 \quad (4.4)$$

식 (4.4)에서 A_0 에서 A_4 까지의 계수는 베어링의 영향계수(무차원)이고, 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma_{zz} \gamma_{yy} - \gamma_{yz} \gamma_{zy}, & A_1 &= \beta_{zz} \gamma_{yy} + \beta_{yy} \gamma_{zz} - (\beta_{zy} \gamma_{yz} + \beta_{yz} \gamma_{zy}) \\ A_2 &= \beta_{zz} \beta_{yy} - \beta_{yz} \beta_{zy}, & A_3 &= \beta_{zz} + \beta_{yy}, & A_4 &= \gamma_{zz} + \gamma_{yy} \end{aligned} \quad (4.5)$$

그리고 $\alpha = \frac{S_0 \Delta R}{g} \omega^2$ 이다.

실수 계수를 가지는 4차 특성 방정식의 안정영역에 대해서 다음의 부등식이 성립해야 한다.

$$\alpha^2 A_1^2 - A_1(\alpha A_4 + A_2)\alpha A_3 + \alpha^2 A_3^2 A_0 \leq 0$$

이 조건식을 α 에 대해서 풀고, 식 (4.5)를 고려하면, 안정한계속도 ω_c 는

$$\frac{\omega_c^2}{g/\Delta R} = \frac{1}{S_0} \cdot \frac{A_1 A_2 A_3}{A_1^2 - A_1 A_3 A_4 + A_0 A_3^2} \quad (4.6)$$

으로 되고, 이것 이상의 속도일 때 축은 불안정하게 된다.

4.1.2 탄성 rotor의 운동방정식

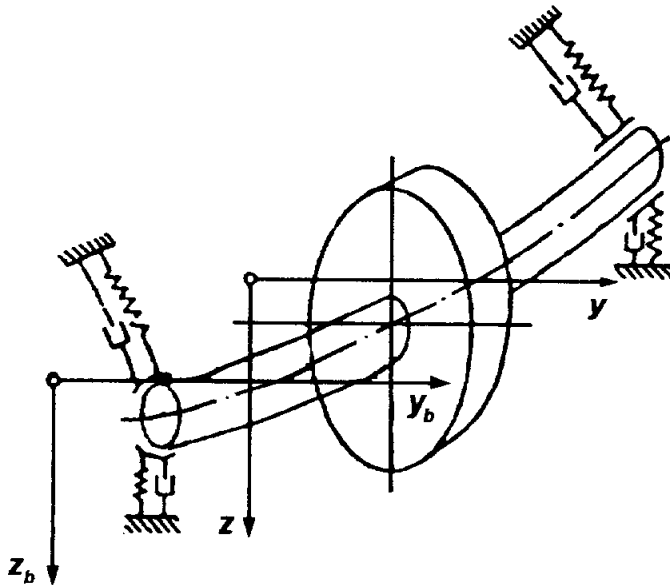


Fig. 4.4 Elastic rotor supported by journal bearing

Fig. 4.4와 같이 좌우 대칭인 축과 베어링을 갖는 rotor에 관한 힘의 평형식은 다음과 같다.

$$m \ddot{z}_G = -k(z - z_b), \quad m \ddot{y}_G = -k(y - y_b) \quad (4.7)$$

여기서 z_G 와 y_G 는 무게중심의 좌표, z 와 y 는 원판의 축 중심점의 좌표, 그리고 z_b 와 y_b 는 베어링 내에서의 저널의 평형위치로부터의 변위를 표시한다. 그리고 베어링 내에서의 힘의 평형식은

$$\begin{aligned} k_{zz}z_b + k_{zy}y_b + c_{zz}\dot{z}_b + c_{zy}\dot{y}_b - \frac{k}{2}(z - z_b) &= 0 \\ k_{yz}z_b + k_{yy}y_b + c_{yz}\dot{z}_b + c_{yy}\dot{y}_b - \frac{k}{2}(y - y_b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

이다. 무게중심의 좌표를 소거하고, 운동방정식을 원판의 축 중심과 저널의 좌표로 고쳐 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z}_b \\ \ddot{y}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{zz} & c_{zy} \\ 0 & 0 & c_{yz} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \\ \dot{z}_b \\ \dot{y}_b \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ -(1/2)k & 0 & k_{zz} + (1/2)k & k_{zy} \\ 0 & -(1/2)k & k_{yz} & k_{yy} + (1/2)k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \\ z_b \\ y_b \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \varepsilon m \omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \omega t + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon m \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.9)$$

탄성 rotor의 안정한계속도를 조사하기 위해 동차 미분방정식의 시험해 $e^{\lambda t}$ 를 대입하여 행렬식을 정리하면, 특성 방정식으로 λ/ω_n 에 대한 6차의 다항식이 식 (4.10)과 같이 얻어진다.

$$\gamma_6(\lambda/\omega_n)^6 + \cdots + \gamma_2(\lambda/\omega_n)^2 + \gamma_1(\lambda/\omega_n) + \gamma_0 = 0 \quad (4.10)$$

각각의 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= A_0 & \gamma_4 &= 2\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 A_2 + A_0 + \frac{S_0}{\mu} A_4 + \left(\frac{S_0}{\mu}\right)^2 \\ \gamma_1 &= A_1\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right) & \gamma_5 &= \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\left(A_1 + \frac{S_0}{\mu} A_3\right) \\ \gamma_2 &= 2A_0 + \left(\frac{S_0}{\mu}\right)A_4 + \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 A_2 & \gamma_6 &= \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 A_2 \\ \gamma_3 &= \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)\left(2A_1 + \frac{S_0}{\mu} A_3\right) \end{aligned}$$

여기서 A_0 에서 A_4 는 식 (4.5)에서 구한 값과 같고, $\mu = \delta/\Delta R$ 이다. 특성 방정식 (4.10)에 안정한계의 조건 $\lambda = j\omega_c$ 를 대입하면, 식 (4.11)과 같이 안정한계속도에 대한 조건식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2 = \frac{A_2 A_3^2}{1 + (S_0/\mu) \cdot A_3/A_1} \cdot \frac{1}{A_1^2 - A_1 A_3 A_4 + A_0 A_3^2} \quad (4.11)$$

안정한계속도는 위 식의 우변이 양으로 될 때에만 존재한다. Rotor는 일정한 회전수 ω_c 이상에서는 불안정으로 될 수 있기 때문에, 안정한 회전을 위해서는 우변이 좌변보다 커야 된다. 이 안정한계속도에 대한 조건식이 베어링에 대한 최적설계를 수행하는데 구속조건으로 작용을 하게 된다.

4.2 고유치해석(eigenvalue analysis)

앞 절에서 유도된 운동방정식의 동차식이 아래와 같이 주어진다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4n \times 1) \quad (4.12)$$

먼저 비감쇠계의 조건을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$c_{xx} = c_{xy} = c_{yx} = c_{yy} = 0, \quad k_{xy} = k_{yx} = 0$$

강성계수의 연성항도 0으로 한 것은 이 연성항이 존재함으로써 일반적으로 고유치가 복소수로 되기 때문인데, 비감쇠란 고유치를 순 허수로 하기 위한 조건이므로 0으로 두었다. 비감쇠, 비등방성 지지의 경우, 베어링 강성계수의 연성 항과 감쇠계수를 0으로 하므로 식 (4.12)에서 $\mathbf{M}$ 과 $\mathbf{K}$ 는 양의 대칭행렬이고, $\mathbf{C}$ 는 의대칭행렬(skew symmetry matrix)이 된다.

