

공학박사 학위논문

TSK 퍼지시스템을 이용한 비선형 시스템의 모델링과 제어

지도교수 강 근 택

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함



2002년 6월

부경대학교 대학원

전 자 공 학 과

채 양 범

채양범의 공학박사 학위논문을 인준함

2002년 6월 21일

주 심 공학박사 이 철 영



부 심 공학박사 문 광 석



부 심 공학박사 이 원 창



부 심 공학박사 오 갑 석



부 심 공학박사 강 근 택



목 차

Abstract	iii
제1장 서론	1
1.1 연구 배경	1
1.2 연구 동향	5
1.3 연구 내용 및 구성	8
제2장 TSK 퍼지시스템	11
2.1 서언	11
2.2 TSK 퍼지모델	12
2.2.1 TSK 퍼지 입출력모델	12
2.2.2 TSK 퍼지 상태변수모델	24
2.3 TSK 퍼지제어기	35
2.3.1 TSK 퍼지 입출력 모델로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기 ...	37
2.3.2 TSK 퍼지 상태변수 모델로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기 ..	41
2.3.3 적분 제어가 첨가된 TSK 퍼지제어기	60
2.4 선박조타의 TSK 퍼지 비선형 제어시스템의 설계	67
2.4.1 선박 조종방정식의 TSK 퍼지모델 표현	68
2.4.2 선박조타의 TSK 퍼지 제어시스템 설계	70
2.4.3 시뮬레이션	73

2.5 결언	78
제3장 Singleton 퍼지시스템으로의 변환	79
3.1 서언	79
3.2 변환 알고리즘	80
3.3 비선형 시스템 모델링에의 응용	91
3.3.1 퍼지모델의 인식	91
3.3.2 반도체 소자의 퍼지모델링 시뮬레이션	92
3.4 비선형 시스템 제어기 설계에의 응용	98
3.4.1 TSK 퍼지제어기의 singleton 퍼지제어기로의 변환	98
3.4.2 시뮬레이션	100
3.5 결언	107
제4장 결론	108
참고문헌	111

Modeling and control of Nonlinear systems using TSK fuzzy system

Yang-bum Chae

*Department of Electrical Engineering, Graduate School
Pukyong National University*

Abstract

A TSK(Takagi-Sugeno-Kang) fuzzy model consists of TSK fuzzy rules whose the consequents are linear equations instead of fuzzy sets. A TSK fuzzy rule represents a linear input-output relation in the fuzzy subspace specified at the premise. As we shall find, a TSK model is a nonlinear model. A TSK fuzzy model can be identified using input-output data and represent a nonlinear system very well with a few fuzzy rules. If a method to verify the stability of a TSK fuzzy model is known, the stability of a nonlinear system of which structure is not known can be analyzed through its TSK fuzzy model, and also if a controller guaranteeing stability is designed from a TSK fuzzy model, a controller of a nonlinear system can be systematically designed.

On this issue, several studies have been done. However, all of them concerned a special type of TSK fuzzy state space model where a state equation in the consequent does not have a constant term. a TSK fuzzy model consisting of these fuzzy rules can not represent a nonlinear

system with high accuracy. So this paper deals with the TSK fuzzy model consisted of TSK fuzzy rules of which the consequent is a linear input-output equation having a constant term.

Therefore, this paper suggests a method to verify the stability of a TSK fuzzy state space model and a method to design a TSK fuzzy controller based on the TSK fuzzy model, which guarantees the stability of a closed loop system. Such a TSK fuzzy model may have many equilibrium points and each equilibrium point may have different natures of stability. The stability of an equilibrium point is determined by eigenvalues of the Jacobian matrix obtained by linearizing the system around the equilibrium point. For design of the TSK fuzzy controller, the pole placement and the integral control developed for linear control systems are used. The closed loop system controlled by the suggested controller has the same behavior as the linear system of which state transition matrix is the desired one. So we applied the method identifying the TSK fuzzy model and designing the TSK fuzzy controller to ship steering system.

A TSK fuzzy model with linear equations in the consequents, which represent complex nonlinear systems very well with a few rules, can be easily identified systematically by using input-output data. On the contrary, singleton fuzzy models is understandable intuitively and adjustable easily due to linguistic expression of the rules.

In order to utilize the merits of TSK fuzzy systems and singleton fuzzy systems, this paper also suggests an algorithm transforming a TSK fuzzy model into a singleton fuzzy model having the same input-output relation and the suggested algorithm is also applied to design a singleton fuzzy

controller.

Finally, Simulation results reveal that the methods suggested are practically feasible. This paper deals with both the continuous systems and the discrete systems.

제 1 장 서 론

1.1 연구 배경

퍼지제어는 퍼지이론의 응용 분야로서 애매성을 포함한 언어를 이용하여 시스템의 분석과 시스템을 기술하는 퍼지 알고리즘을 제안한 Zadeh의 논문을 토대로 Mamdani에 의해 비선형 시스템인 증기기관의 제어를 위한 퍼지 알고리즘의 응용으로 1974년 최초로 시작되었다[1,2]. 연구에 사용된 퍼지 알고리즘은 if (전제부) - then (결론부) 형태의 퍼지제어 규칙으로 표현되며, 시스템의 상태에 관한 정보를 나타내는 전제부 변수와 시스템으로의 입력을 나타내는 결론부 변수 등이 취하는 언어 라벨이 퍼지집합으로 표현되기 때문에 언어적 퍼지제어 규칙이라 불린다. 이후 이와 같은 if - then 형태의 퍼지제어 규칙으로 구성되는 퍼지시스템이 많이 사용되고 있으며, 이러한 형태의 퍼지모델은 숙련자의 정성적인 지식을 표현하는데 아주 유용하다.

그리고 Pedrycz는 상기의 규칙을 일반화한 결론부 변수가 언어 라벨의 퍼지집합 대신 실수 값 singleton인 퍼지규칙으로 구성되는 퍼지모델을 소개하였다[3].(이하, 이 형태의 퍼지규칙으로 구성되는 모델이나 제어기를 singleton 퍼지시스템이라 한다.)

이와는 달리 Takagi 와 Sugeno는 결론부가 퍼지집합 대신에 선형식인 퍼지규칙으로 구성되는 퍼지모델을 소개하였다[4].(이하, 이 형태의 퍼지규칙으로 구성되는 모델이나 제어기를 TSK 퍼지시스템이라 한다.)

TSK(Takagi-Sugeno-Kang) 퍼지규칙은 전제부에서 정해지는 퍼지 부분공간에서의 입출력 관계를 결론부의 선형식에서 표현하고 있다.

이와 같이 플랜트 변수 사이의 관계를 표현하는 퍼지모델의 형태는 일반적으로 전제부 변수 및 결론부 변수가 언어적 형태의 퍼지집합을 취하는 퍼지규칙으로 구성되는 모델과 이를 일반화하여 결론부 변수를 실수값으로 취하는 퍼지규칙으로 구성되는 모델 및 결론부가 선형 방정식인 퍼지규칙으로 구성되는 모델의 3가지로 분류된다[5,6].

여기서 일반화된 언어적 퍼지규칙으로 구성되는 singleton 퍼지시스템과 결론부가 선형 방정식인 퍼지규칙으로 구성되는 TSK 퍼지시스템의 특성을 살펴보면 다음과 같다.

(1) singleton 퍼지시스템

이러한 형태의 퍼지규칙은 자동차 추적제어(tracking control)를 위한 제어기에 최초로 사용되었으며, 이후 로봇 팔의 제어 그리고 최근에 무인 헬리콥터의 제어 등에 적용되어 실제적 응용에 대단히 유용하다는 것이 입증되었다[7~10].

singleton 퍼지시스템의 언어적 제어규칙은 그 언어적 성질 때문에 직관적으로 이해하기가 용이하다. 또 플랜트에 관한 데이터나 지식이 부족할 경우, 인식된 규칙들은 시스템에 대한 발견적 방법에 의한(heuristic) 지식이나 숙련가의 정성적 지식으로부터 만들어진 그 이전의 규칙들과 직접적으로 결합시킬 수 있어 규칙의 파라미터 조정이 비교적 쉬운 이점이 있다.

그리고 취약한 구조적 특성 때문에 플랜트를 표현하는데 비효율적이므로 수치적 데이터로 모델 인식이 어렵다. 즉, 원하는 정확도를 가지는 시스템 거동의 근사화를 위해서는 TSK 퍼지시스템보다 많은 수의 규칙이 필요하므로 인식을 위한 데이터가 훨씬 많이 요구되며, 또 그 데이터는 전체 작업 공간에 대한 정확한 정보를 포함하고 있어야 하므로 동적 시스템의 경우에는 분명히 한계가 따른다.

(2) TSK 퍼지시스템

결론부가 선형 방정식인 퍼지규칙으로 구성되는 모델은 비선형 모델의 하나이며, 모형차(model car)의 제어에 최초로 사용되었다[11].

TSK 퍼지시스템은 입력 공간을 분할하여 몇 개의 부분 공간으로 나뉘 각 부분 공간을 퍼지규칙으로 표현함으로써 플랜트에 대해 탄력적이지만 일정한 구조를 가정하므로 플랜트의 입출력 데이터만으로 보다 용이하게 인식될 수 있다[12~15]. 따라서 보다 적은 인식용 데이터를 사용하여 원하는 정확도로 비선형 시스템을 근사화 하는데 적은 수의 규칙만으로도 충분하다[16~20].

그러나 결론부 선형식의 함수적 성질 때문에 플랜트 변수 사이의 관계에 대한 규칙의 이해가 어렵다. 또 각 퍼지규칙이 플랜트의 국부적인 거동을 표현하므로 각 규칙 사이에 보정할 오차가 발생할 수 있으므로 모델의 전체적 정확도는 저하될 수 있다[21]. 이런 단점에도 불구하고 TSK 퍼지시스템은 복잡한 비선형 시스템을 표현하는데 대단히 효율적이고 유용성이 높다.

이러한 두 시스템의 특성을 비교한 것이 표 1이다[5].

시스템 기술은 비선형 시스템을 표현하는 능력을 의미하며 규칙의 갯수와 일반성과 직접적인 관계가 있다. 즉 일반적일수록 더 많은 데이터가 필요하며 시스템을 표현하는데 비효율적이다. 언어적 의미는 규칙에 대한 이해도를 말하는 것으로 데이터로부터 인식된 이전의 발견적 방법을 통한 지식과의 결합 가능성 즉 특정 부분에서의 오차 수정의 가능성을 나타내는 것이다.

Table 1. Properties of TSK and singleton fuzzy systems

특 성	TSK fuzzy system	singleton fuzzy system
시스템 표현	효율적	비효율적
일 반 성	낮다	높다
규 칙 수	적다	많다
언어적 이해	제한	용이
특정부분의 수정	어렵다	쉽다
인식 데이터	적은 수	많은 수

따라서 이 두 시스템을 상호 변환함으로서 각각의 장점을 살릴 수 있는 방법이 필요할 것이다[5,6].

1.2 연구 동향

역사적으로 살펴보면, Zadeh 교수가 1965년 애매한 특성이 있는 언어적인 값을 정량적으로 기술하기 위하여 “Information and Control” 잡지에 퍼지집합 이론을 체계적으로 발표한 것이 퍼지이론의 최초이었으며, 이를 토대로 인간이 일상 생활에서 자주 사용하는 비확률적이고 불확실한(vagueness, ambiguity) 언어의 의미와 개념을 정량적으로 나타낼 수 있는 수학적인 바탕을 마련하였다[22]. 그 후, 퍼지집합의 이론과 실제적인 응용에 대한 연구가 여러 분야에서 발표되었다. 이 중에서도 퍼지논리 제어기는 공학자들에게 가장 활발하게 관심을 끄는 분야가 되었고, 일본과 영국 등에서는 실제적인 응용분야에 주력해 오고 있으며, 미국에서는 이론 위주의 개념 확장을 보다 중시하고 있다.

Mamdani는 1975년 비선형 시스템인 증기기관의 제어에 퍼지제어 기법을 처음으로 응용하여 그 실용 가능성을 보여 주었으며, 이것이 퍼지제어의 연구에 활기를 불어넣는 동기가 되었다[2].

Mamdani의 연구 후에 퍼지제어는 덴마크에서 시멘트 용융로(kiln)의 제어로서 최초로 실용화가 되었고 오늘날 하나의 제어 방법론으로 확립되고 있다[23]. 이 시멘트 용융로(kiln)를 대상으로 한 퍼지제어는 Ostergaard 등에 의해 연구되었고, F. L. Smith사에 의해 시멘트 공장의 용융로를 자동화한 제어 시스템이 개발되어 전용의 퍼지제어기가 용융로(kiln)에 실제 장치되었다[24]. 또 Ostergaard는 비선형 시스템인 열교환기의 퍼지제어에 대한 연구를 발표하였다[25].

유럽에서 시작된 퍼지제어가 일본에서 산업 분야에 응용되기 시작한 것은 1979년부터이며 1985년경부터 일본 기업의 관심을 불러 일으켜 퍼지제어의 실용화가 급속히 진전되었다[26]. 그 대표적인 것으로 열차의 자동 운전 및 정수장의 약품 주수 처리에의 응용 등이다. 즉 1984년 “Fuji 電氣”사에서는 정수처리장의 약품처리를 퍼지제어로 행하였고, 또 1985년에는 Yagishita 등이 정수 공정에 대한 퍼지추론의 응용을 발표했다.[27,28]

Sugeno 교수는 숙련된 조작자의 제어 동작을 모델링함으로써 퍼지제어 규칙을 유도하는 방법을 제안하고 이를 자동차의 주차 제어에 응용하여 그 유용성과 강력함을 입증했다[17,29,30].

Yasunobu 등은 숙련된 조작자의 경험으로부터의 규칙을 사용한 예측 퍼지제어기를 제안하고 열차의 자동 운전동작 시스템과 자동 컨테이너 크레인 등에 적용하였다. 제안된 제어기는 안전성, 승차감, 목표속도의 추종성, 소비 전력량, 주행 시간 및 정지 위치의 정확도에 대한 퍼지 성능 지수를 사용하였다. 이 기법에 의해 정지 위치의 정확도와 승차감이 보다 향상되었고, 운전환경의 변화에 대해서도 강인했다. 또 종래의 실용화된 PID제어 방법과 비교하여 에너지 절감을 가능하게 했으며, 숙련된 운전자와 동등한 제어를 행할 수가 있었다[31~34].

“AT & T”사는 1985년 퍼지추론용 제어기를 시판하기 시작했으며, 일본의 “Hitachi 電氣”사에서는 1987년 “仙台”시의 지하철 자동 운전에 퍼지제어를 적용하여 에너지 절감과 승차감을 향상시켰다[35].

이러한 연구에 힘입어 1988년에는 산업 응용 사례가 100건, 1989년에

는 124건을 초과하였다[36]. 이 여세로 응용의 폭이 넓어져 일반인에게 생소한 프로세스 제어뿐만 아니라 가정용 보일러의 샤워기, 가정용 에어컨 제어기, 카메라 오토 포커스 등 민간 수요품에도 퍼지기 시작했으며, 1990년 퍼지 전자동 세탁기를 선두로 냉장고, 청소기 등의 가전제품에 응용되었다. 그 이후로 퍼지제어의 응용분야가 공학계에 국한되지 않고, Yasunobu, Yamakawa 등에 의해 의료계, 생태계 및 물리·화학적 현상 규명 등에도 광범위하게 연구되어 오고 있다.

국내에서는 생산 설비 등의 각종 산업 분야에 퍼지 이론이 폭 넓게 응용되지 못하고 몇몇 가전제품에만 국한되어 왔으나, TV의 백색 균형 조정, 자기 부상 열차 자동 운전시스템에의 적용, 사출금형 자동 온도제어 등 산업 분야에의 응용을 위한 많은 연구가 진행되고 있다[37~42].

1.3 연구 내용 및 구성

결론부가 선형식으로 표현되는 퍼지규칙으로 구성되는 TSK 퍼지시스템은 플랜트의 입출력 데이터로 쉽게 인식될 수 있으며, 적은 수의 퍼지규칙으로 복잡한 비선형 시스템을 비교적 정확하게 표현할 수 있음을 이전의 많은 연구에서 보고하고 있다[4,12~20].

그리고 TSK 퍼지모델의 안정성을 확인하는 방법이 있다면, 시스템의 구조를 알 수 없는 비선형 시스템의 안정성은 시스템의 TSK 퍼지모델을 통하여 해석될 수 있다. 또 TSK 퍼지모델로부터 안정성을 보장하는 제어기를 설계하는 방법이 있다면 비선형 시스템의 제어기를 체계적으로 설계할 수 있게 된다.

그러나 평형점에서의 TSK 퍼지 상태변수 모델의 안정성에 관한 이전의 연구들은 대부분 한 개의 평형점에 관한 것이었으며, Lyapunov 함수를 사용하는 것으로 설계가 복잡하면서 페루프의 응답도 자유로이 지정할 수가 없었다[43~54]. 그리고 TSK 퍼지모델로부터 페루프 시스템의 안정성을 보장하는 일종의 비선형 제어기를 설계하는 이전의 연구들은 결론부의 선형식이 상수항을 갖고 있지 않는 특수한 형태의 TSK 퍼지규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델을 다루고 있다[55~80,85]. 이러한 결론부가 상수항을 가지지 않는 특수한 형태의 퍼지규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델은 비선형 시스템을 정확하게 표현할 수 없다.

그러므로 본 논문에서는 결론부의 선형식에 상수항을 가지는 일반적인 형태의 퍼지규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델의 표현 방법과 이 모델로

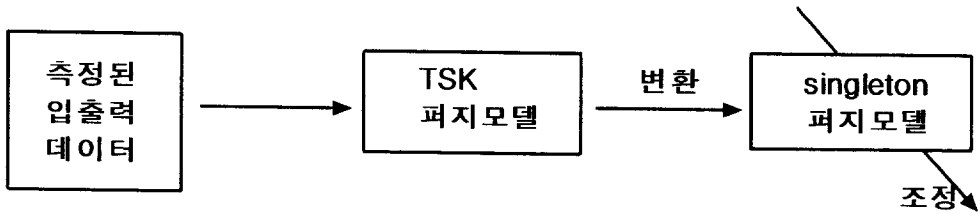
부터 TSK 퍼지제어기를 설계하는 방법을 다룬다.

그리고 퍼지규칙의 결론부가 실수인 형태인 singleton 퍼지시스템은 TSK 퍼지시스템을 간략화한 형태로 규칙이 언어적 형태이므로 이해하기가 쉽고, 규칙의 조정이 용이한 장점이 있으나, 구조적 특성 때문에 입출력 데이터만으로 모델 인식이 어렵다.

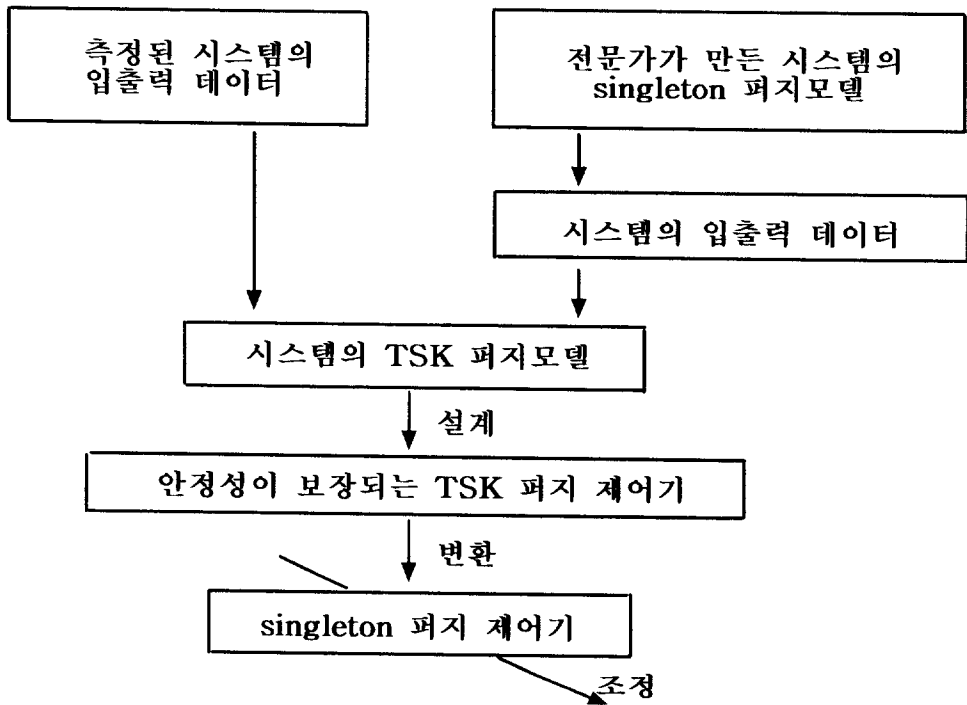
따라서 TSK 퍼지시스템의 입출력 데이터에 의한 모델 인식 및 체계적으로 원하는 정확도를 가지는 비선형 시스템의 제어기 설계 등의 장점과 singleton 퍼지시스템 규칙의 언어적 특성으로 인한 직관적 이해의 용이성 및 규칙의 파라미터 조정을 통한 특정 부분의 오차를 수정할 수 있는 등의 장점을 살리기 위하여 TSK 퍼지모델로부터 안정성을 보장하며 그 응답을 자유로이 지정할 수 있는 TSK 퍼지제어기를 설계하고, 이 TSK 퍼지시스템을 singleton 퍼지시스템으로 변환하는 방법을 제안한다. 제안한 변환 방법을 응용하는 블록 다이어그램은 그림 1과 같다.

본 논문은 총 4장으로 이루어져 있다.

제 1 장에서는 본 연구를 하게 된 배경을 설명하고 본 연구와 관련된 연구 동향을 살펴 보았다. 제 2 장에서는 복잡한 비선형 시스템을 표현하기 위한 TSK 퍼지모델의 인식 및 이 모델 평형점의 안정성을 검증하는 방법을 기술하고, 이 모델로부터 안정성을 보장하는 TSK 퍼지제어기의 설계 방법을 제안하였고, 이를 비선형 시스템인 선박의 자동조타 시스템에 응용하였다. 제 3 장에서는 제 2 장의 TSK 퍼지시스템을 singleton 퍼지시스템으로 변환하는 방법을 제안하고 시뮬레이션을 통해 두 시스템의 장점을 살릴 수 있음을 보였다. 제 4 장은 본 연구에서 구해진 결론을 요약하였다.



(a) Fuzzy modeling



(b) Design of the Fuzzy controller

Fig. 1. Transformation of TSK fuzzy system into singleton fuzzy system

제 2 장 TSK 퍼지 시스템

2.1 서 언

이 장에서는 결론부의 선형식이 상수항을 갖는 일반적인 형태의 퍼지 규칙 (1) 또는 (2)와 같은 affine 방정식을 다루며,

$$\begin{aligned} &\text{if } z_1 \text{ is } F_1, z_2 \text{ is } F_2, \dots, z_m \text{ is } F_m \\ &\text{then } y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{if } z_1 \text{ is } F_1, z_2 \text{ is } F_2, \dots, z_m \text{ is } F_m \text{ then } \dot{x}(t) = Ax(t) + c \quad (2)$$

여기서, $F_1, F_2, \dots, F_m$ 은 퍼지집합, c 는 상수벡터이다.

식 (1)과 (2)와 같은 TSK 퍼지규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델을 인식하는 방법을 설명하고, 이 TSK 퍼지모델로부터 폐루프의 안정성을 보장하며 그 응답을 자유로이 지정할 수 있는 퍼지제어기와 그 제어기의 설계 방법을 제안한다. 복잡한 비선형 시스템은 다수의 평형점들을 가질 수 있으며 각 평형점은 안정성에 관해 각각 다른 성질을 나타낼 수 있으나 TSK 퍼지모델에서 하나의 평형점에 대한 안정성은 그 평형점 근처의 모델을 선형화 함으로써 결정할 수 있다. 이렇게 안정성을 보장하면서, 선형 시스템에서 사용되는 극 배치법과 적분 제어를 TSK 퍼지모델의 제어에 사용하여, 폐루프의 응답이 원하는 안정된 선형시스템과 동일하게 되도록 하는 퍼지제어기와 그 설계방법을 제안한다.

2.2 TSK 퍼지모델

2.2.1 TSK 퍼지 입출력 모델

일반적인 TSK 퍼지 입출력 모델은 다음과 같은 규칙들로 구성된다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1 \text{ is } F_1^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i \\ & \text{ then } y^i = a_0^i + a_1^i x_1 \dots + a_n^i x_n \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, M^i 은 모델의 i 번째 규칙임을 의미하고, z_j 는 전제부 변수, F_j^i 는 z_j 위의 한 퍼지집합, x_j 는 결론부 변수, a_j^i 는 결론부 파라미터, y^i 는 규칙 M^i 로부터의 출력이다.

출력 y 는 다음과 같이 구한다.

$$y = \sum_{i=1}^r w^i(z) y^i / \sum_{i=1}^r w^i(z) \quad (4)$$

여기서, r 은 규칙의 갯수이며, $w^i(z)$ 는 i 번째 규칙의 적합도를 나타내며 다음과 같이 구한다.

$$w^i(z) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j) \quad (5)$$

여기서, $F_j^i(z_j)$ 는 퍼지집합 F_j^i 에서 z_j 의 멤버쉽 값이다.

TSK 퍼지모델은 시스템의 입출력 데이터를 이용하여 인식된다. TSK 퍼지모델의 인식은 결론부와 전제부 인식으로 구분되며 전체 알고리즘은 그림 2와 같다. 인식된 퍼지모델의 검증은 모델이 원래의 시스템을 얼마나 정확하게 표현하였는가를 알아보는 것이다. TSK 퍼지모델의 규칙수가 많으면 많을수록 모델의 오차는 더 작을 것이나 적정 모델의 규칙수보다 더 많은 규칙으로 구성되는 퍼지모델은 과잉의 인식 데이터를 필요로 할 것이다.

검증을 위해서 GMDH를 위해 개발된 UC 또는 RC가 사용된다[82]. 이러한 방법들의 주된 개념은, 인식된 모델의 구조가 적절하다면 모델의 파라미터가 인식을 위해 사용된 데이터의 변화에 민감하지 않아야 되는 것으로, 유한개의 인식용 데이터로부터 인식된 규칙들이 인식에 사용된 데이터에만 적합한 것이 아니고 실제 시스템을 정확히 표현하는 보편성 있는 규칙인가를 평가하는 것이다.

