

공학박사 학위논문

셀룰러 오토마타의 행동분석 및 영상강조를 위한
새로운 셀룰러 오토마타 알고리즘

지도교수 김 석 태

이 논문



제출함

2004년 2월

부경대학교 대학원

정보통신공학과

이 석 기

이석기의 공학박사 학위논문을 인준함

2003년 12월 26일

주 심 이학박사 조 성 진



부 심 공학박사 문 광 석



위 원 공학박사 권 기 룡



위 원 공학박사 장 주 석



위 원 공학박사 김 석 태



목 차

표 목 차	iv
그림 목차	v
약 어 표	vii
Abstract	viii
제 1 장 서 론	1
제 2 장 셀룰러 오토마타	5
2.1 셀룰러 오토마타의 정의	5
2.2 1차원 셀룰러 오토마타	8
2.2.1 1차원 셀룰러 오토마타의 정의	8
2.2.2 천이 행렬과 특성다항식	14
2.3 2차원 셀룰러 오토마타	16
2.3.1 2차원 셀룰러 오토마타의 정의	16
2.3.2 천이 행렬	17
2.4 1차원 셀룰러 오토마타 분류	22
2.4.1 1차원 셀룰러 오토마타의 천이 영상	22
2.4.2 1차원 셀룰러 오토마타의 파워스펙트럼	25
제 3 장 셀룰러 오토마타의 수학적 성질	28
3.1 선형 비그룹 셀룰러 오토마타의 정의	28
3.2 선형 TPMACA	31
3.2.1 선형 TPMACA의 정의 및 성질	31

3.2.2 선형 TPMACA의 상태전이 그래프 트리 구성 알고리즘	34
3.3 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA	38
3.3.1 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA의 성질	38
3.3.2 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA의 상태전이 그래프 구성 알고리즘	42
3.4 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA의 트리 구성 알고리즘	48
3.5 TPSACA를 이용한 완전 해싱 알고리즘	49
3.5.1 해쉬함수의 정의	51
3.5.2 TPSACA를 이용한 완전 해싱 이론 및 MRT 계산	53
3.5.3 TPSACA를 기반으로 하는 완전 해싱 알고리즘	63

제 4 장 미디언 천이 규칙을 갖는 셀룰러 오토마타를 이용한

영상의 잡음 제거 및 에지 추출	65
4.1 실험 배경	65
4.2 영상의 잡음 제거 및 에지 추출 알고리즘	67
4.2.1 잡음 제거 알고리즘	72
4.2.2 에지 추출 알고리즘	76
4.3 실험 결과 및 고찰	78

제 5 장 국소 천이 규칙을 갖는 셀룰러 오토마타를 이용한

영상 침예화	91
5.1 실험 배경	91
5.2 영상의 침예화를 위한 알고리즘	92

5.2.1 기본 정의	92
5.2.2 국소 천이 규칙	93
5.2.3 국소 천이 함수의 수립 조건	95
5.3 실험 결과 및 고찰	96
 제 6 장 결 론	 98
 참고 문헌	 100

표 목 차

표 2.1 CA의 기본적 구성	7
표 2.2 상태전이 배열의 예제	9
표 2.3 규칙 150 CA의 다음 상태 배열	12
표 3.1 주어진 키의 해시 과정	60
표 3.2 주어진 키 집합 X_2 의 해시 과정	63
표 4.1 그림 4.2·4.4의 잡음 제거 영상 분석	85

그림 목차

그림 2.1	CA의 공간적 형태	6
그림 2.2	CA의 이웃하는 셀의 모델	6
그림 2.3	1 D CA의 경계조건	11
그림 2.4	규칙 54의 1차원 elementary CA의 발전	13
그림 2.5	규칙 150의 상태전이 영상	13
그림 2.6	2 D CA의 구조	16
그림 2.7	3×4 2-D NBCA	19
그림 2.8	4×5 Pure 2-D IBCA	20
그림 2.9	Inner 2 D IBCA	21
그림 2.10	Outer 2 D IBCA	21
그림 2.11	256 CA의 상태전이 영상	24
그림 2.12	CA의 파워스펙트럼	27
그림 3.1	TPMACA의 구조와 상태전이 그래프	30
그림 3.2	5-셀 선형 TPMACA의 상태전이 그래프	34
그림 3.3	5-셀 TPMACA의 상태전이 그래프	37
그림 3.4	6-셀 TPMACA의 상태전이 그래프	45
그림 3.5	여원 CA의 상태전이 그래프	47
그림 3.6	해시 함수	51
그림 3.7	4-셀 TPSACA의 구조	57
그림 3.8	4-셀 TPSACA의 상태전이 그래프	58

그림 3.9	4-셀 여원 TPSACA의 상태전이 그래프	62
그림 4.1	제안된 규칙의 국소적인 변화	73
그림 4.2	제안한 CA 방법의 균일분포잡음 제거 영상	81
그림 4.3	제안한 CA 방법의 가우시안 잡음 제거 영상	83
그림 4.4	제안한 CA 방법의 임펄스 잡음 제거 영상	84
그림 4.5	에지 추출 결과의 비교(레나 영상)	87
그림 4.6	에지 추출 결과의 비교(앵무새 영상)	88
그림 4.7	에지 추출 결과의 비교(카메라 영상)	89
그림 4.8	에지 추출 결과의 비교(우주선 영상)	90
그림 5.1	영상의 유한 상태 그래프 표시	92
그림 5.2	제안한 규칙의 영상 첨예화	97

약 어 표(Abbreviations)

CA	: Cellular Automata
1-D CA	: 1-Dimension Cellular Automata
2-D CA	: 2-Dimension Cellular Automata
NBCA	: Null Boundary Cellular Automata
PBCA	: Periodic Boundary Cellular Automata
IBCA	: Intermediate Boundary Cellular Automata
LNCA	: Linear Nongroup Cellular Automata
TPMACA	: Two Predecessor Multiple Attractor Cellular Automata
TPSACA	: Two Predecessor Single Attractor Cellular Automata
MRT	: Minimal Running Time
PB	: Pivot Bit
MSE	: Mean Square Error
PSNR	: Peak Signal to Noise Ratio

Analysis of Behaviors in Cellular Automata and New Cellular Automata Algorithms for Image Enhancement

Seok-Ki Lee

Department of Telematics Engineering, Graduate School.

Pukyong National University

Abstract

Cellular Automata(CA) are discrete dynamical systems, which consist of state, neighborhood, and rule. States of each cell in the lattice are updated according to a local rule. That is, the state of a cell at a given time depends on only its own state and its nearby neighbor states at the previous time step.

In this paper, we analyze behaviors of a linear TPMACA (two-predecessor multiple-attractor CA) and we propose an algorithm to calculate the other state values in the state space for a cell only with XOR operations by using basic paths into TPMACA. After XNOR logic is applied to complemented TPMACA, its state-transition diagram is obtained by using both a basic path in the 0 tree of a linear TPMACA and a simple

summation operation. We also propose a perfect hashing algorithm by using a linear TPSACA(two-predecessor single attractor CA), i.e., the special case of a linear TPMACA, and properties of complemented TPSACA. We discuss its advantage and efficiency.

In addition, we propose a new CA transition rule for image enhancement. From this rule, we develop a noise removal and edge detection algorithm, and an image sharpening algorithm. The proposed CA transition rule applies mainly to image pixels where gray values are significantly different from their neighbors, and then it locally increases or decreases the gray value difference between the neighboring pixels without loss of the main characteristics of the image. The dynamical behavior of the algorithm is determined by whether sequential update or parallel update is used for the Lyapunov operator. We have found that proposed CA transition rules show fast convergence to fixed points, and stability for input images with random noise. We demonstrate advantages and efficiency of the proposed algorithm through experiments.

Key words : cellular automata, TPMACA, noise removal, edge detection,
image sharpening

제 1 장 서 론

최근 생명체의 행동적 특성을 연구하여 인공적인 환경(computer)에서 생명체를 재창조하려는 인공생명(artificial life)에 관한 연구가 각광을 받고있다. 인공생명 연구분야는 퍼지 시스템, 복잡한 동적 시스템, 군 집단 로봇, 카오스 시스템, 인공지능, 셀룰러 오토마타(cellular automata : CA) 등의 다양한 분야와 연관성을 가지고 있다. 그중 CA는 자신을 복제하는 기능을 가지는 시스템을 수학적으로 접근한 이론이다[1]~[3].

CA는 해석공간을 셀(cell)이라는 부분영역으로 분할한 후 각 셀에 상태값을 정의한다. 그리고 가까운 근방의 셀들 사이에서 정의된 규칙(rule)을 이용하여 이산적 시간에 따라 상태량을 천이시키는 모델링 방법이다[4].

CA는 뉴럴 네트워크와 같이 병렬 다중 프로세스 시스템을 활용하고 있기 때문에 단순한 알고리즘을 이용하여 복잡한 탐색 공간을 효율적으로 탐색하는데 유용하다. 특히 시스템에서 구조와 패턴이 어떻게 발전하는가를 간단한 규칙을 통해 살펴볼 수 있게 해준다[5].

CA는 규칙에 의해서 변화되는 상태(state)에 따라 그룹(group) CA와 비그룹(nongroup) CA로 분류한다[6]. 먼저 그룹 CA는 천이행렬의 역행렬이 존재하며 특히 특성다항식이 원시다항식인 경우는 상태 0을 제외한 모든 상태들이 한 사이클을 이룬다.

Chowdhury 등[7],[8]은 다차원 그룹 CA를 제안하였으며, Muzio 등[9]은 최대 주기를 갖는 LFSR(linear feedback shift register)에 대응하는 CA를 선형법칙을 이용한 PCA(programmable CA)로 구성할 수 있음을 보였다. Das[10],[11]

는 최대 길이를 가지는 그룹 CA를 이용하여 패턴 생성 및 암호학 등에 응용하였다.

반면 비그룹 CA는 수학적 성질의 제약 때문에 활발하게 연구되지 못하였으나 최근 해시함수 생성이나 암호, 부울 방정식의 해법, 논리회로의 실험에 응용이 되면서 관심을 받고있다[6],[12],[38],[39]. 비그룹 CA는 임의의 한 상태에 대한 직전자수가 0이거나 2이상이므로 천이행렬의 역행렬이 존재하지 않는다. 그러므로 주어진 상태에 대한 역추적이 불가능한 특성을 가지고 있다[13].

Bhattacharjee[14]는 부울 방정식의 해법에 1-AND와 3-XOR 연산을 적용하는 비그룹 CA를 제안하였다. Chakraborty[15]는 비그룹 CA를 이용하여 상태값을 결정하는 알고리즘을 설계하였다. Choudhury[16]는 2-AND와 2-XOR 연산을 하는 CA 곱셈기를 설계하였고, Zhang[17]은 프로그램 가능한 CA를 이용하여 3-AND와 2-XOR의 병렬처리하는 방법을 제안하였다. 그러나 이들 연구는 곱셈 연산에 의해 다음 상태가 결정되는 복잡한 방법이며 비선형 시스템을 나타내지 못하는 단점이 있다. 따라서 비선형 시스템을 단순한 연산에 의해 표현할 수 있는 연구가 필요하며 비선형 시스템을 모델링할 수 있는 비그룹 CA의 개발이 절실히 요구된다.

본 논문에서는 선형 비그룹 CA의 행동을 분석하여 기본 경로를 통하여 나머지 상태의 위치를 단순히 XOR 연산으로 구하는 방법을 제안한다. 그리고 여원벡터를 갖는 비그룹 CA는 XNOR 논리를 적용하고 그것의 상태천이 그래프는 선형 비그룹 CA의 기본 경로와 단순한 덧셈 연산에 의해 구한다. 선형 TPMACA(two-predecessor multiple-attractor CA)의 특별한 경우인 선형 TPSACA(two-predecessor single-attractor CA)와 그것의 여원(complemented) TPSACA의 성질을 이용한 완전해시 알고리즘을 제안한다. 해시 주소의 비트

정보가 줄어들게 하는 MRT(minimal running time)를 이용하여 해시 주소를 결정할 수 있음을 보인다.

한편 영상처리는 인간의 시각을 공학적인 관점에서 실현하는 것으로 영상을 향상시키고 보정하며 해석하고 변환하는 처리이다[18]. 특히 영상처리에서 중요한 영상 강조(image enhancement)과정은 다음 과정에서 보다 나은 결과를 얻기 위해 영상을 개선하는 것이다. 구체적인 방법으로 잡음 제거, 에지 추출, 첨예화 등이 있다[19],[20]. 그러나 대상의 다양성, 계산량의 증가, 처리방법의 단순성으로 인해 범용적인 처리방법이 개발되지 못하고 있다.

Tsirikolias[21]는 논리 필터를 이용하여 잡음 제거와 에지 추출을 빠른 시간에 구현하였지만 영상마다 조건을 달리하여 실험을 해야하는 단점이 있다. 그리고 Feri·Chen[22]은 직교 마스크를 이용하여 에지를 추출하였으나 잡음이나 일정하지 않은 조명으로 생긴 경계의 파손과 밝기의 불연속성을 만들어내는 요인들 때문에 경계의 특성을 명확히 나타내지 못했다.

한편, Skolnick[23]는 모폴로지 연산에 CA를 적용하여 영상의 에지를 추출하였으나 영상의 특징이 왜곡되어 나타나는 단점이 있다. Hernandez[24]는 영상의 첨예화와 평활화에 CA를 적용하였으나 대상 영상에 따라 천이 규칙을 바꾸어줘야 하는 단점이 있다. 따라서 대상영상에 독립적이며 범용적인 천이 규칙을 개발하여 원 영상의 정보를 잃어버리지 않으면서 원하는 강조 영상을 얻는 것이 필요하다.

본 논문에서는 영상 강조를 위한 새로운 CA의 천이 규칙을 제안하고 그것을 이용한 잡음 제거 및 에지 추출, 영상 첨예화 알고리즘을 제안한다. 구체적인 방법은 대상 영상에 대한 특징을 보존하면서 천이 규칙에 따라 국부적으로 밝기값의 차이를 증가 및 감소시킨다. 이러한 CA는 순차적이고 병렬적인 움직임

임을 가지고 Lyapunov 함수를 만족한다. 제안한 천이 규칙은 랜덤 잡음을 가진 영상에 대해 빠른 수렴속도를 가지고 안정적인 결과를 나타낸다. 히스토그램과 MSE(mean square error)를 이용한 PSNR(peak signal to noise ratio)의 비교를 통해 유용성을 검증한다. 그리고 새로운 천이 규칙을 이용한 영상 점예화를 실험하여 유효성을 확인한다.

본 논문은 전체 6장으로 구성된다. 제 1장은 서론이며, 제 2장에서는 CA를 분류하여 수학적 성질을 정리한다. 제 3장에서는 선형 TPMACA의 트리구성과 여원 CA의 상태천이 그래프를 구성하는 알고리즘을 제안한다. 그리고 선형 TPMACA의 특별한 경우인 선형 TPSACA와 그것의 여원 TPSACA의 성질을 이용한 완전 해싱 알고리즘을 개발한다. 제 4장에서는 영상 강조를 위한 새로운 CA 천이 규칙을 제안하고, 영상의 잡음 제거와 에지 추출을 실험한다. 제 5장에서는 영상 점예화를 위한 또다른 CA 천이 규칙을 제안하며 실험을 통하여 유효성을 확인한다. 제 6장에서는 본 논문의 결과를 기술한다.

제 2 장 셀룰러 오토마타

셀룰러 오토마타(cellular automata : CA)란 동역학계(dynamical system)를 해석하는 한 방법으로 공간과 시간을 이산적으로 다루고, 이산적인 공간을 셀룰러 공간(cellular space)의 기본단위인 각 셀이 취할 수 있는 상태를 유한하게 처리하며, 각 셀들의 상태가 국소적인 상호작용에 의해서 동시에 갱신되는 시스템이다[25].

모든 선형 CA는 표수 2인 체 $GF(2)$ 상에서의 천이 행렬에 의해 유일하게 표현되고 모든 천이 행렬은 특성다항식을 가진다. 특성다항식은 CA의 특별한 성질을 나타내므로 주어진 특성다항식으로부터 그에 대응하는 CA를 찾아내는 것은 중요한 문제이다.

CA의 중요성은 ‘물리 세계’와 갖는 연관성에 있다. 복잡하고 역동적인 공간에서 천이는 서로 다른 규칙과 상태, 이웃에 따라 구체적인 특성으로써 나타난다[26]. CA는 물리 세계를 모델화하여 보편적인 복잡계를 이해하는 데에도 사용될 수 있다[27].