해를 $\mathbf{q} = \mathbf{u} e^{\lambda t}$ 라 두고, 식 (4.12)에 대입하여 풀이하면 아래의 식이 유도된다.

$$\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

여기서, $\mathbf{M} = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}$, $\mathbf{C} = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}$, $\mathbf{K} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$ 이다.

행렬 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ 의 성질에서 $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ 는 양의 실수이고, $\mathbf{C}$ 는 순 허수가 된다. 식 (4.13)을 근의 공식을 이용하여 풀면 아래의 식과 같다.

$$\lambda = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M} \quad (4.14)$$

식 (4.14)의 값은 허수이므로, 비감쇠의 가정이 성립되면 고유치는 항상 허수가 된다. 따라서 $\lambda = \pm i\omega$ 로 놓으면, ω 가 계의 고유진동수가 된다.

감쇠를 고려한 감쇠계에 대한 일반 고유치 문제의 경우, 고유치는 일반적으로는 복소수가 되고, 고유모드도 복소수이다. 식 (4.12)를 복소고유치 해석하여

얻어진 고유치로부터 감쇠율을 평가하여 계의 안정성도 평가할 수 있다. 비감쇠와 마찬가지로, 해를 $q = u e^{\lambda t}$ 로 놓고, 식 (4.12)에 대입하여 표준 고유치문제로 변환하면 다음 식과 같이 된다.

$$A w = \lambda w, \quad (8n \times 1) \quad (4.15)$$

$$\text{단, } A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad v = \lambda u$$

전 절점의 수를 n 이라 하면, 행렬 $M, C, K, I, 0$ 는 $4n \times 4n$ 이고, A 는 $8n \times 8n$ 의 행렬이 되어 고유치는 모두 $8n$ 개가 얻어진다.

복소고유치 해석을 거친 후 N 자유도에 대응하는 실수부 λ_r 과 허수부 λ_i 를 갖는 N 개의 복소고유치(complex eigenvalue)가 다음 식과 같이 얻어진다.

$$\lambda_k = \lambda_{rk} + i\lambda_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (4.16)$$

만일 모든 고유치의 실수부 λ_{rk} 가 음이라면, 임의의 초기조건으로 출발한 계의 운동은 시간이 경과함에 따라 감소하므로 이러한 계는 안정(stable)하다. 만일 고유치의 어느 하나라도 양의 실수부 λ_{rk} 를 갖게 되면, 이에 대응하는 모드의 운동성분은 시간과 함께 최대 진동진폭이 지수적으로 증가하여 발산하게 되고, 그 계는 불안정(unstable)하게 된다. 회전체가 안정하고 자러진동이 발생하지 않을 필요충분조건은 특성방정식의 모든 근 즉, 복소고유치의 실수부가 음이 되는 것이다.

안정성해석(stability analysis)은 특히 저널베어링으로 지지된 축계에서 불안정화 유체력과 결합부분 등의 마찰력 등이 작용하는 경우, 정상운전속도에서 회전축계의 진동진폭이 시간의 경과에 따른 증가, 감소 여부를 판별하는 척도로 시, 축계의 공진회피설계와 함께 안정화설계에 있어서 검토해야 할 중요한 사항중의 하나이다.

4.3 위험속도 회피 기준

일반적으로 공진점에서의 공진 배율의 최대값을 Q 계수(quality factor)라 하고, 감쇠를 고려한 위험속도의 회피기준을 결정할 수 있다. 불평형에 의해 i 차 모드가 가진될 때, 불평형 진동에 대한 동적 응답배율, 즉 진동확대계수(amplification factor) M_i 는 다음 식과 같이 표현된다.

$$M_i(\Omega) = \frac{(\Omega/\omega_i)^2}{\sqrt{\{1 - (\Omega/\omega_i)^2\}^2 + 4\xi_i^2(\Omega/\omega_i)^2}} \quad (4.17)$$

여기서 Ω 는 회전각속도, ω_i 는 i 차 비감쇠 고유진동수, ξ_i 는 i 차 모드의 감쇠비를 나타낸다. 식 (4.17)로부터 M_i 는 진동수비가 $\Omega/\omega_i = 1/\sqrt{1-2\xi_i}$ 에서 최대가 되므로, 감쇠비가 작을 때에는 진동수비가 $\Omega/\omega_i = 1$ 에서 최대로 할 수 있으나, 감쇠비가 크게 되면 최대치에 대응하는 진동수비는 1보다 크게 된다. 그러므로 식 (4.17)에서 근사적으로 공진 배율이 최대치는 $1/(2\xi_i)$ 라 해도 좋을 수 있다. 이 공진 배율의 최대치를 Q_i 라 표시하고, 통상 Q 계수라 부른다.

$$Q_i = \frac{1}{2\xi_i} \quad (4.18)$$

설계단계에서 Q_i 의 값을 이론적으로 계산할 경우, n 자유도를 가지는 회전축계의 운동방정식으로부터 복소고유치 해석을 수행하여 얻어진 n 개의 복소고유치(complex eigenvalue)로부터 각 모드에 대응하는 감쇠비

$$\xi_i = -\frac{\lambda_{ri}}{\sqrt{\lambda_{ri}^2 + \lambda_{ii}^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.19)$$

를 구하고, 이를 식 (4.18)에 대입함으로서 각 모드에 대응하는 공진점에서의 Q 계수를 얻을 수 있다.

5. 계산 결과

유한차분법으로 일반적인 저널 베어링에 대하여 유막 온도를 고려하지 않은 경우와 고려한 경우 각각에 대하여 정적평형 상태와 Sommerfeld 수에 따른 동특성을 계산하여 비교하였고, 단순 저널베어링 시스템에서의 베어링의 최적 설계를 수행하였다.

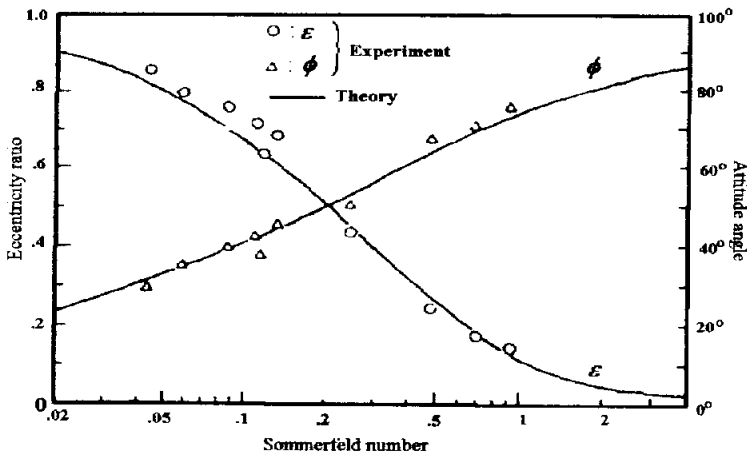
5.1 저널베어링 해석

Fig. 5.1에서 L/D 가 1이고, $C = 139\mu\text{m}$ 인 저널베어링의 정특성 및 동특성을 나타낸다. 여기서 사용된 기준 Sommerfeld 수는 다음과 같다.