UC를 계산하기 위해서 인식 데이터는 A와 B, 두 그룹으로 나누고 이로부터 퍼지모델 A와 B가 인식되어진다. UC의 계산식은 다음과 같다.

$$UC = \left(\sum_{i=1}^{N_A} (y_i^{AB} - y_i^{AA})^2 + \sum_{i=1}^{N_B} (y_i^{BA} - y_i^{BB})^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

여기서, N_A 는 그룹 A의 데이터 수, N_B 는 그룹 B의 데이터 수,

y_i^{AB} 는 모델 B로부터 추론되는 그룹 A의 i 번째 출력,

y_i^{AA} 는 모델 A로부터 추론되는 그룹 A의 i 번째 출력.

UC 값은 인식 데이터를 두 그룹으로 나누는 방법에 따라 변화할 수

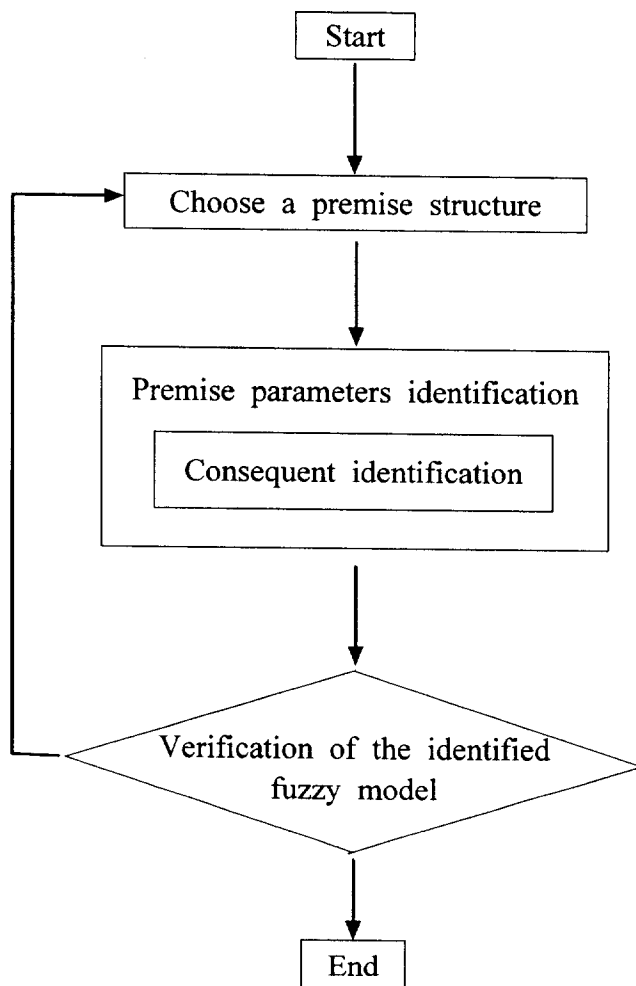


Figure 2. The identification of TSK fuzzy model

있으며 인식 데이터의 수가 적을 경우에는 UC로 모델을 검증하는 것은 어렵다. 반면에 RC는 인식 데이터를 나눌 필요가 없으며 다음과 같이 구한다.

$$RC = \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

여기서, N 은 인식 데이터 수이고, y_i 는 i 번째 출력, $\hat{y}_i$ 는 i 번째 데이터를 제외한 인식 데이터로 인식된 모델로부터 추론된 i 번째 출력이다.

RC는 N 모델이 인식되어야 하므로 계산에 많은 시간이 소요되지만 UC보다 더 합리적이다.

결론부 인식은 결론부의 선형 방정식을 인식하는 것이며, 식 (4)에 의해 추론된 출력 y 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^r w^i(z) (a_0^i + \dots + a_n^i x_n) / \sum_{i=1}^r w^i(z) \\ &= a_0^1 g_0^1 + a_1^1 g_1^1 + a_2^1 g_2^1 + \dots + a_n^1 g_n^1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_0^r g_0^r + a_1^r g_1^r + a_2^r g_2^r + \dots + a_n^r g_n^r \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

$$g_j^k = \frac{w^k(z) x_j}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} \quad (x_0 = 1) \quad (9)$$

따라서 선형 시스템의 인식을 위한 방법들이 결론부 변수의 선정이나 파라미터 ($a_0^1, a_1^1, \dots, a_n^r$)의 인식을 위해 사용될 수 있으며, 또 그 파라미터들은 반복적으로 인식되어질 수 있다.

전제부 인식은 입력 공간을 퍼지 부분공간으로 분할하는 것으로 각각의 퍼지 부분공간은 전제부에 표현된다. 전제부 구조를 선정한다는 것은 입력 공간을 퍼지 부분공간으로 분할하는 방법과 규칙의 수를 결정하는 것이다. 즉 퍼지 부분공간의 수가 바로 규칙의 수이며 발견적 방법 (heuristic)에 의해 정해진다.

모델 인식을 위한 초기에 하나의 선형 모델이 인식되고, 모델 검정의 표준(UC 또는 RC) 값이 감소하지 않을 때까지 규칙의 수는 증가된다.

전제부 파라미터는 전제부의 퍼지집합을 결정하는 요소로 그림 3의 $p_1 \sim p_8$ 이다. 그림 3에 보이는 3개의 부분 선형 함수들은, 간단하면서도 파라미터의 변경으로 쉽게 조절이 가능한 다음과 같은 퍼지집합의 멤버쉽 함수를 사용하여 표현된다.

$$F_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{|x - p_1| - |x - p_2|}{2(p_1 - p_2)} \quad (10a)$$

$$F_2(x) = \frac{|x - p_3| - |x - p_4|}{2(p_4 - p_3)} + \frac{|x - p_5| - |x - p_6|}{2(p_5 - p_6)} \quad (10b)$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{|x - p_7| - |x - p_8|}{2(p_8 - p_7)} \quad (10c)$$

따라서 전제부 파라미터 인식이란 그림 3에서 퍼지집합 파라미터인 $p_1 \sim p_8$ 을 인식하는 것으로, 이를 위해 다음 비용 함수(cost function)가 사용된다.

$$cost = \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 / N \right)^{1/2} \quad (11)$$

여기서, N 은 인식 데이터 수이고, y_i 는 인식 데이터의 i 번째 출력값이며, $\hat{y}_i$ 는 퍼지모델로부터 추론된 출력이다.

식 (11)의 비용 함수(cost function)는 퍼지집합 파라미터들의 매우 복잡한 비선형 함수이며 파라미터 공간에 국부적 최소점들을 많이 가지고 있다. 그러므로 이의 인식을 위하여 비선형 계획법(heuristic nonlinear programming methods)인 GA(genetics algorithm) 또는 complex method를 사용한다. 이 두 방법은 먼저 파라미터들의 공간에서 불규칙하게 초기 점들을 선정하여, 어떤 보조적 지식도 없이 미분 불가능한 비용 함수(cost function) 값만을 사용하여 최적 점들을 찾는다. 이 GA(genetic algorithm)은 자연 유전학적 메카니즘에 근거한 최적알고리즘 또는 확률적 탐색법이다. 또한 최적 알고리즘인 complex method의 주된 개념은 모든 점들이 최적 점에 수렴할 때까지 남아있는 점들의 중심 방향으로 최악 값을 가지는 점을 이동시키는 것이다. 그림 4는 두 파라미터 p_1 과 p_2 의 최적 점을 찾는 complex method를 설명한 것이다.

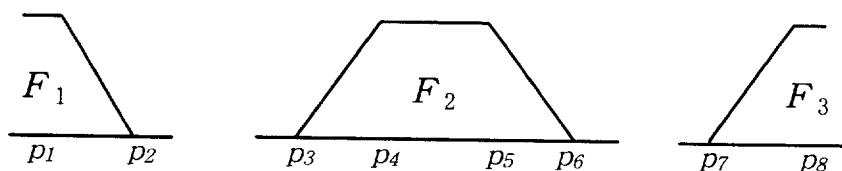


Figure 3. Membership functions of fuzzy sets in TSK fuzzy model.

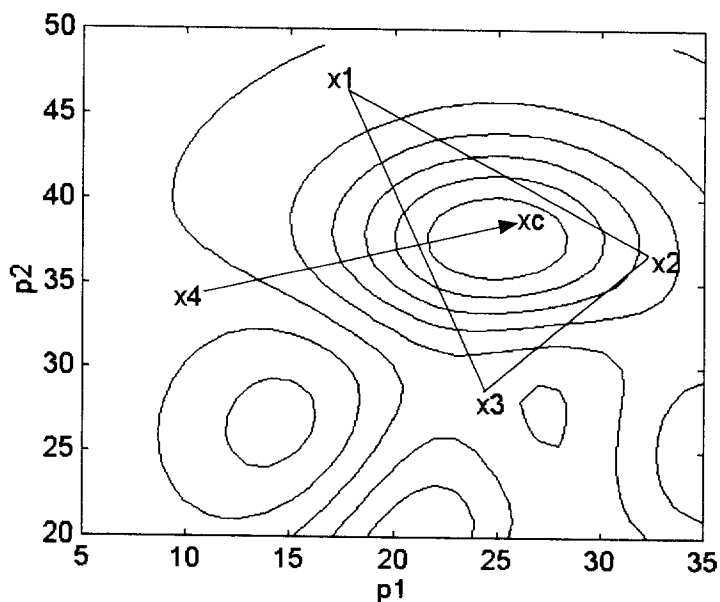


Figure 4. The complex method (x_4 having the least cost is moved in the direction of x_c which is the center of the remaining x_1 , x_2 , and x_3 .)

Example 1 : $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에서 $\sin \theta$ 의 TSK 퍼지모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M^1: & \text{ if } \theta \text{ is } F_1 \text{ then } \sin \theta^1 = -2.915 - 0.928\theta \\
 M^2: & \text{ if } \theta \text{ is } F_2 \text{ then } \sin \theta^2 = 0.292\theta \\
 M^3: & \text{ if } \theta \text{ is } F_3 \text{ then } \sin \theta^3 = 2.915 - 0.928\theta
 \end{aligned} \tag{12}$$

그림 5는 퍼지집합 F_1, F_2, F_3 , 그림 6은 $\sin \theta$ 와 식 (12)의 퍼지 모델 출력을 비교한 것이며, RC, UC 및 규칙의 수에 따라 최적인 퍼지 모델들에 대한 비용 값(cost value)은 표 2에 나타내었다. 표 2에서 규칙의 수(number of implications)가 증가할수록 비용 값(cost value)는 감소하는 것을 알 수 있다. 반면에 RC와 UC는 규칙의 수 3까지는 감소하지만 그 이후는 증가한다. 그러므로 규칙의 최적 수는 3으로 정해진다. 이 때 인식에 사용된 입출력 데이터수는 126개이다.

Table 2. The RC, UC, and the cost of the best fuzzy model versus the number of implications

the numble of implications	cost value	RC	UC
1	0.444	9.992	0.085
2	0.073	1.643	0.023
3	0.013	0.294	0.003
4	0.011	2.886	0.011

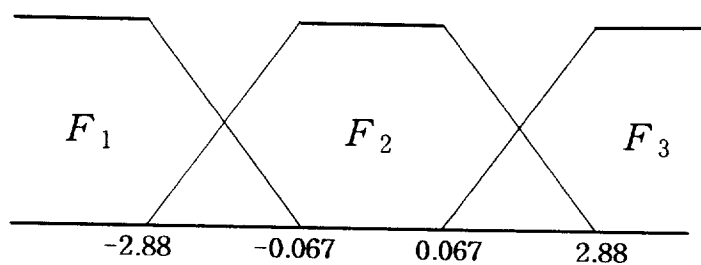


Figure 5. The fuzzy sets in the fuzzy model (*Example 1*)

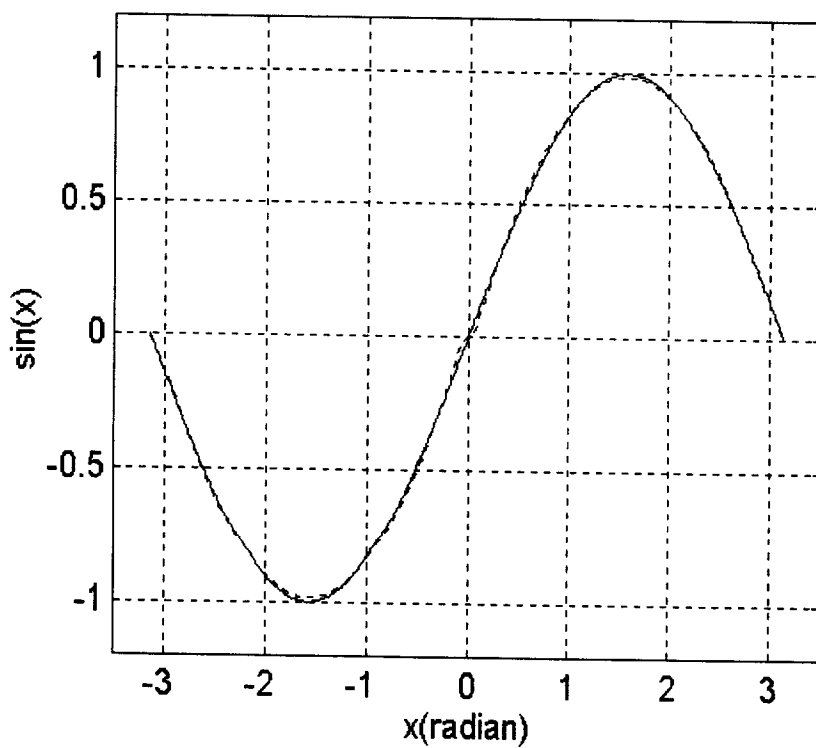


Figure 6. $\sin \theta$ and output of the fuzzy model(*Example 1*)

Example 2 : 대상 시스템은 신경회로망(neural networks)을 이용한 시스템의 인식에 사용된 것으로 다음과 같다[83].

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1)+u(k)}{(1+y(k-2)^2+y(k-1)^2)} \quad (13)$$

구간 $[-1, 1]$ 에 랜덤하게 분포된 $u(k)$ 를 시스템 (13)에 입력하여 구한 800개의 입출력 데이터를 이용하여 퍼지모델을 인식하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_1 \text{ and } y(k-2) \text{ is } B_1 \\ & \text{ then } y(k+1)^1 = 0.008 + 0.974y(k) + 0.333y(k-1) \\ & \quad - 0.279y(k-2) + 0.494u(k) - 0.468u(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^2: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_1 \text{ and } y(k-2) \text{ is } B_2 \\ & \text{ then } y(k+1)^2 = 0.021 - 0.030y(k) + 0.058y(k-1) \\ & \quad + 0.127y(k-2) + 0.419u(k) + 0.029u(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^3: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k-2) \text{ is } C_1 \\ & \text{ then } y(k+1)^3 = 0.004 - 0.173y(k) + 0.211y(k-1) \\ & \quad + 0.009y(k-2) + 0.619u(k) + 0.111u(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^4: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k-2) \text{ is } C_2 \\ & \text{ then } y(k+1)^4 = 0.002 - 0.012y(k) + 0.005y(k-1) \\ & \quad + 0.007y(k-2) + 0.977u(k) + 0.007u(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^5: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_2 \text{ and } y(k-2) \text{ is } C_3 \\ & \text{ then } y(k+1)^5 = 0.003 - 0.099y(k) + 0.011y(k-1) \\ & \quad - 0.020y(k-2) + 0.587u(k) + 0.058u(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^6: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_3 \text{ and } y(k-2) \text{ is } D_1 \\ & \text{ then } y(k+1)^6 = -0.003 - 0.062y(k) + 0.010y(k-1) \\ & \quad - 0.192y(k-2) + 0.380u(k) + 0.079u(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^7: & \text{ if } y(k-1) \text{ is } A_3 \text{ and } y(k-2) \text{ is } D_2 \\
& \text{ then } y(k+1)^7 = -0.112 + 0.131y(k) - 0.001y(k-1) \\
& \quad + 0.144y(k-2) + 0.382u(k) - 0.138u(k-1) \\
& \quad \text{-----}(14)
\end{aligned}$$

그림 7에 전제부의 퍼지집합을 나타내었다. 그림 8은
입력 $k \leq 500$ 에서는 $u(k) = \sin(2\pi k/250)$,
입력 $k > 500$ 에서는 $u(k) = 0.8\sin(2\pi k/250) + 0.2\sin(2\pi k/25)$ 으로 하였을 때의 퍼지모델의 출력과 시스템의 출력을 나타낸 것으로, 문헌[83]에서 보여준 신경 회로망(neural networks) 모델의 출력보다 훨씬 바람직한 결과를 보이고 있다. 식 (14)의 퍼지모델은 전제부 12개와 결론부 42개의 총 54개의 파라미터를 갖고 있지만 문헌[83]의 신경 회로망 모델은 인식되어야 할 2개의 hidden layers와 341개의 weight들을 가지고 있다.

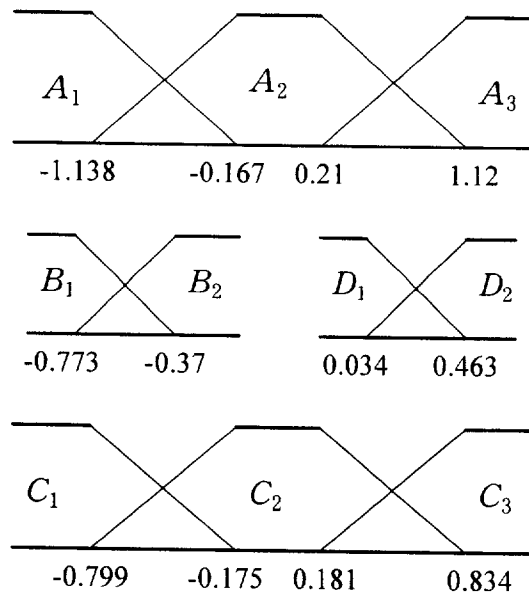


Figure 7. The fuzzy sets in the fuzzy model (*Example 2*)

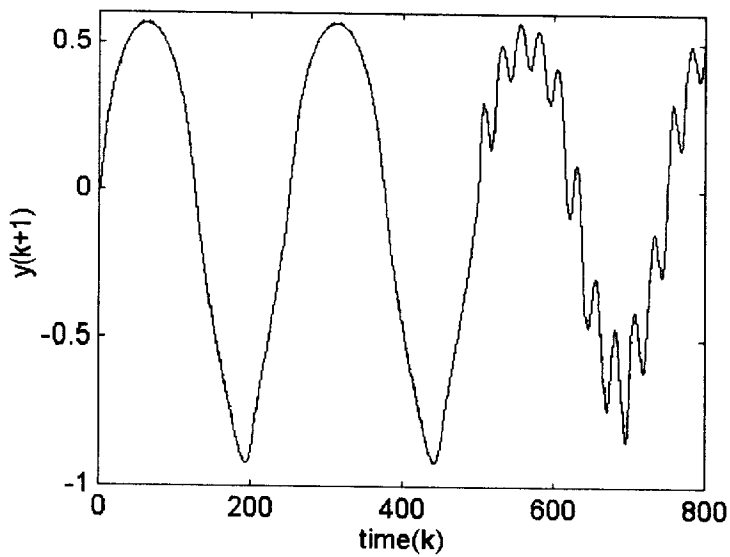


Figure 8. Output of the plant and the fuzzy model (*Example 2*)

2.2.2 TSK 퍼지 상태변수 모델

이 절에서는 시스템의 입출력 데이터로부터 인식된 TSK 퍼지 입출력 모델을 TSK 퍼지 상태변수 모델로 변환하는 방법과 강제되지 않은 TSK 퍼지 상태변수 모델의 평형점에 대한 안정성을 검증하는 방법을 설명한다.

일반적으로 TSK 퍼지 입출력 모델은 결론부의 선형식에 상수항이 있으므로 TSK 퍼지 상태변수 모델의 상태방정식도 상수항을 갖게 된다.

그리고 TSK 퍼지 상태변수 모델은 비선형 모델로 다수의 평형점을 가질 수 있다. 평형점이란 상태공간에서 초기의 상태값을 유지하는 점을 말하며 그 안정성은 다음과 같이 정의된다.

“임의의 $\epsilon > 0$ 가 주어졌을 때, $|x(0) - x_e| < \delta$ 가 $t \geq 0$ 에서 $|x(t) - x_e| < \epsilon$ 를 내포하는 $\delta > 0$ 가 존재한다면 평형점 x_e 는 안정하다.” 또 평형점 x_e 가 안정하고, $t \rightarrow \infty$ 에 따라 모든 궤적이 x_e 가 수렴한다면 이 평형상태는 대역적 점근안정(globally asymptotically stable)하다고 한다.

TSK 퍼지모델의 평형점의 안정성은 그 평형점 주위를 선형화 함으로써 결정되어진다. 추론 출력 식 (4)로부터 전제부 퍼지집합의 멤버십 값이 정해지면, TSK 퍼지모델은 연속적이고 미분 가능함을 알 수 있다. 만일 TSK 퍼지모델이 smooth하다면, 평형점 부근을 선형화 할 수 있고 부근의 궤적과 평형점의 안정성은 결정될 수 있다. 이 절에서 전제부 변수 z_i 는 상태변수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 의 연속함수라고 가정한다.

$$z_i = z_i(x) \quad (15)$$

[1] 연속 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델

(1) 연속 시스템의 상태변수 모델 표현

연속 시스템의 일반적인 TSK 퍼지 입출력 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, \quad z_2(t) \text{ is } F_2^i, \quad \dots, \quad z_l(t) \text{ is } F_l^i$$

$$\text{ then } \frac{d^n y(t)}{dt^n} = a_0^i + a_1^i y(t) + a_2^i \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n^i \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + b_1^i u(t) \quad (16)$$

여기서, $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $\dots$, $x_n(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$ 라고 하면, 식 (16)의 상태변수 표현은 다음과 같다.

$$M^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, \quad z_2(t) \text{ is } F_2^i, \quad \dots, \quad z_l(t) \text{ is } F_l^i$$

$$\text{ then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + b^i u(t) + d^i$$

$$y(t) = c x(t) \quad (17)$$

여기서,

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ a_1^i & a_2^i & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^i \end{pmatrix}, \quad b^i = (0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad b_1^i)^T$$

$$d^i = (0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad a_0^i)^T, \quad c = (1 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0)$$

식 (17) 형태의 퍼지규칙을 지금부터 TSK fuzzy canonical form이라고 한다. 식 (16)의 퍼지모델과 식 (17)의 퍼지모델이 서로 동일함은 쉽게 확인할 수 있다.

(2) 연속 시스템 상태변수 모델 평형점의 안정성

1) 평형점(equilibrium points)

강제되지 않은 연속 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_m(t) \text{ is } F_m^i \\ & \text{ then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + c^i \end{aligned} \quad (18)$$

추론된 출력 $\frac{dx(t)}{dt}$ 는 다음과 같다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x(t)) (A^i x(t) + c^i)}{\sum_{i=1}^r w^i(x(t))} \quad (19)$$

여기서,

$$w^i(x(t)) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j(x(t))) \quad (20)$$

평형점은 $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ 일 때 구할 수 있으므로, x_e 가 다음 평형조건을 만족하면 x_e 는 평형점이다.

$$\sum_{i=1}^r w^i(x_e)(A^i x_e + c^i) = 0 \quad (21)$$

2) 평형점의 안정성

평형점의 안정성은 평형점 부근을 선형화한 모델의 Jacobian matrix에 의해 결정된다. 퍼지모델 (18)은 테일러 급수와 평형조건인 식 (21)을 사용하여 평형점 x_e 부근에서 선형화 될 수 있다. 또 퍼지모델의 출력 (19)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (22)$$

여기서, $f(x(t)) = \sum_{i=1}^r w^i(x(t))(A^i x(t) + c^i) / \sum_{i=1}^r w^i(x(t))$.

$\tilde{x}(t) = x(t) - x_e$ 라 할 때, $\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$ 그리고 식 (22)는 Jacobian matrix, $\left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x_e}$ 을 사용하여 평형점 x_e 에서 다음과 같이 선형화된다.

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^r q^i(\tilde{x}(t) + x_e)(A^i(\tilde{x}(t) + x_e) + c^i) \\ &\simeq \sum_{i=1}^r \left(q^i(x_e) + \left. \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x_e} \tilde{x}(t) \right) (A^i(\tilde{x}(t) + x_e) + c^i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \sum_{i=1}^r ((A^i x_e + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} + q^i(x_e) A^i) \tilde{x}(t) \\
&= \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} \tilde{x}(t)
\end{aligned}$$

(식 (21)의 평형조건에서 $\sum_{i=1}^r q^i(x_e)(A^i x_e + c^i) = 0$)

따라서,

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} \tilde{x}(t) \quad (23)$$

Jacobian matrix는

$$\frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} = \sum_{i=1}^r ((A^i x_e + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_e} + q^i(x_e) A^i) \quad (24)$$

여기서, $q^i(x(t)) = \frac{w^i(x(t))}{\sum_{k=1}^r w^k(x(t))}$, $\sum_{i=1}^r q^i(x(t)) = 1$,

$$\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} = \left(\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x_1(t)} \quad \dots \quad \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x_n(t)} \right).$$

따라서 평형점 x_e 의 안정성에 관한 것은 Jacobian matrix의 고유값에 의해 반드시 결정되고 구분되어질 수 있다. Jacobian matrix (24)로부터 평형점의 안정성은 가중치 $w^i(x(t))$ 와 관련이 있음을 알 수 있다.