2.1 셀룰러 오토마타의 정의

CA는 인접한 셀들과 상호작용하도록 동일하게 프로그램된 컴퓨터 배열이다. 이는 각 셀마다 유한상태 오토마타(finite state automata)를 갖춘 D-차원의 격자이다. 여기서 CA의 배열은 일반적으로 그림 2.1의 띠모양의 1차원구조, 2차원 그리드 구조, 또는 3차원 입체구조 등의 공간적 형태를 가지고 있는

며 시간에 따라 전체적인 분포가 변화한다[28]-[30]. CA의 이웃(neighborhood)은 기본 이웃과 Von Neumann이 제안한 이웃, Moore가 제안한 이웃이 있으며 일반적으로 4근방 이웃이나 8근방 이웃을 사용한다. 그 외에도 필요에 따라 여러 가지 다른 형태의 이웃 세포 모델을 정의할 수 있다. 그림 2.2는 CA의 이웃을 나타내고 있다.

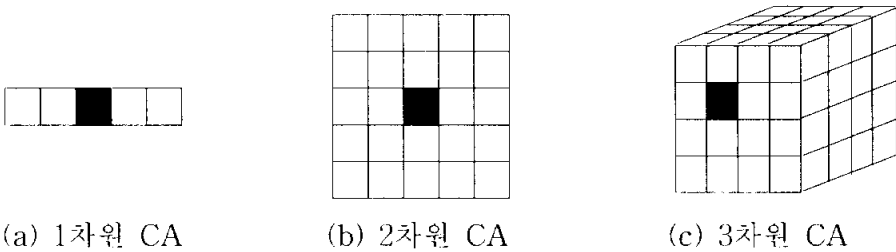


그림 2.1 CA의 공간적 형태

Fig. 2.1 Space form of CA.

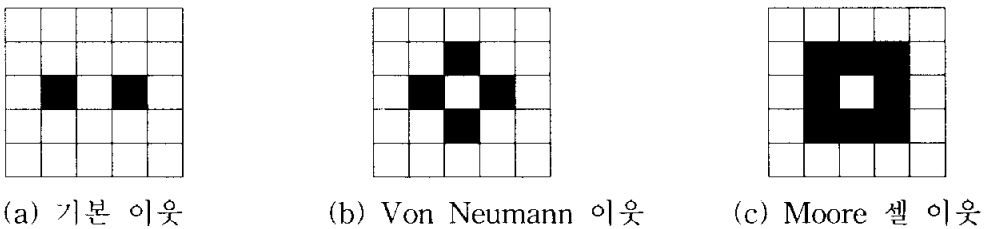


그림 2.2 CA의 이웃하는 셀의 모델

Fig. 2.2 Neighborhood cell model of CA.

CA의 기본적인 구성은 표 2.1에 나타나 있는 바와 같이 세포상태, 이웃, 규칙으로 되어 있다.

CA는 공간, 시간, 상태가 모두 이산적인 동적 시스템이다. 일정하게 배열된 공간 격자의 점을 셀이라고 부르며, 이 점들은 유한개 상태중의 한 가지를 가질 수 있다. 격자 구조 속의 셀상태는 국부적인 규칙에 의해서 수정(update)되는데, 주어진 시간의 셀상태는 바로 한 단계 이전 시간의 그 셀상태와 근방의 주변 셀들의 상태에 의해서만 변화한다. 그리고 격자내의 모든 셀들은 동기적인 시간에 따라 수정된다[31]. CA는 그 원형을 Von Neumann의 자기복제에서 찾을 수 있으며, 또한 자기 복제의 기능을 가진다.

표 2.1 CA의 기본적인 구성

Table 2.1 The essential features of CA.

구성요소	구성요소의 정의
상태(STATE)	셀이 가질 수 있는 한정된 수의 등급을 표시하는 변수이며, 이를 사용하여 숫자나 성질을 나타내게 할 수 있다. 현실 세계의 세포는 주로 ‘살아있는 상태’이거나 ‘죽어있는 상태’를 가질 수 있다. CA에서도 각각의 세포는 상태를 갖는다. 보통 ‘1’은 살아있는 상태를 ‘0’은 죽어있는 상태를 가리킨다. 그 외에도 정의에 따라 여러 가지 상태를 가질 수 있다.
이웃 (NEIGHBOR- HOOD)	서로 영향을 미치는 셀의 집합이며, 격자 내에서는 한 셀에 대해 가장 물리적으로 가까운 셀들을 나타낸다. 각 셀은 자신 외에 자신과 가까이 있는 이웃 셀 상태를 보고, 자신의 다음 세대 상태를 결정한다.
규칙(RULE)	현재 한 셀의 상태와 그 주변 상태의 조합으로 다음 상태를 결정하는 데 필요한 집합이다. 가능한 규칙의 개수는 상태 수의 주변 셀들의 개수에 대한 지수함수 꼴로 나타낼 수 있다. 일반적으로 규칙은 다변수의 논리함수로 표시할 수 있다.

2.2 1차원 셀룰러 오토마타

2.2.1 1차원 셀룰러 오토마타의 정의

가장 간단한 구조를 가지는 1차원 CA에서는 모든 셀들이 선형으로 배열되어 있다. 가장 중요한 것은 국소적 상호 작용이 이루어지는 세 개의 셀, 즉 자기 자신과 인접한 두 셀에 의해 이루어지는 3-이웃 CA이다. CA를 설명하기 위해서는 다음 기호들이 사용된다.

- ▷ i : 일차원으로 배열되어 있는 각 셀들의 위치
- ▷ t : 시간 단계
- ▷ $q_i(t)$: 시간 t 에서 i 번째 셀의 상태
- ▷ $q_i(t+1)$: 시간 $t+1$ 에서 i 번째 셀의 상태

3-이웃 CA에 대한 상태전이 함수(state transition function)는 다음과 같다.

$$q_i(t+1) = f[q_i(t), q_{i+1}(t), q_{i-1}(t)] \quad (2.1)$$

f 는 결합 논리를 가지는 국소 천이 함수이다. 표 2.2에서는 상태를 0과 1의 두 가지 값으로 다루고, 주어진 CA의 다음 상태천이 함수는 규칙에 따라 표현하고 있다. 첫 행은 시간 t 에서 인접한 세 개의 셀들이 나타낼 수 있는 8가지 상태의 배열이고, 다음 행들은 시간 $t+1$ 에서 i 번째 셀의 갱신된 상태이다.

표 2.2 상태전이 배열의 예제

Table 2.2 Example of state transition in array.

이웃상태	111	110	101	100	011	010	001	000	
다음상태	0	0	1	1	1	1	0	0	규칙 60
다음상태	0	1	0	1	1	0	1	0	규칙 90
다음상태	1	0	0	1	0	1	1	0	규칙 150

위의 규칙에 대한 결합논리는 다음 식으로 표현할 수 있고 $\oplus$ 는 XOR논리를 나타낸다.

$$\text{규칙 60 : } q_i(t+1) = q_{i-1}(t) \oplus q_i(t)$$

$$\text{규칙 90 : } q_i(t+1) = q_{i-1}(t) \oplus q_{i+1}(t)$$

$$\text{규칙 102 : } q_i(t+1) = q_i(t) \oplus q_{i+1}(t)$$

$$\text{규칙 150 : } q_i(t+1) = q_{i-1}(t) \oplus q_i(t) \oplus q_{i+1}(t)$$

$$\text{규칙 170 : } q_i(t+1) = q_{i+1}(t)$$

$$\text{규칙 204 : } q_i(t+1) = q_i(t)$$

$$\text{규칙 240 : } q_i(t+1) = q_{i-1}(t)$$

1차원 CA는 셀들에 적용되는 규칙의 논리에 따라 linear CA, additive CA, nonadditive CA로 분류된다.

▷ linear CA : 모든 셀들의 규칙이 XOR논리로만 이루어진 CA이다.

▷ additive CA : 셀들의 규칙이 XOR과 XNOR의 조합으로 이루어진 CA이다.

▷ nonadditive CA : 셀들의 규칙이 AND OR논리로 이루어진 CA이다.

모두 같은 규칙이 적용되었으나 경우에 따라 uniform CA, hybrid CA로 분류된다.

▷ uniform CA : 모든 CA의 셀들이 같은 규칙을 따르는 CA이다.

▷ hybrid CA : CA의 몇몇 셀들이 같은 규칙을 따르지 않는 CA이다.

셀들이 규칙에 의해 변화되는 상태에 따라 그룹 CA, 비그룹 CA로 분류된다.

▷ 그룹 CA : 모든 셀들의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는 CA이다.

▷ 비그룹 CA : 셀들의 몇몇 상태가 사이클을 이루지 않는 CA이다.

CA에서 가장 왼쪽과 가장 오른쪽 셀은 2개의 이웃만을 가지므로 이들의 세번째 이웃을 결정해 주는 일은 매우 중요하다. 세번째 이웃을 결정해 주는 것을 CA의 경계조건이라 한다. 일반적으로 CA는 경계조건에 따라 다음 세 가지로 분류한다.

▷ NBCA(null boundary CA) : 가장 왼쪽과 가장 오른쪽의 셀들이 0인 상태에 연결되어 있는 경우이다.

▷ PBCA(periodic boundary CA) : 양 끝의 셀들이 연결되어 있는 경우이다.

▷ IBCA(intermediate boundary CA) : 가장 왼쪽(오른쪽)셀의 다음 상태가 자신과 그것의 오른쪽(왼쪽) 이웃, 두번째 오른쪽(왼쪽) 이웃의 상태에 의존하는 경우이다.

그림 2.3은 CA의 경계조건을 나타낸 것이다.

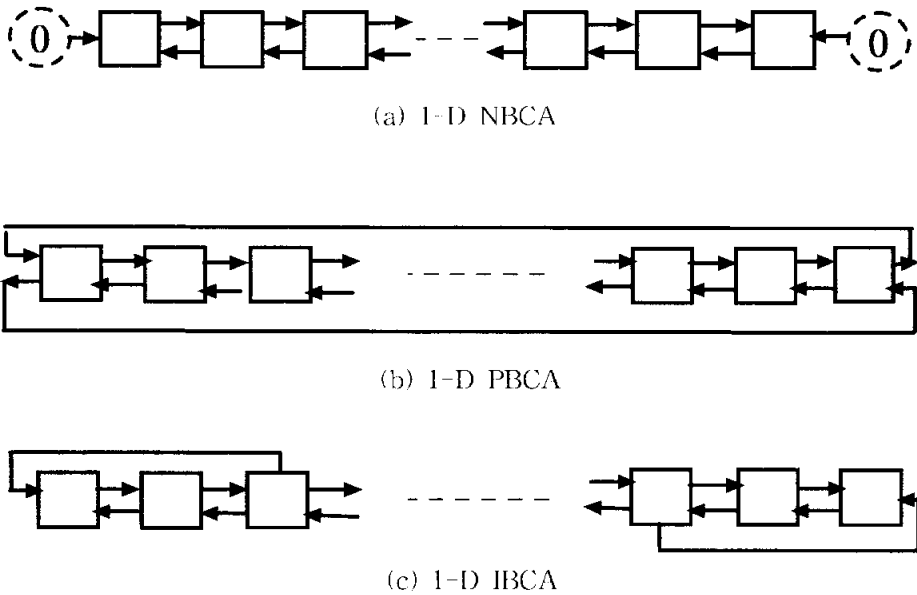


그림 2.3 1-D CA의 경계조건
Fig. 2.3 Boundary condition of 1-D CA.

<예제 2.1> 다음과 같이 1차원 CA의 간단한 예를 들어보자.

- ▷ 상태 : 0 또는 1 ($k=2$, 즉 1bit)
- ▷ 이웃 : 두 개의 인접 셀
- ▷ 규칙 : 임의의 셀 상태와 그 주변상태의 국부적인 수정규칙에 의해 새로 형성된 셀 상태를 나타낸다. 2개의 상태를 가진 3개의 셀들, 즉 $2^3=8$ 개의 규칙이 필요하다. 표 2.3에서 규칙의 한 예를 보이며, 1차원 CA의 경우 함수의 다음 상태가 $(10010110)_{(2)} = 150_{(10)}$ 이므로 규칙 150이라고 한다.

표 2.3 규칙 150 CA의 다음 상태 배열

Table 2.3 Next state array of rule 150 CA.

이웃상태	111	110	101	100	011	010	001	000	
다음상태	1	0	0	1	0	1	1	0	규칙150

그림 2.4는 초기조건이 하나의 셀이 상태가 1(검은색)이고, 나머지는 모두 0(흰색)인 경우에 시간에 따라 위에서 정의된 1차원 CA 배열이 어떻게 변화하는지를 보여준다. 경계조건은 1-NBCA를 이용하여 가장 왼쪽과 오른쪽 셀은 0상태에 연결되어 있는 경우를 조건으로 하였다. 그림 2.4에서 CA의 성질은 아래와 같다.

첫째, 자기조직의 특징이 있다. 즉, 시간이 지남에 따라 연속적인 셀상태가 불규칙한 상태배열에 대해서 프로그램에 따라 어떤 패턴으로 생성되어 나가는지 관찰할 수 있다.

둘째, 생명과 유사한 행동(life-like behavior)을 들 수가 있다. Wolfram과 다른 연구자들의 경험적 연구에 의하면 아무리 단순한 1차원 CA라도 복잡한 생물학적 시스템의 특성을 보이는 것으로 알려져 있다. 예를 들어, CA의 임의 초기형태에 대한 운명은 소멸(사망)하고, 안정화되고, 특정주기를 가지고 반복하며, 일정속도를 가지고 성장하거나, 불규칙하게 발전과 쇠퇴를 거듭한다.

셋째, 열적 특성(thermal characteristics)이 있다. 이는 상태변화를 유도하는 CA 모델들이 부분적으로 격자형태에 대해 고정된 패턴으로 결빙시키는 한편, 대부분의 격자형태에 대해서는 확산시키는 활성가스와 같은 성질을 보이기 때문이다.

시간	1차원 CA 공간														
0								■							
1							■	■	■						
2						■		■		■					
3					■	■		■		■	■				
4				■				■					■		
5			■	■	■		■	■	■		■	■	■		
6		■		■				■				■		■	

그림 2.4 규칙 54의 1차원 elementary CA의 발전
 Fig. 2.4 Evolution of one-dimensional elementary CA according to the rule 54.

그림 2.5는 Wolfram이 제안한 천이 영상을 실험하였다[32]. <예제 2.1>의 조건과 똑같은 1 NBCA를 이용하여 나타내었다.

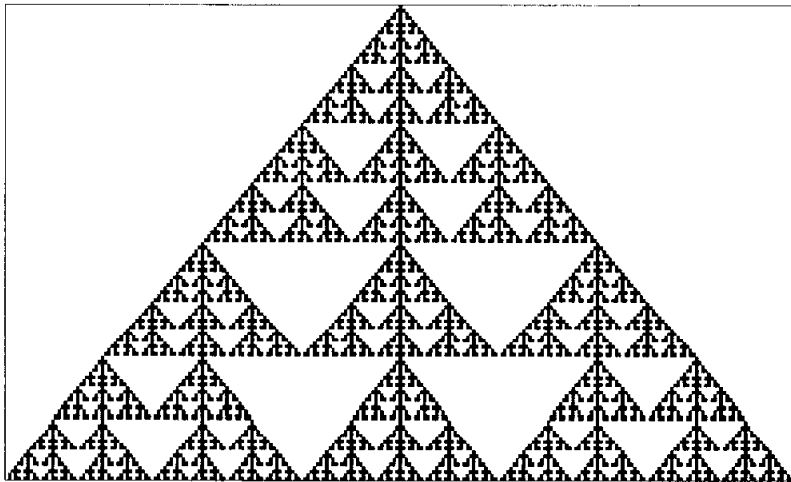


그림 2.5 규칙 150의 상태천이 영상
 Fig. 2.5 State transition of rule 150.

2.2.2 천이 행렬과 특성다항식

n 개의 셀을 가지는 1-D CA에서는 현재상태를 다음 상태로 천이시키는 작용소를 $n \times n$ 행렬로 나타낼 수 있는데 이것을 CA의 천이 행렬(transition matrix)이라 한다.

천이 행렬 T 에서 i 번째 행은 i 번째 셀에 적용되는 규칙이며 그 셀에 다음 상태가 현재 상태에 의존하면 1, 그렇지 않으면 0으로 쓴다. 예를 들면 4-셀 1차원 NBCA의 규칙이 $\langle 90, 150, 150, 90 \rangle$ 이면 천이 행렬은 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$f_t(x)$ 가 시간 t 에서 CA의 상태를 나타내면 시간 $t+1$ 에서의 상태는 다음과 같다.

$$f_{t+1}(x) = T \cdot f_t(x) \quad (2.3)$$

즉,

$$f_{t+p}(x) = T^p \cdot f_t(x) \quad (2.4)$$

예를 들어 CA의 현재 상태가 $f_t(x) = [0\ 1\ 0\ 1]^T$ 이면 다음 상태는 다음과 같다.

$$f_{t+1}(x) = T \cdot f_t(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

특성다항식(characteristic polynomial)이란 주어진 CA의 천이 행렬 T 에 대하여 GF(2)상에서 $(T + xI)$ 의 행렬식 값을 구하는 것이다.