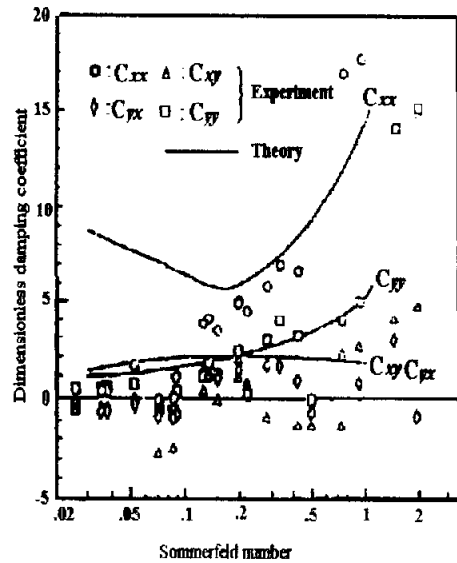
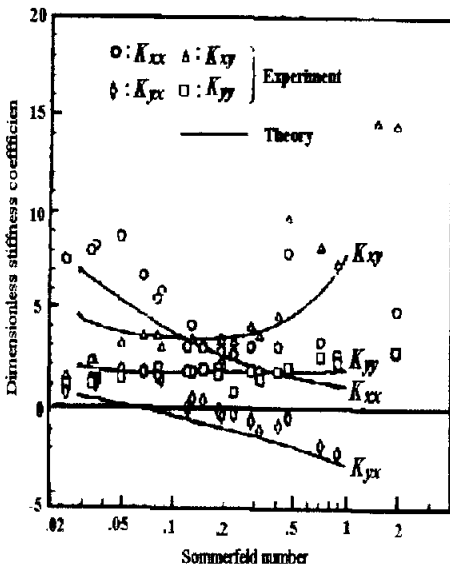
$$S = \frac{\mu NLD}{W} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \quad (5.1)$$

참고문헌의 유막 온도 결정은 입구 오일 온도 T_i 와 출구 오일 온도 T_o 의 평균값인 $(T_i + 2T_o)/3$ 이 유효 온도로 사용되었고, 각각의 Sommerfeld 수에 대한 유효 점도는 유효 유막 온도로부터 계산되었다. Fig. 5.1(a)는 정적 평형상태에서 편심률과 위치각의 크기를 나타내며 (c)와 (d)는 무차원 강성계수와 감쇠계수를 나타내고 있다. Fig. 5.2는 같은 조건으로 유막의 온도를 고려하지 않았을 때, 유한차분법을 사용하여 저널 베어링의 정특성 및 동특성을 계산하였으며, Fig. 5.1(a)와 비교하였을 때, 편심률과 위치각의 변화는 같은 경향을 가지면서 변화하지만, 편심률은 Sommerfeld 수가 낮은 영역에서는 조금 작은 값을 보이지만 0.1 이상에서는 거의 같은 값을 가진다. 그리고 위치각은 약 7°정도 높은 값을 가지면서 변화하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5.1(b)는 Sommerfeld 수에 따른 편심률을 위치각의 그래프로 나타내었다. Fig. 5.1(c)와 Fig. 5.2(d)의 강성계수의 경우, 참고문헌의 실험치 및 이론치와 거의 같은 값을 가지는 것을 볼 수 있고, Fig. 5.1(c)와 Fig. 5.2(c)의 감쇠계수의 경우, 계산 결과 참고문헌의 C_{xx} , C_{yy} 는 거의 같은 값을 가지지만, 연성 감쇠계수 C_{xy} ,

C_{rr} 의 경우, 약간 낮은 값을 가진다. 참고문헌⁽¹⁷⁾은 2개의 윤활 홈(groove)을 갖는 베어링의 형태이고, 본 해석은 평면(plane) 저널 베어링에 대한 것이므로, 약간의 값의 차이가 발생하는 것 같다. 그러나 동특성 계수들의 경향은 거의 일치함을 알 수가 있다.



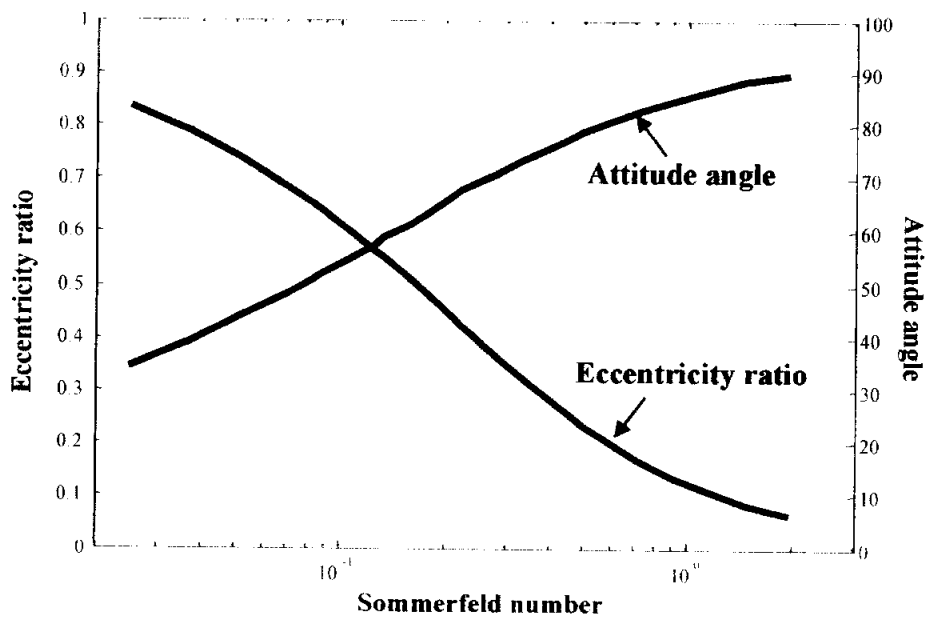
(a) Static characteristics



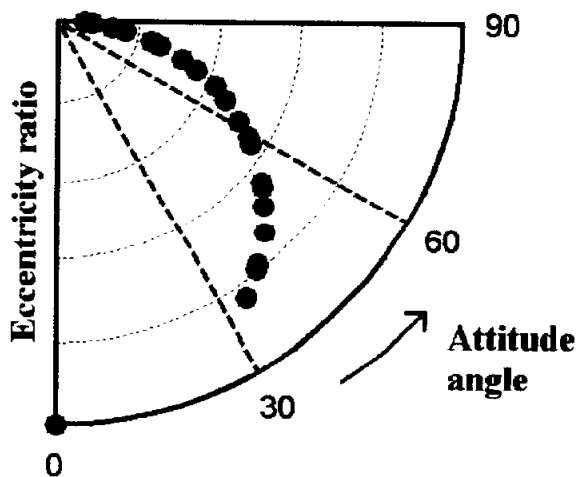
(b) Dimensionless stiffness coefficient

(c) Dimensionless damping coefficient

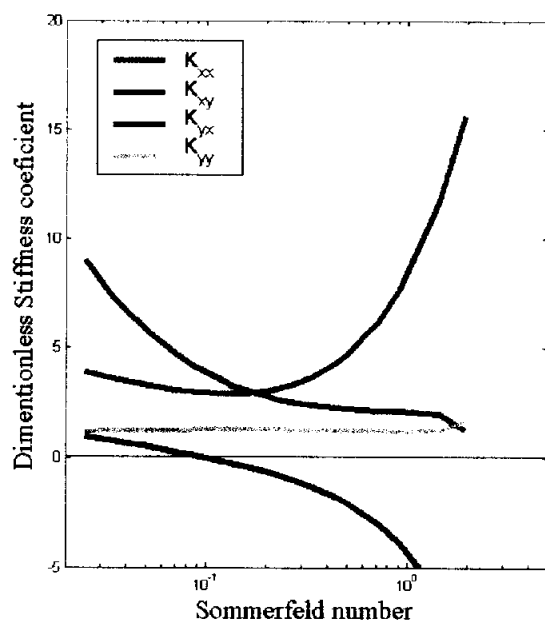
Fig. 5.1 Comparison on static characteristics and dynamic coefficients with reference [17]