Example 3 : pendulum의 동적 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta}^2 = -f\dot{\theta} - \frac{m \cdot g}{l} \sin \theta \quad (25)$$

여기서, $\frac{m \cdot g}{l} = 1$, $f = 1$ 이라 하고, Example 1에서 보여준 $\sin \theta$ 의 퍼지모델을 이용하여 pendulum의 퍼지모델을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{ if } \theta \text{ is } F_1 \text{ then } \ddot{\theta}^1 = -\dot{\theta} + 0.928\theta + 2.915 \\ M^2: & \text{ if } \theta \text{ is } F_2 \text{ then } \ddot{\theta}^2 = -\dot{\theta} - 0.292\theta \\ M^3: & \text{ if } \theta \text{ is } F_3 \text{ then } \ddot{\theta}^3 = -\dot{\theta} + 0.928\theta - 2.915 \end{aligned} \quad (26)$$

위 모델은 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에서 유용하며, 이 상태변수 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F_1 \\ & \text{ then } \frac{dx^1(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2.915 \end{pmatrix} \\ M^2: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F_2 \\ & \text{ then } \frac{dx^2(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{pmatrix} x(t) \\ M^3: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F_3 \\ & \text{ then } \frac{dx^3(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.915 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $x_1(t) = \theta$, $x_2(t) = \dot{\theta}$, 전체 퍼지집합의 멤버쉽 함수는

$$F_1(x_1) = 0.5 \left(\frac{1 - (|x_1 - 2.9| - |x_1 + 0.07|)}{2.9 - 0.07} \right)$$

$$F_2(x_1) = 0.5 \left(\frac{|x_1 + 2.9| - |x_1 + 0.07| - |x_1 - 0.07| + |x_1 - 2.9|}{2.9 - 0.07} \right) \quad (28)$$

$$F_3(x_1) = 0.5 \left(\frac{1 + (|x_1 - 0.07| - |x_1 - 2.9|)}{2.9 - 0.07} \right)$$

그리고 $F_i(x_1) = w^i(x) = q^i(x)$, $i = 1, 2, 3$. 식 (21)의 평형점 조건으로부터 퍼지모델 (27)은 $(0 \ 0)^T$, $(-\frac{2.915}{0.928} \ 0)^T$, $(\frac{2.915}{0.928} \ 0)^T$ 3개의 평형점을 가진다는 것을 알 수 있으며, 이 평형점들은 원래 시스템의 평형점 $(0 \ 0)^T$, $(-\pi \ 0)^T$, $(\pi \ 0)^T$ 와 거의 동일하다. 이러한 퍼지모델의 평형점의 안정성 여부를 살펴보면 다음과 같다.

① $x_{e1} = (0 \ 0)^T$ 의 경우

Jacobian matrix는

$$\sum_{i=1}^3 \left((A^i x_{e1} + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_{e1}} + q^i(x_{e1}) A^i \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{pmatrix}$$

여기서, $q^1(x_{e1}) = q^3(x_{e1}) = 0$, $q^2(x_{e1}) = 1$,

모든 i 에 대해 $\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_{e1}} = (0 \ 0)$, 그리고 고유값은 $-0.5 \pm j0.205$.

따라서 평형점 x_{e1} 는 안정하다.

② $x_{\ell} = (-\frac{2.915}{0.928} \ 0)^T$ 의 경우

Jacobian matrix 는

$$\sum_{i=1}^3 ((A^i x_{\ell} + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_{\ell}} + q^i(x_{\ell}) A^i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix}$$

여기서, $q^1(x_{\ell}) = 1$, $q^2(x_{\ell}) = q^3(x_{\ell}) = 0$,

모든 i 에 대해 $\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_{\ell}} = (0 \ 0)$, 그리고 고유값은 0.585, -1.585.

따라서 x_{ℓ} 는 saddle point이다.

③ $x_{\ell} = (\frac{2.915}{0.928} \ 0)^T$ 의 경우

Jacobian matrix는

$$\sum_{i=1}^3 ((A^i x_{\ell} + c^i) \frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_{\ell}} + q^i(x_{\ell}) A^i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix}$$

여기서, $q^1(x_{\ell}) = q^2(x_{\ell}) = 0$, $q^3(x_{\ell}) = 1$,

모든 i 에 대해 $\frac{\partial q^i(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{x_{\ell}} = (0 \ 0)$, 그리고 고유값은 0.585, -1.585.

따라서 x_{ℓ} 도 saddle point이다.

[2] 이산 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델

(1) 이산 시스템의 상태변수 모델 표현

이산 시스템의 일반적인 TSK 퍼지 입출력 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} M^i: \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i \text{ then} \\ y^i(k+1) = a_0^i + a_1^i y(k) + a_2^i y(k-1) + \dots + a_n^i y(k-n+1) \quad (29) \\ + b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) + \dots + b_m^i u(k-m+1) \end{aligned}$$

여기서, $x_1(k) = y(k)$, $x_2(k) = y(k-1)$, $\dots$, $x_n(k) = y(k-n+1)$,

$$d_1^i(k) = a_0^i + b_2^i u(k-1) + \dots + b_m^i u(k-m+1) \text{라 하자.}$$

그러면 식 (29)의 퍼지규칙은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} M^i: \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i \\ \text{then } x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \quad (30) \\ y(k+1) = cx(k+1) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} A^i = \begin{pmatrix} a_1^i & a_2^i & \cdot & \cdot & \cdot & a_n^i \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^i = (b_1^i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \\ d^i(k) = (d_1^i(k) \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 0)^T, \quad c = (1 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 0) \end{aligned}$$

식 (29)와 (30)의 퍼지모델이 동일함을 쉽게 알 수 있으며, 식 (30) 형태의 퍼지 규칙도 TSK fuzzy canonical form라고 부른다.

Remark : 식 (17) 또는 식 (30)의 TSK fuzzy canonical form 형태로 표현한 TSK 퍼지 상태변수 모델은 모든 i 에 대해 $b_1^i \neq 0$ 일 경우 가 제어(controllable)임을 알 수 있다.

(2) 이산 시스템의 상태변수 모델 평형점의 안정성

이산 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델의 안정성을 검증하는 방법은 연속 시스템의 경우와 동일하다.

1) 평형점(equilibrium points)

이산 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^i: \quad & \text{if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_m(k) \text{ is } F_m^i \\ & \text{then } x(k+1)^i = A^i x(k) + c^i \end{aligned} \quad (31)$$

출력 $x(k+1)$ 는 다음과 같이 구한다.

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x(k)) (A^i x(k) + c^i)}{\sum_{i=1}^r w^i(x(k))} \quad (32)$$

여기서,

$$w^i(x(k)) = \prod_{j=1}^m F_j^i(z_j(x(k))) \quad (33)$$

평형점들은 $x(k+1)=x(k)$ 일 때 구할 수 있으므로, x_e 가 다음의 평형 조건을 만족한다면 x_e 는 평형점이다.

$$x_e = \sum_{i=1}^r w^i(x_e)(A^i x_e + c^i) / \sum_{i=1}^r w^i(x_e) \quad (34)$$

2) 평형점의 안정성

이산 시스템 퍼지모델의 평형점의 안정성은 연속 시스템 퍼지모델의 경우와 같이 Jacobian matrix에 의해 결정된다.

$\tilde{x}(k) = x(k) - x_e$ 라 하면 식 (32)로부터,

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r q^i(\tilde{x}(k) + x_e)(A^i(\tilde{x}(k) + x_e) + c^i) - x_e \quad (35)$$

그리고 식 (35)는 Jacobian matrix를 사용하여 평형점 x_e 에서 다음과 같이 선형화 된다.

$$\tilde{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r \left((A^i x_e + c^i) - \frac{\partial q^i(x)}{\partial x} \Big|_{x_e} + q^i(x_e) A^i \right) \tilde{x}(k) \quad (36)$$

따라서 이산 시스템 TSK 퍼지모델의 평형점 x_e 안정성 여부는 식 (24)의 Jacobian matrix의 고유값에 의해 결정된다.

2.3 TSK 퍼지제어기

이 절에서는 TSK 퍼지모델로부터 폐루프 시스템의 안정성을 보장하는 퍼지제어기와 그 설계방법을 설명한다. 이 퍼지제어기를 TSK 퍼지제어기라 부른다. TSK 퍼지모델은 TSK 퍼지규칙들로 구성되며, 각각의 퍼지규칙(선형 시스템)의 출력에 적합도 q^i 를 곱한 여러 선형 시스템의 합으로 한 비선형 시스템을 다음과 같이 표현한다.

$$y = \sum_{i=1}^r q^i \times \text{output from (linear system)}^i$$

여기서, r 은 규칙의 수.

앞 절에서 강제되지 않은 TSK 퍼지모델(unforced TSK fuzzy model)의 평형점의 안정성은 적합도 q^i 에 의해 결정된다는 것을 알았다. 따라서 TSK 퍼지 제어기로부터 제어 입력을 다음과 같이 구할 경우 폐루프 시스템의 거동을 원하는 데로 만들 수 있음을 기대할 수 있을 것이다.

$$u = \sum_{i=1}^r q'^i \times \text{output from (linear controller)}^i$$

여기서 $(\text{linear controller})^i$ 는 $(\text{linear system})^i$ 로부터 설계된 제어기이며 q'^i 는 q^i 를 변형한 것이다. 그러므로 TSK 퍼지제어기는 TSK 퍼지모델과 같은 수의 TSK 퍼지규칙들로 구성되게 하고 그 전제부를 TSK 퍼지모델의 전제부와 동일하게 한다.

이 절에서는 그림 9에 보이는 것과 같이 페루프 시스템의 거동이 원하는 안정된 선형 시스템과 동일하게 하도록 TSK 퍼지제어기 결론부의 선형 제어를 설계하는 방법과 규칙의 변형된 적합도 q'^i 의 형태를 구하고자 한다. 이 절에서 다루는 시스템은 1입력 1출력(SISO : single-input single-output) 시스템이지만 이 절에서 제안된 방법은 다변수(MIMO : multi-input multi-output) 시스템에도 적용할 수 있다.

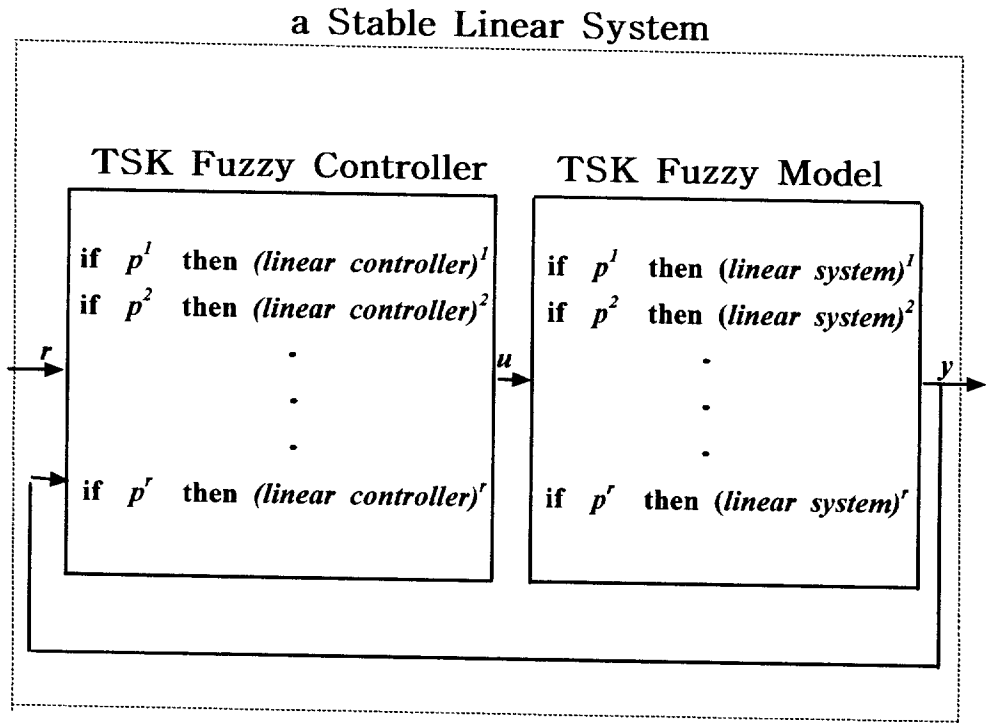


Figure 9. The TSK fuzzy control system

2.3.1 TSK 퍼지 입출력 모델로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기

일반적인 TSK 퍼지 입출력 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1 \text{ is } F_1^i, z_2 \text{ is } F_2^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i \\ & \text{ then } y^i = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u \end{aligned} \quad (37)$$

단, u 는 제어입력 변수이며, 모든 i 에 대하여 $z_i \neq u$ 라고 가정한다.

식 (37)의 퍼지모델로부터의 출력 y 는

$$y = \sum_{i=1}^r w^i(z) (a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u) / \sum_{i=1}^r w^i(z) \quad (38)$$

원하는 출력을 y_d 라 하자. TSK 퍼지제어기는 TSK 퍼지모델의 각 규칙들로부터 설계되며, TSK 퍼지모델의 i 번째 규칙에 해당하는 TSK 퍼지제어기의 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^i: & \text{ if } z_1 \text{ is } F_1^i, z_2 \text{ is } F_2^i, \dots, z_m \text{ is } F_m^i \\ & \text{ then } u^i = (y_d - a_0^i - a_1^i x_1 - \dots - a_n^i x_n) / b^i \end{aligned} \quad (39)$$

여기서, 규칙 C^i 의 전제부는 규칙 M^i 의 전제부와 동일하다.

식 (39)의 퍼지제어기로부터 제어입력 u 를 퍼지모델과 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$u = \sum_{i=1}^r \left(\frac{w^i(z)}{\sum_{k=1}^r w^k(z)} \right) u^i \quad (40)$$

위 식 (40)으로 구한 제어입력을 사용하여 식 (38)로부터 퍼지모델의 출력을 구하면 다음과 같으나, 그 출력은 원하는 출력 y_d 가 되지 않는다.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z)(a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n)}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} + \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z)b^i}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} \frac{\sum_{j=1}^r w^j(z)u^j}{\sum_{k=1}^r w^k(z)} \quad (41)$$

$\neq y_d$

그러나 문헌[55]에서 제안한 다음 식 (42)로 제어입력 u 를 구하면, 퍼지모델의 출력은 식 (43)과 같이 원하는 출력 y_d 가 된다.

$$u = \sum_{i=1}^r \left(\frac{w^i(z)b^i}{\sum_{k=1}^r w^k(z)b^k} \right) u^i \quad (42)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z)(a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n + b^i u)}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z)(a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n) + \sum_{i=1}^r w^i(z)b^i u}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} \quad (43) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z)(a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n) + \sum_{i=1}^r w^i(z)b^i u^i}{\sum_{i=1}^r w^i(z)} \\ &= y_d \end{aligned}$$

식 (42)를 consistency condition이라 부르며 TSK 퍼지제어기로부터 제어입력을 추론하는 방법으로 사용한다.

Example 4 : Example 2 에서 사용된 식 (13)의 시스템에 대한 퍼지제어기를 설계하였다.

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1) + u(k)}{(1+y(k-2))^2 + y(k-1)^2} \quad (13)$$

시스템의 퍼지 모델인 식 (14)의 i 번째 규칙은 다음과 같이 표현할 수 있다.

M^i : if ... then

$$y^i(k+1) = a_0^i + a_1^i y(k) + a_2^i y(k-1) + a_3^i y(k-2) + b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) \quad (44)$$

그러면 (44)의 규칙으로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

C^i : if ... then (45)

$$u^i(k) = \frac{(y_d - a_0^i - a_1^i y(k) - a_2^i y(k-1) - a_3^i y(k-2) - b_2^i u(k-1))}{b_1^i}$$

여기서, y_d 는 원하는 출력, 규칙 C^i 의 전제부는 M^i 의 전제부와 동일하다.

그림 10은 식 (45)의 퍼지규칙들로 구성된 퍼지제어기로부터 구해진 제어입력과 그 제어입력을 사용하였을 때의 시스템 (13)의 응답과 원하는 출력을 나타낸 것이다. 그림 10에서 원하는 출력 y_d 는 $k \leq 300$ 에서 $0.7 \sin(2\pi k/200)$ 이며 $k > 300$ 에서는 구형파이다.

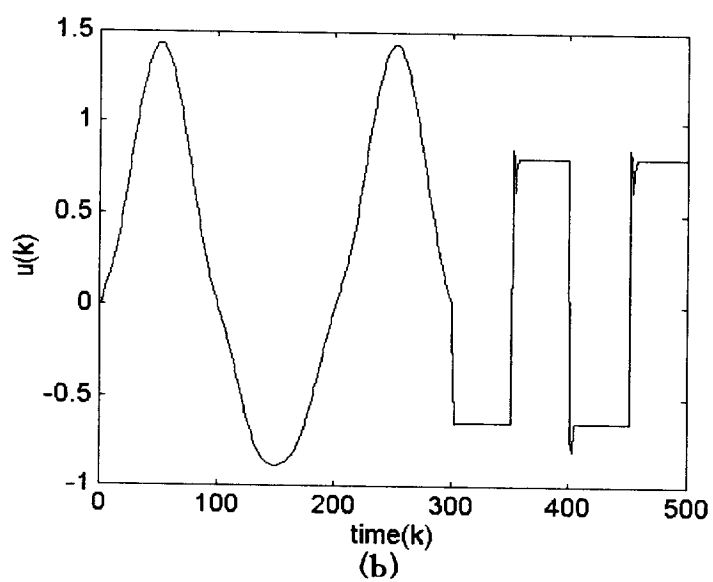
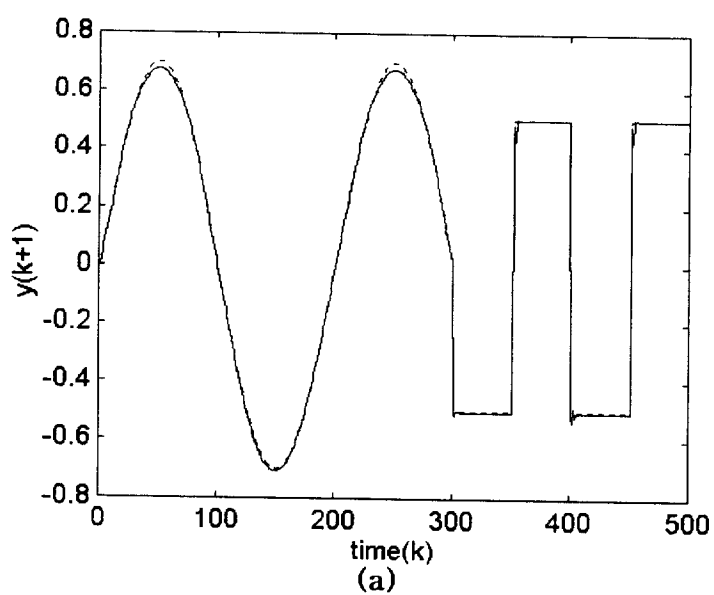


Figure 10. Example 4 :

- (a) solid line : response of the plant
- dashed line : the desired output
- (b) control input $u(k)$

2.3.2 TSK 퍼지 상태변수 모델로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기

선형 제어시스템을 위해 개발된 극 배치법(pole placement method)을 이용하여 TSK 퍼지 상태변수 모델로부터 TSK 퍼지제어기를 설계하는 방법을 설명한다[69,83]. 제어목표는 $x=0$ 이며 제어입력은 consistency condition을 이용하여 구한다. 그림 11에서와 같이 TSK 퍼지제어기는, 페루프 시스템이 원하는 극을 갖는 선형 시스템과 같은 응답을 나타내도록 설계한다.

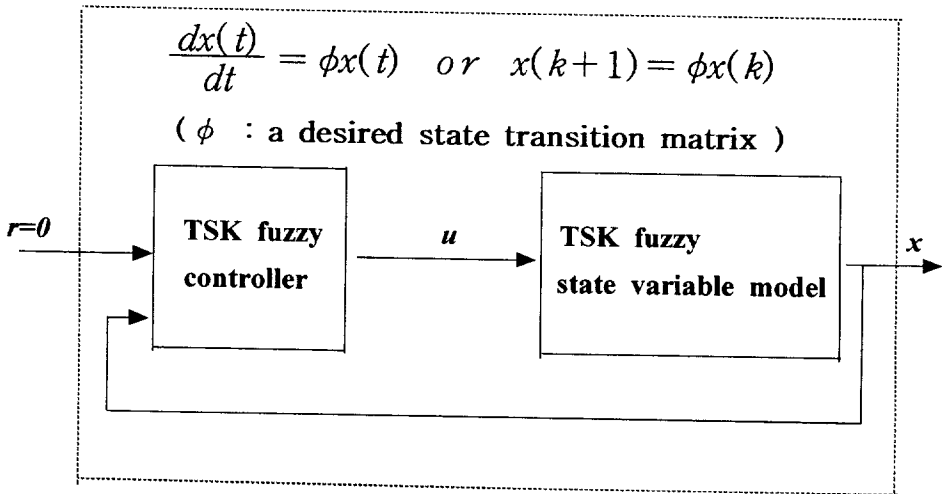


Figure 11. TSK fuzzy controller based on a TSK fuzzy state variable model

[1] 연속 시스템의 TSK 퍼지제어기

연속 시스템의 TSK 퍼지 상태변수 모델의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i \\ & \text{ then } \frac{dx^i(t)}{dt} = A^i x(t) + b^i u(t) + d^i \\ & \quad y(t) = cx(t) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, 모든 i 에 대하여 $z_i(t) \neq u(t)$ 라 하자.

모델의 i 번째 규칙 M^i 에 대한 퍼지제어기의 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^i: & \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i \\ & \text{ then } u^i(t) = -g^i x(t) + g_0^i \end{aligned} \quad (46)$$

여기서, $g^i = (g_1^i \ g_2^i \ \dots \ g_n^i)$ 는 $(1 \times n)$ 벡터, g_0^i 는 스칼라 그리고

규칙 C^i 의 전제부는 규칙 M^i 의 전제부와 동일하다.

g^i 와 g_0^i 는 다음을 만족하도록 한다.

$$\Phi = A^i - b^i g^i \quad (47)$$

$$g_0^i = -\frac{a_0^i}{b_1^i} \quad (48)$$

제어입력 $u(t)$ 는 다음의 consistency condition에 의해 구해진다.

$$u(t) = \frac{\sum_i w^i(z) b_1^i u^i(t)}{\sum_i w^i(z) b_1^i} \quad (49)$$

다음 정리(theorem)는 TSK 퍼지제어기를 사용할 경우, 폐루프 시스템의 상태천이 행렬을 원하는 것으로 만들 수 있음을 보여준다.

Theorem : 식 (17)의 규칙들로 구성되는 퍼지모델을 식 (46)의 규칙들로 이루어지는 퍼지제어기를 사용할 경우, 폐루프 시스템의 거동은 상태천이 행렬이 원하는 행렬 Φ 인 선형시스템의 거동과 같게 할 수 있다.

Proof :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^r w^i(z) (A^i x(t) + b^i u(t) + d^i) / \sum_{i=1}^r w^i(z)$$

식 (49)로부터

$$= (\sum_{i=1}^r w^i(z) (A^i x(t) + d^i) + \sum_{i=1}^r w^i(z) b^i u^i(t)) / \sum_{i=1}^r w^i(z)$$

식 (46), (47), (48)로부터

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^r w^i(z) (A^i - b^i g^i) x(t) / \sum_{i=1}^r w^i(z) \\ &= \Phi x(k) \end{aligned}$$

Remark : 원하는 상태전이 행렬이 다음과 같다고 하자.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdot & \cdot & \phi_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

그러면 식 (47)을 만족하는 g^i 는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$g_j^i = (a_j^i - \phi_j) / b^i, \quad (j = 1, 2, \cdot \cdot \cdot, n).$$

Example 5 : 입력 $u(t)$ 인 제어대상 pendulum의 동적 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta}(t) = -\dot{\theta}(t) - \sin \theta(t) + u(t) \quad (50)$$

식 (27)로부터 (50)의 상태변수 모델을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^1 \text{ then} \\ & \frac{dx^1(k)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2.915 \end{pmatrix} \\ M^2: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^2 \text{ then} \\ & \frac{dx^2(k)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ M^3: & \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^3 \text{ then} \\ & \frac{dx^3(k)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.915 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

여기서, $x_1(t) = \theta$, $x_2(t) = \dot{\theta}$.

원하는 출력을 θ_d , 원하는 상태를 $x_d = (\theta_d \ 0)^T$ 라 하고, 상태 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_d$$

그러면 퍼지모델 (51)은 다음과 같이 표현된다.

M^1 : if $x_1(t)$ is F^1 then

$$\frac{d\tilde{x}^1(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2.915 + 0.928\theta_d \end{pmatrix}$$

M^2 : if $x_1(t)$ is F^2 then

$$\frac{d\tilde{x}^2(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.292 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.292\theta_d \end{pmatrix} \quad (52)$$

M^3 : if $x_1(t)$ is F^3 then

$$\frac{d\tilde{x}^3(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.928 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.915 + 0.928\theta_d \end{pmatrix}$$

퍼지모델 (51)과 (52)는 동일한 시스템을 쉽게 확인할 수 있다. 퍼지모델 (52)로부터 설계된 TSK 퍼지제어기는 다음과 같다.

C^1 : if $x_1(t)$ is F^1 then

$$u^1(t) = (\phi_1 - 0.928 \ \phi_2 + 1) \tilde{x}(t) - 2.915 - 0.928\theta_d$$

$$C^2: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^2 \text{ then} \quad (53)$$

$$u^2(t) = (\phi_1 + 0.292 \quad \phi_2 + 1) \tilde{x}(t) + 0.292 \theta_d$$

$$C^3: \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^3 \text{ then}$$

$$u^3(t) = (\phi_1 - 0.928 \quad \phi_2 + 1) \tilde{x}(t) + 2.915 - 0.928 \theta_d$$

여기서, $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix}$.

그림 12는 원하는 출력 y_d 가 구형파이고 원하는 극을 $p = -2$ 로 하였을 때, 식 (53)의 퍼지제어기로 제어된 시스템 (50)의 응답을 나타낸다. 그림 13은 원하는 극을 $p = -0.7, -1, -2, -4$ 와 같이 여러 값들로 바뀌가며 설계된 퍼지제어기로 제어된 시스템 (50)의 응답과 선형 시스템 $\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$ 의 응답을 비교하여 나타낸 것이다.