최소다항식(minimal polynomial)은 특성다항식의 인수 중 T 를 근으로 갖는 차수가 가장 낮은 다항식이다.

CA의 천이 행렬이 T 일 때, T 의 특성다항식 $C(x)$ 은 다음과 같다. 여기서 I 는 n 차 단위행렬이다.

$$C(x) = |T + xI| \quad (2.6)$$

예를 들어 아래 행렬에 대한 특성다항식을 구해보면

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ |T + xI| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^2 + x + 1)^2 \end{vmatrix} \\ &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.3 2차원 셀룰러 오토마타

2.3.1 2차원 셀룰러 오토마타의 정의

2-D CA는 1-D CA의 일반화로서 이웃하는 셀들이 두 개의 축 상에 배열되어 있다. 셀의 다음 상태는 그 자신과 인접한 네 가지의 셀(위, 왼쪽, 아래, 오른쪽)의 상태에 영향을 받으며 다음 식으로 표현되며 q_{ij}^t 는 시간 t 에서 i 행 j 열의 셀 상태를 나타낸다.

$$q_{ij}^{t+1} = f[q_{ij}^t, q_{i-1j}^t, q_{i+1j}^t, q_{ij-1}^t, q_{ij+1}^t] \quad (2.8)$$

f 는 5개의 변수를 가지는 Boolean함수이므로 2^5 , 즉 32개의 서로 다른 배열을 가진다. $m \times n$ 개의 셀들이 m 행 n 열로 배열되어 있는 2-D CA의 천이행렬은 $mn \times mn$ 행렬로서 표현된다. 그림 2.6은 2-D CA의 구조를 보여준다.

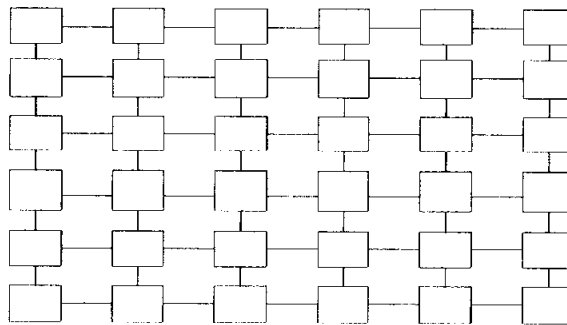


그림 2.6 2-D CA의 구조
Fig. 2.6 Structure of 2-D CA.

2-D CA에서의 규칙은 5비트의 수(자신, 위, 왼쪽, 아래, 오른쪽)로 표시하고 각각의 비트는 의존도를 나타낸다. 만약 하나의 셀의 다음 상태가 아래와 오른쪽의 셀의 상태에만 의존한다면 그러한 규칙은 (0, 0, 0, 1, 1) 또는 3으로 표시한다. 예를 들면 3×3 2차원 규칙 행렬 R 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} 7 & 29 & 7 \\ 29 & 29 & 7 \\ 29 & 29 & 7 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

여기서 (i, j) 의 원소는 (i, j) 번째 셀의 규칙이다. 규칙 7은 (0, 0, 1, 1, 1) 즉 왼쪽, 아래쪽, 오른쪽 이웃에 영향을 받고, 규칙 29는 (1, 1, 1, 0, 1) 즉 자신, 위쪽, 왼쪽, 오른쪽 이웃에 영향을 받는다.

2.3.2 천이 행렬

2-D CA를 다루기 위해서 그것을 1-D CA의 확장으로 보고 천이 행렬을 구한다. 일반적으로 $m \times n$ 2차원 CA의 천이 행렬은 각각이 $n \times n$ 인 m^2 개의 행렬로 분할된다. 따라서 (2.9)의 규칙 R 을 가지는 CA의 천이 행렬 T 는 각각이 3×3 인 3^2 개의 부분행렬로 나누어지며 그 방법은 다음과 같다.

$$T = \begin{bmatrix} S_1 & L_1 & 0 \\ U_2 & S_2 & L_2 \\ 0 & U_3 & S_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T = \begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} & \end{array} \quad (2.10)$$

부분행렬 S_1, S_2, S_3 는 셀의 수평 의존도에 대한 정보를 가지고 있다. S_1 은 첫번째 행의 세 개의 셀들에 관한 부분행렬이다. 첫번째와 세번째 셀은 규칙 7이므로 왼쪽과 오른쪽, 두번째 셀은 규칙 29이므로 자신과 왼쪽, 오른쪽 이웃에 의해 영향을 받음을 나타낸다. 같은 방법으로 S_2, S_3 도 구할 수 있다.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

부분행렬 $L_i (i=1,2)$ 는 i 행의 셀에 대한 아래쪽 셀의 의존도를 나타내고, $U_i (i=2,3)$ 는 i 행의 셀에 대한 위쪽 셀의 의존도를 보여준다. 첫행의 아래쪽 의존도를 보면 첫번째와 세번째 셀은 아래쪽 이웃에 영향을 받고, 두 번째 셀은 영향을 받지 않으므로 L_1 은 다음과 같고 같은 방법으로 L_2 도 구할 수 있다.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

두번째 행의 위쪽 의존도를 보면 첫번째와 두번째 셀은 위쪽 이웃의 영향을 받고 세번째 셀은 영향을 받지 않으므로 U_2 는 다음과 같이 구해진다. 마찬가지로 U_3 를 구할 수 있다.

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1-D CA와 마찬가지로 2-D CA에서도 경계조건을 고려해야 한다. 여기서는 NBCA와 새로운 경계조건인 2-D IBCA를 살펴보기로 하고, 설명에 사용되는 기호 a_{ij} 는 i 행 j 열의 셀을 나타낸다.

▷ 2-D NBCA

2-D NBCA는 그림 2.7과 같이 2차원으로 배열된 CA의 경계값이 모두 0인 경우이다.

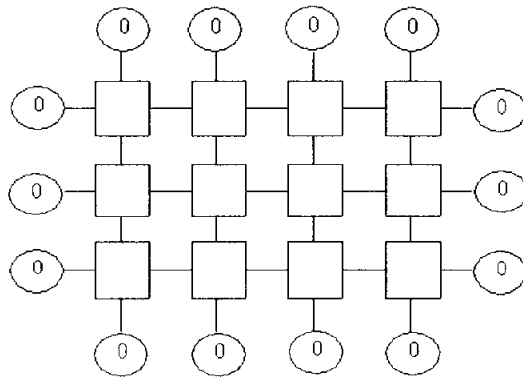


그림 2.7 3×4 2-D NBCA

Fig. 2.7 3×4 2-D NBCA.

▷ 2-D IBCA

IBCA는 각 열의 가장 왼쪽과 오른쪽의 경계값에 따라서 세 가지로 나누고 위쪽과 아래쪽의 경계값은 0으로 둔다.

① Pure 2-D IBCA (2-D IBCA type I)

a_{11} 와 a_{mn} 에만 경계조건이 있는 경우이다. 그림 2.8에서와 같이 a_{11} 의 왼쪽 이웃은 a_{13} 이고 a_{mn} 의 오른쪽 이웃은 a_{mn-2} 이며 나머지 셀들의 경계값은 모두 0이다.

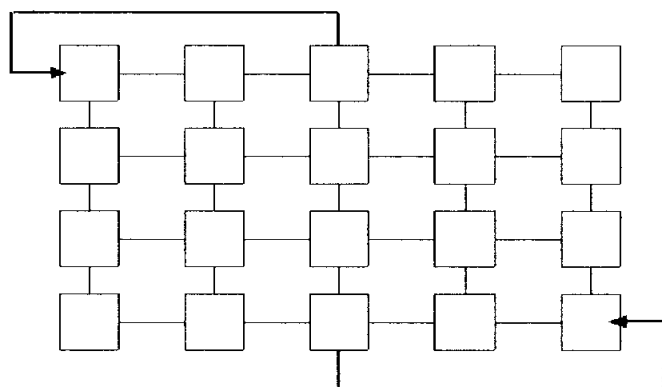


그림 2.8 4×5 Pure 2-D IBCA

Fig. 2.8 4×5 Pure 2-D IBCA.

② Inner 2-D IBCA (2-D IBCA type II)

a_{i1} 과 a_{in} 에 ①의 경계조건을 모두 적용시키는 것이다. 즉, a_{i1} 의 왼쪽 이웃은 a_{i3} 이고 a_{in} 의 오른쪽 이웃은 a_{in-2} 로 둔다(그림 2.9).

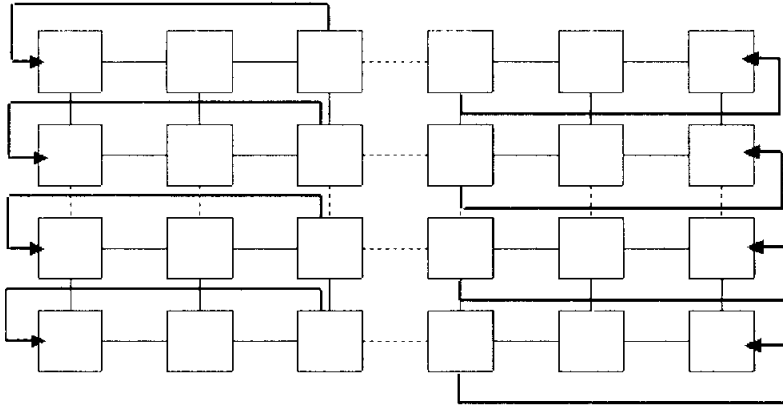


그림 2.9 Inner 2-D IBCA

Fig. 2.9 Inner 2-D IBCA.

③ Outer 2-D IBCA (2-D IBCA type III)

a_{11} , a_{mn} 은 ①의 조건을 따르고 a_{i1} ($i=2, \dots, m$)의 왼쪽 이웃은 $a_{i-1,n}$ 으로, a_{i1} ($i=1, \dots, m-1$)의 오른쪽 이웃은 $a_{i+1,l}$ 로 두는 방법이다(그림 2.10)

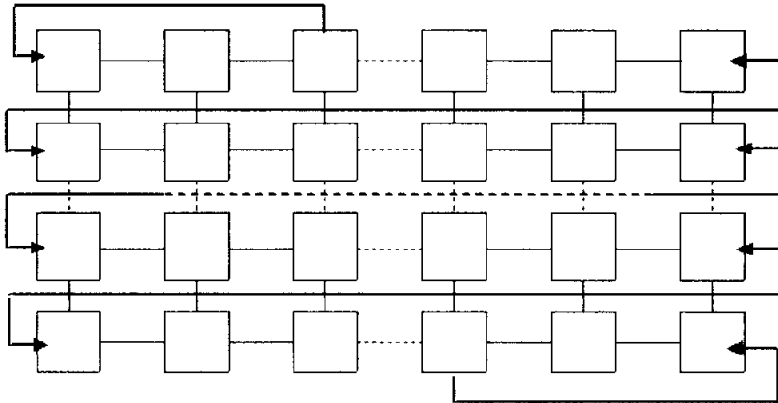


그림 2.10 Outer 2-D IBCA

Fig. 2.10 Outer 2-D IBCA.

2.4 1차원 셀룰러 오토마타 분류

생명에서 보여진 학습, 진화, 또는 번식 등의 반응을 나타내는 것을 복잡계라고 부른다. 복잡계는 다수의 요소로 구성되고, 상호작용에 의한 전체로서의 복잡한 반응을 나타낸다. 복잡계는 초기조건으로의 환원은 될 수 없다는 것을 의미한다. 따라서 복잡계 연구에서는 요소가 아니라 전체의 반응을 연구하여야 한다. 그러나 복잡계는 얻어지는 상태수가 너무 많기 때문에 해석적인 방법으로의 연구는 어렵다. 대안으로는 복잡계의 모델을 구성하고 모델의 반응을 조사하는 것이다. 복잡계의 모델로서 CA가 있다. Wolfram은 시공간의 패턴을 관측하는 것에 의해 1차원 CA를 4개의 클래스로 분류하였다. 이후에 엔트로피 상호정보, 미분 패턴 분포도, 분포도를 이용한 방법 등으로 정량적인 분류방법이 소개되었다[33],[34]. 그러나 시공간의 패턴이 불규칙하고 복잡한 반응을 나타내기 때문에 관측자의 주관에 따라 분류가 쉽지 않은 단점이 있다[35]. 본 논문에서는 파워스펙트럼을 이용하여 스펙트럼해석에 의한 1차원 CA의 클래스 분류방법을 제안한다.

2.4.1 1차원 셀룰러 오토마타의 천이 영상

CA의 천이 영상은 256개로 분류할 수 있다. 먼저 Wolfram은 시공간의 패턴을 관측하는 것에 의해 1차원 CA를 4개의 클래스로 분류하는 것을 제안했다. 각 클래스의 CA의 특징은 다음과 같다.

▷ 클래스 1 : 천이 과정을 거치면서 모든 셀들의 값이 0 또는 1로 정착한다. 점(point)

으로 끌개(attractor)를 가지는 역학계에 대응한다.

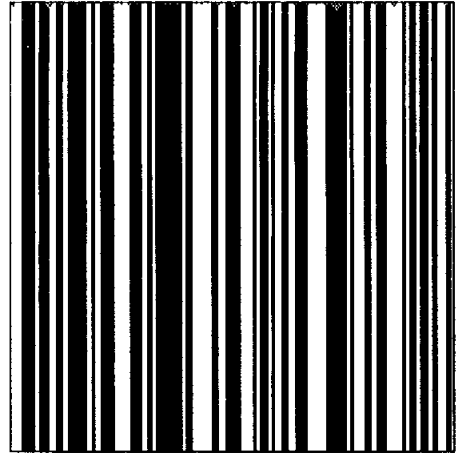
- ▷ 클래스 2 : 천이 과정을 거치면서 모든 셀들의 값이 고정되어 단일한 배열을 나타낸다. 제한된 사이클을 가진 역학계에 대응한다.
- ▷ 클래스 3 : 확실한 규칙에 따라 움직이고 있음에도 불구하고 복잡하고 불규칙하면서 예측할 수 없는 패턴을 나타낸다. 크기는 다양하게 분포하며 나타나는 위치는 불규칙하다. 복잡한 끌개를 가진 역학계에 대응한다.
- ▷ 클래스 4 : 복잡한 양상의 변화를 나타낸다. 천이 과정에 새로운 패턴이 생성되는 경우도 있으며 크기와 나타나는 위치는 클래스 3에 비해 규칙적이다. 가끔 일부분이 주기적인 구조를 가진다. 대응하는 역학계는 존재하지 않는다.

먼저, 각 클래스에 속하는 전형적인 단순 CA의 시공간 패턴을 그림 2.11에 나타낸다. 초기 조건은 0과 1의 값이 같은 확률로 나타나는 것처럼 랜덤으로 생성하고 시공간 패턴도 같은 초기 조건을 이용하였다.

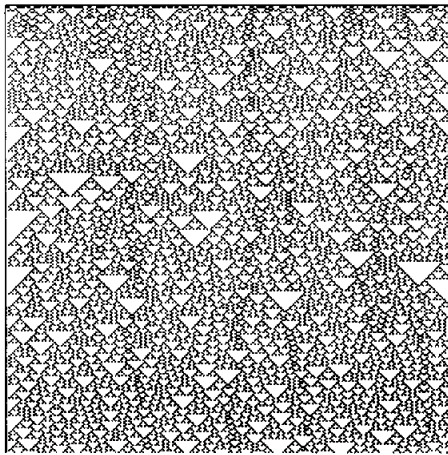
클래스 1에 속한 규칙 128은 3번 천이한 후에 모든 셀들의 값이 0으로 정착하고 클래스 2에 속하는 규칙 232는 2번 천이한 후에 단일한 양상으로 정착되어있다. 규칙 18은 천이하는 동안 클래스 3 특유의 불규칙한 양상의 변화를 나타낸다. 규칙 110은 클래스 4에 속한다. 특징은 천이하는 동안 특정한 패턴이 나타나기도 하고 가끔은 산만하게 분포하는 불규칙한 양상의 변화를 나타낸다. 클래스 1과 2는 규칙적인 반응을 나타내기 때문에 시공간 패턴을 시각적으로 용이하게 분류할 수 있지만 클래스 3과 4는 불규칙하며 복잡한 형태를 나타내기 때문에 관측자의 주관에 의해 분류가 되어 명확하게 정의하기 어려운 단점이 있었다. 정량적인 분류방법이 제안되었지만 완전한 분류방법이 확립되어있지 않다.



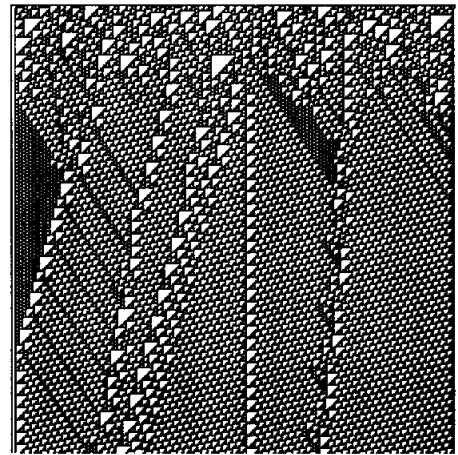
(a) 규칙128 (클래스 1)



(b) 규칙232 (클래스 2)



(c) 규칙18 (클래스 3)



(d) 규칙110 (클래스 4)

그림 2.11 256-CA의 상태전이 영상

Fig. 2.11 The state-transition diagram of 256-CA.