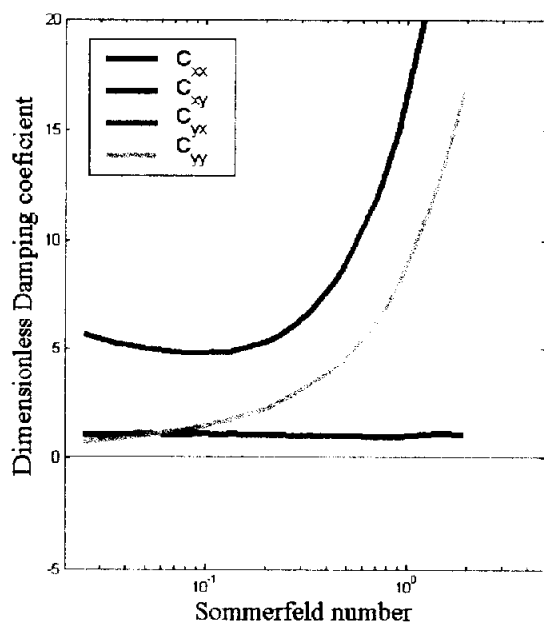
(a) Static characteristics



(b) Polar plot between eccentricity ratio and attitude angle



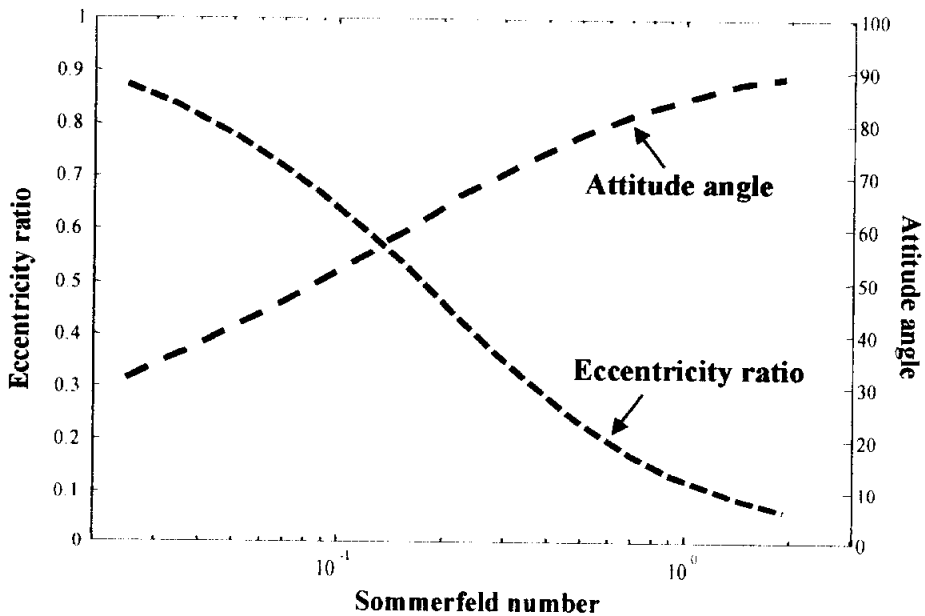
(c) Dimensionless stiffness coefficient



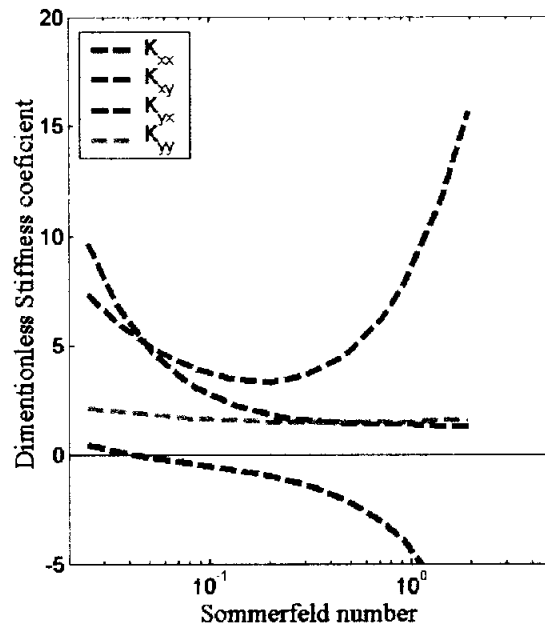
(d) Dimensionless damping coefficient

Fig. 5.2 Static characteristics and dynamic coefficients of journal bearing without considering thermal effect

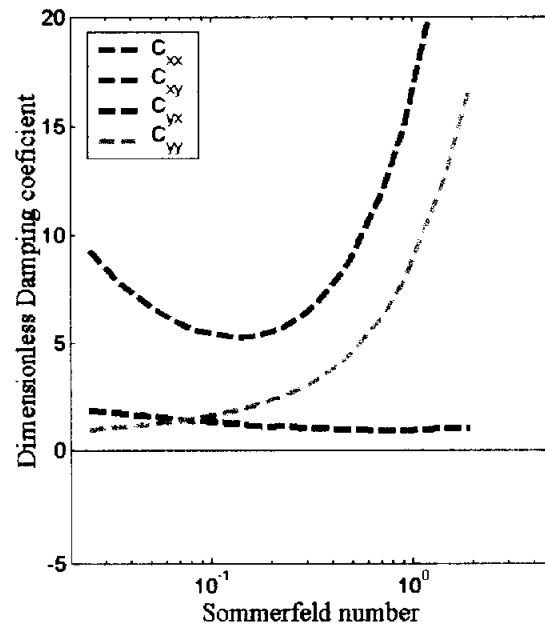
여기서는 유막의 온도를 고려하였을 경우 앞의 경우와 마찬가지로 저널 배어링의 정특성 및 동특성을 비교하였다. Fig. 5.2(a)에서 편심률은 거의 완벽히 일치하나, 위치각은 약 5° 정도 높은 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 온도를 고려하지 않은 경우와 비교하면 참고모델과 더욱 비슷한 특성을 가짐을 알 수 있다. Fig. 5.2(b)와 (c)는 각각 무차원 강성계수와 감쇠계수의 그래프를 보여주고 있는데, 강성계수의 경우 K_{xy} 는 낮은 Sommerfeld 수 영역에서 약간 높은 값을 가지나, 나머지는 거의 일치함을 볼 수 있고, 감쇠계수는 참고문헌의 감쇠계수 값과 거의 일치함을 볼 수 있다. 전체적으로 유막의 온도를 고려하지 않은 경우와 비교하여 참고문헌의 정특성 및 동특성 값과 더욱 유사함을 알 수 있다.