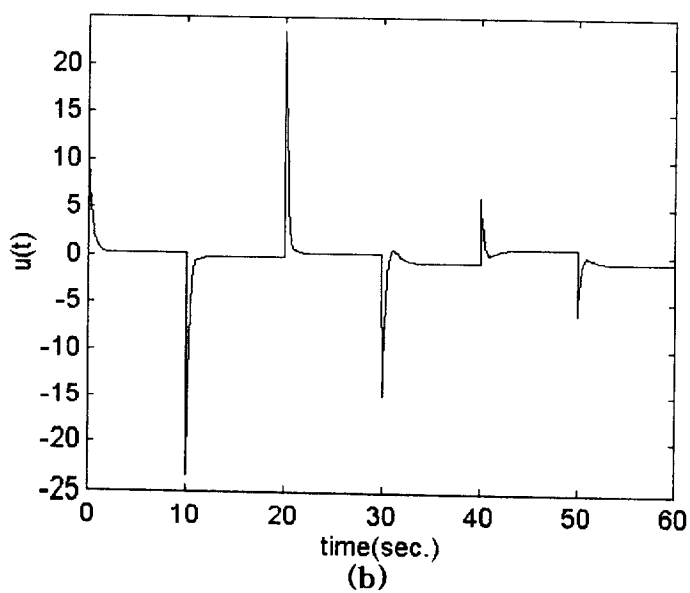
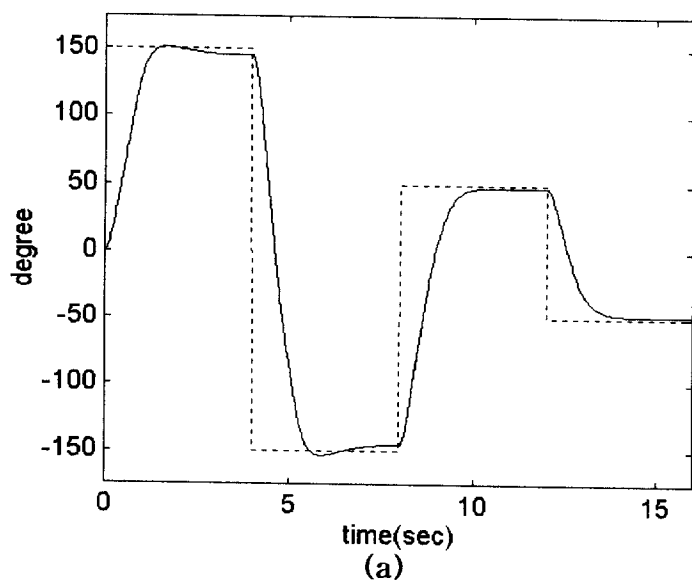


Figure 12. Example 5 : response in pole -2

- (a) solid line: response of the plant
- dashed line: the desired output
- (b) control input

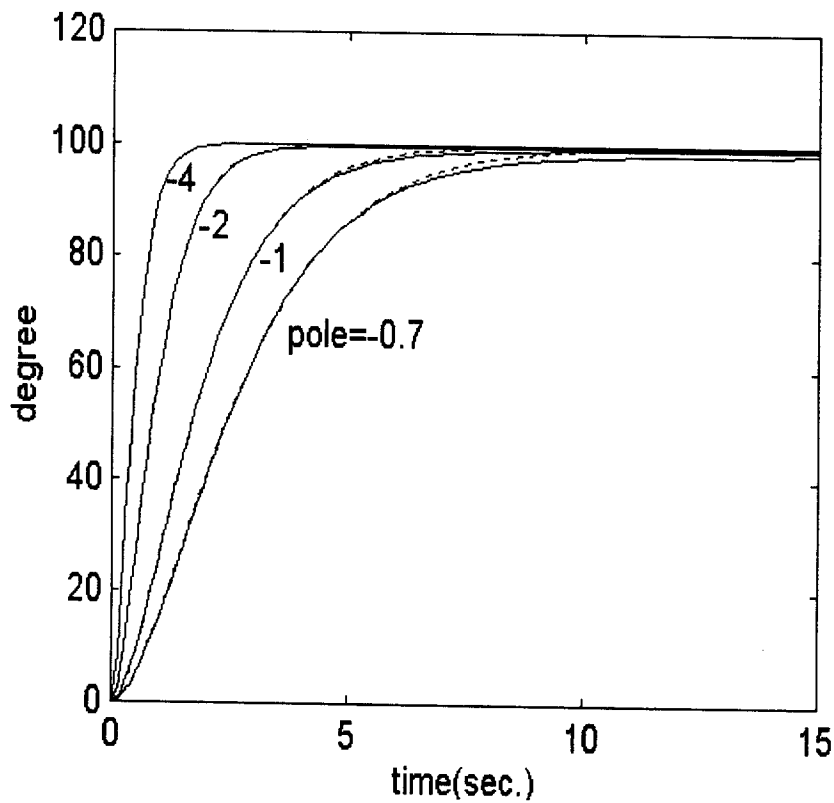


Figure 13. Example 5 : responses in poles $-0.7, -1, -2, -4$
solid line: responses of the plant
dashed line: responses of the linear
system $\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$

Example 6 : 문헌[72]에서 사용된 cart-pole의 동적 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \cos \theta \left(\frac{-u - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta}{m_c + m} \right)}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 \theta}{m_c + m} \right)} \quad (54)$$

여기서, $g=9.8\text{m/s}^2$, $m_c=1.0\text{ kg}$, $m=0.1\text{kg}$, $l=0.5\text{m}$ 라 하자.

퍼지제어기를 설계하기 위하여 먼저 시스템의 TSK 퍼지모델을 인식하였다. 인식에 사용된 데이터는 구간 $[-\pi, \pi]$, $[-40, 40]$, $[-100, 100]$ 에 각각 랜덤하게 분포된 θ , $\dot{\theta}$, u 를 사용하여 식 (54)로부터 구했으며 그 개수는 850개이다. 인식된 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^1 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^1 \text{ then } \ddot{\theta}^1(t) = -30.196 - 9.3\theta(t) + 2.065u(t) \\ M^2 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^2 \text{ then } \ddot{\theta}^2(t) = -16.303 + 0.4\theta(t) + 0.989u(t) \\ M^3 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^3 \text{ then } \ddot{\theta}^3(t) = -6.311 + 10.318\theta(t) - 0.985u(t) \\ M^4 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^4 \text{ then } \ddot{\theta}^4(t) = 19.112\theta(t) - 2.027u(t) \\ M^5 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^5 \text{ then } \ddot{\theta}^5(t) = 6.311 + 10.318\theta(t) - 0.985u(t) \\ M^6 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^6 \text{ then } \ddot{\theta}^6(t) = 16.303 + 0.4\theta(t) + 0.989u(t) \\ M^7 : & \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^7 \text{ then } \ddot{\theta}^7(t) = 30.196 - 9.3\theta(t) + 2.065u(t) \end{aligned} \quad (55)$$

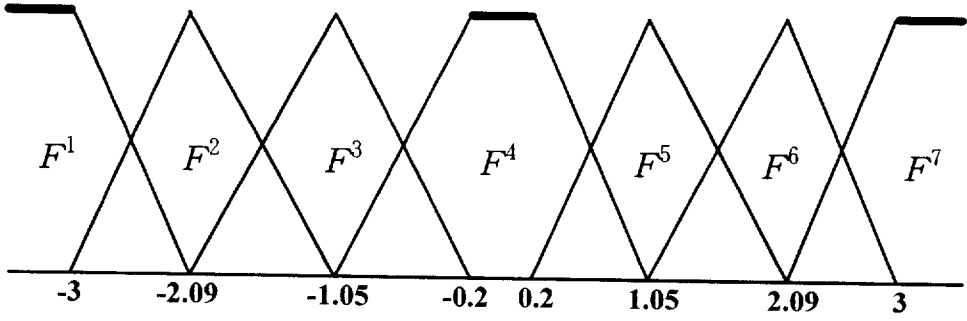


Figure 14. The fuzzy sets in the fuzzy model (Example 6)

그림 14는 퍼지모델 (55)의 전제부 퍼지집합을 나타낸다.

상태변수를 $x(t) = (\theta(t) \ \dot{\theta}(t))^T$, 원하는 상태변수 값을 $x_d = (\theta_d \ 0)^T$ 로, 상태오차를 $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d$ 로 가정하자. 그리고 퍼지모델 (55)의 i 번째 규칙을 다음과 같이 표현하자.

$$M^i : \text{ if } \theta(t) \text{ is } F^i \text{ then } \ddot{\theta}^i(t) = a_0^i + a_1^i \theta(t) + b^i u(t) \quad (56)$$

퍼지규칙 (56)을 상태변수 모델로 변환시키면 다음과 같은 형태가 된다.

$$M^i : \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^i \text{ then}$$

$$\frac{d\tilde{x}^i(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1^i & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b^i \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ a_0^i + a_1^i \theta_d \end{pmatrix} \quad (57)$$

퍼지모델 (57)로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기의 i 번째 규칙은 다음과

같다.

$$C^i : \text{ if } x_1(t) \text{ is } F^i \text{ then} \quad (58)$$

$$u^i(t) = -((a_1^i - \phi_1 - \phi_2)\hat{x}(t) + a_0^i + a_1^i \theta_d)/b^i$$

그림 15는 원하는 출력 y_d 가 구형파이고 원하는 극을 $p = -3$ 으로 하였을 때, 식 (58)의 퍼지규칙으로 구성된 퍼지제어기로 제어된 시스템 (54)의 응답을 나타낸다. 그림 15에서 제어입력은 구간 $[-100 \ 100]$ 으로 제한하였다.

그림 16은 원하는 극을 $p = -2, -3, -4, -6$ 과 같이 여러 값들로 바뀌가며 설계된 퍼지제어기로 제어된 시스템 (54)와 선형 시스템 $\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k)$ 의 응답을 비교하여 보인 것이다.

문헌 [72]에서는 식 (54)의 시스템을 결론부에 상수항이 없는 TSK 퍼지모델로 표현하고 그 모델로부터 Lyapunov 함수를 사용하는 방법으로 퍼지제어기를 설계하였으며, 항상 $x=0$ 가 되도록 제어하였다. 따라서 제어목표를 바꿀 수가 없으며, 페루프 시스템의 천이 응답을 마음대로 조정할 수가 없다.

그에 반해 이 절에서 제안한 방법은 상태 오차가 0이 되도록 제어하므로 제어목표를 마음대로 바꿀 수가 있으며, 페루프 시스템의 극(pole)을 마음대로 지정할 수 있으므로 페루프 시스템의 천이 응답을 원하는 대로 할 수가 있다.

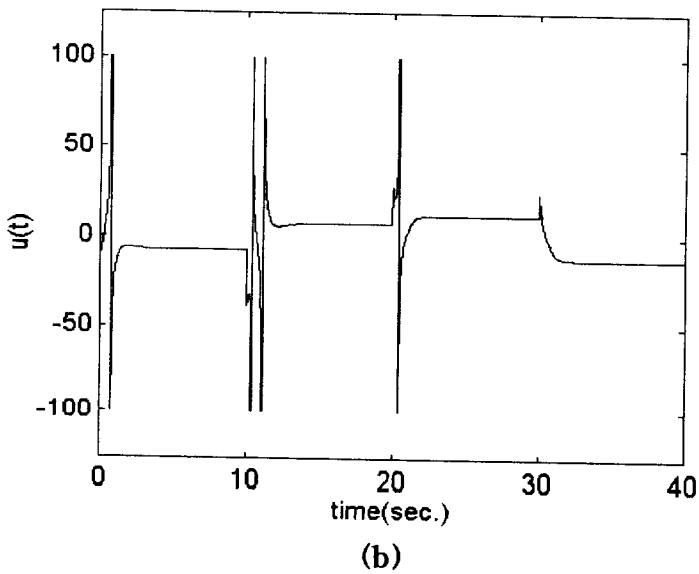
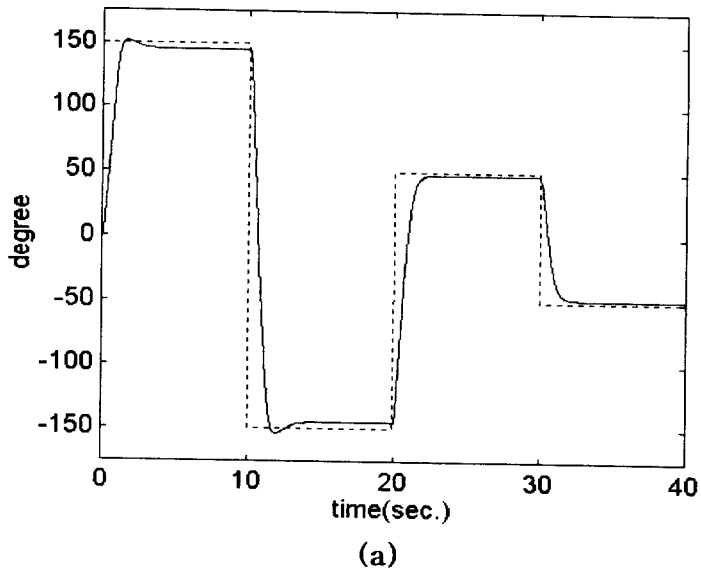


Figure 15. Example 6 : response in pole -3
 (a) solid line: response of the plant
 dashed line: the desired output
 (b) control input

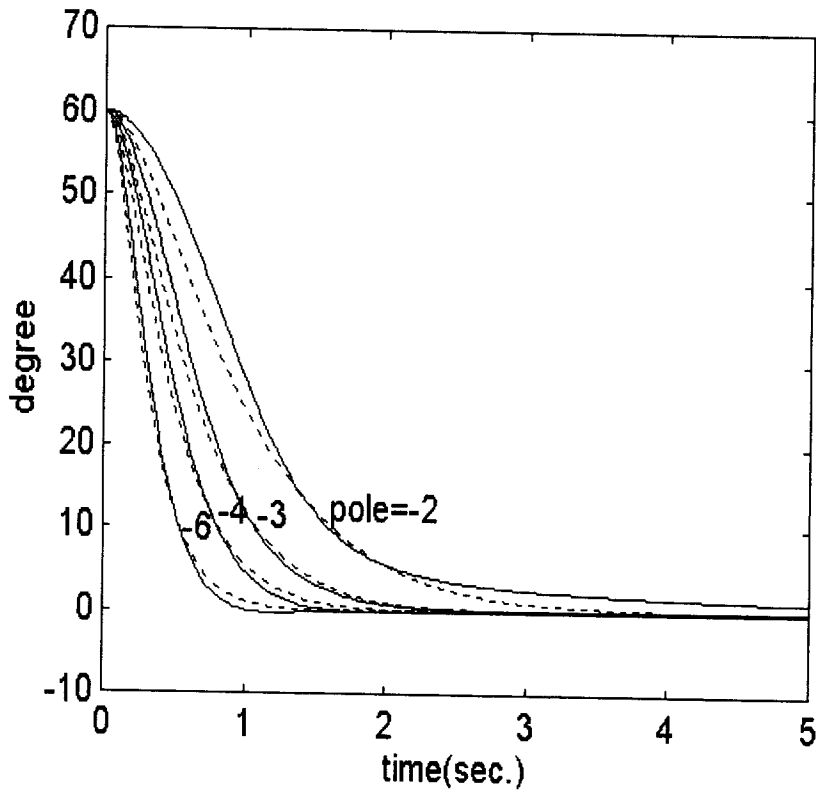


Figure 16. Example 6 : responses in poles -2, -3, -4, -6

solid lines: responses of the plant

dashed lines: responses of the linear

$$\text{system } \tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$$

[2] 이산 시스템의 TSK 퍼지제어기

이산 시스템의 TSK 퍼지제어기의 설계 방법은 연속 시스템의 경우와 동일하다. 다음과 같은 canonical form의 TSK 퍼지 상태변수 모델로부터 퍼지제어기를 설계한다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i \\ & \text{ then } x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \\ & y(k+1) = c x(k+1) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서, 모든 i 에 대하여 $z_i(k) \neq u(k)$ 라 한다.

규칙 M^i 로부터 설계되는 퍼지제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^i: & \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i \\ & \text{ then } u^i(k) = -g^i x(k) + g_0^i(k) \end{aligned} \quad (59)$$

여기서, $g^i = (g_1^i \ g_2^i \ \dots \ g_n^i)$ 는 $(1 \times n)$ 벡터, $g_0^i(k)$ 는 스칼라 그리

고 규칙 C^i 의 전제부는 규칙 M^i 의 전제부와 동일하다

g^i 와 $g_0^i(k)$ 는 다음 식들로부터 구해진다.

$$\Phi = A^i - b^i g^i \quad (60)$$

$$g_0^i(k) = -\frac{d_1^i(k)}{b_1^i} \quad (61)$$

여기서, Φ 는 원하는 상태천이 행렬이다.

제어 입력 $u(k)$ 는 다음의 consistency condition에 의해 구해진다.

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z) b_1^i u^i(k)}{\sum_{i=1}^r w^i(z) b_1^i} \quad (62)$$

Lemma : 식 (59)의 퍼지규칙들로 구성된 퍼지제어기와 식 (62)로 구한 제어입력으로 식 (30)의 규칙들로 구성된 퍼지모델을 제어할 경우, 그 퍼지모델의 거동을 원하는 상태 천이행렬 Φ 를 갖는 선형시스템의 거동과 같게 할 수있다.

Example 7 : Example 4의 시스템에 대하여 TSK 퍼지제어기를 설계하였다.

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1)+u(k)}{(1+y(k-2))^2+y(k-1)^2} \quad (13)$$

대상 시스템의 퍼지모델 (14)의 i 번째 규칙은 다음과 같이 표현할 수 있다.

M^i : if ... then

$$y^i(k+1) = a_0^i + a_1^i y(k) + a_2^i y(k-1) + a_3^i y(k-2) + b_1^i u(k) + b_2^i u(k-1) \quad (44)$$

식 (44)의 규칙을 TSK 퍼지 canonical form으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M^i : \text{ if } \cdot \cdot \cdot \text{ then } \quad & x^i(k+1) = A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k) \\ & y(k+1) = cx(k+1) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\text{여기서, } A^i = \begin{pmatrix} a_1^i & a_2^i & a_3^i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} b_1^i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^i(k) = \begin{pmatrix} a_0^i + b_2^i u(k-1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = (1 \quad 0 \quad 0).$$

원하는 출력을 y_d , 원하는 상태를 $x_d = (y_d \quad y_d \quad y_d)^T$, 그리고 상태 오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{x}(k) = x(k) - x_d$$

그러면 식 (63)의 규칙은 다음과 같이 표현할 수 있다

$$\begin{aligned} M^i : \text{ if } \cdots \text{ then } \quad & \tilde{x}^i(k+1) = A^i \tilde{x}(k) + b^i u(k) \\ & + (d^i(k) + A^i x_d - x_d) \end{aligned} \quad (64)$$

식 (63)의 규칙들로 구성된 퍼지모델과 식 (64)의 규칙들로 구성된 퍼지 모델이 동일함을 다음 식에서 보인다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) + x_d &= \sum_{i=1}^r q^i(k) \tilde{x}^i(k+1) + x_d \\ &= \sum_{i=1}^r q^i(k) (A^i \tilde{x}(k) + b^i u(k) + d^i(k) + A^i x_d - x_d) + x_d \\ &= \sum_{i=1}^r q^i(k) (A^i x(k) + b^i u(k) + d^i(k)) \\ &= x(k+1) \end{aligned}$$

여기서, $q^i(k) = w^i(z) / \sum_{j=1}^r w^j(z)$.

식 (64)의 규칙들로 구성된 퍼지모델로부터 극 배치법을 이용하여 설계된 퍼지제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

$$C^i : \text{if } \dots \text{ then } u^i(k) = -((a_1^i - \phi_1 \ a_2^i - \phi_2 \ a_3^i - \phi_3)\tilde{x}(k) + a_0^i + b_2^i u(k-1) + (a_1^i + a_2^i + a_3^i - 1)y_d) / b_1^i \quad (65)$$

$$\text{단, } \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

그림 17은 원하는 극 $p=0.2$, 출력 $y_d=-0.5, -0.3, -0.1, 0.1, 0.3, 0.5$ 로 변화시켰을 경우, 식 (65)의 규칙들로 구성된 퍼지제어기에 의해 제어된 시스템 (16)의 출력을 나타낸다.

그림 18에서는 여러 극 $p=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 에 대하여, 선형 시스템 $\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$ 의 응답과 식 (65)의 퍼지제어기로 제어된 시스템 (13)의 응답을 비교하여 보인다.

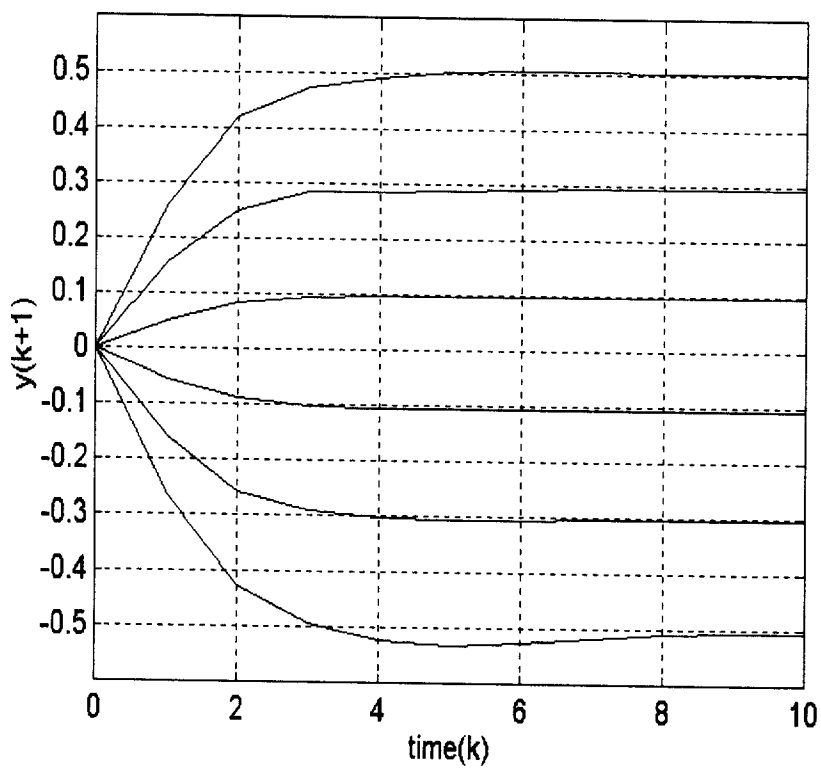


Figure 17. Responses of the plant in pole 0.2 with y_d changed

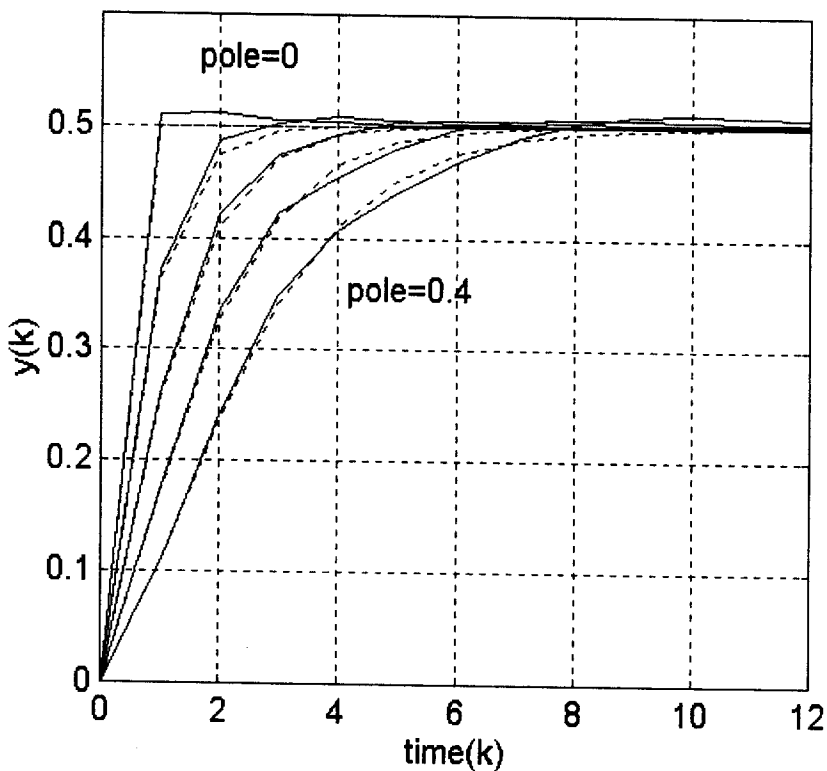


Figure 18. Example 7 : responses in poles 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4

solid line: responses of the plant

dashed line: responses of the linear

$$\text{system } \tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$$

2.3.3 적분 제어가 첨가된 TSK 퍼지제어기

시스템에 일정한 외란이 작용하던지 시스템의 모델에 오차가 있는 경우 등에서는 정상 상태 오차가 발생한다. 이러한 경우 일반적으로 적분 제어를 사용하여 그 정상 상태 오차를 제거한다. 이 절에서는 선형 제어 시스템에서 개발된 적분 제어가 TSK 퍼지제어에도 사용될 수 있음을 보인다. 적분 제어의 기본 방법은 모델의 기존 상태변수에 적분 상태변수를 추가시키는 것이다.

[1] 연속 시스템

다음 식을 만족하는 적분 상태변수 x_I 를 첨가한다.

$$\begin{aligned}\frac{dx_I(t)}{dt} &= y(t) \\ &= cx(t)\end{aligned}\tag{66}$$

이 때 식 (17)의 퍼지규칙은 다음과 같아진다.

$$\begin{aligned}M^i : & \text{ if } z_1(t) \text{ is } F_1^i, z_2(t) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(t) \text{ is } F_l^i \\ & \text{ then } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ x^i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & A^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b^i \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ d^i(t) \end{pmatrix} \\ & y(t) = cx(t)\end{aligned}\tag{67}$$

식 (67)의 퍼지규칙들로 구성되는 퍼지모델과 식 (17)의 규칙들로 구성

되는 퍼지모델이 동일함은 쉽게 알 수 있다. 적분 제어가 첨가되는 퍼지 제어기는 앞 절에서 설명한 극 배치법을 이용하여 식 (67)의 퍼지규칙으로부터 TSK 퍼지제어기를 설계하면 된다.

Example 8 : Example 5에서 사용한 pendulum에 대해 적분 제어를 한다.

$$\ddot{\theta}(t) = -\dot{\theta}(t) - \sin \theta(t) + u(t) \quad (50)$$

식 (52)의 퍼지모델에 적분 상태변수를 첨가하면 다음과 같다.

M^1 : if $\theta(t)$ is F^1 then

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ \tilde{x}^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.928 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.915 + 0.928\theta_d \end{pmatrix}$$

M^2 : if $\theta(t)$ is F^2 then

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ \tilde{x}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.292 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.292\theta_d \end{pmatrix} \quad (68)$$

M^3 : if $\theta(t)$ is F^3 then

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ \tilde{x}^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.928 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.915 + 0.928\theta_d \end{pmatrix}$$

여기서, $x_I(t) = \int (\theta(t) - \theta_d) dt$, $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) - \theta_d \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$.

식 (68)의 퍼지모델로부터 극 배치법을 사용하여 퍼지제어기를 설계하

면 다음과 같다.

C^1 : if $\theta(t)$ is F^1 then

$$u^1(t) = (\phi_1 \ \phi_2 - 0.928 \ \phi_3 + 1) \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} - 2.915 - 0.928\theta_d$$

C^2 : if $\theta(t)$ is F^2 then

$$u^2(t) = (\phi_1 \ \phi_2 + 0.292 \ \phi_3 + 1) \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + 0.292\theta_d \quad (69)$$

C^3 : if $\theta(t)$ is F^3 then

$$u^3(t) = (\phi_1 \ \phi_2 - 0.928 \ \phi_3 + 1) \begin{pmatrix} x_f(t) \\ \tilde{x}(t) \end{pmatrix} + 2.915 - 0.928\theta_d$$

단, $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix}.$

그림 19는 원하는 출력이 100° 이고 $t=20$ 부터 $w=1.5$ 의 step 의 란이 시스템에 첨가되었을 때 식 (69)의 퍼지제어기로 제어된 시스템 (50)의 출력을 나타낸다.