2.4.2 1차원 셀룰러 오토마타의 파워스펙트럼

파워스펙트럼을 이용하여 스펙트럼해석에 의한 1차원 CA의 클래스 분류방법을 제안한다. N개의 셀로 구성된 1차원 CA에서 n 번째 셀의 t 천이 후의 상태를 x_n^t 라고 하면 패턴 $X(t)$ 는 식(2.11)로 표현된다.

$$X(t) = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t) \quad (2.11)$$

단, $t = 0, 1, \dots, T-1$ 이며 식(2.12)에 정의된 Fourier 변환을 나타낸다.

$$X_F(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X(t) \exp\left(-i \frac{2\pi t k}{T}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, T-1) \quad (2.12)$$

그리고 식(2.13)은 파워스펙트럼 $P_F(k)$ 를 구한다. 파워스펙트럼은 천이과정을 직감적으로 파악할 수 있는 장점을 가지고 있기 때문에 자주 이용되어진다.

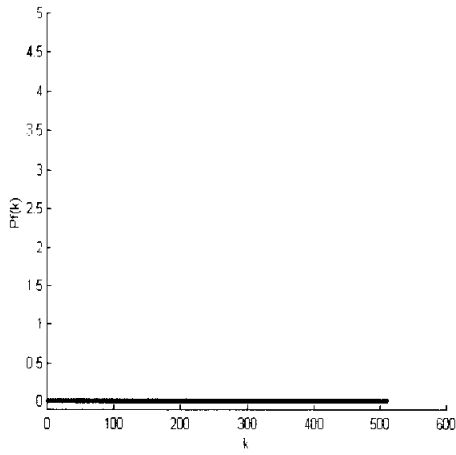
$$P_F(k) = \|X_F(k)\|^2 \quad (2.13)$$

1차원 CA를 실험할 때 양쪽의 셀에 대해 경계조건을 결정할 필요가 있다. 실험에는 1-D NBCA를 이용하면 특이한 반응이 나타나지 않기 때문에 특성을 잘 나타낼 수 있다. 상태천이는 모든 셀이 병렬로 행하여진다. 1차원 CA의

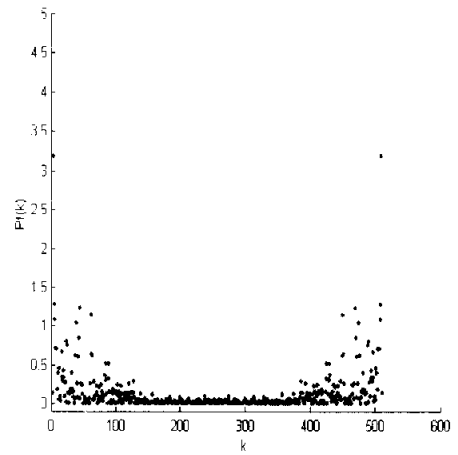
좌우 셀의 치환, 상태 0과 1이 서로 치환되는 것을 동등하다고 가정하면 독립적인 CA는 전부 88개이다. 클래스 1과 2는 시각적으로 분명한 차이를 나타낸다. 클래스 3에 분류된 CA는 규칙 18, 규칙 22, 규칙 30, 규칙 45, 규칙 60, 규칙 90, 규칙 105, 규칙 106, 규칙122, 규칙126, 규칙 146, 규칙 150로서 12개이다. 클래스 4에 속하는 CA는 규칙 54와 규칙 110으로 2개이다. 셀 수 256개, 스텝수 256회, 초기 상태값은 0, 1이 같은 확률로 랜덤으로 생성되는 파워스펙트럼 $Pf(k)$ 를 구했다. 그림 2.12는 그림 2.11에 나타난 단순 CA의 $Pf(k)$ 를 나타낸다.

주파수 k 는 스텝수를 256회로 천이를 하기 때문에 푸리에 변환을 하면 512까지의 $Pf(k)$ 를 나타낸다. 그림 2.12의 (a)는 어떤 주파수에도 피크가 없는 파워스펙트럼(백색잡음형 파워스펙트럼형)을 나타내며 CA가 천이 과정을 거치면서 셀의 값이 0으로 정착하는 형태이다. 그림 2.12의 (b)는 주파수 $k=0$ 과 $k=512$ 에 피크가 있는 파워스펙트럼을 나타낸다. CA가 천이 과정을 거치면서 셀의 값이 안정된 상태로 고정되는 형태이다. 그림 2.12의 (c)는 주파수 $k=256$ 과 $k=512$ 에 피크가 있는 파워스펙트럼을 나타낸다. CA의 특징으로는 확실한 규칙에 따라 움직이고 있음에도 불구하고 복잡하고 불규칙하면서 예측할 수 없는 행동을 나타낸다. 그림 2.12의 (d)는 주파수 $k=0$, $k=54$, $k=147$, $k=190$, $k=256$, $k=382$, $k=512$ 등에서 피크가 있는 파워스펙트럼을 나타낸다. 특징으로는 복잡한 천이 과정을 나타낸다.

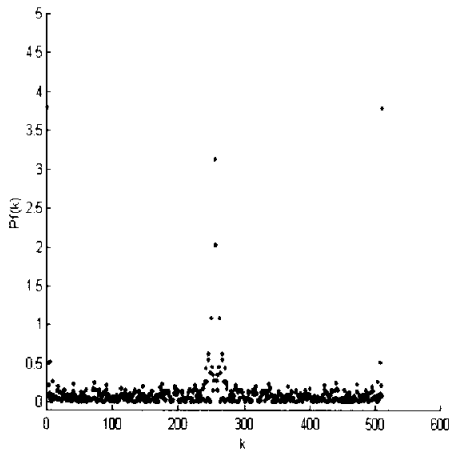
본 실험에서 클래스 3은 카오스의 모델로서 흥미있는 성질을 가지고 있고 클래스 4는 복잡계의 특징을 나타내고 있다.



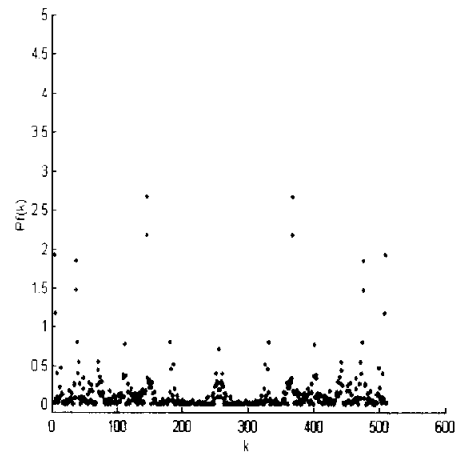
(a) 규칙128 (클래스 1)



(b) 규칙232 (클래스 2)



(c) 규칙18 (클래스 3)



(d) 규칙110 (클래스 4)

그림 2.12 CA의 파워스펙트럼

Fig. 2.12 Power spectra for elementary CA.

제 3 장 셀룰리 오토마타의 수학적 성질

3.1 선형 비그룹 셀룰리 오토마타의 정의

LFSR의 대안으로 제안된 CA는 셀들간의 국소적인 상호작용에 의해 랜덤성이 좋은 수열들을 발생시킨다는 것이 알려졌다. 2장에서 언급한 그룹 CA는 천이 행렬의 역행렬이 존재하며, 특히 특성다항식이 원시다항식인 경우는 상태 0을 제외한 모든 상태들이 한 사이클을 이루므로 랜덤 패턴 생성 암호학 등에 응용되었다[36],[37]. 그에 비하여 비그룹 CA에 대한 연구는 그리 활발하지는 못하였으나 최근 해시함수 생성이나 암호, 부울 방정식의 해법, 논리회로의 검사 등에 응용이 되면서 관심을 받기 시작하였다[38],[39]. 특히 multiple-attractor CA(MACA)는 효과적인 해시함수 생성기임이 입증되었다[40]. 본 장에서는 XOR 논리 대신 XNOR 논리를 적용함으로써 여원벡터(complemented vector)를 갖는 CA의 행동에 대한 자세한 분석을 제시한다. 또한 MACA 셀들의 상태천이 함수를 전도함으로써 유도되는 여원을 갖는 CA의 상태천이 행동의 특징을 살펴본다. TPMACA의 트리 구성과 유도된 여원 CA의 트리 구성 알고리즘을 제안한다. 이를 이용하여 TPMACA의 특별한 경우인 TPSACA를 이용하여 완전해시함수를 생성하는 알고리즘을 제시한다. 먼저 선형 비그룹 CA의 정의와 3.2절에서 필요한 용어의 정의를 기술한다[41],[42].

▷ 선형 비그룹 CA(LNCA) : 비그룹 CA에서 다음 상태를 결정짓는 상태천이 함수가 XOR 논리로만 이루어져 있어서 이 함수를 행렬로 표현

할 수 있다. 이러한 CA를 선형 비그룹 CA라 한다.

- ▷ 끝개 : 비그룹 CA의 상태천이 그래프에서 순환상태(cyclic state)들 중 사이클(cycle)의 길이가 1인 상태를 말한다.
- ▷ r -직전자(predecessor) : $T^r Y = X$ 을 만족하는 상태 Y 를 상태 X 의 r -직전자 ($1 \leq r \leq 2^n - 1$)라 부른다. 특히 1-직전자를 간단히 직전자라 부른다.
- ▷ Multiple-attractor CA(MACA) : 상태천이 그래프가 각 끝개를 트리로 하는 서로 분리된 트리들로 구성된 비그룹 CA를 MACA라 부른다. 특히 직전자의 수가 2인 MACA를 TPMACA라 부른다.
- ▷ α -트리(tree) : 순환상태 α 를 루트(root)로 하는 트리이다.
- ▷ 깊이(depth) : 비그룹 CA의 상태천이 그래프에서 임의의 한 도달불가능한 상태에서 가장 가까운 순환상태로 가는데 걸리는 최소의 단계 수를 말한다.
- ▷ 레벨(level) : 어떤 상태 x 가 α -트리의 레벨 l ($l \leq \text{depth}$)에 있다는 것은 상태 x 가 정확히 l 단계 후 상태 α 가 되는 위치에 있다는 것이다. 즉, $T^l x = \alpha$ 가 되는 l 값 중 최소값이 l 이다.
- ▷ 주기 : 상태천이 그래프에서 나타나는 사이클 길이의 최소공배수로 임의의 순환상태 y 에 대하여 $T^c y = y$ 인 최소의 c 가 주기가 된다.
- ▷ 여원 CA : 1개 이상의 CA 셀에서 XNOR 논리를 적용하는 CA이다.

그림 3.1은 TPMACA의 상태전이 그래프를 보이고 있다.

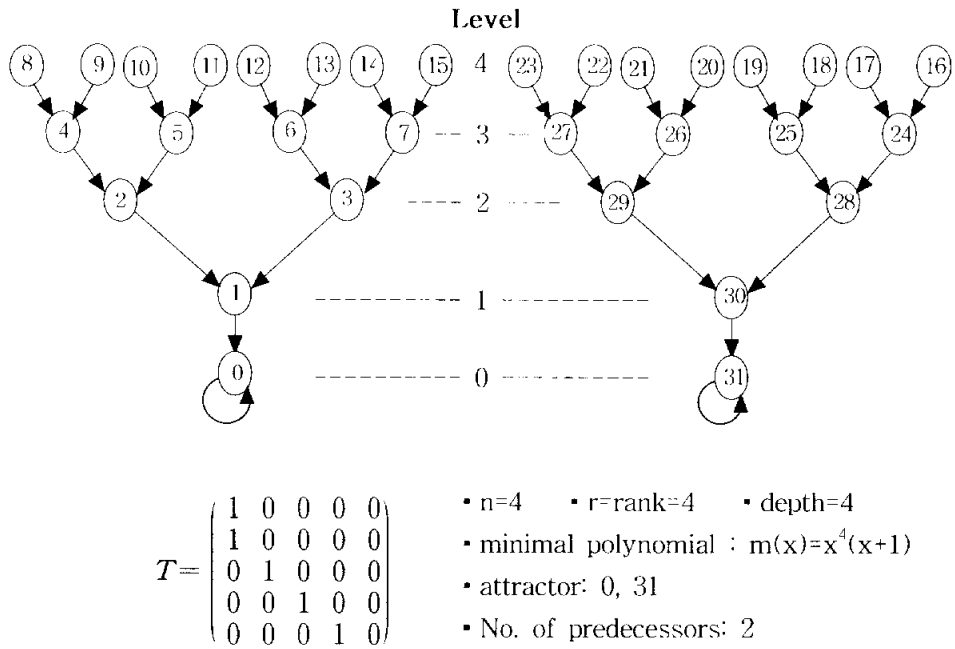


그림 3.1 TPMACA의 구조와 상태전이 그래프

Fig. 3.1 Structure and state-transition diagram of TPMACA.

3.2 선형 TPMACA

3.2.1 선형 TPMACA의 정의 및 성질

선형 TPMACA는 선형 비그룹 CA 중 모든 순환상태들이 끌개이고, 임의의 도달 가능한 상태에 대하여 직전자의 수가 2개인 CA를 말한다. 다음은 선형 TPMACA의 중요한 특성을 살펴본다.

▷ 천이 행렬의 영공간의 차원 : 선형 TPMACA에서 α 를 임의의 도달가능한 상태라고 하면 $|\{y \mid Ty=\alpha\}|=2$ 이다. 또한 $|\{y \mid Ty=\alpha\}|=|\{x \mid Tx=0\}|=2$ 이고 $Tx=0$ 인 x 의 수가 2^1 이며 자유변수의 개수는 1이다. 그러므로 T 의 영공간의 차원은 1이다.

▷ 끌개의 수 : 어떤 상태 x 가 이 순환 상태 x 의 사이클 길이가 1이므로 $Tx=x$ 이다. 이는 $(T \oplus I)x=0$ 이므로 끌개는 $(T \oplus I)x=0$ 을 만족하는 해 x 이다. 그러므로 끌개의 수는 $(T \oplus I)$ 의 계수가 k 라면 영공간의 차원은 $n-k$ 이고 가능한 해의 수는 2^{n-k} 이다. 선형 TPMACA의 끌개의 수와 같다.

▷ 최소다항식 : 비그룹 CA는 최소다항식을 통해 트리의 깊이와 주기를 알 수 있다. 비그룹 CA의 최소다항식은 $x^d \Phi(x)$ 로 표현된다. 여기서 d '는 트리의 깊이를 나타내고 $\Phi(x)$ 를 통해 이 CA의 주기를 알 수 있다. $\Phi(x)$ 가 x^c+1 를 나누는 c 중 최소의 c 가 주기가 된다. 그런데 선형 TPMACA는 모든 순환상

태의 사이클의 길이가 1이므로 주기는 1이다. 그러므로 트리의 깊이가 d 인 선형 TPMACA의 최소다항식은 $x^d(x+1)$ 이다.

▷ 서로 다른 두 직전자의 합 : 상태 w 와 u 를 임의의 한 도달 가능한 상태의 서로 다른 직전자라 하면 $Tw = Tu$ 이고 $T(w \oplus u) = 0$ 이다. 그런데 가정에서 w 와 u 가 서로 다른 상태이므로 $w \oplus u$ 는 상태 0의 0이 아닌 직전자이다. 그러므로 선형 TPMACA에서 임의의 도달 가능한 상태에 대한 서로 다른 두 직전자의 합은 상태 0의 0이 아닌 직전자와 같다. 여기서 상태의 합은 각 상태를 이진법의 수로 표현하였을 때 각 비트별 합이다.

▷ 서로 다른 트리에서 같은 위치에 놓여있는 상태들의 합 : 선형 TPMACA의 상태천이 그래프에서 α_{ij} 를 α -트리의 레벨 i 의 j 번째 상태라 하고 β_{ij} 를 β 트리의 레벨 i 의 j 번째 상태라 하자. 또한 P_{ij} 를 0-트리의 레벨 i 의 j 번째 상태라 하면 $\alpha_{ij} = P_{ij} \oplus \alpha$ 이고, $\beta_{ij} = P_{ij} \oplus \beta$ 이다. 그러므로 $\alpha_{ij} \oplus \beta_{ij} = (P_{ij} \oplus \alpha) \oplus (P_{ij} \oplus \beta)$ 이므로 서로 다른 트리에서 같은 위치에 놓여있는 상태들의 합은 각 트리의 끝개의 합과 같다.