(a) Static characteristics



(b) Dimensionless stiffness coefficient



(c) Dimensionless damping coefficient

Fig. 5.3 Static characteristics and dynamic coefficients of journal bearing with considering thermal effect

5.2 회전체 시스템의 최적설계

일반적으로 베어링 설계에서 사용하는 설계방법으로는 많은 설계 선도를 이용한 시행착오법에 의해 최적설계변수를 선택해 왔다. 그러나 이 방법으로 최적설계변수를 성공적으로 선정하는 일은 쉬운 것이 아니고, 또 성공적으로 최적설계를 완성하기 위해서 많은 시간과 경비가 필요하다. 따라서 본 논문에서는 SA를 이용하여 simple rotor에서의 저널베어링의 최적설계를 수행하였다.

5.2.1 단순 저널베어링의 최적설계^{(14),(18)}

Fig. 5.4에 두 개의 저널베어링에 의해 지지된 simple rotor 시스템을 보이고 있다. 시스템의 Q 계수는 가진 주파수가 비감쇠 고유진동수와 같을 때 공진이 일어나게 되는 진동의 최대크기의 척도이다. 앞 절에서 설명한 바와 같이 Q 계수는 식 (5.2)와 같이 정의된다.

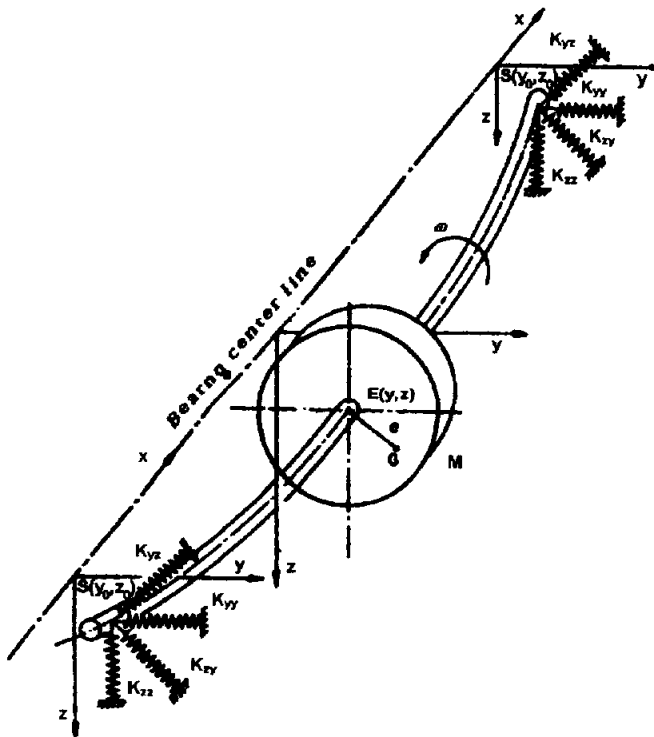


Fig. 5.4 Analytical model of simple rotor

$$Q_i = \frac{1}{2\xi_i}, \quad (i = y, z) \quad (5.2)$$

여기서 감쇠비 ξ_i 는 복소 고유치해석 결과로부터

$$\xi_i = -\lambda_{ri} / \sqrt{\lambda_{ri}^2 + \lambda_{ii}^2} \quad (5.3)$$

와 같다.

회전축계의 최적 설계는 Fig. 5.4와 같이 양 끝단이 저널베어링으로 이방성 지지되어 있는 **simple rotor**에 대해 상태변수로 정의되는 구속조건 하에서 목적함수를 최소로 하는 최적설계변수를 구하는 것이다. 상태변수로는 베어링 하중 $W(N)$, 회전속도 $N(\text{rpm})$, 축강성 계수 $k_s(N/m)$, 베어링 지지 강성 계수 $K_{i,j}(N/m)$, 감쇠 계수 $C_{i,j}(N/m^2)$, 회전체 질량 $M(kg)$ 등이 고려되었다. 그리고, 이들 상태변수는 일반적으로 설계변수에 의해 결정되는 값들이다. 온도를 고려하지 않았을 경우 설계변수로는 반경틈새 C 와 L/D 비 λ 이고, 온도를 고려한 경우 설계변수로는 반경틈새 C 와 오일의 점도 μ 이다. 설계변수벡터 $\mathbf{X}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_1^T = \{C, L/D\}, \quad \mathbf{X}_2^T = \{C, \mu\} \quad (5.4)$$

최적설계조건을 만족하기 위한 구속조건들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{X}) &\leq 0, \quad (i=1\sim4) \\ g_1 &= C_{\min} - C, \quad g_2 = C - C_{\max} \\ g_3 &= \lambda_{\min} - \lambda, \quad g_4 = \lambda - \lambda_{\max} \\ g_5 &= \mu_{\min} - \mu, \quad g_6 = \mu - \mu_{\max} \\ g_7 &= h_a - C\{1 - \varepsilon_0(\mathbf{X})\} \\ g_8 &= \omega - \omega_{cr}(\mathbf{X}) \\ g_9 &= p_{\max}(\mathbf{X}) - p_a \end{aligned} \quad (5.5)$$

여기서, h_a 는 허용 유막두께, p_a 는 허용 유막압력, ω_{cr} 는 저널 베어링의 불안정한계 휘돌림 속도, ϵ 은 저널 베어링의 편심률이다.

식 (5.4)의 Q 계수를 최소화하기 위한 지지베어링의 최적 설계를 수행한다. Q 계수의 계산에 사용되는 저널 베어링의 지지강성과 감쇠계수는 앞 절에서 유한차분법으로 구한 값을 사용하였다.

Table 5.3은 입력 파라미터의 값을 보여주고 있고, Fig. 5.5에 SA를 이용하여 단순 저널베어링의 최적설계를 수행하는 전체 흐름도를 보여주고 있다. 먼저 초기변수를 설정한 뒤, 근방의 해를 생성한다. 그 후, 베어링 형상에 대한 구속조건을 확인 한 후, 유한차분법을 이용한 저널 베어링의 동특성계수와 최대 압력, 최소 유막두께를 계산하고, 이 압력과 유막두께에 대한 구속조건을 다시 확인한다. 만약 구속조건을 하나라도 만족하지 않으면 새로운 해를 생성한 후, 위의 과정을 반복한다. 모든 구속조건들이 만족된다면, 고유치해석을 수행하고, 계산된 고유치를 이용하여 목적함수 값을 구할 수 있다. 그 다음 SA의 metropolis 조건을 거쳐 생성된 해로의 이동여부를 결정한 후, SA의 알고리즘과 동일하게 내부루프의 반복, 하강 온도의 업데이트, 그리고 종료조건을 거쳐 외부루프를 반복하여 해를 결정한다.