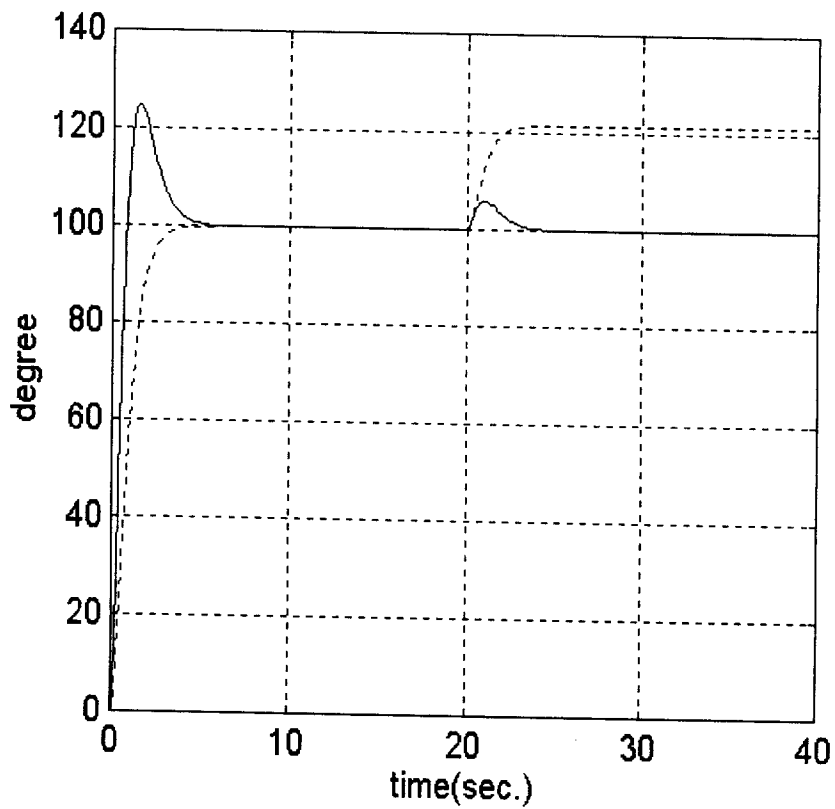


Figure 19. Response in step disturbance($w=1.5$) from $t=20$
solid line: response with an integral control action
dashed line: response with no integral action

[2] 이산 시스템

다음 식을 만족하는 적분 상태변수 x_I 를 상태변수에 첨가한다.

$$\begin{aligned} x_I(k+1) &= x_I(k) + y(k) \\ &= x_I(k) + cx(k) \end{aligned} \quad (70)$$

이 때 퍼지규칙 (30)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} M^i: & \text{ if } z_1(k) \text{ is } F_1^i, z_2(k) \text{ is } F_2^i, \dots, z_l(k) \text{ is } F_l^i \\ & \text{ then } \begin{pmatrix} x^i(k+1) \\ x_I(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^i \\ 0 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} d^i(k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (71) \\ & y(k+1) = cx(k+1) \end{aligned}$$

연속 시스템의 경우와 같이 극 배치법을 사용하여 식 (71)의 퍼지규칙들로 구성된 퍼지모델로부터 TSK 퍼지제어기를 설계할 수 있다.

Example 9 : Example 7에서 사용한 시스템 (13)에 대해 적분 제어가 첨가된 TSK 퍼지제어기를 설계한다. 식 (64)의 퍼지규칙에 적분 상태변수를 첨가하면 다음과 같이 된다.

$M^i : \text{ if } \dots \text{ then}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^i(k+1) \\ x_I(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(k) \\ x_I(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^i \\ 0 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} d^i(k) + A^i x_d - x_d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

위의 퍼지규칙으로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기의 i 번째 규칙은 다음과 같다.

C^i : if ... then

$$u^i(k) = \frac{\sum_{j=1}^3 (\phi_j - a_j^i) \tilde{x}_j(k) + \phi_4 x_f(k) - b_2^i u(k-1) - a_0^i + (1 - \sum_{j=1}^3 a_j^i) y_d}{b_1^i} \quad (73)$$

여기서, $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

그림 20은 원하는 출력 $y_d=0.3$ 이고 $k=20$ 부터 $w=0.2$ 의 step 외란이 시스템에 첨가되었을 때 식 (73)의 규칙들로 구성되는 퍼지제어기로 제어된 시스템 (13)의 출력을 나타낸다.

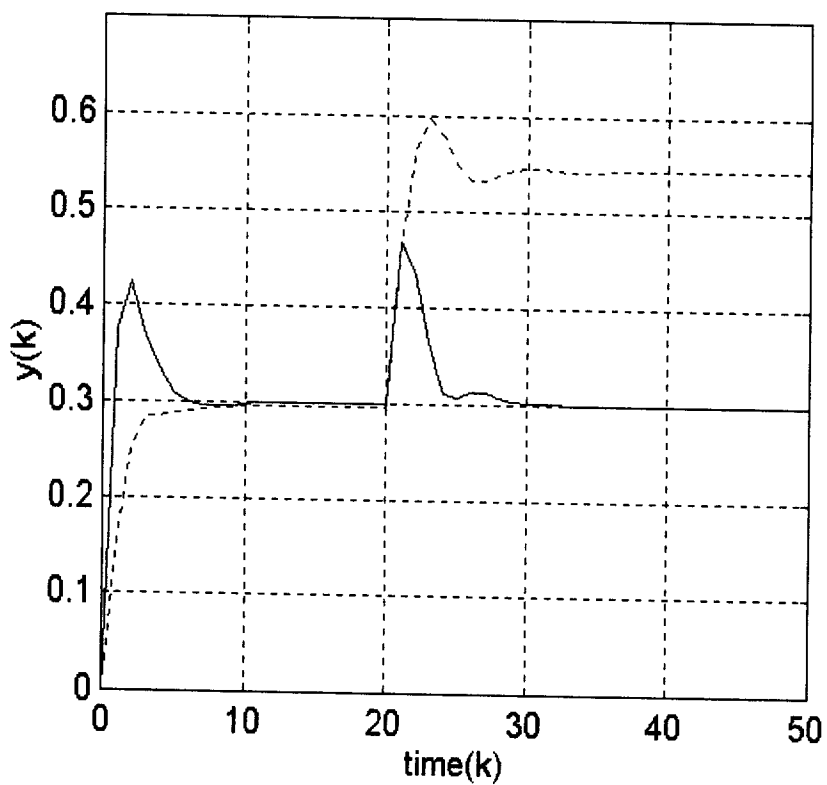


Figure 20. Response in step disturbance($w=0.2$) from $k=20$
solid line: Response with an integral control action.
dashed line: Response with no integral action.

2.4 선박조타의 TSK 퍼지 비선형 제어시스템의 설계

선박의 자동조타에 대한 연구는 오래 전부터 행해져 왔으며, 근래에는 자동조타시스템의 분석 및 설계시에 파라미터 최적화법이나 적응제어에 기초를 둔 적응제어 시스템의 설계 그리고 인간의 경험을 바탕으로 자동조타시스템을 설계하고자 하는 퍼지논리 제어에 의한 조타시스템의 제어 등 현대제어 이론이 광범위하게 적용되고 있다[90,91]. 그러나 대부분의 연구가 자동조타시스템 내부의 비선형 요소의 영향을 고려하지 아니하였거나 비선형 요소를 등가 선형화하여 해석하였다. 또 숙련된 인간의 경험과 지식을 부가한 퍼지이론을 이용한 자동조타에 관한 연구도 다소 있으나, 조타시스템의 비선형 모델에 근거한 퍼지제어기 설계는 아직 이뤄지지 않고 있다. 뿐만 아니라 선박의 속도가 빠를 경우에는 선체운동의 비선형 요소를 무시하는 데는 많은 무리가 따른다. 이와 같은 문제를 해결하기 위하여 선체운동의 비선형 요소를 고려한 선박의 자동조타시스템의 제어기를 설계하기 위한 방법으로 TSK 퍼지이론을 이용하는 것이 가능하다[4].

따라서 본 절에서는 선박의 조종방정식을 비선형 요소를 고려하여 TSK 퍼지모델로 표현하는 방법과 그 모델로부터 체계적으로 TSK 퍼지제어기를 설계하는 방법을 설명한다.

2.4.1 선박 조종방정식의 TSK 퍼지모델 표현

선박 조종방정식은 Bech와 Smith에 따르면 다음과 같은 비선형 미분 방정식으로 주어진다[92].

$$T_1 T_2 \frac{d^3 \theta(t)}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + H \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right) = K(\delta(t) + T_3 \frac{d\delta(t)}{dt}) \quad (74)$$

여기서, $\theta(t)$ 는 배의 편각, $\delta(t)$ 는 타각(rudder angle), T_1, T_2, T_3 는 조종성능지수, K 는 조종이득정수이며, $H(\frac{d\theta(t)}{dt})$ 는 $\frac{d\theta(t)}{dt}$ 의 비선형 함수이다.

TSK 퍼지 제어시스템을 설계하기 위해서는 선박 조종방정식을 TSK 퍼지모델로 표현하여야 한다. 그러기 위해 먼저 식 (74)의 비선형항 $y(t) = H(\frac{d\theta(t)}{dt})$ 을 다음과 같은 TSK 퍼지규칙들로 표현한다.

$$M^i: \text{if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^i \text{ then } y(t)^i = c_0^i + c_1^i \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (75)$$

여기서, M^i 은 모델의 i 번째 규칙임을 뜻하고, F^i 는 퍼지집합,

c_j^i 는 결론부 파라미터, $y(t)^i = H(\frac{d\theta(t)}{dt})^i$ 는 규칙 M^i 으로부터의 출력을 뜻한다.

이 때 퍼지모델의 전체 출력 $y(t)$ 는 다음과 같이 구한다.

$$y(t) = \left(\sum_{i=1}^r F^i \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right) (c_0^i + c_1^i \frac{d\theta(t)}{dt}) \right) / \left(\sum_{i=1}^r F^i \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right) \right) \quad (76)$$

여기서, r 은 규칙의 개수이며,

$F^i \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)$ 는 퍼지집합 F^i 에서 $\frac{d\theta(t)}{dt}$ 의 멤버십치이다.

식 (75)의 퍼지모델은 $y(t) = H \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)$ 로부터 얻어지는 입출력 데이터를 이용하여 인식되며 그 알고리즘은 참고문헌 [12]의 것을 이용한다.

식 (76)를 식 (74)에 대입하면 선박 조종방정식은 다음과 같은 퍼지규칙으로 구성되는 퍼지모델로 표현된다

$$M^i: \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^i \text{ then} \quad (77)$$

$$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} = -a_2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - a_1 \frac{d\theta(t)}{dt} + b_1 \frac{d\delta(t)}{dt} + b_0 \delta(t) - d_0^i$$

$$\text{단, } a_2 = \frac{(T_1 + T_2)}{T_1 T_2}, \quad a_1^i = \frac{c_1^i}{T_1 T_2}, \quad b_1 = \frac{K T_3}{T_1 T_2}, \quad b_0 = \frac{K}{T_1 T_2},$$

$$d_0^i = \frac{c_0^i}{T_1 T_2}.$$

식 (77)의 퍼지모델을 상태방정식의 형태로 표현하면 다음과 같다

$$M^i: \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^i \text{ then } \frac{dx(t)}{dt} = A^i x(t) + bu(t) + d^i \quad (78)$$

$$y(t) = cx(t)$$

단, $y(t) = \theta(t)$, $u(t) = \delta(t)$, $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^T$ 이며,

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1^i & -a_2^i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d_0^i}{b_0} \end{pmatrix}, \quad c = (b_0 \ b_1 \ 0) \text{ 이다.}$$

식 (78)의 퍼지모델로부터 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같이 구한다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\sum_{i=1}^r w^i (A^i x(t) + bu(t) + d^i) \right) / \left(\sum_{i=1}^r w^i \right) \quad (79)$$

여기서, $w^i = F^i \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)$ 이며 r 은 규칙의 개수이다.

2.4.2 선박조타의 TSK 퍼지 제어시스템 설계

선박의 조종방정식이 식 (78)과 같은 TSK 퍼지모델로 표현되어 있을 때 그 모델로부터 TSK 퍼지 제어시스템을 설계한다. TSK 퍼지 제어시스템은 극 배치법을 이용하여 설계되며 상태 추정기와 상태 제어기로 구성된다.

다음은 식 (78)의 TSK 퍼지모델로부터 TSK 퍼지 상태제어기를 극 배치법으로 설계하는 방법을 설명한다. 모델의 i 번째 규칙 M^i 에 대한 퍼지제어기의 규칙은 다음과 같다.

$$C^i: \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^i \text{ then } u^i(t) = -G^i x(t) + \frac{d_0^i}{b_0} \quad (80)$$

여기서 $G^i = (g_1^i, g_2^i, g_3^i)$ 는 제어기의 이득이다.

제어기의 원하는 상태천이행렬을 Φ_C 라 할 경우 다음과 같이 구한다.

$$\Phi_C = A^i - bG^i \quad (81)$$

$$\Phi_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \phi_{C1} & \phi_{C2} & \phi_{C3} \end{pmatrix} \text{ 라면,}$$

식 (81)로부터 $G^i = (-\phi_{C1}, -\phi_{C2} - a_1^i, -\phi_{C3} - a_2)$ 가 된다.

제어입력 $u(t)$ 는 다음에 의해 구해진다.

$$u(t) = (\sum_i^r w^i u^i(t)) / (\sum_i^r w^i) \quad (82)$$

다음은 식 (78)의 TSK 퍼지모델의 상태 $x(t)$ 를 추정하는 TSK 상태 추정기의 설계에 대해 설명한다. TSK 상태추정기는 다음과 같은 TSK 퍼지규칙들로 구성된다.

$$\begin{aligned} E^i: & \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^i \\ & \text{ then } \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A^i \hat{x}(t) + bu(t) + L^i(y(t) - c\hat{x}(t)) + d^i \end{aligned} \quad (83)$$

단, $\hat{x}(t)$ 는 상태 $x(t)$ 의 추정치이며, $L^i = (l_1^i \ l_2^i \ l_3^i)^T$ 는 상태추정기의 이득이며 다음을 만족하도록 한다.

$$A^i - L^i c = \Phi_L \quad (84)$$

단, Φ_L 은 상태추정기의 원하는 상태천이행렬이다.

식 (83)의 TSK 퍼지 상태추정기로부터, 상태 추정치 $\hat{x}(t)$ 는 다음 식으로 구해진다.

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^r w^i (A^i \hat{x}(t) + bu(t) + L^i (y(t) - c\hat{x}(t)) + d^i)}{(\sum_{i=1}^r w^i)} \quad (85)$$

Theorem : 식 (83)의 규칙들로 구성되는 TSK 퍼지 상태추정기를 사용하여 상태 $x(t)$ 를 추정할 경우, 그 추정 상태의 오차 $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 의 거동은 원하는 상태천이행렬 Φ_L 과 같다.

proof : 식 (78), (79), (84), (85)에 의해

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} \\ &= \left(\sum_{i=1}^r w^i (A^i - L^i c)(x(t) - \hat{x}(t)) \right) / \left(\sum_{i=1}^r w^i \right) \\ &= \Phi_L \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (86)$$

2.4.3 시뮬레이션

시뮬레이션에 사용한 배는 문헌에서 인용된 화물선으로 식 (74)의 비선형항이 다음과 같다[92].

$$H\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right) = h_1 \frac{d\theta(t)}{dt} + h_2 \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^3 \quad (87)$$

식 (74)와 (87)의 파라미터 값은 각각 $T_1=45$, $T_2=6$, $T_3=10$, $K=0.08$, $h_1=h_2=1$ 이다. 선박 조종방정식의 TSK 퍼지모델을 작성하기 위해 먼저 비선형항인 $y(t) = \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^3$ 의 TSK 퍼지모델을 작성하였으며 그 결과는 그림 21과 같다.

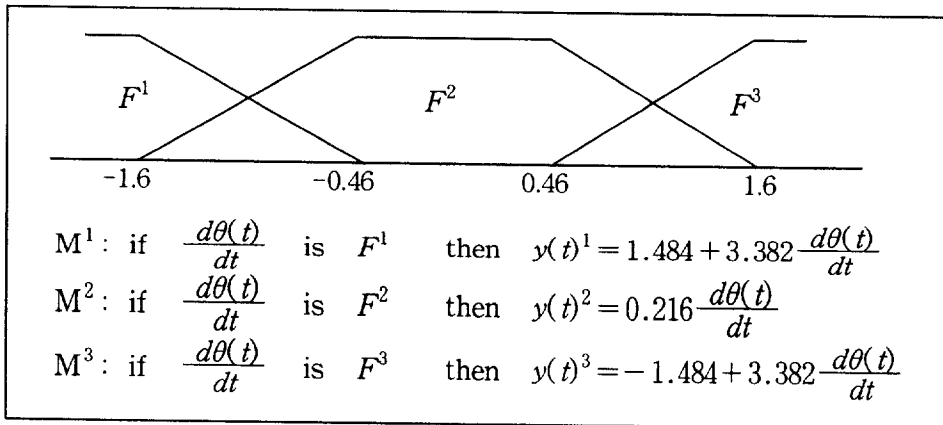


Fig. 21. TSK fuzzy model of $y(t) = \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^3$

그림 21의 퍼지모델은 $-1.5 \leq \frac{d\theta(t)}{dt} \leq 1.5$ 의 범위에서 데이터를 구해 문헌의 알고리즘을 이용하여 구하였다[12]. 그림 21의 퍼지모델과 위의 파라미터 값을 이용하여 상태변수 형태의 TSK 퍼지모델을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M^1: \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^1 \text{ then } \frac{dx(t)}{dt} &= A^1 x(t) + bu(t) + d^1 \\
 y(t) &= cx(t) \\
 M^2: \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^2 \text{ then } \frac{dx(t)}{dt} &= A^2 x(t) + bu(t) \\
 y(t) &= cx(t)
 \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
 M^3: \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^3 \text{ then } \frac{dx(t)}{dt} &= A^3 x(t) + bu(t) + d^3 \\
 y(t) &= cx(t)
 \end{aligned}$$

여기서, $A^1 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0162 & 0.189 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0045 & 0.189 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18.55 \end{pmatrix}, \quad d^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -18.55 \end{pmatrix}, \quad c = (0.000296 \quad 0.00296 \quad 0).$$

제어기의 원하는 상태천이행렬을 $\Phi_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \phi_{C1} & \phi_{C2} & \phi_{C3} \end{pmatrix}$ 라면 식 (81)과

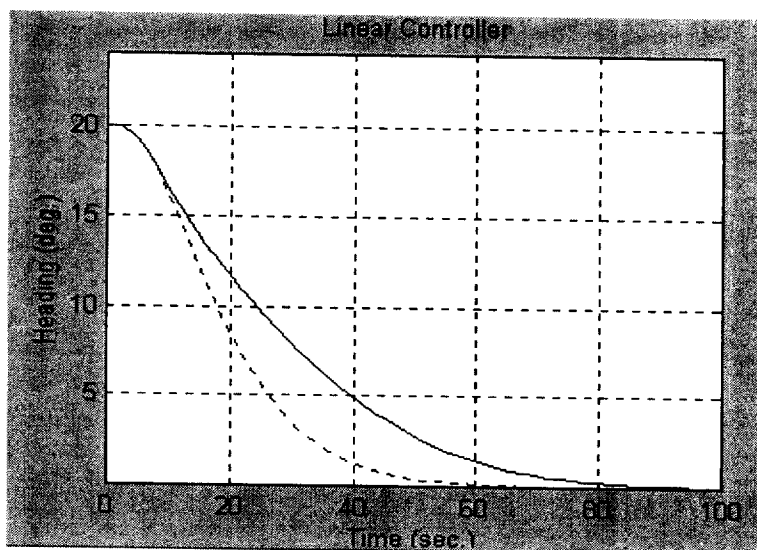
(82) 및 식 (88)의 퍼지모델에 의해 TSK 퍼지제어기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
C^1: & \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^1 \\
& \text{ then } u^1(t) = (\phi_1 \quad \phi_2 - 0.0162 \quad \phi_3 - 0.189)x(t) - 18.55 \\
C^2: & \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^2 \\
& \text{ then } u^2(t) = (\phi_1 \quad \phi_2 - 0.0045 \quad \phi_3 - 0.189)x(t) \\
C^3: & \text{ if } \frac{d\theta(t)}{dt} \text{ is } F^3 \\
& \text{ then } u^3(t) = (\phi_1 \quad \phi_2 - 0.0162 \quad \phi_3 - 0.189)x(t) + 18.55
\end{aligned} \tag{89}$$

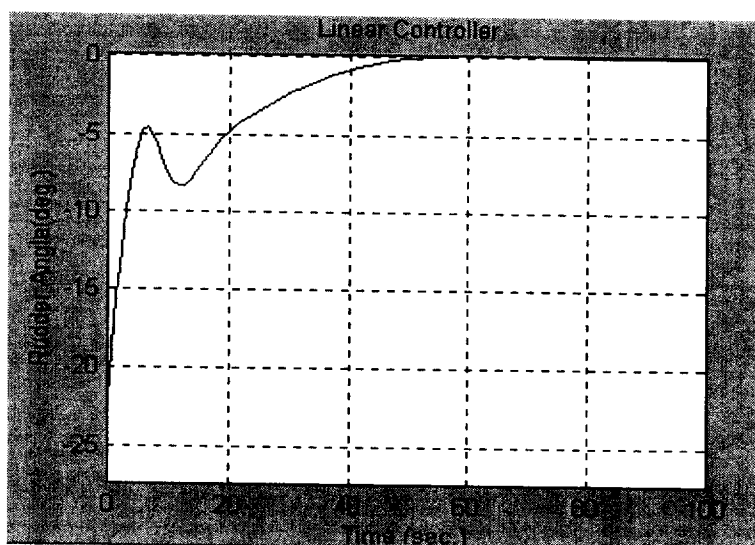
$\theta(t)$ 의 초기치가 20° 일 때 그림 22는 선형제어기의 제어 결과를, 그림 23은 TSK 퍼지제어기의 제어 결과를 나타낸다.

그림 22의 선형제어기와 그림 23의 TSK 퍼지제어기 설계에서 원하는 극을 -0.15 로 하였다. 상태추정기에서 원하는 상태천이행렬의 극은 빠른 상태 추정을 위해 5.0 으로 하였다.

그림 22(a)와 그림 23(a)에서 실선은 실제 응답이고 점선은 원하는 응답이다. 그림 22에서 선형제어기를 사용할 경우 시스템의 비선형성에 의해 실제응답이 원하는 응답과 차이가 나는 반면, 그림 23에서는 TSK 퍼지제어기를 사용할 경우 응답이 원하는 응답과 거의 비슷함을 알 수 있다.



(a) $\theta(t)$



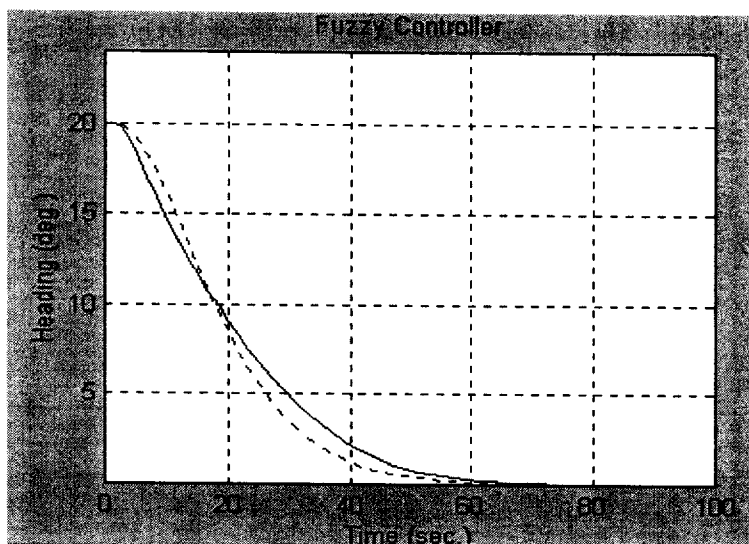
(b) $\delta(t)$

Fig. 22. Response of the linear controller

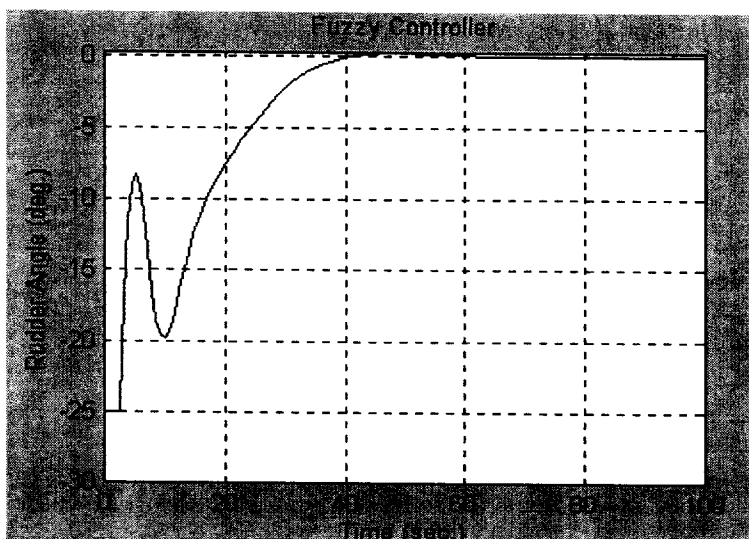
(a) solid line : the linear controller

dashed line : the desired output

(b) control input $\delta(t)$



(a) $\theta(t)$



(b) $\delta(t)$

Fig. 23. Response of the TSK fuzzy controller

(a) solid line : the TSK fuzzy controller

dashed line : the desired output

(b) control input $\delta(t)$

2.5 결 언

이 장에서는 결론부의 선형식이 상수항을 갖는 일반적인 형태의 퍼지 규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델의 인식 방법과 안정성 검증은 물론 이 퍼지모델로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기의 형태와 그 설계 방법을 제안하였다.