<예제 3.1> 5개의 셀로 이루어진 CA에 적용된 규칙이 <102, 102, 60, 240, 60>이며 천이 행렬 T 는 다음과 같다.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

일차독립인 행의 개수가 4이므로 $\text{rank}(T)=4$ 이다. 그러므로 T 의 영공간의 차원은 1이다. 그러므로 주어진 CA는 2개의 직전자를 가지는 비그룹 CA이다. $(T \oplus I)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$T \oplus I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$(T \oplus I)$ 의 계수는 3이다. 그러므로 끝개의 수는 $2^{5-3} = 2^2 = 4$ 이다. 또한 T 의 최소다항식은 $m(x) = x^3(x+1)$ 이다. 그러므로 이 선형 CA는 깊이가 3이고 끝개가 4개인 선형 TPMACA이다. 그림 3.2는 이 선형 TPMACA의 상태 천이 그래프이다. 1-트리의 레벨 2의 첫번째 상태인 28(=11100₍₂₎)과 17-트리의 레벨 2의 첫번째 상태 12(=01100₍₂₎)의 합은 11100₍₂₎ $\oplus$ 01100₍₂₎ = 10000₍₂₎ = 16이다. 이는 상태 1과 상태 17의 합인 00001₍₂₎ $\oplus$ 10001₍₂₎ = 10000₍₂₎ = 16과 같다. 상태 19의 서로 다른 두 직전자 13(=01101₍₂₎)과 14(=01110₍₂₎)의 합은 01101₍₂₎ $\oplus$ 01110₍₂₎ = 00011₍₂₎ = 3이므로 상태 0의 0이 아닌 직전자 3과 같다.

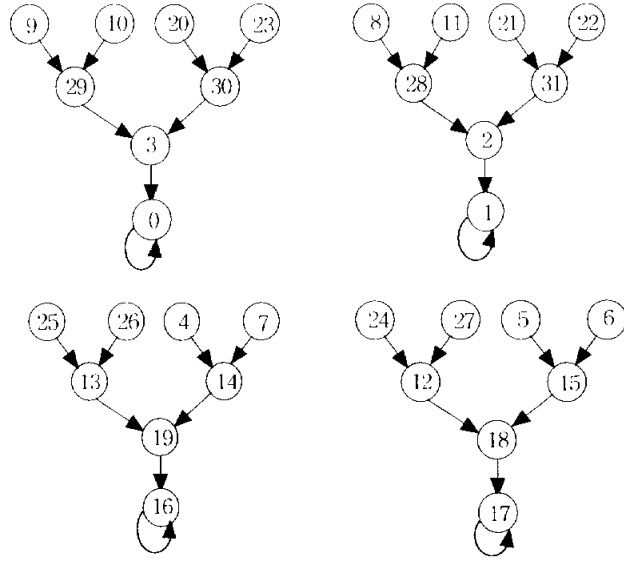


그림 3.2 5-셀 선형 TPMACA의 상태전이 그래프
Fig. 3.2 State-transition diagram of 5 cell linear TPMACA.

3.2.2 선형 TPMACA의 상태전이 그래프 트리 구성 알고리즘

CA는 셀의 수가 많아질수록 상태 개수는 지속적으로 늘어나기 때문에 다음상태를 구함에 있어 소프트웨어로 CA를 구현한 경우는 행렬 연산의 횟수가 지속적으로 늘어나게 된다. CA는 효율적으로 혼돈과 확산이 이루어지는 장점을 가지고 있으나 CA의 행동을 분석하여 평가하는 것에 어려움이 따른다. 이러한 CA의 행동에 관한 분석을 위하여 상태전이 그래프를 구성하는 것이 필수적으로 뒤따라야 한다. 다음에서는 선형 TPMACA에서 0-트리의 임의의 도달 불가능한 상태에 대하여 천이 행렬 T 를 연속적으로 연산하여 상태 0이 나올 때까지의 경로를 기본경로로 하여 $(T \oplus I)x = 0$ 에서 얻은 끝개를 이용하여 선형 TPMACA의 상태전이 그래프의 트리를 구성하는 알고리즘을 제안한다.

두 개의 이진상태를 가지고 깊이가 d 인 선형 TPMACA에서 α -트리의 도달 불가능한 상태 x 는 d 단계 후 그 상태가 α 가 된다. 이때의 상태전이 단계 즉,

$$x \rightarrow Tx \rightarrow \cdots \rightarrow T^d x (= \alpha) \quad (3.3)$$

를 α -트리의 α 기본경로(α -basic path)라 한다. 선형 TPMACA의 상태전이 그래프에서 0-트리의 각 레벨 l 에서 첫번째 상태들을 $S_{l,0}$ 라 하면

$$S_{d,0} \rightarrow S_{d-1,0} \rightarrow \cdots \rightarrow S_{1,0} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

는 선형 TPMACA의 0-트리의 0 기본경로이다. 이 0-기본경로를 이용하여 나머지 0-트리를 구성할 수 있다. $S_{l,k}$ 를 0-트리의 레벨 l 의 $(k+1)$ 번째라 하면 $S_{l,k}$ 는 다음을 만족한다.

$$S_{l,k} = S_{l,0} \oplus \sum_{i=1}^{k-1} b_i S_{i,0} \quad (3.5)$$

여기서 $b_{l-1}b_{l-2}\cdots b_1$ 은 k 를 이진수로 표현했을 때 각 비트의 값이며, k 의 최대값은 $2^{l-1}-1$ 이다. 0-기본경로와 식(3.5)을 이용하여 0-트리의 나머지 부분을 구할 수 있다. 선형 TPMACA의 0이 아닌 α -트리를 구성하기 위하여 0-트리의 각 레벨의 첫번째 상태인 $S_{l,0}^{\alpha}$ 를 구하고

$$S_{d,0}^{\alpha} \rightarrow S_{d-1,0}^{\alpha} \rightarrow \cdots \rightarrow S_{1,0}^{\alpha} \rightarrow \alpha \quad (3.6)$$

를 0-기본경로에 대응하는 α 기본경로라 한다. 식(3.5)는 $S_{l,0}^{\alpha}$ 를 구하는 식이다. 또한 식 (3.8)에서 b_i 는 식(3.5)에서와 같다.

$$S_{l,k}^{\alpha} = S_{l,0}^{\alpha} \oplus \alpha \quad (3.7)$$

$$S_{l,k}^{\alpha} = S_{l,0}^{\alpha} + \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0} \quad (3.8)$$

<예제 3.2> 5개의 셀로 이루어진 CA가 규칙<204, 240, 240, 240, 240>을 가질 때, 천이 행렬 T 는 다음과 같다.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

이때 최소다항식은 $m(x) = x^4(x+1)$ 이고, $(T \oplus I)x = 0$ 를 만족하는 끝개 x 는 0과 31이다. 여기서 $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ 을 0-트리의 기본경로라 하면, 0-트리의 레벨 4의 여섯번째 상태인 $S_{4,5}$ 는 식(3.5)로부터 다음과 같이 구한다.

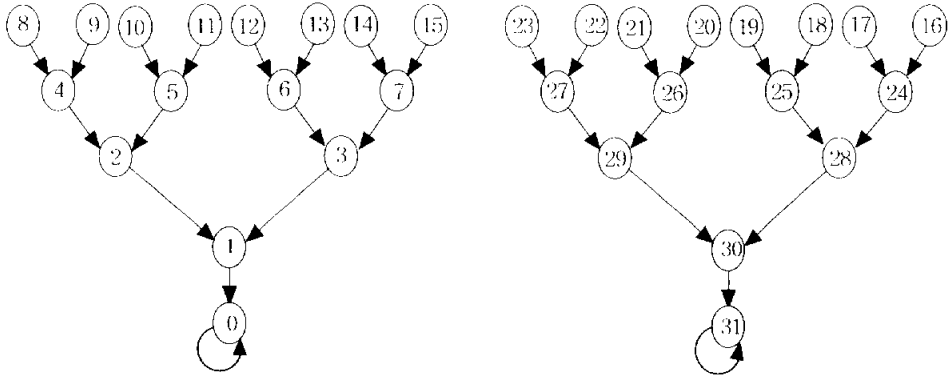


그림 3.3 5-셀 TPMACA의 상태전이 그래프

Fig. 3.3 State-transition diagram of 5-cell TPMACA.

$$\begin{aligned}
 S_{4,5} &= S_{4,0} + b_1 S_{1,0} + b_2 S_{2,0} + b_3 S_{3,0} \\
 &= (01000)^T + 1 \cdot (00001)^T + 0 \cdot (00010)^T + 1 \cdot (00100)^T \quad (3.10) \\
 &= (01101)^T = 13
 \end{aligned}$$

이 기본경로에 대응하는 31-트리의 기본경로는 식(3.7)에 의하여 0-트리의 각 기본경로에 31을 더한값으로 $23 \rightarrow 27 \rightarrow 29 \rightarrow 30 \rightarrow 31$ 이다. 31-트리의 나머지 부분도 식(3.8)에 의하여 구한다. 31-트리의 레벨 4의 일곱번째 상태인 $S_{4,6}^{31}$ 를 구하면 다음과 같이 구한다. 그림 3.3은 <예제 3.2>에서 주어진 CA의 상태전이 그래프이다.

$$\begin{aligned}
 S_{4,5}^{31} &= S_{4,0}^{31} + b_1 S_{1,0} + b_2 S_{2,0} + b_3 S_{3,0} \\
 &= (10111)^T + 0 \cdot (00001)^T + 1 \cdot (00010)^T + 1 \cdot (00100)^T \quad (3.11) \\
 &= (10001)^T = 13
 \end{aligned}$$

3.3 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA

본 논문에서는 여원 CA에 대응하는 선형 CA가 TPMACA인 특별한 여원 CA에 대하여 분석한다. n -셀 선형 TPMACA의 각 셀의 상태를 역으로 바꾸는 여원벡터를 F 라 할 때, 이 F 는 n 차원 벡터이며 선형 CA의 셀 값을 역으로 취하고자 하는 셀의 위치성분이 1이다. 여원 CA의 상태천이 그래프에서 나타나는 성질을 분석하고 선형 TPMACA의 0-트리 기본경로를 이용하여 여원 CA의 상태천이 그래프의 트리를 구성하는 알고리즘을 제안하고 예를 든다.

3.3.1 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA의 성질

선형 TPMACA의 천이 행렬이 T 이고 그에 대응하는 여원을 갖는 CA에서 연산자 $\overline{T}$ 를 p 번 적용한 것을 $\overline{T}^p$ 라 하면 다음을 만족한다.

$$\overline{T}^p f(x) = [I \oplus T \oplus T^2 \oplus \cdots \oplus T^{p-1}][F(x)] \oplus [T^p][f(x)] \quad (3.12)$$

위 식을 이용하여 여원 CA의 끝개를 구할 수 있다. 트리의 깊이가 d 인 TPMACA C 에서 0-트리의 레벨 i ($0 < i \leq d$)에 있는 한 상태 F 를 여원벡터라 하면 $\overline{T}^{i-1}F$ 는 C 에 대응하는 여원을 갖는 CA C' 에서 끝개이다. 왜냐하면 F 가 0-트리의 레벨 i 의 상태이므로 $T^i F = 0$ 이다. $\overline{T}^{i-1}F$ 가 여원 CA C' 에서 끝개이라면 $\overline{T}(\overline{T}^{i-1}F) = \overline{T}^{i-1}F$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned}
\overline{T}(\overline{T}^{i-1}F) &= T(\overline{T}^{i-1}F) \oplus F \\
&= T([I \oplus T \oplus T^2 \cdots \oplus T^{i-2} \oplus T^{i-1}]F) \oplus F \\
&= [T \oplus T^2 \cdots \oplus T^{i-1} \oplus T^i]F \oplus F \\
&= [I \oplus T \oplus T^2 \cdots \oplus T^{i-1}]F \oplus T^i F \\
&= \overline{T}^{i-1}F \oplus 0 = \overline{T}^{i-1}F
\end{aligned} \tag{3.13}$$

<정리 3.3> C 가 TPMACA이고 C 에 대응하는 여원을 갖는 CA를 C' 라 하자. 여원벡터 F 를 C 의 0 트리의 레벨 l 에 있는 비순환상태로 택하면 다음이 성립한다.

- (a) C 에서 l 보다 더 큰 레벨에 있는 모든 상태는 C' 에서 변하지 않는다.
- (b) C 에서 레벨 l 에 있는 모든 상태는 C' 에서 l 보다 작은 레벨에 배열된다.
- (c) C 에서 l 보다 작은 레벨에 있는 모든 상태는 C' 에서 레벨 l 에 배열된다.
- (d) 상태 F 는 C' 에서 레벨 $l-1$ 에 배열된다.

<증명> F 가 0 트리의 레벨 l 의 상태이므로 $T^l F = 0$ 이다.

- (a) x 를 C 의 상태천이 그래프에서 레벨 $k(>1)$ 에 있는 상태라 하자. 그러면

$\overline{T}^k x$ 는

$$\begin{aligned}
& \overline{T^k} x \\
&= T^k x \oplus (T^{k-1} \oplus \cdots \oplus T^l \oplus T^{l-1} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
&= T^k x \oplus (T^{l-1} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
&= 0 \oplus (T^{l-1} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
&= T^{l-1} F \oplus (T^{l-2} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
&= \overline{T^{l-1}} F
\end{aligned} \tag{3.14}$$

이 성립한다.

그런데 $\overline{T^{l-1}} F$ 이 C' 의 끝개이므로 x 의 레벨은 기껏해야 k 이다. 한편,

$$\begin{aligned}
& \overline{T^{k-1}} x \\
&= T^{k-1} x \oplus (T^{k-2} \oplus \cdots \oplus T^l \oplus T^{l-1} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
&= T^{k-1} x \oplus (T^{l-1})F
\end{aligned} \tag{3.15}$$

여기서 $T^{k-1} x \neq 0$ 이므로 $T^{k-1} x \oplus \overline{T^{l-1}} F$ 은 C' 에서 끝개가 아니다. 따라서 x 의 레벨은 k 이다.

(b) z 를 C 에서 레벨 l 에 있는 상태라 하자. 선형 TPMACA는 도달가능한 상태의 직전자의 수는 2이므로

$$T^{l-1} z = T^{l-1} F \text{ 와 } T^l z = T^l F = 0 \tag{3.16}$$

이 성립한다. 한편, $\overline{T}^{l-1}$ 는

$$\begin{aligned}
 & \overline{T}^{l-1} z \\
 &= T^{l-1} z \oplus (T^{l-2} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
 &= T^{l-1} F \oplus (T^{l-2} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
 &= \overline{T}^{l-1} F
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

이고 $\overline{T}^{l-1} F$ 이 C' 의 끝개이므로 z 의 레벨 l 은 기껏해야 $l-1$ 이다.

(c) w 를 C 에서 l 보다 작은 레벨에 있는 상태라 하자. 그러면 식 (3.18)은

$$T^l w = T^{l-1} w = 0 \tag{3.18}$$

이다. 그리고 $\overline{T}^l w$ 는

$$\begin{aligned}
 \overline{T}^l w &= T^l w \oplus (T^{l-1} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
 &= T^l w \oplus \overline{T}^{l-1} F \\
 &= \overline{T}^{l-1} F
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

와 $\overline{T}^{l-1} w$ 는

$$\begin{aligned}
\bar{T}^{l-1}w &= T^{l-1}w \oplus (T^{l-2} \oplus \cdots \oplus T \oplus I)F \\
&= T^{l-2}F \\
&= \bar{T}^{l-1}F
\end{aligned} \tag{3.20}$$

이 성립한다.

$\bar{T}^{l-1}F$ 은 C' 의 끝개이지만 $\bar{T}^{l-2}F$ 은 C' 의 끝개가 아니므로 w 는 레벨 l 에 배열된다.

(d) (c)에 의하면 상태 0은 C' 에서 레벨 l 에 있다.

$$\bar{T}0 = T0 \oplus F = F \tag{3.21}$$

이므로 F 는 C' 에서 상태 0보다 한 단계 낮은 레벨 $l-1$ 에 배열된다.

3.3.2 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA의 상태전이 그래프 구성 알고리즘

1) 여원 CA의 기본경로

▷ 여원벡터가 비순환 상태인 경우

여원 CA의 상태전이 그래프의 트리를 구성하기 위하여 먼저 여원벡터 F 는 깊이가 d 인 선형 TPMACA의 레벨 i ($0 < i \leq d$)에 있는 한 상태라고 하자.