Table 5.1 Input parameters for optimum design

Input parameters	Value
Minimum radial clearance $C_{\min}$	20 μm
Maximum radial clearance $C_{\max}$	500 μm
Minimum length to diameter ratio $\lambda_{\min}$	0.35
Maximum length to diameter ratio $\lambda_{\max}$	0.65
Maximum viscosity of oil $\mu_{\max}$	0.02 Pa · s
Minimum viscosity of oil $\mu_{\min}$	0.008 Pa · s
Minimum film thickness h_a	40 μm
Maximum film pressure p_a	10 MPa
Viscosity of lubricant μ	0.01 Pa · s
Journal diameter D	0.1 m
Applied load to bearing F_0	4000 N
Rotor mass M	125 kg
Rigid bearing critical speed ω	4,820 rpm

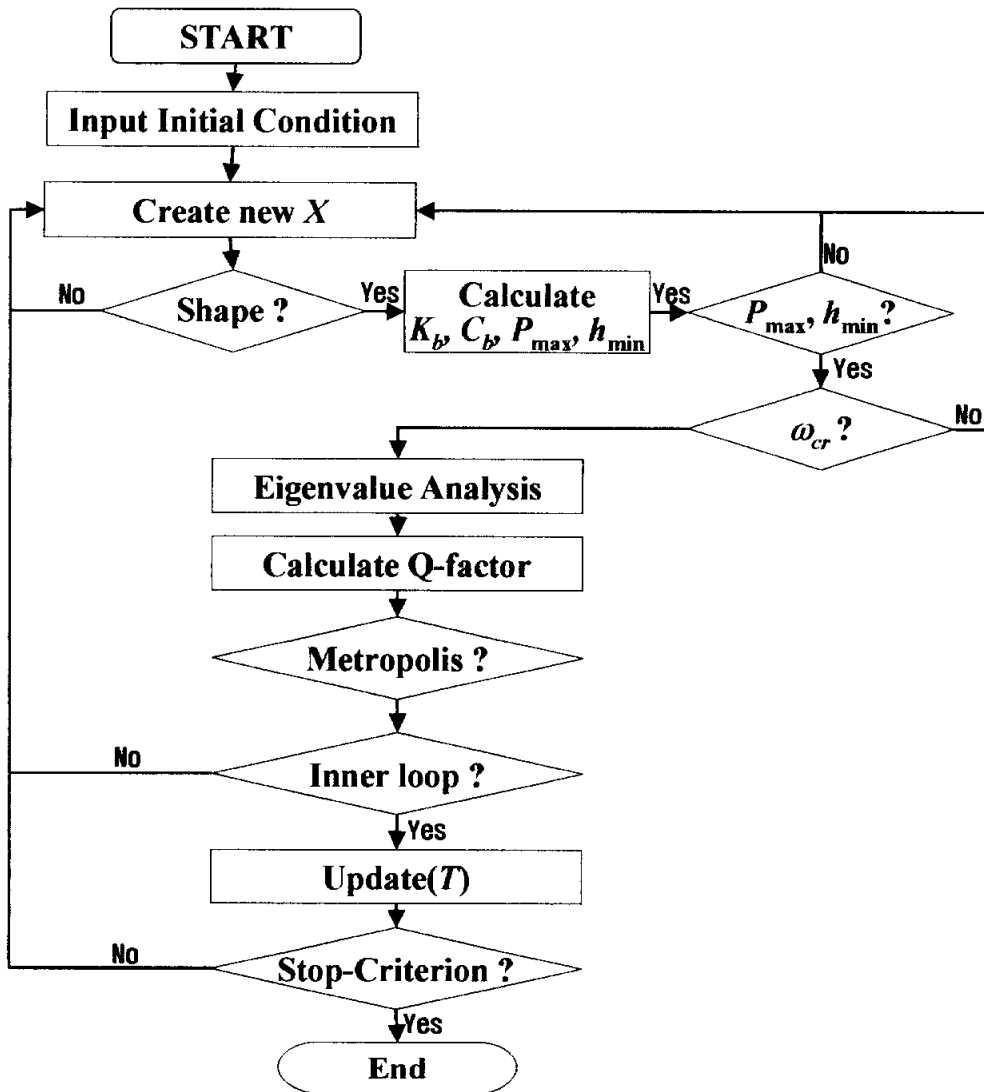


Fig. 5.5 Flowchart of optimum design

5.2.2 결과 및 고찰

온도를 고려하지 않은 경우, 앞 절에서와 같은 운전조건을 고려하여 최적설계를 수행한 결과 얻어진 최적해는 다음과 같다.

$$C = 65.05 \mu\text{m} , \quad L/D = 0.35001$$

Fig. 5.6은 설계변수를 변경하였을 때 설계변수와 목적함수 값의 등고선 분포를 2차원으로 나타내고 있고, 구속조건에 따라 가능한 해 영역이 그림과 같이 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 가능한 해 영역이 다음과 같이 되는 것은 rotor-bearing system의 안정한계속도에 대한 구속조건에 기인하는 것으로 평가되고, 위쪽의 목적함수 값들이 높게 추정되는 부분은 oil whip의 발생으로 Q 계수가 높게 나타나는 구간으로 사료되고, 이 구간에서 고유치의 실수부분이 0보다 크게 되므로 불안정한 영역으로 확인되었다. 그리고 구속조건 중 압력과 최소 틈새에 대한 조건은 고려하는 모든 설계영역에서 만족하는 것으로 평가되었고, 그림에서와 같이 설계변수의 구속조건을 만족하는 가능해 영역 내에서 전역 최적해를 정확히 탐색하고 있음을 확인할 수 있다.

그리고 Fig. 5.7(a)는 초기 파라미터 값인 $C = 200\mu\text{m}$, $L/D = 0.44$ 와 최적화 후의 진동확대계수를 나타내었다. 최적 설계를 통하여 최대 응답이 약 13% 정도 감소된 것을 알 수 있었고, Fig. 5.7(b), Fig. 5.7(c)에 최대 압력, 최소 틈새를 각각 비교하였다.