복잡한 비선형 시스템의 입출력 데이터만으로 퍼지모델이 인식되면, 실제 시스템의 평형점은 인식된 퍼지모델로부터 개략적으로 구할 수 있으며, 퍼지모델의 이 평형점 부근을 선형화 함으로써 얻어진 Jacobian matrix의 고유값에 의해 평형점의 안정성을 해석하였다. 이 때 평형점의 안정성은 퍼지규칙의 적합도 $w^i(z)$ 와 관계가 있다. 평형점의 안정성 판별에 대한 Example 3에서 제안된 방법이 인식된 TSK 퍼지모델을 통해 비선형 시스템의 안정성을 해석하기 위해 사용될 수 있음을 보였다.

또 TSK 퍼지모델로부터 선형 제어시스템에서 개발된 페루프 시스템의 극을 지정하는 극 배치법을 이용하여 TSK 퍼지제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 이 제어기는 페루프 시스템의 응답이 원하는 선형 시스템의 응답과 같아지도록 설계할 수 있으며, 또한 선형 제어시스템에서 개발된 적분 제어도 사용 가능함을 Example 4, 5, 6, 7, 8, 9를 통하여 보였다. 그리고 응용 예로써 2.4절에 선박 조타시스템의 비선형 요소를 고려한 TSK 퍼지 비선형 제어시스템의 설계 방법과 시뮬레이션한 것을 보였다. 이장에서는 1입력 1출력(SISO) 시스템을 다루었지만 제안된 방법들은 다변수(MIMO) 시스템에의 적용도 가능할 것이다.

제 3 장 Singleton 퍼지시스템으로의 변환

3.1 서 언

퍼지시스템은 퍼지규칙의 결론부 형태(퍼지집합, 실수 값, 입출력 변수의 선형식 등)에 따라 나뉜다.

퍼지규칙의 결론부가 선형식인 퍼지시스템, 즉 TSK 퍼지시스템은 적은 수의 퍼지규칙으로 복잡한 시스템을 잘 표현 할 수 있으며, 입출력 데이터로 모델 인식이 체계적으로 쉽게 이루어 질 수 있다. 또 결론부가 선형식인 점을 이용하여 안정성을 보장하는 퍼지제어기 설계에 관한 연구도 많이 되어 있다[4,45,69,72,85].

한편 퍼지규칙의 결론부가 실수인 형태인 singleton 퍼지시스템은 TSK 퍼지시스템을 간략화한 형태로 규칙이 언어적 형태이므로 이해하기가 쉽고, 규칙의 조정이 용이한 장점이 있다.

따라서 TSK 퍼지시스템과 singleton 퍼지시스템, 두 퍼지시스템의 장점을 살릴 수 있는 방안이 필요하며, 그 방안으로 TSK 퍼지시스템을 singleton 퍼지시스템으로 변환시키는 방법이 발표되고 있으나 두 시스템이 동일한 입출력 관계를 갖는 변환 방법은 아직 발표되지 않고 있다 [5,86]. 이에 본 장에서는 어느 한 TSK 퍼지시스템이 주어졌을 때 그 퍼지시스템을 동일한 입출력 관계를 갖는 singleton 퍼지시스템으로 변환시키는 방법을 제안하며, 제안한 방법을 퍼지모델의 인식과 퍼지제어기 설계에 응용할 수 있음을 보인다.

3.2 변환 알고리즘

이 절에서는 TSK 퍼지모델과 동일한 입출력 관계를 갖는 singleton 퍼지모델을 구하는 방법을 설명한다.

TSK 퍼지모델의 k 번째 규칙이 다음과 같다 하자

$$R^k: \text{If } x \text{ is } A^k \text{ then } y^k = a_0^k + (a^k)^T x \quad (90)$$

여기서, $x = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$ 는 입력 변수 벡터, y^k 는 출력 변수,

$A^k = (A_1^k \ A_2^k \ \cdots \ A_n^k)^T$ 는 전제부 퍼지집합들의 벡터,

$a^k = (a_1^k \ a_2^k \ \cdots \ a_n^k)^T$ 는 결론부 파라미터 벡터이며,

a_0^k 는 결론부의 상수항이다.

퍼지모델이 r 개의 퍼지규칙들로 구성될 경우, 그 퍼지모델로 부터 출력 y 는 다음 식과 같이 추론된다.

$$y = \frac{\sum_{k=1}^r A^k(x) y^k}{\sum_{k=1}^r A^k(x)} \quad (91)$$

여기서, $A^k(x)$ 는 k 번째 규칙의 적합도를 나타내며, x_i 에서 퍼지집합 A_i^k 의 멤버십 값을 $A_i^k(x_i)$ 라하면 다음과 같다.

$$A^k(x) = \prod_{i=1}^n A_i^k(x_i) \quad (92)$$

식 (90)과 같은 퍼지규칙들로 구성되는 TSK 퍼지모델은 시스템의 입출력 데이터를 이용하여 만들어진다[12]. TSK 퍼지모델 인식 때 가장 먼저 정해야 할 것은 전제부 퍼지집합의 형태이다. 전제부 퍼지집합의 멤버쉽 함수로는 여러 형태가 사용되고 있으나 이 절에서는 멤버쉽 함수가 간단한 선형식인 그림 24와 같은 사다리꼴을 사용하도록 한다. 또한 그림 24와 같이 한 퍼지집합의 멤버쉽 값이 0으로 시작되는 점이 옆의 퍼지집합의 멤버쉽 값이 1로 시작되는 점과 일치하도록 하여, 즉 그림 24에서 p_1 은 퍼지집합 F_1 에서는 멤버쉽 값이 1로 시작되는 점이면서 퍼지집합 F_2 에서는 멤버쉽 값이 0으로 시작되는 점으로 하여 모델을 간단한 형태로 하였다.

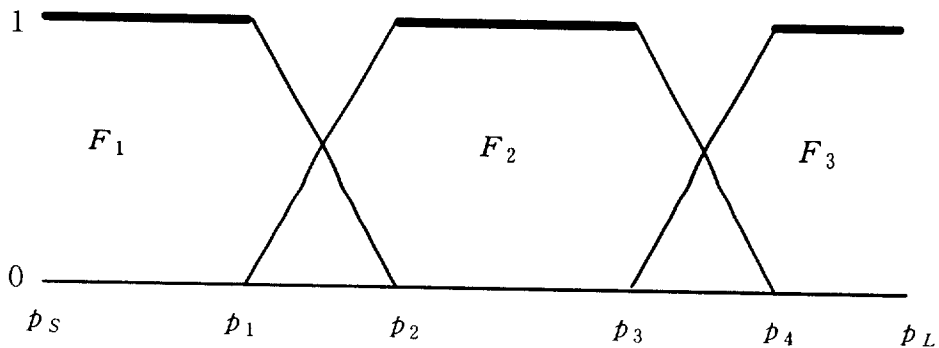


Fig. 24. Fuzzy sets in TSK fuzzy models

한편 위와 같이 퍼지집합을 만들 경우 식 (91)에서 $\sum_{k=1}^r A^k(x)=1$ 을 만족함을 쉽게 알 수 있다. 따라서 이 절에서는 식 (91)의 분모는 항상 1로 한다. 이와 같은 제한은 시스템의 입출력 데이터를 이용한 TSK 퍼지 모델링 단계에서 나온 것이므로 일반성에는 문제가 없다고 본다. 그림 24에서 p_S 와 p_L 은 퍼지 모델이 적용 가능한 변수의 최소 값 및 최대 값이다.

위의 TSK 퍼지모델을 singleton 퍼지모델로의 변환은, 식 (90)의 퍼지 규칙의 결론부에서 변수 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 를 하나씩 제거하여 상수항만 남게 함으로써 이루어지며, 변수를 하나씩 제거할 때마다 퍼지규칙의 수는 증가한다. 변수를 결론부에서 제거하는 알고리즘은 다음의 기본 아이디어를 사용한다. 즉, 식 (93)과 같은 TSK 퍼지규칙을 singleton 퍼지모델로 표현하면 그림 25와 같아짐을 이용한다.

$$\text{If } x \text{ is } F \text{ then } y = a_0 + a_1 x \quad (93)$$

그림 25 퍼지모델의 출력은 다음과 같다.

$$(F \cap F_S)(x) \cdot (a_0 + a_1 x_1) + (F \cap F_L)(x) \cdot (a_0 + a_1 x_2)$$

또 퍼지규칙 (93)의 출력은 $F(x) \cdot (a_0 + a_1 x)$ 이다. 식 (94)에 그 두 결과가 동일함을 보인다. 규칙의 적합도 식 (92)의 계산에서 곱셈을 사용하므로 그림 25 및 식 (94)에서 퍼지집합의 intersection은 곱셈을 이용한다. 즉 $(F \cap F_S)(x) = F(x) \cdot F_S(x)$.

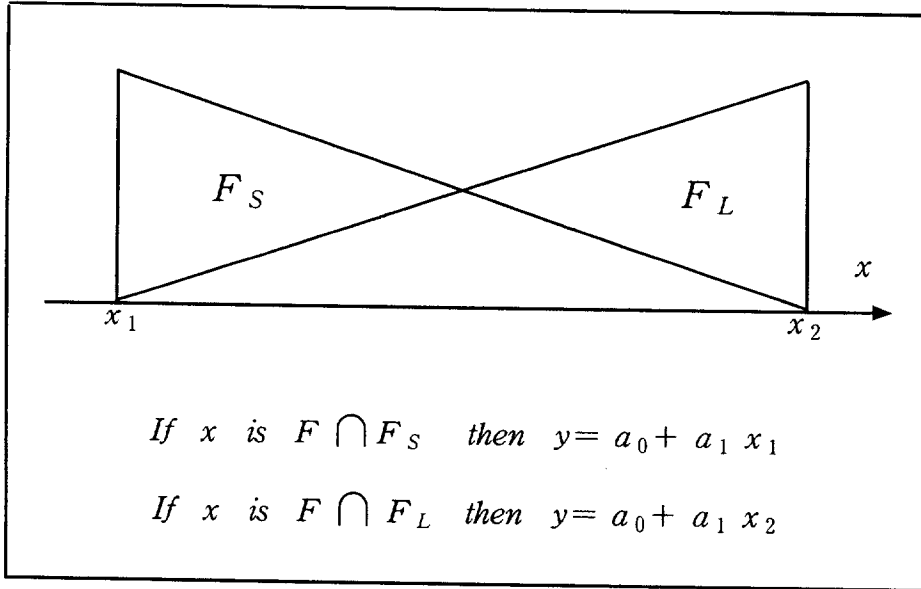


Fig. 25. Singleton fuzzy model of the TSK fuzzy rule (93)

$$\begin{aligned}
 & (F \cap F_S)(x) \cdot (a_0 + a_1 x_1) + (F \cap F_L)(x) \cdot (a_0 + a_1 x_2) \\
 &= F(x) \cdot (F_S(x) \cdot (a_0 + a_1 x_1) + F_L(x) \cdot (a_0 + a_1 x_2)) \\
 &= F(x) \cdot \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot (a_0 + a_1 x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (a_0 + a_1 x_2) \right) \quad (94) \\
 &= F(x) \cdot (a_0 + a_1 x)
 \end{aligned}$$

TSK 퍼지모델의 결론부에서 변수를 하나씩 제거하는 알고리즘은 전제부에 그 변수가 있는지, 만약 있으면 그 퍼지집합의 형태가 그림 24의 F_1, F_2, F_3 중에 어느 형태인가에 따라 틀린다.

지금부터 식 (90)의 퍼지규칙 결론부에서 변수 x 를 제거하는 알고리즘을 4개의 case로 나누어서 설명한다.

변환 알고리즘에서

$$x^- = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{i-1} \ x_{i+1} \ \cdots \ x_n)^T,$$

$$A^{k-} = (A_1^k \ A_2^k \ \cdots \ A_{i-1}^k \ A_{i+1}^k \ \cdots \ A_n^k)^T,$$

$$a^{k-} = (a_1^k \ a_2^k \ \cdots \ a_{i-1}^k \ a_{i+1}^k \ \cdots \ a_n^k)^T$$

로 정의하며, 알고리즘에 나오는 퍼지집합 $B_1 \sim B_8$ 과 그 멤버쉽 함수는 다음과 같다.

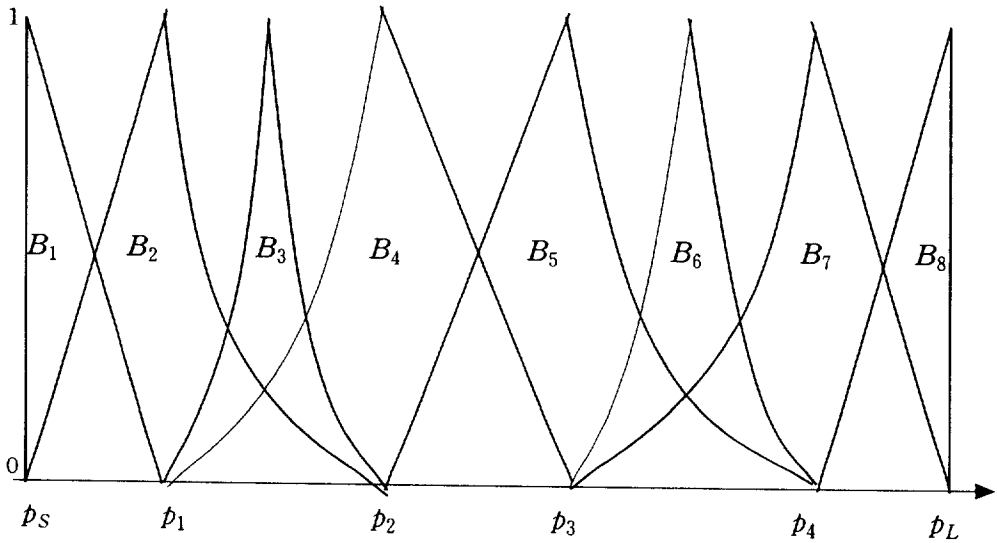


Fig. 26. Fuzzy sets in transformation algorithm

$$\begin{aligned}
B_1(x_i) &= \begin{matrix} (p_1 - x_i)/(p_1 - p_S) \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_S \leq x_i \leq p_1 \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_2(x_i) &= \begin{matrix} (x_i - p_S)/(p_1 - p_S) \\ (p_2 - x_i)^2/(p_2 - p_1)^2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_S < x_i \leq p_1 \\ : & p_1 \leq x_i \leq p_2 \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_3(x_i) &= \begin{matrix} 4(p_2 - x_i)(x_i - p_1)/(p_2 - p_1)^2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_1 < x_i < p_2 \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_4(x_i) &= \begin{matrix} (x_i - p_1)^2/(p_2 - p_1)^2 \\ (p_3 - x_i)/(p_3 - p_2) \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_1 \leq x_i \leq p_2 \\ : & p_2 < x_i \leq p_3 \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_5(x_i) &= \begin{matrix} (x_i - p_2)/(p_3 - p_2) \\ (p_4 - x_i)^2/(p_4 - p_3)^2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_2 < x_i \leq p_3 \\ : & p_3 \leq x_i \leq p_4 \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_6(x_i) &= \begin{matrix} 4(p_4 - x_i)(x_i - p_3)/(p_4 - p_3)^2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_3 < x_i < p_4 \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_7(x_i) &= \begin{matrix} (x_i - p_3)^2/(p_4 - p_3)^2 \\ (p_L - x_i)/(p_L - p_4) \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_3 \leq x_i \leq p_4 \\ : & p_4 < x_i \leq p_L \\ : & otherwise \end{matrix} \\
B_8(x_i) &= \begin{matrix} (x_i - p_4)/(p_L - p_4) \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} : & p_4 < x_i \leq p_L \\ : & otherwise \end{matrix}
\end{aligned}$$

퍼지집합 $B_1 \sim B_8$ 은 그림 24의 5개 구간 ($[p_S, p_1]$, $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$, $[p_3, p_4]$, $[p_4, p_L]$)에 대해 그림 25와 같은 작업을 하여 얻어진 퍼지집합들이다. 그림 26에서 퍼지집합 B_3 와 B_6 은 원래 최고점의 멤버십 값이 0.25이지만 평준화하여(normalize) 1로 만들었다. 그 대신 B_3 와 B_6 에 해당하는 규칙의 결론부 실수 값은 1/4배로 줄어든다.

case 1 : 식 (90)에서 x_i 의 퍼지집합 A_i^k 가 그림 24의 F_2 일 때

식 (90)의 R^k 퍼지규칙은 다음 4개 퍼지규칙으로 대체된다.

$$R^{k1}: \text{ If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_3$$

$$\text{ then } y^{k1} = \frac{a_0^k + p_1 a_i^k}{4} + \frac{(a^{k-})^T}{4} x^- \quad (95)$$

$$R^{k2}: \text{ If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_4$$

$$\text{ then } y^{k2} = a_0^k + p_2 a_i^k + (a^{k-})^T x^- \quad (96)$$

$$R^{k3}: \text{ If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_5$$

$$\text{ then } y^{k3} = a_0^k + p_3 a_i^k + (a^{k-})^T x^- \quad (97)$$

$$R^{k4}: \text{ If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_6$$

$$\text{ then } y^{k4} = \frac{a_0^k + p_4 a_i^k}{4} + \frac{(a^{k-})^T}{4} x^- \quad (98)$$

식 (90)의 퍼지규칙 R^k 를 식 (95)~(98)의 $R^{k1} \sim R^{k4}$ 4개의 퍼지규칙들로 대체할 경우 퍼지모델로부터 추론되는 결과는 다음과 같다.

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} A^j(x) y^j + \sum_{j=1}^4 A^{k-}(x^-) B_{j+2}(x_i) y^{kj} + \sum_{j=k+1}^r A^j(x) y^j}{\sum_{k=1}^r A^k(x)} \quad (99)$$

따라서 식 (95)~(98)의 $R^{k1} \sim R^{k4}$ 4개의 퍼지규칙들로 대체한 퍼지모델의 출력인 식 (99)가 대체하기 전 원래의 퍼지모델의 출력인 식 (91)과 동일함을 보이려면 다음 식이 만족함을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned}
A^k(x)y^k &= A^{k-}(x^-)B_3(x_i)y^{k1} + A^{k-}(x^-)B_4(x_i)y^{k2} \\
&\quad + A^{k-}(x^-)B_5(x_i)y^{k3} + A^{k-}(x^-)B_6(x_i)y^{k4}
\end{aligned} \tag{100}$$

proof :

먼저 그림 24에서 $[p_1 \ p_2]$ 구간에 대해 증명한다. 이 구간에서는 변환된 규칙들 중에서 식 (95)와 (96)의 2개의 퍼지규칙이 적용되어 다음과 같이 증명된다.

$$\begin{aligned}
&A^{k-}(x^-)B_3(x_i)y^{k1} + A^{k-}(x^-)B_4(x_i)y^{k2} + A^{k-}(x^-)B_5(x_i)y^{k3} \\
&\quad + A^{k-}(x^-)B_6(x_i)y^{k4} \\
&= A^{k-}(x^-)(B_3(x_i)(\frac{a_0^k + p_1 a_i^k}{4} + \frac{(a^{k-})^T}{4} x^-) \\
&\quad + B_4(x_i)(a_0^k + p_2 a_i^k + (a^{k-})^T x^-)) \\
&= A^{k-}(x^-) \frac{x_i - p_1}{p_2 - p_1} (\frac{p_2 - x_i}{p_2 - p_1} (a_0^k + p_1 a_i^k + (a^{k-})^T x^-) \\
&\quad + \frac{x_i - p_1}{p_2 - p_1} (a_0^k + p_2 a_i^k + (a^{k-})^T x^-)) \\
&= A^{k-}(x^-) A_i^k(x_i) (a_0^k + a_i^k x_i + (a^{k-})^T x^-) \\
&= A^k(x) (a_0^k + (a^k)^T x) \\
&= A^k(x) y^k
\end{aligned}$$

나머지 구간 $[p_2 \ p_3]$ 과 $[p_3 \ p_4]$ 에 대해서도 식 (100)이 만족됨을 같은 방법으로 증명할 수 있다.

case 2 : 식 (90)에서 x_i 의 퍼지집합 A_i^k 가 그림 24의 F_1 일 때

식 (90)의 R^k 퍼지규칙은 다음 3개 퍼지규칙으로 대체된다.

$$\begin{aligned} R^{k1} : \quad & \text{If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_1 \\ & \text{then } y^{k1} = a_0^k + p_S a_i^k + (a^{k-})^T x^- \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} R^{k2} : \quad & \text{If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_2 \\ & \text{then } y^{k2} = a_0^k + p_1 a_i^k + (a^{k-})^T x^- \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} R^{k3} : \quad & \text{If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_3 \\ & \text{then } y^{k3} = \frac{a_0^k + p_2 a_i^k}{4} + \frac{(a^{k-})^T}{4} x^- \end{aligned} \quad (103)$$

case 3 : 식 (90)에서 x_i 의 퍼지집합 A_i^k 가 그림 24의 F_3 일 때

식 (90)의 R^k 퍼지규칙은 다음 3개 퍼지규칙으로 대체된다.

$$\begin{aligned} R^{k1} : \quad & \text{If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_6 \\ & \text{then } y^{k1} = \frac{a_0^k + p_3 a_i^k}{4} + \frac{(a^{k-})^T}{4} x^- \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} R^{k2} : \quad & \text{If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_7 \\ & \text{then } y^{k2} = a_0^k + p_4 a_i^k + (a^{k-})^T x^- \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} R^{k3} : \quad & \text{If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_8 \\ & \text{then } y^{k3} = a_0^k + p_L a_i^k + (a^{k-})^T x^- \end{aligned} \quad (106)$$

case 4 : 식 (90)에서 전제부에 변수 x_i 가 없을 때

식 (90)의 R^k 퍼지규칙은 다음 2개 퍼지규칙으로 대체된다

$$\begin{aligned} R^{k1}: & \text{ If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_S \\ & \text{ then } y^{k1} = a_0^k + p_S a_i^k + (a^{k-})^T x^- \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} R^{k2}: & \text{ If } x^- \text{ is } A^{k-}, x_i \text{ is } B_L \\ & \text{ then } y^{k2} = a_0^k + p_L a_i^k + (a^{k-})^T x^- \end{aligned} \quad (108)$$

위 식의 퍼지집합 B_S 와 B_L 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_S(x_i) &= \begin{cases} (p_L - x_i)/(p_L - p_S) \\ 0 \end{cases} & : \begin{cases} p_S \leq x_i \leq p_L \\ \text{otherwise} \end{cases} \\ B_L(x_i) &= \begin{cases} (x_i - p_S)/(p_L - p_S) \\ 0 \end{cases} & : \begin{cases} p_S \leq x_i \leq p_L \\ \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

case 2~case 4 에서도 식 (90)의 퍼지규칙 R^k 을 새로운 퍼지규칙들로 대체하여도 퍼지모델로부터 추론되는 결과는 변화가 없으며 그것은 case 1에서 설명한 방법으로 증명된다.

위에서 설명한 알고리즘으로 TSK 퍼지모델에서 결론부 변수를 하나 하나씩 제거하면 결론부에 상수항만 남게되어 최종적으로 singleton 퍼지모델로 변환되어지며, 그 singleton 퍼지모델은 원래의 TSK 퍼지모델과 동일한 입출력 관계를 갖는다. 변환된 singleton 퍼지모델에서 전제부가 같은 규칙들이 나올 수 있으며 (예로서 식 (95)와 (103), 식 (98)과 (104)는 전제부가 같다.) 그러한 규칙들은 결론부의 상수 값을 합하여 하

나의 퍼지규칙으로 만든다.

위와 같은 방법에 의하여 singleton 퍼지모델로 변환되었을 때 퍼지규칙의 개수는 다음과 같다. TSK 퍼지모델에서 변수 x_i 의 구간이 N_i 개로 나뉘어져 있을 때(그림 24는 3개로 나뉘어져 있는 경우), singleton 퍼지모델에서는 변수 x_i 의 구간이 $2+3(N_i-1)$ 개로 나뉘어 진다. TSK 퍼지모델의 전제부에 변수 x_i 가 없을 경우는 $N_i=1$ 로 한다. 따라서 변수 개수가 n 개인 경우 TSK 퍼지모델의 규칙 개수는 최대 $\prod_{i=1}^n N_i$ 개이고 변환된 singleton 퍼지모델의 규칙 개수는 최대 $\prod_{i=1}^n (2+3(N_i-1))$ 개이다.

3.3 비선형 시스템 모델링에의 응용

3.3.1 퍼지모델의 인식

퍼지모델링의 수법으로는, 시스템의 입출력을 이용하는 방법, 시스템 전문가의 언어적인 지식을 이용하는 방법으로 나눌 수 있다. TSK 퍼지모델의 경우 거의 전적으로 시스템의 입출력 데이터 또는 시스템의 거동을 기술하는 수식을 바탕으로 모델링한다. 이에 반해 singleton 퍼지모델의 경우, 대부분 모델의 대상 시스템 전문가의 언어적 지식을 바탕으로 모델링 된다.

시스템의 입출력 데이터로 퍼지모델을 인식해야 할 경우 가장 문제가 되는 것은 모델의 구조 인식이다. 퍼지모델에서 구조 인식이란 전제부를 어떻게 구성하는가를 결정하는 문제이다. 즉 전제부에 사용되는 변수들과 그 변수들로 구성되는 공간을 어떻게 퍼지 분할할 것인가를 결정하는 것이 전제부 인식이다. 이러한 전제부 인식이 이루어지면 결론부 인식은 선형시스템의 파라미터 인식 수법을 그대로 이용하여 쉽게 이뤄진다.

시스템의 입출력 데이터를 이용한 TSK 퍼지모델의 인식은 쉽게 이뤄진다. 왜냐하면 TSK 퍼지모델은 적은 수의 규칙으로 복잡한 비선형 시스템을 정도 높게 표현 할 수 있어 모델의 구조 인식이 체계적으로 비교적 쉽게 이루어질 수 있다. 이에 반해 singleton 퍼지모델의 경우, 시스템이 복잡하고 입력 변수가 많아지면 규칙의 수가 기하 급수적으로 많아져 입출력 데이터를 이용한 모델의 구조인식이 어렵다.

한편 TSK 퍼지모델은 결론부가 선형식이므로 결론부가 실수인 singleton 퍼지모델에 비해 모델의 이해가 어려우며 필요한 부분만을 임의적으로 수정하기가 어렵다. 즉, 신경회로망 또는 GA 등을 이용한 기존의 TSK 퍼지모델의 인식 기법들은 입출력 데이터를 이용하여 데이터 전체 오차의 분산과 같은 어느 한 목적 함수를 최소로 하도록 한다. 그러나 입력공간의 어느 한 특정의 부분에서 모델을 수정해야할 경우 TSK 퍼지모델의 형태로는 규칙의 수정이 어렵다. 그에 반해 시스템을 singleton 퍼지모델로 표현하면 운영자가 필요에 따라 수정이 필요한 부분을 손쉽게 임의적으로 수정할 수 있다.