여원 CA의 상태전이 그래프에서 $\overline{S}_{l,k}$ 는 선형 TPMACA의 0-트리에 대응하는 트리인 여원 CA에서 $\overline{T}^{l-1}F$ -트리의 각 레벨의 $(k+1)$ 번째 상태이다. 그러면

$$\overline{S}_{d,0}(=\alpha) \rightarrow \overline{S}_{d-1,0} \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow F \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{S}_{1,0} \rightarrow \overline{T}^{d-1}F(=\beta) \quad (3.22)$$

는 여원 CA의 β 트리의 β 기본경로이다. 식(3.23)은 여원 CA에서 트리의 기본경로를 구하는 식으로 $\overline{S}_{l,0}$ 은 각 레벨 l 의 기본경로가 되는 상태로 상태전이 그래프에서 각 트리의 첫번째 상태이다.

$$\overline{S}_{l,0} = \overline{T}^{d-1} \cdot \alpha \quad (3.23)$$

식(3.23)에서 트리의 기본경로를 구하고, 얻은 결과로부터 트리의 나머지 부분을 구성한다. 구성 알고리즘은 다음 절에서 제안한다. 다음은 위의 식으로부터 얻은 기본경로와 선형 TPMACA의 끝개를 이용하여 각 트리의 기본경로를 구한다. 다음 식(3.24)은 선형 TPMACA의 끝개 α 가 속하는 트리의 기본경로 $\overline{S}_{l,0}^{\alpha}$ 를 구하는 식이다.

$$\overline{S}_{l,0}^{\alpha} = \overline{S}_{l,0} \oplus \alpha \quad (3.24)$$

▷ 여원벡터가 0이 아닌 끝개인 경우

선형 TPMACA의 상태가 0이 아닌 끝개를 여원벡터 F 로 하여 유도되는 CA는 F 가 0-트리의 비순환 상태인 경우와 달리 각 트리의 순환상태는 변하지 않으나 트리가 두 개씩 결합이 된다. 0이 아닌 끝개 β 가 F 라 하자. 이때 여원 CA의 상태천이 그래프는 0-트리와 β -트리가 결합하고 나머지 트리들도 두 끝개의 합(비트별 덧셈)이 β 가 되는 트리끼리 결합이 된다. 여원 CA의 0-트리의 기본경로를 식(3.25)에 의하여 얻을 수 있다. 식(3.25)에서 $\overline{S}_{l,0}$ 는 여원 CA에 대응되는 선형 TPMACA의 0-트리의 기본경로이다.

$$\overline{S}_{l,0} = \begin{cases} S_{l,0} & l: \text{짝수} \\ S_{l,0} \oplus \beta & l: \text{홀수} \end{cases} \quad (3.25)$$

2) 여원 CA의 트리구성 알고리즘

앞의 절에서 얻어진 각 트리의 기본경로와 선형 TPMACA의 0-트리의 기본경로로부터 각 트리의 기본경로를 제외한 나머지 트리를 구성할 수 있다. 식(3.26)은 선형 TPMACA의 0-트리에 대응하는 트리인 여원 CA의 $\overline{T}^{l-1}F$ -트리의 각 레벨의 $(k+1)$ 번째 상태 $\overline{S}_{l,k}$ 를 구하는 식이다. 식(3.26)에서 $\overline{S}_{l,0}$ 은 식(3.23)에서 얻은 기본경로이다.

$$\overline{S}_{l,k} = \overline{S}_{l,0} \oplus \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0} \quad (3.26)$$

식(3.27)은 각 트리의 나머지를 구하는 식이다.

$$\overline{S_{l,k}^{\alpha}} = \overline{S_{l,0}^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0} \quad (3.27)$$

<예제 3.4> 적용된 규칙이 <204, 204, 240, 240, 240, 240>인 6개의 셀로 이루어진 선형 TPMACA의 상태전이 그래프는 다음과 같다.

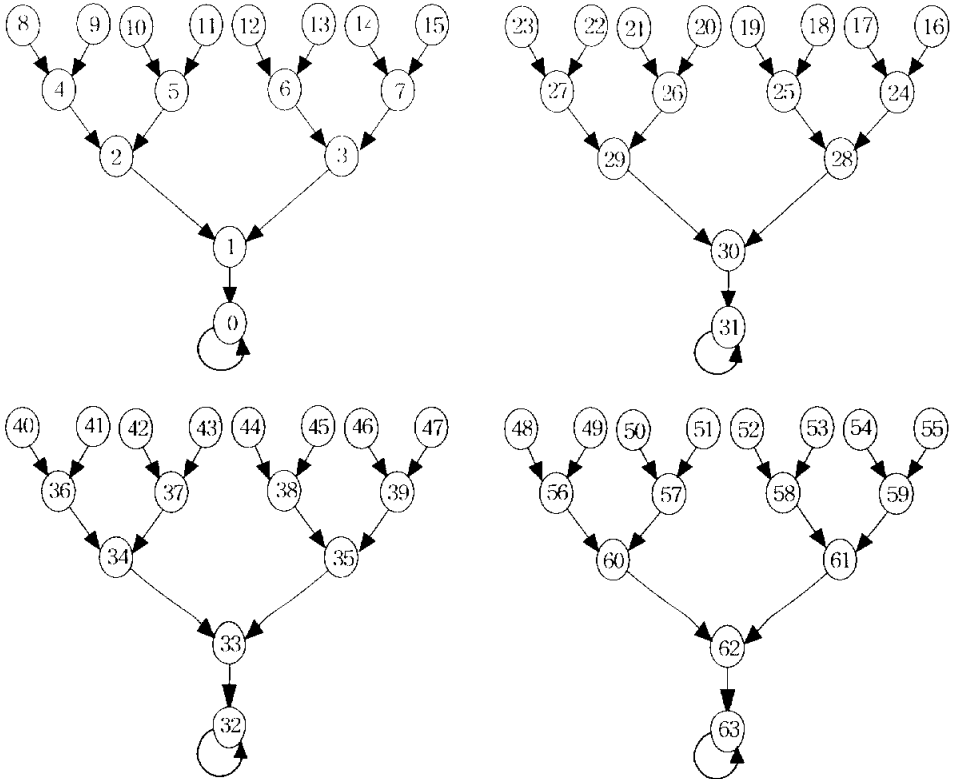


그림 3.4 6 셀 TPMACA의 상태전이 그래프
Fig. 3.4 State-transition diagram of 6-cell TPMACA.

전이 행렬 T 는 다음과 같다.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

그림 3.5는 여원벡터 $F = (00011)^T$ 일 때 6-셀 선형 TPMACA로부터 얻어지는 여원 CA의 상태전이 그래프이다. 먼저 $8 \rightarrow 7 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ 를 2-트리의 기본경로라 하면, 2-트리의 레벨 4의 여섯번째 상태인 $\overline{S}_{4,5}$ 는 식(3.26)으로부터 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \overline{S}_{4,5} &= \overline{S}_{4,0} \oplus \sum_{i=1}^3 b_i S_{i,0} \\ &= \overline{S}_{4,0} \oplus b_1 S_{1,0} \oplus b_2 S_{2,0} \oplus b_3 S_{3,0} \\ &= (001000)^T \oplus 1 \cdot (000001)^T \oplus 0 \cdot (000010)^T \oplus 1 \cdot (000100)^T \\ &= (001101)^T = 13 \end{aligned} \quad (3.29)$$

이 기본경로에 대응하는 34-트리의 기본경로는 식(3.27)의 조건식에 의하여 2-트리의 각 기본경로에 32를 더한 값으로 $40 \rightarrow 39 \rightarrow 32 \rightarrow 35 \rightarrow 34$ 이다. 32-트리의 나머지 부분도 식(3.27)에 의하여 구한다. 34-트리의 레벨 4의 네번째 상태인 $\overline{B}_{4,3}$ 을 구하면

$$\begin{aligned}
\overline{B}_{4,3} &= \overline{B}_{4,0} \oplus \sum_{i=1}^3 b_i S_{i,0} \\
&= \overline{B}_{4,0} \oplus b_1 S_{1,0} \oplus b_2 S_{2,0} \oplus b_3 S_{3,0} \\
&= (101000)^T \oplus 1 \cdot (000001)^T \oplus 1 \cdot (000010)^T \oplus 0 \cdot (000100)^T \\
&= (101011)^T = 43
\end{aligned} \tag{3.30}$$

이다.

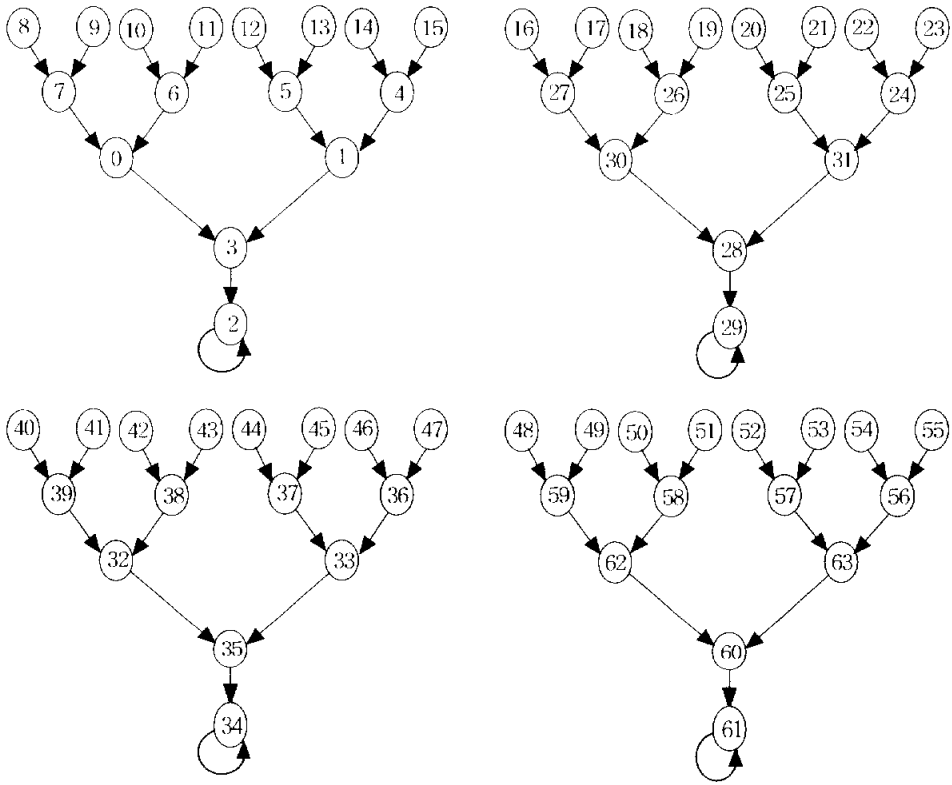


그림 3.5 여원 CA의 상태전이 그래프

Fig. 3.5 State transition diagram of complemented CA.

3.4 선형 TPMACA로부터 유도되는 여원 CA의 트리구성 알고리즘

본 글분은 앞서 서술한 내용을 정리하여 알고리즘을 제안한다. 선형 TPMACA의 트리구성과 이 CA로부터 유도된 여원 CA의 트리구성 알고리즘이다.

Step 1. 주어진 전이 행렬이 T 일 때 $(T \oplus I)x=0$ 을 만족하는 끝개 x 를 찾는다.

Step 2. T 의 최소다항식 $m(x)$ 를 나누는 x^k 중 최대정수 k 를 찾아 CA의 깊이 d 를 구한다.

Step 3. $T^d y=0$ 이고 $T^{d-1}y \neq 0$ 인 0-트리의 도달불가능상태 y 하나를 찾는다.

Step 4. y 를 시작으로 하는 0-트리의 0-기본경로 $y \rightarrow Ty \rightarrow \dots \rightarrow 0$ 를 찾는다.

Step 5. $S_{l,k} = S_{l,0} + \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0}$ 에 의하여 0-트리를 구성한다.

Step 6. $S_{l,0}^\alpha = S_{l,0} \oplus \alpha$ 에 의하여 α -트리의 α -기본경로를 찾는다.

Step 7. $S_{l,k}^\alpha = S_{l,0}^\alpha + \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0}$ 에 의하여 나머지 α -트리를 구성한다.

/* 여원을 갖는 CA C' 트리의 구성*/

Step 8. 여원벡터 F 가 0이 아닌 끝개이면 C' 의 0-기본경로를

$$\overline{S_{l,0}} = \begin{cases} S_{l,0} & l: \text{짝수} \\ S_{l,0} \oplus \beta & l: \text{홀수} \end{cases} \text{에 의하여 구하고 Step 10으로 간다.}$$

Step 9. 여원벡터 F 가 선형 TPMACA의 비순환 상태이고 도달 불가능한

상태이면 $0 \rightarrow \overline{T}0 (= F) \rightarrow \dots \rightarrow \overline{T^d}0 (= \overline{T^{i-1}}F)$ 를 $\overline{T^{i-1}}F$ -트리의 기본경로로 하고, 도달 가능한 상태이면 선형 TPMACA의 0-트리의 도달 불가능한 상태 y 에 대하여 $y \rightarrow \overline{T}y \rightarrow \dots \rightarrow \overline{T^d}y (= \overline{T^{i-1}}F)$ 를 $\overline{T^{i-1}}F$ -트리의 기본경로로 한다.

Step 10. $\overline{S_{l,k}} = \overline{S_{l,0}} + \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0}$ 에 의하여 $\overline{T^{i-1}}F$ -트리를 구성한다.

Step 11. $\overline{S_{l,0}^a} = \overline{S_{l,0}} \oplus \alpha$ 에 의하여 또 다른 트리의 기본경로를 구성한다.

Step 12. $\overline{S_{l,k}^a} = \overline{S_{l,0}^a} + \sum_{i=1}^{l-1} b_i S_{i,0}$ 에 의하여 트리의 나머지 부분을 구성한다.

3.5 선형 TPSACA를 이용한 완전 해싱 알고리즘

본 논문에서 제시하고자 하는 방법은 두 개의 직전자를 갖는 CA를 이용한 해싱기술로 지금까지 제안된 기술과는 다른 것이다. 여기서 사용될 CA는 비그룹 CA의 특별한 부류인 두 개의 직전자와 많은 끝개들을 갖는 CA가 효과적인 해시함수 생성기임을 보인다. TPMACA의 상태전이 그래프는 서로 다른 성분들의 집합으로 이루어진다. 각 성분은 상태전이 그래프에서 상태의 개수가 같은 역 트리(inverted tree)이다. 그 CA 상태들을 키 값으로 간주할 수 있다. 그 CA를 하나의 특별한 키로 로딩하고 그 트리들의 깊이와 똑같은 횟수만큼 자동적으로 실행한다면 해당되는 트리의 루트에 도달하기까지 많은 상태들을 통해 진화할 것이다. 루트란 자체순환(self-loop)을 하는 상태를 말하는데

이것을 끌개라 부른다. 하나의 트리에 있는 상태들의 집합을 끌개 분지(attractor basin)라 부른다. 이러한 끌개 분지들의 루트집합은 어떤 비트 위치들에서 pseudoexhaustive(PE) 비트 패턴들을 품는데 그러한 PE 비트 패턴들은 하나의 트리에 포함된 키들의 주소로서 사용될 수 있다.

또 다른 해시함수의 중요한 부류로 완전해시함수(perfect hashing function)를 들 수 있다[43]-[45]. 완전해시함수는 키의 집합에 대하여 각각의 키를 유일한 주소로 보낸다. 그러므로 충돌해결 기술이 요구되지 않는다. 그리고 어떠한 레코드의 키도 정확하게 한번의 검색으로 접근할 수 있다. 완전해시함수는 컴파일러 키워드, 어셈블러 연산코드, 사전문제 등과 같은 정적(static) 테이블 검색에 응용되고 있다. 본 연구에서는 두 개의 직전자와 하나의 끌개를 갖는 TPSACA를 이용하여 완전해시함수를 생성하고자 한다. 그러한 CA의 상태천이 그래프에서는 모든 상태들이 0 상태의 끌개를 둔 역 이진트리를 이룬다. 키의 주소를 계산하기 위하여 CA를 시드(seed)로서 키를 적재하고 그것이 끌개에 도달할 때까지 자동으로 실행한다. 각 상태천이는 CA의 자동 모드(mode) 연산에 대한 각 시간 단계에서의 진행을 나타낸다. 해상에 대해 선택된 CA와 주어진 키 집합에 의존하여 이미 결정된 시간 단계에서 특별한 CA 셀의 내용들은 해시 주소를 구성하기 위하여 연결된다. 이 기술의 소프트웨어 버전에서는 곱과 나누기 연산을 포함하는 기존의 기술보다 상당히 빠른 기술이라 사료된다.

3.5.1 해시함수의 정의

해싱이란 키 값을 주소로 변환하는 것을 의미하며, 레코드 키 값을 이용하여 저장되어 있는 주소를 해시함수로 계산한 후 산출된 주소로 원하는 레코드를 검색하는 방법이다[46].

해시함수는 키 k 에 대한 테이블 주소를 계산하기 위한 방법으로 주어진 키 값으로부터 레코드가 저장되어 있는 주소를 산출해 낼 수 있는 수식이다.

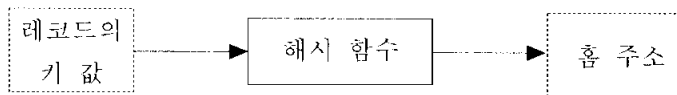


그림 3.6 해시 함수

Fig. 3.6 Hash function.