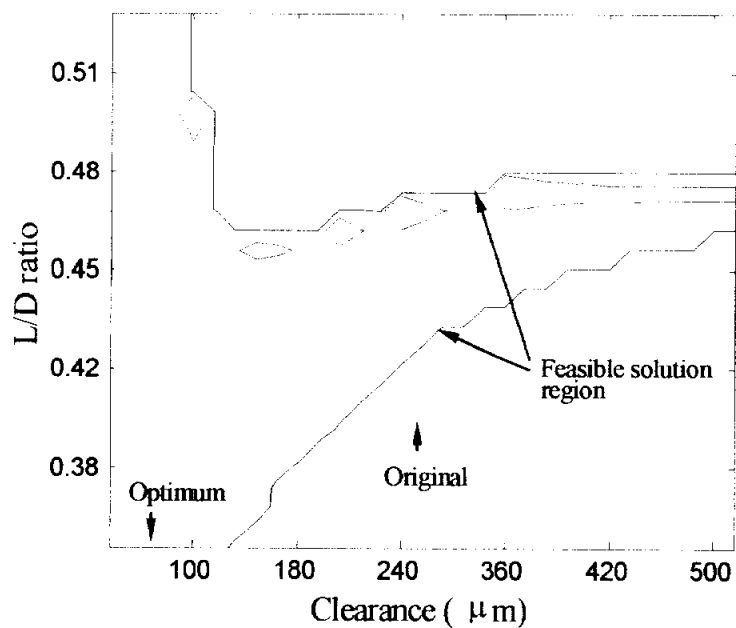
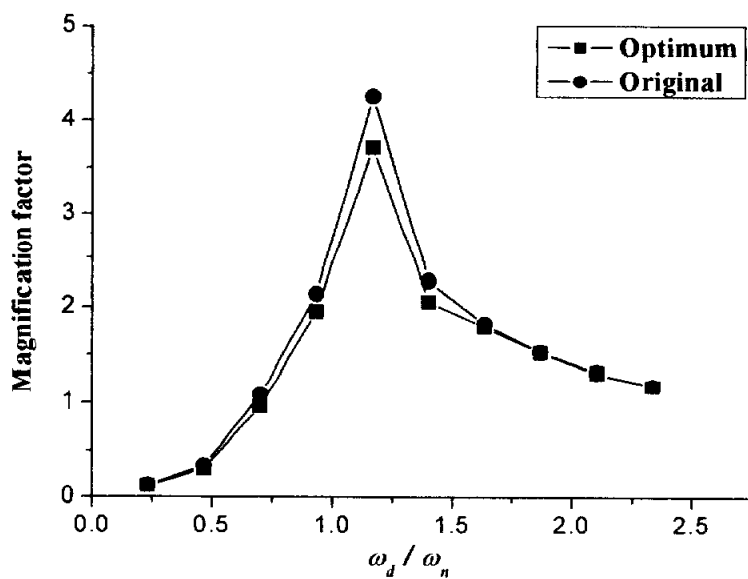
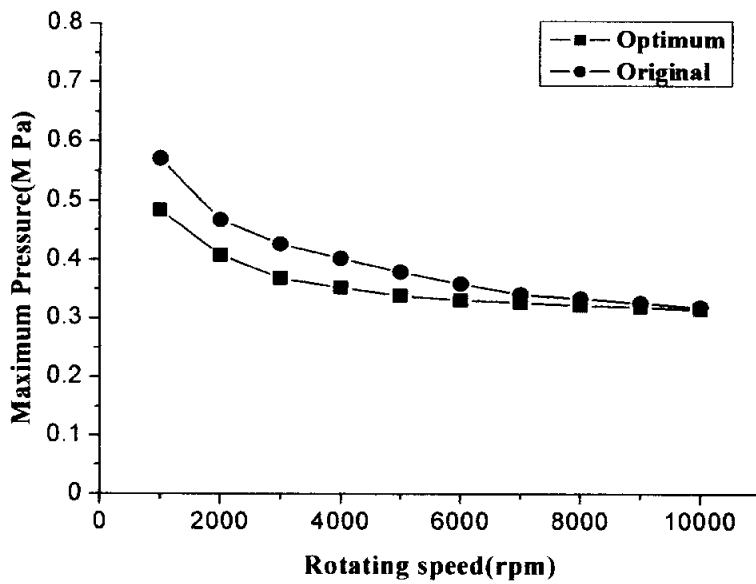


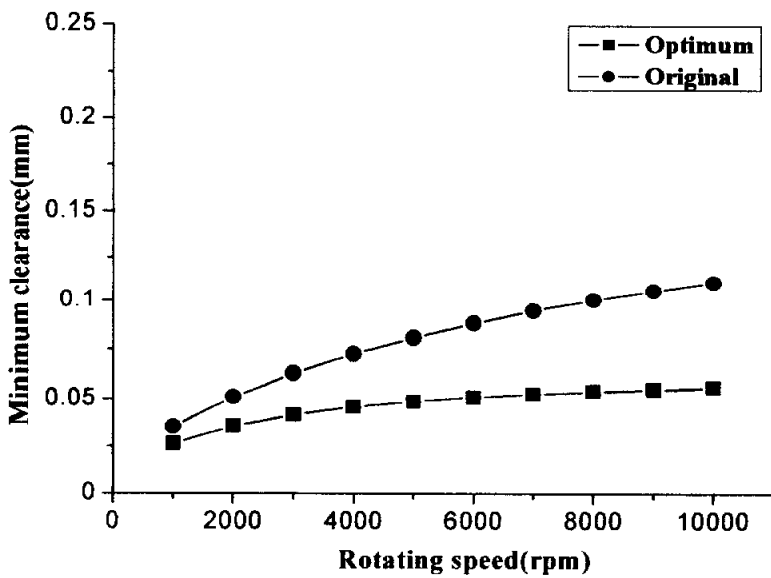
Fig. 5.6 Feasible solution



(a) Magnification factor



(b) Maximum pressure



(c) Minimum clearance

Fig. 5.7 Comparison with original and optimum point

온도를 고려하지 않은 경우 L/D 의 값이 구속조건의 최소값으로 수렴하기 때문에 설계변수로서 부적당하여 온도를 고려한 해석에서는 L/D 대신에 점도 μ 를 설계변수로 사용하여 최적설계를 수행하였다. 그 결과 얻어진 최적해는 다음과 같다.

$$C = 65.328\mu\text{m}, \quad \mu = 0.10565 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Fig. 5.8은 설계변수와 목적함수 값의 등고선 분포를 2차원으로 나타내고 있고, 구속조건에 따라 가능한 해 영역이 그림과 같이 나타나고 있음을 확인할 수 있다.

그리고 Fig. 5.9는 초기 파라미터 값인 $C = 200\mu\text{m}$ 와 $\mu = 0.14 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 와 최적화 후의 진동확대계수를 나타내었다. 최적 설계를 통하여 최대 응답이 약 10% 정도 감소된 것을 알 수 있고, 온도를 고려하지 않은 경우와 비교하여 보면 거의 변화가 없음을 알 수 있다.