따라서 다음 절에 복잡한 비선형 시스템에 대해 입출력 데이터만 주어졌을 때, 그 데이터를 이용하여 TSK 퍼지모델로 인식하여 그 모델을 앞절에서 설명한 방법으로 singleton 퍼지모델로 변환시키고 또 필요한 부분을 수정할 수 있음을 시뮬레이션을 통해 보인다.

3.3.2 반도체 소자의 퍼지모델링 시뮬레이션

강한 비선형성과 복잡한 동특성을 갖는 반도체 소자들 중에는 물리적 해석에 의한 모델을 얻기가 어렵거나 사용하기에는 너무 복잡한 것들이 있다. 그러한 소자들의 모델링에는 black-box적인 방법들이 많이 사용되며, 그러한 수법으로는 look-up 테이블, 스플라인 함수, 구분선형 함수 등이 있다. 그러나 look-up 테이블은 많은 기억용량을 필요로 하고, 스플라인 함수는 대규모 회로의 계산에 비효율적이며, 구분선형 함수는 간단하지만 정확도가 매우 떨어진다. 따라서 여기서는 3.2절에 제안한 변환

알고리즘을 반도체 소자 특성의 퍼지모델링에 응용한다.

반도체 소자 중에서 물리적 해석에 의한 모델이 매우 복잡한 이온 주입식 GaAs FET의 전류 전압 특성곡선의 모델링에 적용하였다. 모델의 출력은 드레인 전류이고 입력은 드레인 전압과 게이트 전압이다.

Chua는 black box적인 모델링 수법의 하나로 구분선형(piecewise-linear) 모델을 제안하였으며, 강은 TSK 퍼지모델을 발표하였다. 그 모델들은 실험에서 얻은 입출력 데이터를 이용하여 구해졌다[88,89].

문헌[89]의 TSK 퍼지모델에서 전제부 적합도의 합 $\sum_{k=1}^K A^k(x)=1$ 이 되도록 전제부 퍼지집합을 수정한 TSK 퍼지모델을 그림 27에 보인다.

그림 28에는, 실제 측정된 데이터, 그림 27의 TSK 퍼지모델의 출력, 문헌[69]의 구분선형 모델의 출력들을 각각 보인다. 그림 28에서 TSK 퍼지모델이 구분선형 모델보다 훨씬 나은 결과를 나타내지만, 드레인 전압이 0인 경우 드레인 전류가 0이 되지 않고 있으며 낮은 드레인 전압과 낮은 게이트 전압에서 드레인 전류가 단조증가하지 않고 있다. 이러한 특정 부분의 수정은 TSK 퍼지모델의 형태로는 어렵다. 따라서 TSK 퍼지모델을 singleton 퍼지모델로 변환시키고, 수정이 필요한 규칙의 결론부 실수 값을 수동으로 조정하였다.

그림 29는 조정된 singleton 퍼지모델을 나타낸다. 변환된 singleton 퍼지모델의 전제부 퍼지집합 멤버십 함수에서 곡선 부분은 계산의 간략화를 위해 직선 형태로 바꿨으며, 결론부 실수 값에서 괄호 안의 숫자들은 조정하기 전의 값이다.

그림 30에 조정된 singleton 퍼지모델 출력을 보였다.

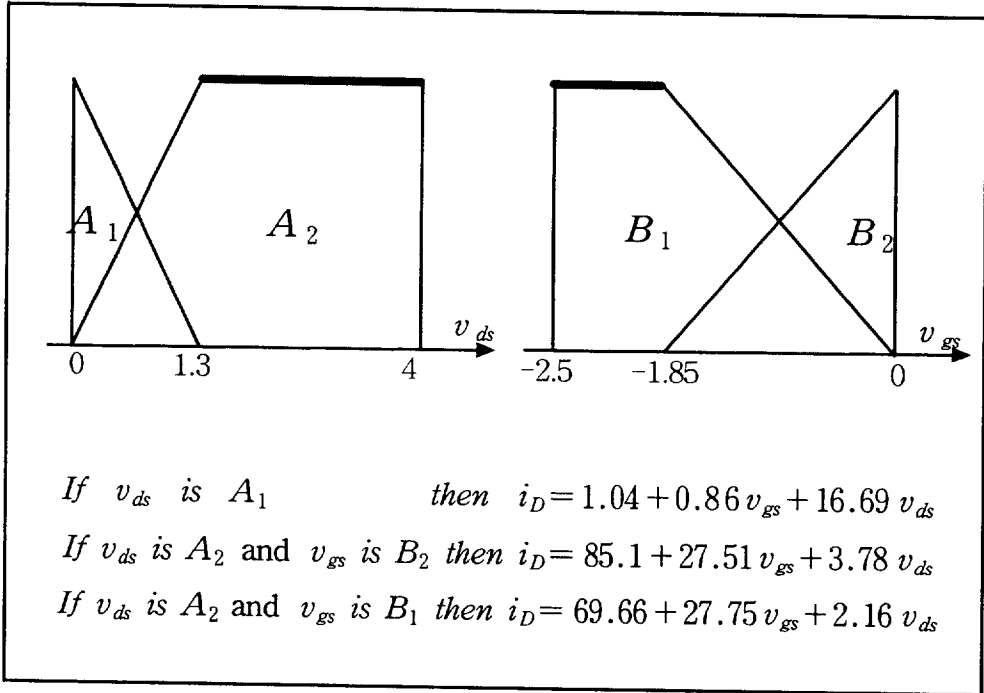


Fig. 27. The TSK fuzzy model for GaAs FET

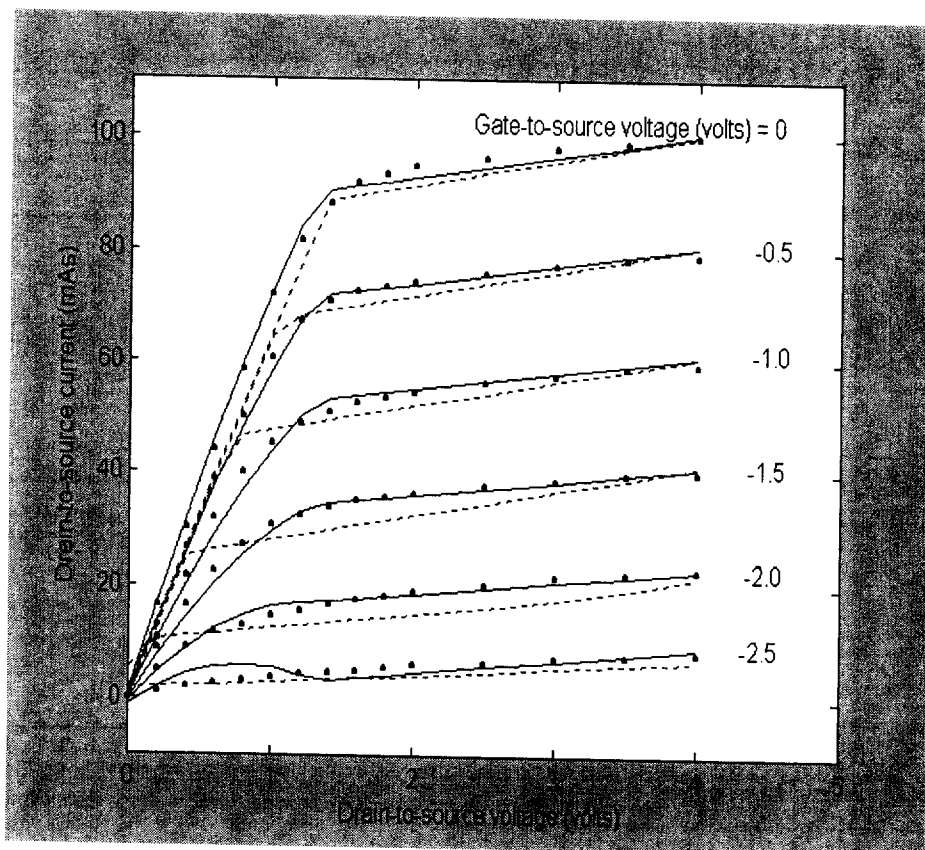
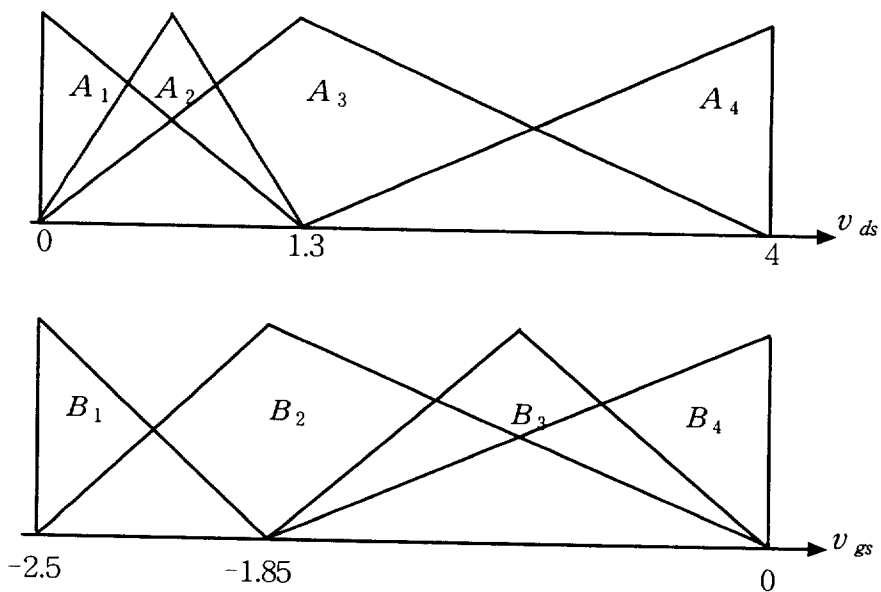


Fig. 28. The outputs of GaAs FET
 circles : the measured data,
 solid lines : the TSK fuzzy model,
 dashed lines : the piecewise liner model



$v_{gs} \backslash v_{ds}$	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	0 (-1.1)	2.5 (5.2)	4.5 (3.1)	8.9
B_2	0 (-0.5)	12 (9.9)	21	27
B_3	0 (0.1)	15 (9.2)	28	32
B_4	0 (1.0)	27	90	100

Fig. 29. The singleton fuzzy model for GaAs FET

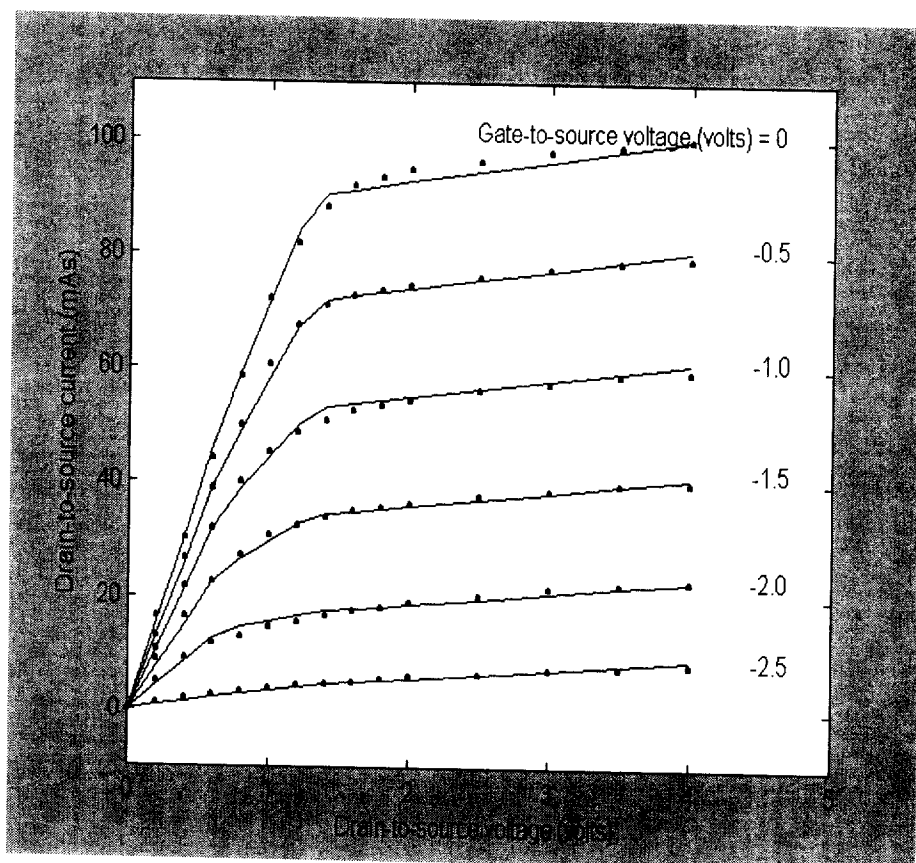


Fig. 30. The outputs of GaAs FET
 circles : the measured data,
 solid lines : the singleton fuzzy model

3.4 비선형 시스템 제어기 설계에의 응용

3.4.1 TSK 퍼지제어기의 singleton 퍼지제어기로의 변환

퍼지제어기의 설계 방법으로는, 제어 숙련가의 지식 등을 이용하여 시행착오(trial-and-error)적인 방법과 시스템 모델로부터 안정성을 생각하여 설계하는 방법으로 크게 나눌 수 있다. 결론부가 singleton 또는 퍼지 집합인 퍼지제어기는 주로 제어 숙련가의 지식을 이용하여 설계된다. 그에 반해, TSK 퍼지제어기의 경우, 결론부가 선형식인 장점을 이용하여 안정성을 고려하면서 퍼지모델로부터 체계적으로 다양한 형태로 설계될 수 있다.

2장에서 설명한 것과 같이 먼저 대상 시스템을 TSK 퍼지모델로 표현하고, 그 퍼지모델로부터 극 배치법(pole placement)을 이용하여 TSK 퍼지제어기를 설계한다. 이 때 설계된 TSK 퍼지제어기는 TSK 퍼지모델의 오차로 원하는 응답과 차이가 있을 수 있으며, 또는 제어기 운용자가 특정 상황에서 제어기 성능을 조정할 필요가 있을 수도 있다. 이러한 경우 TSK 퍼지제어기의 형태로는 조정이 쉽지 않다. 그러나, 3.2 절에서 설명한 방법으로 TSK 퍼지제어기를 singleton 퍼지제어기로 변환시키면 필요한 부분에서 쉽게 제어기의 조정이 가능하다.

위에서 설계된 TSK 퍼지제어기를 singleton 퍼지제어기로 변환시킬 경우 주의해야 할 점이 있다. TSK 퍼지제어기에서 제어입력 $u(k)$ 를 구할 때 사용되는 consistency condition 식 (62)는 TSK 퍼지모델에서 출

력을 구할 때 사용되는 식 (91)와 차이가 있다. 즉 식 (62)에서는 전제부 적합도 w^i 에 모델의 $u(k)$ 의 계수 b_1^i 가 곱해진다. 따라서 3.2 절의 방법을 사용하여 singleton 퍼지제어기로 변환시킬 때, TSK 퍼지제어기 결론부 선형식에 b_1^i 를 미리 곱하여 변환하면 된다. 식(59)의 퍼지규칙들로 구성된 TSK 퍼지제어기가 다음과 같은 singleton 퍼지제어기 규칙들로 변환되었다 하자

$$\begin{aligned} S^j : & \text{ If } v_1(k) \text{ is } G_1^j, v_2(k) \text{ is } G_2^j, \dots, v_m(k) \text{ is } G_m^j \\ & \text{ then } u^j(k) = s^j \end{aligned} \quad (109)$$

그러면 위의 singleton 퍼지제어기로부터 제어 입력은 식 (62)에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$u(k) = \frac{\sum_{j=1}^{r_s} w_s^j(v) s^j}{\sum_{i=1}^r w^i(z) b_1^i} \quad (110)$$

여기서, $w_s^j(v) = \prod_{i=1}^m G_i^j(v_i)$ 는 singleton 퍼지제어기 전제부 적합도이며, r_s 는 singleton 퍼지제어기에서 규칙의 개수이다.

3.4.2 시뮬레이션

다음 시스템에 대해 퍼지제어기를 설계하였다. 이 때 앞 절에서 설명한 방법과 같이 먼저 TSK 퍼지제어기를 설계하고 이 퍼지제어기로부터 singleton 퍼지제어기를 설계한다.

$$y(k+1) = \frac{y(k)y(k-1) + u(k)}{1 + y(k)^2} \quad (111)$$

먼저 TSK 퍼지모델을 인식하기 위해 구간 $[-1, 1]$ 에 랜덤하게 분포한 $u(k)$ 를 식 (111)에 입력하여 1,000개의 입출력 데이터를 구하고, 그 데이터와 문헌[12]의 알고리즘으로 TSK 퍼지모델을 인식하여 결론부를 상태변수 모델로 바꾼 결과 그림 31의 모델을 구하였다.

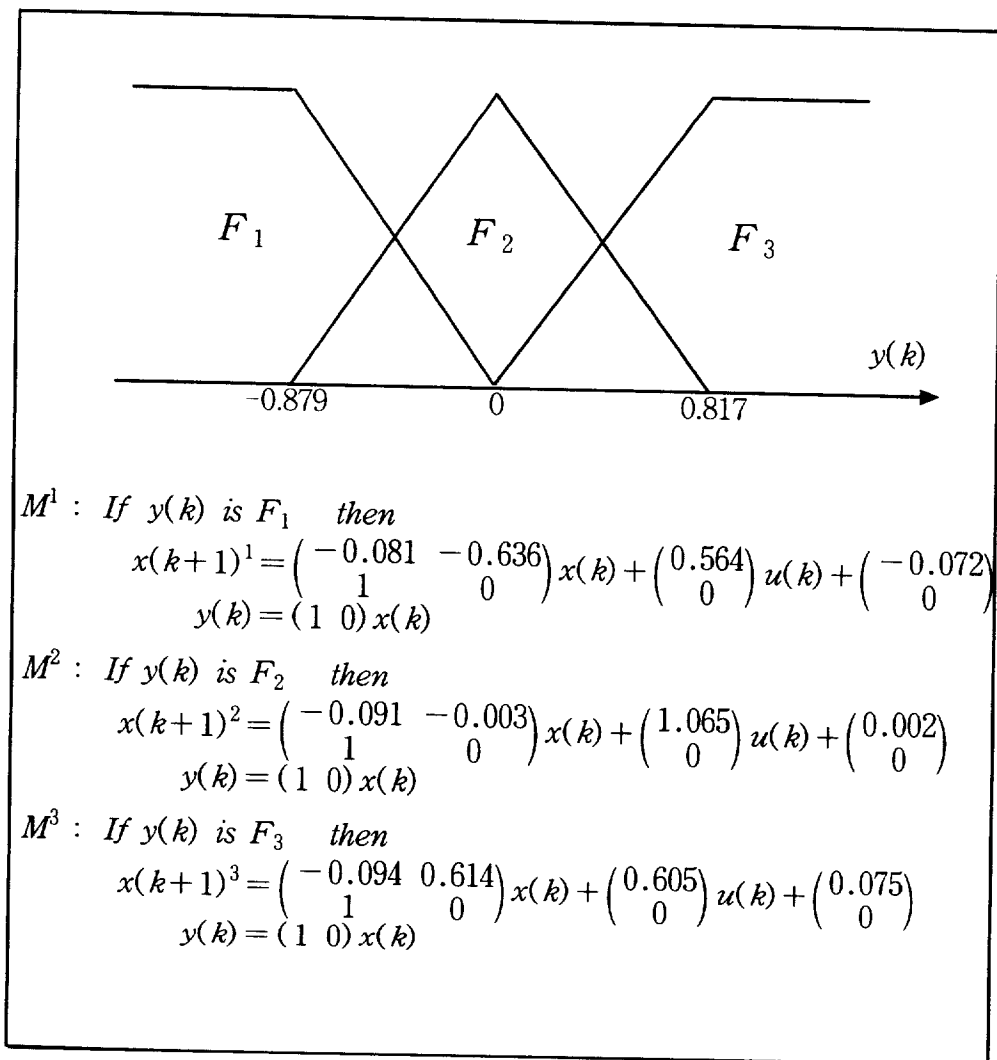


Fig. 31. The TSK fuzzy model of equation (111)

원하는 상태천이 행렬 Φ 를

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

라 하면 그림 31으로부터 설계되는 TSK 퍼지제어기는 다음과 같다.

C^1 : If $y(k)$ is F_1 then

$$u(k)^1 = \left(\frac{\phi_1 + 0.081}{0.564} \quad \frac{\phi_2 + 0.636}{0.564} \right) x(k) + \frac{0.072}{0.564}$$

C^2 : If $y(k)$ is F_2 then

$$u(k)^2 = \left(\frac{\phi_1 + 0.091}{1.065} \quad \frac{\phi_2 + 0.003}{1.065} \right) x(k) - \frac{0.002}{1.065} \quad (112)$$

C^3 : If $y(k)$ is F_3 then

$$u(k)^3 = \left(\frac{\phi_1 + 0.094}{0.605} \quad \frac{\phi_2 - 0.614}{0.605} \right) x(k) - \frac{0.075}{0.605}$$

폐루프 시스템 전달함수의 원하는 극을 $0.5(\phi_1=0.5, \phi_2=-0.25)$ 로 하여 TSK 퍼지제어기를 만들고, 4가지 초기값 $(-1, -0.5, 0.5, 1)$ 에 대해 그 퍼지제어기를 적용하였을 때의 응답을 그림 32에 보인다.

그림 32에서 제어결과 응답은 원하는 응답에 크게는 비슷하지만, 초기값에 따라 천이응답 부분에서 원하는 응답과 조금 차이가 있는 부분이 있다. 이러한 제어 오차들은 식(111)의 원래 시스템과 그림 31의 TSK 퍼지모델의 차이에서 나온 것이며, TSK 제어기 형태로는 그 오차를 없애기가 어렵다. 하지만 singleton 제어기 형태에서는 제어기 해석이 쉬우

며 제어기 파라미터 조정이 간편하므로, 식 (112)의 TSK 퍼지제어기를 3.2절에서 설명한 방법으로 singleton 퍼지제어기로 변환시키고, 필요한 부분의 파라미터를 조정하였다. 그 방법은 조정이 필요한 공간에 해당하는 singleton 퍼지규칙의 결론부 상수를 시행착오적인 방법으로 조정하였다.

그림 33에 singleton 퍼지제어기로 변환되고 조정된 결과를 보인다. 그림 33의 결론부 실수 값에서 괄호안의 숫자는 조정하기 전의 파라미터 값이며, 전제부 퍼지집합 멤버십 함수에서 곡선 부분은 계산의 간략화를 위해 직선 형태로 하였다. 그리고, $y(k-1)$ 변수는 TSK 퍼지제어기에서 결론부에만 존재하므로 변환된 singleton 퍼지제어기에서는 2개의 퍼지집합으로 분할하면 충분하나, 좀 더 세밀한 조정을 위해 3개의 퍼지집합 (B_1 , B_2 , B_3)으로 분할하였다.

그림 34에 조정된 singleton 퍼지제어기를 사용할 경우의 응답을 보이며, 그 응답은 원하는 응답과 거의 일치함을 볼 수 있다. TSK 퍼지제어기를 설계하여 그것을 변환하지 않고 바로 그림 33과 같은 singleton 퍼지제어기를 설계하기는 매우 어렵다. 하지만 3.2절에서 설명한 변환 방법을 사용하면 TSK 퍼지제어기와 singleton 퍼지제어기의 장점을 잘 살릴 수 있음을 알 수 있다.