해시 테이블은 해시함수로 산출된 결과로 그 값에 해당하는 위치에 각 레코드를 저장한 표를 말한다. 즉, 레코드를 한 개 이상 저장할 수 있는 버킷(bucket)들로 구성된 기억 공간이다. 버킷은 해시함수에 의해서 계산된 홈 주소(home address) 또는 버킷 주소에 자료를 저장하기 위한 기억 장소이다.

일반적으로 가장 이상적인 해시함수는 키 집합의 한 레코드와 홈 주소 집합의 레코드가 1 : 1로 대응하여 해시 테이블의 정해진 범위에 고르게 분포되어 충돌(collision)이 최소화되어야 한다. 이러한 해시함수는 실제 환경에서 찾기가 어렵지만 최소한 다음 성질을 만족해야 한다.

▷ 계산은 빠르고 쉬워야 한다.

▷ 서로 다른 레코드의 키 값에 대한 해시함수 값인 홈 주소가 가급적 중복되지 않아야 한다.

실제로 이상적인 해시함수를 얻기 어렵기 때문에 의외의 현상이 일어난다. 그 중 하나는 서로 다른 두 개의 키가 같은 홈 주소를 갖게 되는 경우이다. 이러한 경우 충돌이 일어났다고 한다. 또한 같은 홈 주소를 갖는 레코드의 집합을 동의어(synonym)라고 하며 버킷에 빈 공간이 있는 한 동의어를 저장할 수가 있다. 두번째는 레코드를 저장할 수 없는 경우이다. 이를 과잉상태(overflow)라고 한다. 다음은 일반적으로 사용되는 해시함수의 종류이다.

▷ 제산법(division method) : 키 값 k 를 양의 정수 q 로 나눈 나머지를 k 의 해싱 주소로 사용하는 방법이다.

▷ 기수(radix) 변환법 : 키 값을 다른 진법의 수로 보고 홈 주소를 얻는 방법이다.

▷ 접지법(folding) : 키를 여러 부분으로 나누고 각 부분의 값을 모두 더하거나 또는 보수 값을 더하여 홈 주소를 얻는 방법이다. 이동 접지법(shift folding)과 경계 접지법(boundary folding)이 있다.

▷ 제곱-중간(mid-square)법 : 키를 제곱하고 이 값의 중간 부분의 값을 택하여 홈 주소로 하는 방법이다.

서로 다른 레코드 키가 동일한 홈 주소를 갖게 될 때 충돌이 발생하며 이 충돌을 유발한 레코드를 다른 기억 장소로 저장하는 일을 과잉상태 처리라 한

다. 다음은 과잉상태를 처리하는 방법이다.

- ▷ 선형 개방 주소법(linear open addressing) : 충돌 발생시 레코드 키를 저장할 버킷을 찾기 위해서 충돌이 일어난 위치에서 테이블 순으로 하나씩 검색하여 빈 저장 공간이 나오면 레코드 키를 저장하여 충돌을 해결하는 방법이다.
- ▷ 이차 검색법(quadratic probing) : 선형 검색법에서 발생하는 군집 문제와 비교 횟수를 해결하기 위해서 제안된 방법이다.
- ▷ 무작위 검색법(random Probing) : 난수 계산 프로그램을 이용하여 해시 테이블의 홈 주소를 후속 주소로 택하여 충돌을 해결하는 방법이다.
- ▷ 재해싱(rehashing) : 해시 테이블의 부화 비율이 커지면 해시함수로 테이블의 크기가 2배 이상 되는 새로운 테이블을 만든 다음 주소 값을 계산하여 해당 버킷을 조사하고 키 값을 테이블에 삽입하는 방법이다.
- ▷ 연쇄 처리법(chaining method) : 해시 테이블에서 레코드 키가 충돌이 일어날 때, 그 키를 포함한 모든 레코드 키를 연결 리스트 형태로 연결(link)하여 동의어들을 동일한 버킷에 저장하는 방법이다.

3.5.2 TPSACA를 이용한 완전 해싱 이론 및 MRT 계산

본 논문에서는 TPMACA의 특별한 경우인 두 개의 직전자와 하나의 끝개를 갖는 TPSACA를 이용하여 완전해시함수를 생성하고자 한다. 그러한 CA의 상태전이 그래프에서는 모든 상태들이 0 상태의 끝개에 순환 상태를 둔 역 이진 트리를 이룬다. 키의 주소를 계산하기 위하여 CA를 시드로서 키를 적재하고

그것이 끝개에 도달할 때까지 자동으로 실행한다. 각 상태천이는 CA의 자동 모드 연산에 대한 각 시간 단계에서의 진행을 나타낸다. 해싱에 대해 선택된 CA와 주어진 키 집합에 의존하여 이미 결정된 시간 단계에서 특별한 CA 셀의 내용들은 해시 주소를 구성하기 위하여 연결된다.

선형 TPMACA의 특별한 경우인 TPSACA는 임의의 하나의 도달 가능한 상태에 대하여 서로 다른 2개의 직전자를 가지며, 상태 0만을 순환상태인 선형 CA를 말한다. 그러므로 이 CA의 모든 가능한 상태의 수가 2^n 이고 깊이를 d 라 하면 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 2^n &= 1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{d-1} \\
 &= 1 + \frac{1 \cdot (2^d - 1)}{2 - 1} \\
 &= 2^d
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

그러므로 트리의 깊이는 항상 n 이다. 따라서 n -셀 선형 TPSACA의 최소다항식은 $x^d \Phi(x) = x^n \Phi(x) = x^n$ 이다.

k 개의 키를 갖는 n 비트 키 집합을 k' 비트 주소 ($k \leq 2^{k'} < 2^n$)로 완전히 해시하는 기초 기술은 다음과 같다.

1. 선형 TPSACA와 여원 TPSACA의 기본경로를 이용하여 해시하기 위한 키 값 x 의 위치를 찾는다.
2. 키 값 x 에 대하여 완전 해시된 주소인 k' 비트들이 그 CA에 의해서 생성된 연속적인 상태들의 특정한 비트 위치로부터 얻어진다. 임의의 키들의

쌍에 대한 해시된 주소가 적어도 한 비트 위치에서 달라지므로 생성된 주소의 유일성을 보장한다.

위에서 언급한 기술을 상세하게 기술하면 다음과 같다. $X=\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 를 주어진 k 개의 키를 원소로 갖는 집합이라 하고 W 를 완전해시주소를 생성하기 위하여 사용된 특성행렬 T 를 갖는 TPSACA라 하자. 집합 X 의 각 원소가 W 의 상태전이 그래프의 제일 위쪽 레벨에 속한다고 하자. x_i 와 x_j 를 X 에 있는 두 개의 키 값이라 하자. W 의 상태전이 그래프에서 x_i 와 x_j 가 l 단계 후 처음으로 상태 y 로서 같아지는 위치에 있다고 하자. 즉 $l=\min\{k|T^k x_i=T^k x_j=y\}$ 이라 하면 l 은 MRT가 된다. 그러면 $T^l(x_i)=T^l(x_j)=y$ 가 성립한다. $T^{l-1}(x_i)(:=p_1)$ 과 $T^{l-1}(x_j)(:=p_2)$ 는 y 의 직전자이다. 따라서 $p_1 \oplus p_2(=z)$ 는 상태 0의 0이 아닌 직전자이다. 그러므로 만일 z 의 r 번째 비트($r=0, 1, 2, \dots, (n-1)$)가 1이면 p_1 과 p_2 중 한 상태만 r 번째 비트가 1이 되어야 하며, z 의 r 번째 비트가 0이면 p_1 과 p_2 의 r 번째 비트가 서로 같아야 한다. 이러한 이유로 우리는 pivot 비트 위치의 개념이 필요하다.

<정의 3.5> pivot bit (PB) 위치 : 주어진 TPSACA의 상태전이 그래프에서 상태 0의 0이 아닌 직전자의 이진표현에서 가장 오른쪽에 있는 1의 비트 위치를 말한다.

그러므로 p_1 과 p_2 는 PB 위치에서 서로 구별될 수 있다. x_i 의 해시된 주소는 p_1 로부터 얻어진 PB 위치의 비트 값을 가지며 x_j 의 해시된 주소는 p_2 로부터 얻어진 PB 위치의 비트 값을 가지게 된다. 결국 x_i 와 x_j 는 서로 다른 해시된 주소로 전달된다.

<예제 3.6> 4 셀 선형 CA의 규칙이 $\langle 150, 60, 150, 150 \rangle$ 인 CA를 W 라 할 때 W 의 천이 행렬 T 는 다음과 같다.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

그러므로 T 의 계수는 3이고 $(T \oplus I)$ 의 계수는 4이다. 또한 W 의 특성다항식과 최소다항식은 모두 x^4 이다. 그러므로 W 는 TPMACA의 특별한 분류인 TPSACA이다. 3.4절에서 제안한 트리구성 알고리즘에 따라 0-트리의 기본 경로 $5 \rightarrow 13 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ 를 구하고 (Step 1~Step 4), Step 5에 의하여 0-트리의 나머지 부분을 구성한다. 그림 3.7은 4-셀 TPSACA의 구조, 그림 3.8은 상태천이 그래프이다.

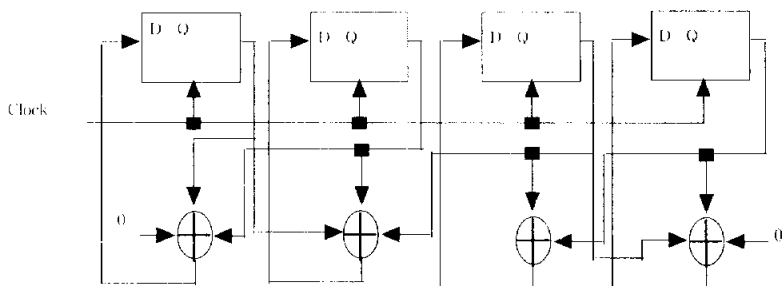


그림 3.7 4-셀 TPSACA의 구조
Fig. 3.7 Structure of 4-cell TPSACA.

그림 3.7과 그림 3.8에서 0의 0이 아닌 직전자는 4(0011)이므로 PB 위치는 네번째 비트이다. 5와 4가 키로 주어진다면 두 키의 MRT는 2이다. 3.4절에 제안된 트리구성 알고리즘을 이용하여 0 트리의 기본경로로부터 키 5와 4의 위치가 레벨 4의 0번째와 두번째이므로 이 두 상태의 다음상태인 상태 5는 레벨 3에서 0번째 상태가 되고, 상태 4는 레벨 3의 첫번째 상태가 된다. 0-트리의 기본경로를 이용하여 해당 상태를 구하면 레벨 3의 0번째 상태는 13(1101)이고 첫 번째 상태는 14(1110)이므로 PB위치의 값을 기준으로 하여 5와 4의 해시된 주소를 1과 0으로 한다.

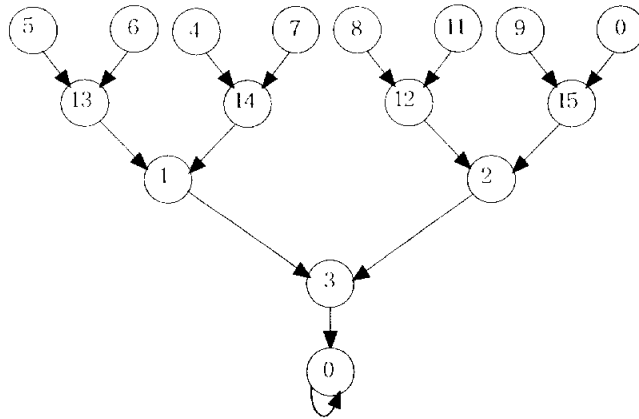


그림 3.8 4-셀 TPSACA의 상태전이 그래프
Fig. 3.8 State-transition diagram of 4 cell TPSACA.

<MRT의 계산>

집합 X 에 있는 주어진 원소 x 에 대한 완전 해시된 주소는 주어진 TPSACA에 x 를 로드하여 기본경로를 이용하여 원소 x 의 위치를 정확히 알아내고 또한 이로써 다음상태의 위치를 알아내어 그 결과의 상태들로부터 PB 번째 비트를 추출함으로써 생성될 수 있다. 결과는 $(n-1)$ -비트 주소를 생성한다. 그러나 만일 집합 $Z=\{z=x_1 \oplus x_2 | x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$ 가 상태전이 그래프의 레벨 l 의 어떤 상태도 갖지 않는다면, 키 집합 X 의 가능한 모든 키의 순서쌍 중 MRT가 l 인 순서쌍은 없다. $(n-l+1)$ 번째 레벨에 대응하는 주소비트를 얻을 필요가 없다. 이렇게 함으로써 주소비트가 $(n-2)$ 비트로 2비트가 줄어든다. 그러므로 주어진 키 집합에 대하여 임의의 키 순서쌍의 MRT를 구하는 것은 해시되는 주소의 비트수를 결정하는데 중요한 요인이 된다.

TPSACA의 같은 트리에서 동일한 레벨에 놓여있는 두 상태의 키 순서쌍

(x_i, x_j) 의 MRT는 기본경로에 의하여 구해진 두 상태의 위치를 XOR하여 얻을 수 있다. x_i 와 x_j 가 최상위 레벨 d 에 놓여있는 두 상태라 하자. 그리고 $b_i(i=1, \dots, d-1)$ 를 x_i 상태의 레벨 d 에서 위치를 이진표현으로 나타내었을 때의 각각의 위치 비트라 하고, $b'_i(i=1, \dots, d-1)$ 를 x_j 상태의 레벨 d 에서 위치를 이진표현으로 나타내었을 때의 각각의 위치 비트라 하면 c_i 를 다음과 같이 구한다.

$$c_i = b_i \oplus b'_i (i=1, \dots, d-1) \quad (3.33)$$

식(3.33)에서 구한 c_i 값 중 1인 최소 i 를 찾는다. 이때 두 순서쌍의 MRT는 $(d-i)$ 이다.

<예제 3.7> 그림 3.7과 그림 3.8의 TPSACA W 에 대하여 주어진 키 집합이 $X = \{5, 6, 8, 11\}$ 이라 하면 모든 키들은 최상위 레벨(도달 불가능한)의 상태이다. 상태 0의 0이 아닌 직전자가 3(0011)이므로 PB의 위치는 네번째 비트이다. 0 트리의 기본경로를 이용하여 키 집합의 각 원소들의 최상위 레벨에서 위치가 각각 0, 1, 4, 5번째 상태이다. 이 상태들이 1단계 상태변화 후 레벨 3에서의 위치는 각각 0, 0, 2, 2이다. 이는 키 순서쌍 (5, 6)과 (8, 11)의 MRT가 1임을 나타내므로 각 상태의 PB위치의 비트에서 구별이 된다.

다시 위의 과정을 반복하여 각 키가 2단계 상태변화 후 즉 레벨 2에서 위치가 0, 0, 1, 1이고 3단계 상태변화 후 모든 상태들은 레벨 1에서 모두 0번째 상태인 상태 0의 0이 아닌 직전자 3이 된다. 그러므로 나머지 가능한 키의 순서쌍은 (5, 8), (5, 11), (6, 8), (6, 11)이고 이 순서쌍의 MRT는 모두 3이다. 그러므로 2단계 상태 변화 후 각 상태의 PB 위치에서 비트 값을 선택한다. 각 순서쌍은 MRT가 2인 경우가 없으므로 해시되는 주소의 비트수를 하나 줄일 수 있다. 그러므로 X 에 속한 모든 키를 2비트로 해시된 주소를 생성할 수 있다. 다음 표 3.1은 주어진 키를 해시하는 과정이다. 한 상태의 현재 레벨의 위치에서 다음 상태의 한 단계 아래의 레벨의 위치는 현재 위치를 2로 나눈 몫과 같다.

표 3.1 주어진 키의 해시 과정

Table 3.1 Hash process of given key.

Level 4		Level 3		Level 2		Level 1		해시된 주소
상태	위치	상태	위치	상태	위치	상태	위치	
5 (0101)	0	13 (1101)	0	1 (0001)	0	3 0	0	11
6 (0110)	1	13 (1011)	0	1 (0001)	0	3 0	0	01
8 (1000)	4	12 (1100)	2	2 (0010)	1	3 0	0	00
11 (1011)	5	12 (1100)	2	2 (0010)	1	3 0	0	10

지금까지는 집합 X 의 각 원소들이 주어진 TPSACA의 상태천이 그래프에서 가장 위쪽 레벨에 있는 경우만을 언급하였다. 따라서 이제부터는 완전히 일반적인 경우에 대하여 언급하고자 한다.