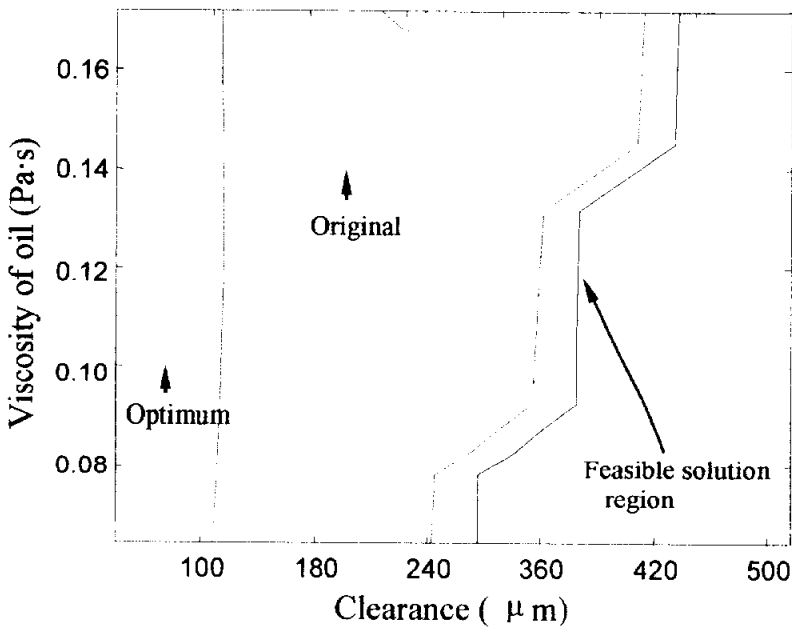


Fig. 5.8 Feasible solution

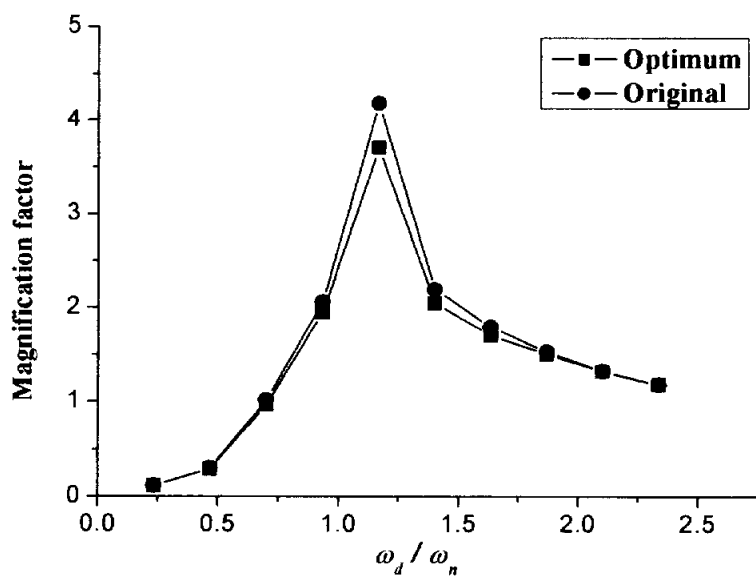


Fig. 5.9 Comparison with original and optimum point

6. 결 론

본 논문에서는 시뮬레이티드 어닐링(SA) 알고리즘을 이용하여 simple rotor에 지지된 저널베어링의 최적설계를 수행하였다. 저널 베어링의 지지강성 및 감쇠 계수는 유한차분법(FDM)을 이용하여 계산하였다. 최적설계 방법으로 사용된 SA 알고리즘은 테스트 함수에의 적용을 통해 그 성능을 확인하였고, 유한차분법을 이용한 저널 베어링의 동특성계수 또한 온도를 고려하지 않은 경우와 온도를 고려한 각각의 경우에 대해 참고문헌을 비교하여 그 정확성을 확인하였다. 유막 온도를 고려하여 저널 베어링 해석한 경우 고려하지 않은 경우보다 정특성 파라미터와 동특성계수가 참고문헌의 값과 더 비슷함을 알 수 있었다.

이 SA 알고리즘과 유한차분법(FDM)으로 구한 동특성 계수를 이용하여, simple rotor 저널베어링의 최적설계를 수행한 결과 온도를 고려한 경우와 고려하지 않은 각각의 경우에 대해 최적해를 찾는 것을 확인되었다.

참고문헌

- (1) Rao, S. S., 1996, "Engineering Optimization Theory and Practice", John Wiley & Sons. Inc.
- (2) Aroa, Jasbir S., 1989, "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill.
- (3) Bernard J. Hamrock, 1994, "Fundamentals of Fluid Film Lubrication", McGraw-Hill.
- (4) J. W. Lund, Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings, Journal of Tribology, 109, 37-41, 1987.
- (5) Kirkpatrick, S., C.D. Gelatt Jr. and M.P. Vecchi, Optimization by Simulated Annealing, Science, 220, 671-680, May 1983.
- (6) Metropolis, N., A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller, Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, J. of Chem. Physics, 21, 1087-1092, 1953.
- (7) Toda, M., R. Kubo, and N. Saito, 1983, "Statistical Physics", Springer Verlag.
- (8) Aarts, E.H.L. and P.J.M. van Laarhoven, Simulated Annealing: A Pedestrian Review of the Theory and Some Applications, 1987.
- (9) Johnson, D.S., C.R. Aragon, L.A. Mcgeoch, Optimization by simulated annealing : an experimental evaluation ; Part I. graph partitioning, Operations Research, 37, 865-892, 1989.
- (10) Huang, M.D., F. Romeo and A.L. Sangiovanni-Vincentelli, An Efficient General Cooling Schedule for Simulated Annealing, Proc. IEEE Int. Conference on Computer-Aided Design, 381-384, 1986.
- (11) Saab, Y.G., V.B. Rao, Combinatorial optimization by stochastic evolution, IEEE Trans. Computer-Aided Design, 10, 525-535, 1989.
- (12) Aarts, E.H.L., J.H.J. Korst, 1989, "Simulated annealing and Boltzmann machines", John Wiley & Sons.
- (13) Tsitsiklis, J.N., Markov chain with rare transitions and simulated annealing, Mathematics of Operations Research, 14, 70-99, 1989.
- (14) J.s. Rao., 1991, "Rotordynamics" New Age International Publishers
- (15) 양보석, 2002, "회전기계의 진동", 인터비전.

- (16) Daniel J. Inman, 1996, "Engineering Vibration", Prentice Hall International Edition.
- (17) Someya, T., Ed., 1988, "Journal-Bearing Databook", Springer-Verlag.
- (18) 김영찬, 양보석, 전역 및 국소 최적화 탐색을 위한 향상된 유전 알고리즘의 제안, 대한기계학회논문집, Vol. 26, No. 6, pp. 1008-1015, 2002

감사의 글

9년 동안의 실험실 생활이 이 한편의 작은 논문으로 결실을 이루게 되었습니다. 실험실의 많은 분들의 도움이 있었기에 이 일이 가능하게 된 것 같습니다.

먼저 이 논문이 결실을 맺도록 부족한 저를 지켜봐 주시고 지금까지의 길로 지도하여 주신 양보석 교수님께 감사의 마음을 전합니다. 그리고 바쁘신 와중에도 논문 심사를 위하여 아낌없는 지도와 조언으로 좋은 논문이 되도록 세심하게 지도하여 주신 김형자 교수님, 이수종 교수님께 진심으로 감사를 드립니다. 연구에 많은 조언을 해 주신 안영공 교수님과 학부시절부터 많은 도움을 주시고 이끌어 주신 실험실의 졸업하신 많은 선배님들에게도 이 글을 빌어 감사의 말을 전합니다.

만학의 길을 걷고 계시는 영모형, 이제는 박사가 되신 영찬형, 그리고 곧 되실 용한형, 저를 학문적의 길로 올바르게 이끌어주신 진대형, 중국에서 와서 열심히 공부하는 Feng 박사와 한천에게 고맙다는 말을 전하고, 이번에 같이 졸업하게 되는 광진형, 종홍씨, 사랑스러운(?) 나의 학부 동기 원우, 상일, 곧 석사과정 들어올 종덕이, 그리고 실험실 일꾼인 학부생 민찬, 재갑, 선화에게 평소에 하지 못했던 고맙다는 말을 전합니다.

부경대와 석사 과정으로 저를 인도해 주신 작은아버지 구자삼 교수님, 언제나 편안함을 안겨준 동아리 수향회에서 알던 모든 선·후배님과 동기들, 우정으로 서로 힘이 되어준 고등학교 친구들 선미, 선훈, 시종, 상욱, 성현, 수현, 주현, 광현, 용훈에게도 감사의 말을 전합니다.

저를 알고 있는 모든 분들에게 감사드리며, 힘들 때 나에게 큰 힘이 되어준 사랑하는 지영이에게도 고마움을 전합니다.

마지막으로, 저를 위해 열심히 뒷바라지 해 주시고 수고하신 할머니와 부모님의 은혜에 감사드리고 이 논문을 바칩니다.