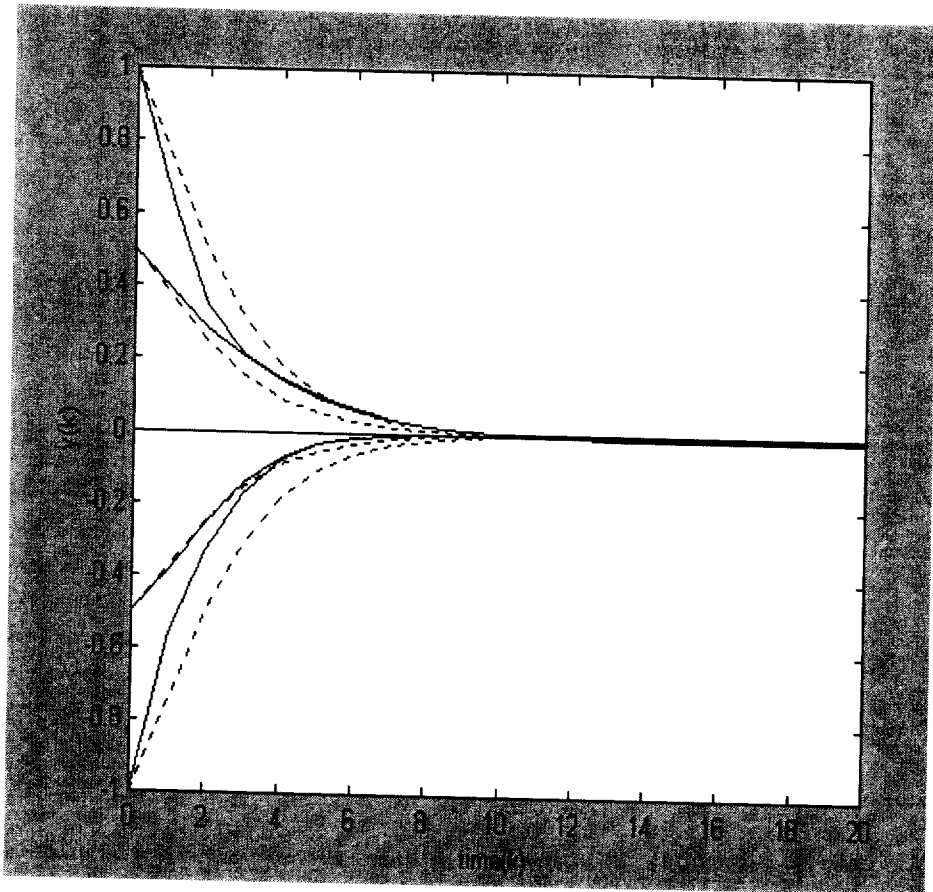
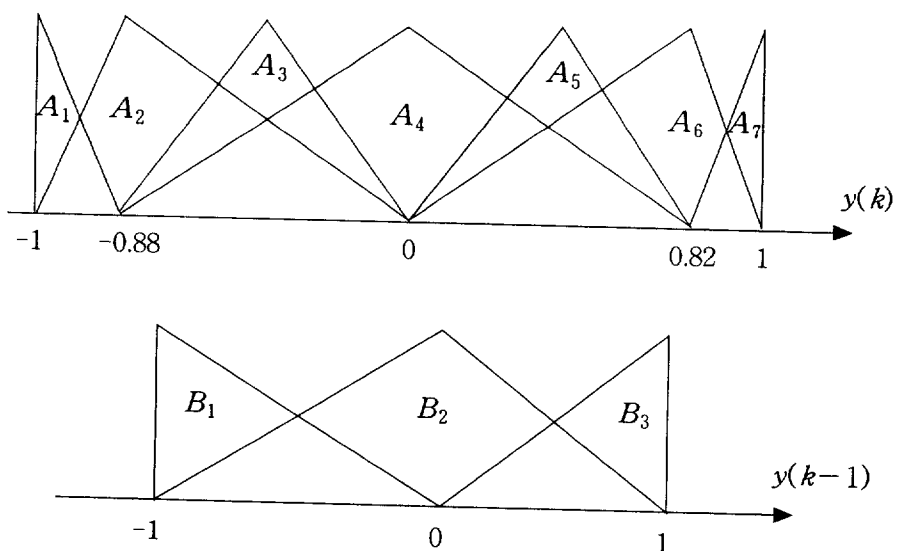


Fig. 32. Responses of equation (111) in pole 0.5
solid line : the TSK fuzzy controller,
dashed line : the desired responses



$y(k) \backslash y(k-1)$	B_1	B_2	B_3
A_1	-1.5 (-1.3)	-1	-0.7
A_2	-0.9 (-1)	-0.5 (-0.73)	-0.43
A_3	-0.2	-0.05 (-0.18)	-0.16
A_4	0.21	0 (0.001)	-0.21
A_5	0.45	0.1 (0.2)	-0.07
A_6	1.61	0.5 (0.8)	0.02 (-0.06)
A_7	1.85	1	0.25 (0.17)

Fig. 33. The adjusted singleton fuzzy controller

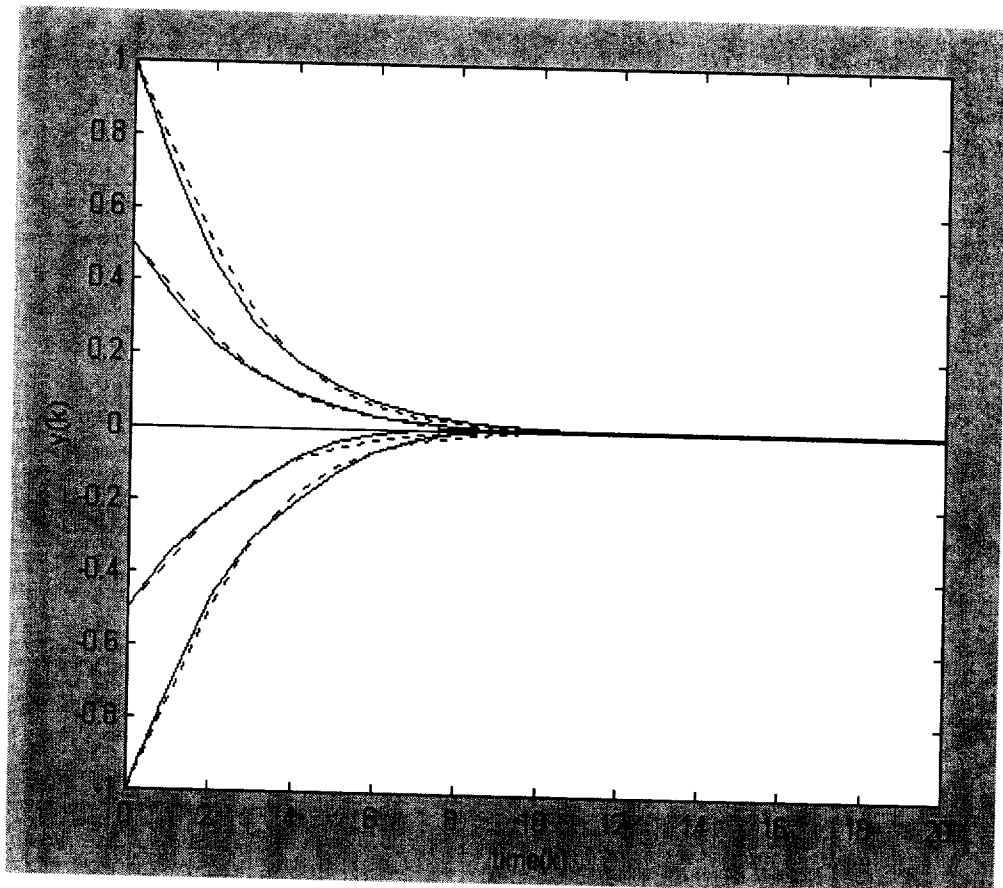


Fig. 34. Responses of equation (111) in pole 0.5
solid line : the adjusted singleton
fuzzy controller,
dashed line : the desired responses

3.5 결 언

이 장에서는 어느 한 TSK 퍼지시스템이 주어졌을 때 그 퍼지시스템과 동일한 입출력 관계를 갖는 singleton 퍼지시스템을 구하는 방법을 제안하고 응용 예를 보였다. TSK 퍼지시스템의 전제부 퍼지집합 멤버십 함수가 사다리꼴을 할 경우 TSK 퍼지시스템과 똑같은 입출력 관계를 갖는 singleton 퍼지시스템을 쉽게 구할 수 있었다.

제안된 변환 방법을 이용하면 두 퍼지시스템의 장점을 잘 살릴 수 있음을 보였다. 먼저 퍼지모델링에서는, 입출력 데이터로 인식된 TSK 퍼지모델을 singleton 퍼지모델로 변환시켜 원하는 부분을 조정하였다. 이를 통해, 입출력 데이터로 퍼지모델링 할 때, 적은 수의 규칙으로 모델 구조 인식이 비교적 쉬운 TSK 퍼지모델의 장점과 모델 해석과 미세 조정이 쉬운 singleton 퍼지모델의 장점을 잘 이용할 수 있음을 보였다.

퍼지제어기 설계에서는, TSK 퍼지모델로부터 극 배치법을 이용하여 TSK 퍼지제어기를 설계하고 그 제어기를 singleton 퍼지제어기로 변환시켜 필요한 부분을 조정하였다. 이로서 TSK 퍼지모델의 결론부가 선형 식인 점을 이용하여 퍼지제어기 설계가 용이한 장점과 이해하기 쉽고 미세 조정이 용이한 singleton 퍼지제어기의 장점을 모두 살릴 수 있음을 보였다.

제 4 장 결 론

본 논문은 결론부가 선형식으로 표현되는 것을 이용하여 안정성을 보장하면서, 복잡한 비선형 시스템의 거동을 원하는 선형 시스템의 거동과 같아지도록 하는 TSK 퍼지시스템의 설계 방법을 제안하였다. 또 TSK 퍼지시스템에서 발생될 수 있는 특정 부분에서의 오차를 미세 조정하기 위하여 제어기 해석이 용이하고 파라미터의 조정이 간편한 singleton 퍼지시스템을 TSK 퍼지시스템으로부터 설계하는 방법을 제안하였다.

그리고 본 논문은 퍼지규칙의 결론부가 상수항을 가지지 않는 특수한 형태에 대한 지금까지의 연구와는 달리 결론부 선형식이 상수항을 갖는 일반적인 형태의 퍼지규칙으로 구성되는 TSK 퍼지시스템을 다루었다.

제 2장에서,

- TSK 퍼지모델은 시스템의 입출력 데이터만으로 쉽게 인식되어질 수 있으며, 복잡한 비선형 시스템을 적은 수의 퍼지규칙들로 정밀하게 표현할 수 있었다.
- TSK 퍼지모델은 모델로부터 구한 평형점 부근을 선형화 함으로써 얻어진 Jacobian matrix의 고유값에 의해 안정성이 검증될 수 있음을 보였다.
- 따라서 안정성을 보장하며, 페루프 시스템의 응답이 원하는 선형 시스템의 응답과 같아지도록 극 배치법을 이용하여 TSK 퍼지제어기를 설계할 수 있으며, 또 적분제어도 사용할 수 있음을 보였다.
- 그리고 선박 조타시스템의 비선형 요소를 고려한 TSK 퍼지 비선

형 제어시스템을 설계하여 그 타당성을 입증하였다.

그러나 TSK 퍼지시스템은 퍼지규칙 결론부의 함수적 성질 때문에 이해하기가 어려우며, 오차가 발생하여도 파라미터의 조정이 어렵다.

따라서 TSK 퍼지시스템의 장점을 살리고 특정 부분에서의 오차를 수정하기 위한 파라미터의 조정이 어려운 단점을 보완하고, singleton 퍼지시스템의 규칙의 파라미터 조정을 통해 오차를 수정할 수 있는 장점과 체계적인 모델 인식과 제어기 설계가 어려운 단점을 보완하기 위하여 제 3장에,

- TSK 퍼지시스템의 singleton 퍼지시스템으로의 변환 방법을 제안하였고,
- 퍼지모델링의 경우, 제안한 변환 방법으로 입출력 데이터를 이용하여 적은 수의 규칙으로 구성되는 TSK 퍼지모델을 인식하고 singleton 퍼지모델을 인식할 수 있음을,
- 또 퍼지제어기 설계의 경우, TSK 퍼지제어기로부터 제안한 변환 방법을 이용하여 singleton 퍼지제어기를 체계적으로 설계할 수 있음을 응용 예를 통해 보였다.

그 결과 TSK 퍼지시스템의 모델 인식의 용이성과 안정성을 보장하면서 체계적인 제어기 설계가 가능한 장점을 살리고, singleton 퍼지시스템의 언어적 이해 및 규칙의 파라미터 조정이 용이하여, 원하는 응답과 차이를 나타내는 특정 부분에서의 오차를 수정할 수 있는 장점을 살릴 수 있음을 시뮬레이션을 통해 보였다.

참 고 문 헌

- [1] L. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes," IEEE Trans. on SMC, 3, pp.28-44, 1973.
- [2] E. H. Mamdani, "Applications of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant," Proc. IEEE, vol. 121, No.12, pp.1585-1588, Dec. 1974.
- [3] W. Pedrycz, "An identification algorithm in fuzzy relational systems," Fuzzy Sets and Systems, vol. 13, pp.153-167, 1984.
- [4] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modelling and Control," IEEE Trans. on SMC, vol. 15, No.1, pp.116-132. 1985.
- [5] R. Babuska and H. B. Verbruggen, "A new identification method for linguistic fuzzy models," Proc. 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, vol. 2. pp.905-912, 1995.
- [6] L. T. Koczy, "Fuzzy If ... Then Rule Models and Their Transformation into one another," IEEE Trans. Syst. Man and Cybern., Part A, vol. 26, pp.621-637, 1996.
- [7] M. Maeda and S. Murakami, "An Automobile Tracking Control with Fuzzy Logic," Proc. of 3rd Fuzzy System Symposium, pp.61-66, 1987.
- [8] T. Ishikawa, "A Study do Fuzzy Control of an Arm Robot," B. E. Thesis supervised by M. Sugeno, Dept. of Control Engineering, Tokyo Institute of Technology, 1988.
- [9] H. Takeda and T. Ishikawa, "Adaptive Fuzzy Control for Catch-ball System," Proc. of 4th Fuzzy System Symposium, pp.77-82, 1988.

- [10] M. Sugeno et al., "Intelligent Control of Unmanned Helicopter Based on Fuzzy Logic," Proc. of American Helicopter Society 51st Annual Forum, pp.791-803, Texas, 1995.
- [11] M. Sugeno and K. Murakami, "Fuzzy Parking Control of Model Car," Proc. of 23rd IEEE CDC, pp.902-903, 1984.
- [12] M. Sugeno and G. Kang, "Structure Identification of Fuzzy Model," Fuzzy Sets and Systems, vol. 28, pp.15-33, 1988.
- [13] L. Wang and R. Langari, "Building Sugeno type models using fuzzy discretization and orthogonal parameter estimation techniques," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 3, pp.454-458, 1995.
- [14] L. Wang and R. Langari, "Complex systems modeling via fuzzy logic," IEEE Trans. on SMC-B, 26, pp.100-106, 1996.
- [15] E. Kim, M. Park, S. Ji and M. Park, "A new approach to fuzzy modeling," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 5, pp.328-337, 1997.
- [16] J. Buckley, "Sugeno type controllers are universal controller," Fuzzy Sets and Systems, vol. 53, pp.199-303, 1993.
- [17] M. Sugeno and M. Nishida, "Fuzzy Control of Model Car," Fuzzy Sets and Systems, vol.16, pp.103-113, 1985.
- [18] M. Sugeno and G. Kang, "Fuzzy Modelling and Control of Multilayer Incinerator," Fuzzy Sets and Systems, vol. 18, pp.329-346, 1986.
- [19] Y. S. Lee, S. J. Jeong, S. Y. Kim, and G. Kang, "Hull Form Generation by Using Fuzzy Model," in Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress, pp.1234-1237, 1993.
- [20] M. Kim and G. Kang, "Design of Fuzzy Controller Based on Fuzzy Model for Container crane System," in Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress, pp.1250-1253, 1993.
- [21] R. Babuska, Rene Jager and H. B. Verbruggen, "Interpolation

- issues in Sugeno-Takagi reasoning," IEEE World Congress on Computational Intelligence, Orlando, U.S.A., 1994.
- [22] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," *Information and Control*, vol. 8, pp.338-353, August 1965.
- [23] I. G. Umbers and P. J. King, "An Analysis of Human Decision Making in Cement Kiln Control and the Implications for Automation," *Int. J. Man Mach. studies*, vol. 12, No.1, pp.11-23, 1980.
- [24] L. P. Holmblom and J. J. Ostergaard, "Control of a Cement Kiln by Fuzzy Logic," in *Fuzzy Information and Decision Processes*, M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines, Eds, Amsterdam, North-Holland, pp.285-320, 1982.
- [25] J. J. Ostergaard, "Fuzzy Logic Control of a Heat Exchanger Process," in *Fuzzy Information and Decision Processes*, North-Holland, 1977.
- [26] 水本 雅晴, "最近의 퍼지 제어법," *數理科學*, 第29卷 3号, pp.20-26, 1991.
- [27] 柳下, 伊藤, 菅野, "ファジィ理論の 浄水場 薬品注入 制御への 應用," *システムと 制御*, vol. 28, No.10, pp.597-604, Oct. 1984.
- [28] O. Yagishita, O. Itoh, M. Sugeno, "Application of Fuzzy Reasoning to the Water Purification Process," in *Industrial Application of Fuzzy Control*, North-Holland, 1985.
- [29] T. Takagi and M. Sugeno, "Derivation of Fuzzy Control Rules from Human Operator's Control Actions," *IFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*, Marseille, 1983.
- [30] M. Sugeno and K. Muramaki, "Fuzzy Parking Control of Model Car," in *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, 1984.
- [31] 安信 誠二, 官本 捷二, 井原 廣一 "ファジィ 制御による列車定位置

- 停止制御,” 計測自動制御學會論文集, vol. 19, No.11, pp.873-880, 1984.
- [32] 安信 誠二, 官本 捷二, “ファシイ 制御の 列車 自動運轉 システムへの 應用,” 日本電氣學會紙, vol. 104, No.10, pp.867-874, 1984.
- [33] S. Yasunobu, S. Miyamoto, “Automatic train operation system by predictive fuzzy control,” in Industrial Application of fuzzy control(M. Sugeno eds.), North Holland, Elsevier Publishers, pp.1-18, 1985.
- [34] S. Yasunobu and T. Hasegawa, “Evaluation of an automatic container crane operation system based on predictive fuzzy control,” Control Theory and Advanced Technology, vol. 2, pp.419-432, 1986.
- [35] 朴玟用, 崔恒植 譯, “퍼지시스템의 응용입문,” 大英社, 1990.
- [36] 廣田 薫 監修, “퍼지의 새로운 기술 전개와 응용 사례,” トリケツプス, pp.9-18, 1993.
- [37] 채석, 이지홍, 오영석, 이상윤, “애매논리를 이용한 컬러 텔레비전의 백색균형 자동조정에 관한 연구,” 대한 전자공학회 논문지, vol. 30, No.6, 1993.
- [38] 이재봉, 김지현, 박윤서, 선희복, “GA-Fuzzy Algorithm에 의한 세탁기 모터의 제어,” 한국 퍼지 및 지능시스템 학회지, vol. 5, No.2, June 1995.
- [39] T. S. Lim and Z. Bien, “FLC Design with Multiple Control Objectives and Application to Overhead Crane Control,” Fuzzy Logic and Its Applications to Engineering, Intelligent System and Information Science (Z. Bien, et al. ed.), Kluwer Academic Publisher, 1995.
- [40] Y. S. Song, “Design of Fuzzy Sensor-based Fuzzy Combustion Control System for Refuse Incinerator,” Thesis paper of Korea Advanced Institute of Science and Technology, Dept. of Automation and Design Engineering, 1977.

- [41] 강동오, 양세현, 변증남, "퍼지모델 기반 다목적 제어기의 설계와 자기부상열차 자동운전 시스템에의 적용," 한국 퍼지 및 지능시스템 학회지, vol. 8, No.7, Dec. 1998.
- [42] 박영철, 전효병, 임채복, 심귀보, "퍼지제어기를 이용한 사출금형 자동 온도컨트롤 시스템의 개발," 한국 퍼지 및 지능시스템 학회지, vol. 9, No.3, June 1999.
- [43] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis of Fuzzy Systems using Lyapunov's Direct Method," Proc. of NAFIPS'90, pp.133-136, 1990.
- [44] S. Kawamoto et al., "An Approach to Stability Analysis of Second Order Fuzzy Systems," Proc. of 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, pp.1427-1434, 1992.
- [45] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems," Fuzzy Sets and Systems, vol. 45, pp.135-156, 1992.
- [46] W. C. Kim et al., "Stability of Linguistic Fuzzy Model Systems in State Space," Proc. of 5th IFSA World Congress, pp.953-955, Seoul, 1993.
- [47] K. Tanaka, M. Sano, "Fuzzy Stability Criterion of a Class of Nonlinear Systems," Inform. Sciences Intelligent Systems, vol. 22, pp.51-68, 1993.
- [48] S. Kawamoto et al., "Fuzzy-Type Lyapunov Function," Proc. of 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, pp.1431-1436, San Francisco, 1993.
- [49] S. Kawamoto et al., "An Extension of Tanaka-Sugeno's Stability Theorem for Fuzzy Systems," J. Japan Soc. of Fuzzy Theory and Systems, vol. 5, No.5, pp.1190-1199, 1993.
- [50] A. Ishigame, T. Furugawa, S. Kawamoto, and T. Taniguchi, "Sliding Model Controller Design Based on Fuzzy Inference for Nonlinear Systems," IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol.

40, pp.64-70, Feb. 1993.

- [51] K. Tanaka and M. Sano, "On the Concepts of Regulator and Observer of Fuzzy Control System," in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp.767-772, 1994.
- [52] K. Kiriakidis, A. Grivas, and A. Tzes, "A Sufficient Criterion for Stability of the Takagi- Sugeno Fuzzy Model," in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, vol. 1, pp.277-283, 1996.
- [53] M. A. L. Thathachar and pramod Viswanath, "On the Stability of Fuzzy Systems," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 5, pp.145-151, Feb. 1997.
- [54] H. Kang, C. Kwon, Y. Yee, and M. Park, " L_2 Robust Stability Analysis for the Fuzzy Feedback Linearization Regulator," in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp.277-280, 1997.
- [55] G. Kang, "Fuzzy Modelling of systems and Design of Fuzzy Controllers," Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1987.
- [56] K. Tanaka, M. Sano, "Concept of Stability Margin for Fuzzy Systems and Design of Robust Fuzzy Controllers," Proc. of 2nd IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, pp.29-34, San Francisco, 1993.
- [57] C. L. Chen et al., "Analysis and Design of Fuzzy Control System," Fuzzy Sets and Systems, vol. 57, pp.125-140, 1993.
- [58] K. Tanaka, M. Sano, "Trajectory Stabilization of a Model Car via Fuzzy Control," Fuzzy Sets and Systems, vol. 70, pp.155-170, 1995.
- [59] S. G. Cao and N. W. Rees, "Analysis and Design of Fuzzy Control Systems," Proc. of Int. Joint Conf. of 4th FUZZ-IEEE and 2nd IFES, pp.317-324, Yokohama, 1995.
- [60] H. O. Wang et al., "Parallel Distributed Compensation of

- Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model," Proc. of Int. Joint Conf. of 4th FUZZ-IEEE and 2nd IFES, pp.531-538, Yokohama, 1995.
- [61] W. C. Kim et al., "Stability Analysis and Stabilization of Fuzzy State Space Model," Fuzzy Sets and Systems, vol. 71, pp.131-142, 1995.
- [62] S. G. Cao et al., " Analysis and Design of Fuzzy Control Systems Using Dynamic Fuzzy Global Models," Fuzzy Sets and Systems, vol. 75, pp.47-62, 1995.
- [63] J. Zhao et al., "Linear TS Models Based Robust Stabilizing Controller Design," Proc. of 34th IEEE CDC, pp.255-260, New Orleans, 1995.
- [64] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Quadratic Stability Analysis and Design of Discrete-Time Fuzzy Control System," Proc. of IEEE, SICICI 95, pp.189-192, 1995.
- [65] U. Rehfuess and R. Palm, "Design of Takagi-Sugeno Controllers Based on Linear Quadratic Control," Proc. of 1st Int. Symposium on Fuzzy Logic, pp.C10-C15, Zurich, 1995.
- [66] J. Zhao, V. Wertz and R. Gorez, "Design a Stabilizing Fuzzy and/or Non-Fuzzy State-Feedback Controller using LMI method," Proc. of 3rd European Control Conf., Rome, pp.1201-1206, 1995.
- [67] G. Kang and W. Lee, "Design of Fuzzy Parameter Adaptive Controllers," in Proc. International Fuzzy Systems Association World Congress, pp.609-612, 1995.
- [68] K. Kiriakidis and A. Tzes, "Application of Implicit Self-Tuning Fuzzy control to Nonlinear Systems," in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp.1419-1426, 1995.
- [69] G. Kang and W. Lee, "Design of Fuzzy State Controllers and Observers," in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp.1355-1360, 1995.

- [70] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, "Quadratic Stability Analysis and Design of Continuous-Time Fuzzy Control System," *Int. J. System Sci.*, vol. 27, pp.193-203, 1996.
- [71] S. G. Cao et al., "Stability Analysis of Fuzzy Control System," *IEEE Trans. System Man and Cybern., Part B*, vol. 26, pp.201-204, 1996.
- [72] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.14-23, Feb. 1996.
- [73] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H Control Theory, and Linear Matrix Inequalities," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.1-13, Feb. 1996.
- [74] K. Tanaka et al., "Quadratic Stability and Stabilization of Fuzzy Control Systems," *Proc. of 1996 Biennial Conference of NAFIPS*, pp.245-249, Berkeley, June 1996.
- [75] S. Kim, Y. Cho, and M. Park, "A Multirule-Base Controller Using the Robust Property of a Fuzzy Controller and Its Design Method," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.315-327, Aug. 1996.
- [76] S. G. Cao et al., "A Stabilization Algorithm for Discrete-Time Fuzzy Control Systems," *J. of Intelligent and Fuzzy Systems*, vol. 4, pp.281-293, 1996.
- [77] S. G. Cao et al., "Fuzzy Control Nonlinear Discrete-Time Systems," *Proc. of 5th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, pp.265-271, New Orleans, Sept. 1996.
- [78] K. Tanaka, H. O. Wang, "Fuzzy Control of a Vehicle with Two Trailers," *Proc. of Int. Workshop on Breakthrough Opportunities for Fuzzy Logic*, pp.50-55, Yokohama, Dec. 1996.

- [79] D. P. Filev, "Model Based Design of Fuzzy Logic Controllers," Proc. of Int. Workshop on Breakthrough Opportunities for Fuzzy Logic, pp.34-39, Yokohama, Dec. 1996.
- [80] G. Feng et al., "Design of Fuzzy Control Systems with Guaranteed Stability," Fuzzy Sets and Systems, vol. 85, pp.1-10, 1997.
- [81] D. Driankov, R. Palm, and U. Rehfuess, "A Takagi-Sugeno Fuzzy Gain-Scheduler," in Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, vol. 2, pp.1053-1059, 1996.
- [82] A. G. Ivaknenko, V. N. Vysotskiy, and N. A. Ivaknenko, "Principal Versions of the Minimum Bias Criterion for a Model and an Investigation of Their Noise Immunity," Soviet Automatic Control, vol. 11, pp.27-45, 1978.
- [83] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and Control Dynamical Systems Using Neural Networks," IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 4, pp.4-27, Mar. 1990.
- [84] K. Zeng, N. Zhang, and W. Xu, "A Comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 8, pp.773-780, 2000.
- [85] H. Lam, F. Leung, and P. Tam, "Stable and robust fuzzy control for uncertain nonlinear systems," IEEE Trans. on SMC-A, 30, pp.825-840, 2000.
- [86] Y. Chae, K. Oh, W. Lee, G. Kang, "Transformation TSK fuzzy system into fuzzy system with singleton consequents and its application," Proc. 1999. FUZZ-IEEE '99. vol. 2, pp.969-973, 1999.
- [87] 강근택, 이원창, "TSK퍼지모델로부터 TSK퍼지제어기의 설계," 대한전자공학회 논문집 S편, 35-11, pp.1515-1529, 1998.
- [88] L. Chua and A. Deng, "Canonical piecewise linear modelling," IEEE Trans. on Circuits Syst., CAS-33, pp.511-525, 1986.

- [89] 강근택, 권태하, “반도체소자의 퍼지모델,” 대한전자공학회 논문집 26-12, pp.106-114, 1986.
- [90] Jeffery R. Layne and Kevin M. Passino, “Fuzzy Model Reference Learning Control for Cargo Ship Steering”, IEEE Control Systems, pp.23-34, December, 1993.
- [91] 이철영, 김환수, “Fuzzy Logic Controller에 의한 선박의 제어”, 한국항해학회지, 제5권, 제2호, pp. 59~88, 1981.
- [92] N. Minorsky, “Directional Stability of Automatically Steered Bodies”, J. of ASNE, vol.34, 1922.