주어진 집합 X 가 주어진 부분집합 X_1 과 X_2 로 이루어졌다고 하자. 여기서 X_1 의 원소들은 주어진 TPSACA의 상태전이 그래프에서 최상위 레벨에 위치하고 X_2 의 원소들은 나머지 레벨에 위치한다. 여기서 W 의 도달 불가능한 상태중 하나인 F 를 여원벡터로 취함으로써 얻어진 여원 $CA(=V)$ 의 상태전이 그래프에서 상태 0이 도달 불가능한 상태가 된다. 또한 여원 $CA=V$ 에서 W 의 도달 불가능한 상태는 도달 가능한 상태가 되고, 도달 가능한 상태는 도달 불가능한 상태가 된다. 3.4절의 트리구성 알고리즘으로부터 여원 TPSACA의 기본경로와 선형 TPSACA의 기본경로를 이용하여 선형 TPSACA로 해시할 수 없었던 X_2 의 키들을 해시한다. 이때 해시된 주소는 주어진 키가 선형 TPSACA로 해시된 것인지, 아니면 여원 TPSACA로 해시된 것인지를 구별하는데 한 비트가 소요된다.

<예제 3.8> 그림 3.8에 대하여 주어진 키 집합이 $X = \{5, 6, 8, 11, 12, 15, 3, 0\}$ 라 하면 키 집합 X 를 키가 선형 TPSACA의 상태전이 그래프에서 놓여있는 위치에 따라 최상위 레벨인 경우 $X_1 = \{5, 6, 8, 11\}$ 과 그렇지 않은 경우 $X_2 = \{12, 15, 3, 0\}$ 로 나눌 수 있다. 집합 X_2 의 키를 해시하기 위해 그림 3.8에서 여원벡터가 8인 여원 TPSACA를 이용한다.

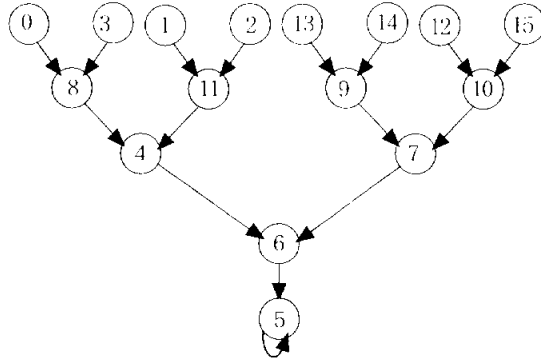


그림 3.9 4-셀 여원 TPSACA의 상태전이 그래프
 Fig. 3.9 State-transition diagram of 4-cell
 complemented TPSACA.

그림 3.9는 <예제 3.6>의 선형 TPSACA로부터 유도된 여원 TPSACA의 상태전이 그래프이다. 키 12, 15, 3, 0을 해시하는 방법은 선형 TPSACA를 이용하여 해시하는 방법과 동일하다. 이때 사용되는 여원 TPSACA의 기본경로는 $0 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ 이다. 표 3.2는 주어진 키 집합 X_2 를 해시하는 과정이다.

그러므로 주어진 키 집합의 해시된 주소는 다음과 같다. 여기에서 해시된 주소의 맨 마지막 비트의 값이 0인 경우는 키가 선형 TPSACA를 이용하여 해시된 것임을, 비트 값이 1인 경우는 여원 TPSACA를 이용하여 해시된 경우임을 나타낸다.

5 : 110	6 : 010	8 : 000	11 : 100
12 : 011	15 : 111	3 : 101	0 : 001

표 3.2 주어진 키 집합 X_2 의 해시 과정

Table 3.2 Hashing process of a given key set X_2 .

Level 4		Level 3		Level 2		Level 1		해시된 주소
상태	위치	상태	위치	상태	위치	상태	위치	
12 (1100)	4	6 (0110)	2	7 (0111)	1	6	0	01
15 (1111)	5	6 (0110)	2	7 (0111)	1	6	0	11
3 (0011)	1	2 (0010)	0	14 (1110)	0	6	0	10
0 (0000)	0	2 (0010)	0	14 (1110)	0	6	0	00

3.5.3 TPSACA를 기반으로 하는 완전 해싱 알고리즘

본 절에서는 3.4절의 트리구성 알고리즘과 3.5.2에서 언급한 TPSACA를 기반으로 하는 완전 해시이론과 MRT 계산법을 이용하여 TPSACA를 기반으로 하는 완전 해시 알고리즘을 서술한다.

Step 1. 선형 TPSACA의 기본경로로부터(트리구성 알고리즘 : Step 1 ~ Step 4) 최상위 레벨의 상태를 구하고(트리구성 알고리즘 : Step 5) 주어진 키 집합 (X)에서 선형 TPSACA의 최상위 레벨에 해당하는 키의 부분집합 (X_1)을 찾고 각 키의 위치를 찾는다.

Step 2. 선형 TPSACA에서 상태 0의 0이 아닌 직전자로부터 PB위치를 찾는다. $X = X_1$ 이면 Step 4로 간다.

Step 3. $X_2 = X - X_1$ 라하고 선형 TPSACA의 임의의 도달 불가능한 상태가 여원 벡터 F 가 되는 선형 TPSACA로부터 유도된 여원 TPSA

CA의 기본 경로 $0 \rightarrow \overline{T}0(=F) \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{T}^d 0(= \overline{T}^n F)$ 를 구하고 (트리구성 알고리즘 : Step 9), 여원 TPSACA의 최상위 레벨의 상태를 구한다(트리구성 알고리즘 : Step 10). 키 부분집합 X_2 의 각 원소에 대하여 여원 TPSACA의 최상위 레벨에서의 위치를 찾는다.

Step 4. X_1 과 X_2 의 각각의 모든 키 순서쌍 (x_i, x_j) 의 MRT를 계산하여 MRT집합 M 을 구한다.

Step 5. X_1 과 X_2 의 각 원소의 위치를 나타내는 $b_i (i=1, \dots, d-1)$ 에 대하여 오른쪽에서부터 한 비트씩 줄여가면서 해당 하위 레벨에서의 상태들을 구하고 M 의 원소 $m_i (1 \leq i \leq d-1)$ 에 대하여 $(d+1-m_i)$ 레벨에서 각 상태의 PB 위치의 비트를 추출한다.

Step 6. $X=X_1$ 또는 $X=X_2$ 이면 중지한다.

Step 7. X_1 에 속한 키의 해시된 주소의 맨 오른쪽에 0을, X_2 에 속한 키의 해시된 주소의 맨 오른쪽에 1을 부여한다.

본 논문에서는 선형 TPSACA와 여원 TPMACA의 특성을 이용하여 트리구성 알고리즘을 구성하였고, 트리구성 알고리즘과 TPSACA를 이용하여 완전해시함수를 생성하는 알고리즘을 제시하였다.

제 4 장 미디어 천이 규칙을 갖는 셀룰러 오토마타를 이용한 영상의 잡음 제거 및 에지 추출

4.1 실험 배경

디지털 영상처리는 멀티미디어 시대에 있어 중요한 영상을 컴퓨터를 이용하여 처리하는 분야이다. 즉, 영상처리는 그림을 다루는 학문으로서 수많은 분야에서 사용되는 넓은 영역의 기술들에 대한 총칭이다. 여기에 포함되는 기술들은 영상을 더욱 높은 질의 영상으로 만들거나 일그러뜨리고, 영상의 특징들을 더욱 두드러지게 하고 다른 영상의 일부분으로부터 새로운 영상을 만들어내고, 영상을 획득하는 동안이나 획득한 후에 변질된 영상을 복원하는 기술이다.

다양한 응용을 위해서 영상처리에서 가장 기초적인 과정중의 하나가 영상의 질을 높이는 것이다. 본 논문에서는 이러한 영상 조작 중에서도 영상의 잡음 제거와 에지 추출에 관하여 CA를 이용한 알고리즘을 제안한다.

일반적으로 잡음은 주변 픽셀과 어울리지 않는 성격을 갖기 때문에 주변 픽셀의 밝기값을 조절함으로써 잡음비율을 줄일 수 있다. 영상의 잡음 제거 방법에는 공간 영역적 방법과 주파수 영역적 방법으로 나눌 수 있다. 공간 영역적 방법에는 평균(average) 필터와 미디언(median) 필터 등이 있다. 평균 필터는 어느 픽셀을 중심으로 임의 영역의 각 픽셀 밝기값의 평균을 구해서 새로운 밝기값으로 하는 방법이며, 미디언 필터는 주변 픽셀의 밝기값의 순서적인 나열에서 중간값을 취하는 방식이다. 주파수 영역적 방법에는 저주파 통과(low-pass) 필터가 있다. 저주파 통과 필터는 픽셀의 밝기값이 급격하게 변화

하는 부분은 고주파 부분에 분포하는데 명암도가 급격하게 변화하는 부분을 제거하기 위해 푸리에 변환, 코사인변환 등의 직교변환후에 고주파 부분을 차단하는 방법이다. 평균 필터와 저주파 통과 필터는 가우시안(Gaussian) 잡음에 대해서는 적합하나 물체의 에지 부분과 같이 픽셀의 밝기값이 급격히 변화하는 부분의 선명도를 흐리게 하는 것이 단점이다. 미디언 필터는 에지 보존 및 임펄스 잡음 제거에는 적합하나 연산량이 많아지며, 전 영역에 일률적으로 같은 필터로 잡음을 제거하므로 유연한 대처가 어렵다[47]. 최근에 제안된 coordinate 논리 필터를 이용한 잡음제거는 AND, OR, NOT, XOR 등의 연산을 통하여 빠른 속도로 구현할 수 있지만 충실한 잡음 제거가 되지 못하는 단점이 있다[21].

에지는 물체와 배경의 경계이며 색이나 픽셀 밝기값의 급격한 변화가 있는 부분이다. 영상처리에서 에지 추출이 중요한 이유는 영상에서 많은 정보가 서로 다른 영역간의 경계선에 위치하고, 인간의 시각이 물체를 인식하는데 있어서 윤곽선만으로 인식이 가능하기 때문이다. 또한 영상을 에지로 표현하게 되면 형태에 관한 정보를 그대로 유지하면서 자료의 양을 줄일 수 있고 다른 영상 처리 알고리즘과 쉽게 결합할 수 있는 장점이 있다[48].

기존의 에지 검출 기법으로는 Sobel, Kirsh, Roberts, Robinson, 및 spatial difference 연산자 등의 1차 미분(gradient) 연산자와 LOG(laplacian of Gaussian) DOG(difference of Gaussian)등의 2차 미분 연산자[49] 및 엔트로피 연산자 등이 있다[50]. 그러나 기존의 기법들은 잡음에 약하고, 전 영역에 동일한 마스크를 적용하므로 영상의 국소적인 특징에 유연한 대처가 어려운 단점이 있다.

제안된 방법은 잡음 제거 및 에지 추출을 위해 이웃 픽셀들의 관계를 이용한 미디언 천이 규칙(median transition rule)을 사용한다. 각 미디언 천이 규

적은 이웃 픽셀과 관계를 정의한 것으로 대상 영상을 국소적으로 픽셀의 밝기 값 차이를 증가 및 감소시켜 영상의 잡음 제거와 에지 추출을 수행한다.

4.2 영상의 잡음 제거 및 에지 추출 알고리즘

CA는 시간 및 공간, 상태가 모두 이산적인 동적 시스템이며 각 픽셀들은 상호 연결된 이웃의 현재 상태와 국소적인 규칙에 따라 새로운 상태로 천이된다. 천이 규칙은 자신의 현재 상태와 주변 이웃의 상태에 의해 결정된다. 각 규칙에 따라 지속적인 성장과 번식, 죽음 등을 반복하게 된다. 특히 오토마타가 어떤 특정한 형태로 고정되어 변하지 않고 수렴하는 특성을 가지므로 영상 처리 알고리즘으로 사용할 수 있다[51]~[53]. 본 논문에서는 CA의 주변 이웃과의 미디언 천이 규칙에 의해 천이하며, 수렴하는 특성을 이용한다.

일반적인 Hamiltonian은 식(4.1)로 표현한다.

$$H(x) = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in V} \delta(x_i, x_j) + \sum_{i \in I} \delta^*(b_i, x_i) \quad (4.1)$$

단, $x_i \in Q = \{0, \dots, q-1\}$; 밝기값

δ, δ^* ; 대칭함수, $(R \times R \rightarrow R)$, 즉 $\delta(a, b) = \delta(b, a)$; $\delta^*(a, b) = \delta^*(b, a)$

$(i, j) \in V$; 픽셀 i, j 는 이웃, $I = \{1, \dots, n\}$, $V_i = \{j \in I : (i, j) \in V\}$, $b_i \in R$

i 지점에서의 함수는 식(4.2)와 같이 나타난다.

$$H_i(x) = - \sum_{j \in V_i} \delta(x_i, x_j) + \delta^*(b_i, x_i) \quad (4.2)$$

본 CA 모델은 순차(sequential)와 병렬(parallel) 두 가지의 경우가 있다. 순차의 경우에는 정의한 규칙에 따라 순차적으로 픽셀이 천이되어 고정된 한 점으로 수렴되는 간단한 동적 특성을 나타낸다. 병렬의 경우에는 동시에 모든 픽셀이 천이되어 고정점 혹은 2주기를 가지는 복잡한 특성을 가지게 된다. 식(4.1)이 Lyapunov 함수 [54]를 만족하면 수렴한다.

$$\forall i \in I: H_i(\hat{x}) \leq H_i(x), \quad \forall x \in Q^n \quad (4.3)$$

단, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \dots, x_n)$ 이다.

식(4.3)에 대하여 순차의 경우에 식(4.1)의 수렴성의 증명은 다음과 같다. a_{ij} 를 아래 식(4.4)로 두자.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) \in v \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.4)$$

명백히 $A = (a_{ij})$ 는 $n \times n$ 대칭 행렬이며 $(i, j) \notin V$, $\text{diag} A = 0$ 이다. 따라서 식(4.1)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} a_{ij} \delta(x_i, x_j) + \sum_{i \in I} \delta^*(b_i, x_i) \quad (4.5)$$

다음 상태를 $\tilde{x} = (x_1, \dots, f_k(x), \dots, x_n)$ 라 두면, A 와 δ, δ^* 의 대칭성으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta H &= H(\tilde{x}) - H(x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq k} a_{ij} \delta(x_i, x_j) - \sum_{j \in I} a_{kj} \delta(f_k(x), x_j) \\ &\quad + \sum_{i \neq k} \delta^*(b_i, x_i) + \delta^*(b_k, f_k(x)) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq k} a_{ij} \delta(x_i, x_j) \\ &\quad + \sum_{j \in I} a_{kj} \delta(x_k, x_j) - \sum_{i \neq k} \delta^*(b_i, x_i) - \delta^*(b_k, x_k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

따라서

$$\begin{aligned} \Delta H &= - \sum_{j \in V_k} \delta(f_k(x), x_j) \\ &\quad + \delta^*(b_k, f_k(x)) + \sum_{j \in V_k} \delta(x_k, x_j) - \delta^*(b_k, x_k) \\ &= H_k(\tilde{x}) - H_k(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

이며, 식(4.3)을 만족함을 알 수 있다.

병렬의 경우에는 고정점 혹은 2주기를 가지고 수렴하므로 순차적인 경우보다 수렴성의 증명이 복잡하다. 식(4.1)은 병렬의 경우 식(4.8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
E_{\text{sy}}(x(t)) = & - \sum_{(i,j) \in V} \delta(x_i(t), x_j(t-1)) \\
& + \sum_{i \in I} (\delta^*(b_i, x_i(t)) + \delta^*(b_i, x_i(t-1)))
\end{aligned} \tag{4.8}$$

식(4.8)에서 ΔE_{sy} 는 식(4.9)와 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\text{sy}} = & - \sum_i (\sum_{j \in V_i} \delta(x_i(t), x_j(t-1)) - \delta^*(b_i, x_i(t)) \\
& - \sum_{j \in V_i} \delta(x_i(t-2), x_j(t-1)) + \delta^*(b_i, x_i(t-2)))
\end{aligned} \tag{4.9}$$

i 번째 항 $(\Delta E_{\text{sy}})_i$ 에 대해서 $x_i(t) = x_i(t-2)$ 이면, $(\Delta E_{\text{sy}})_i = 0$ 이다. $x_i(t) \neq x_i(t-2)$ 이며 $|x_i(t) - x_i(t-2)| \leq 2$ 일 때, 두 가지 경우를 고려한다.

i) $|x_i(t) - x_i(t-2)| = 1$ 일 때, 다음의 상태를 가질 수 있다.

	t-2	t-1	t
x_1	a	a	a+1
x_2	a	a+1	a+1
x_3	a	a	a-1
x_4	a	a-1	a-1

첫번째 상태 x_1 의 경우

$$\sum_{j \in V_i} \delta(a+1, x_j(t)) - \delta^*(a+1, x_i(t)) > \sum_{j \in V_i} \delta(a, x_j(t)) - \delta^*(a, x_i(t)) \tag{4.10}$$

이므로, $(\Delta E_{sy})_i < 0$ 이다. 나머지의 경우도 이와 유사하다.

ii) $|x_i(t) - x_i(t-2)| = 2$

	t-2	t-1	t
x_{i1}	a	a+1	a+2
x_{i2}	a	a-1	a-2

상태 x_{i1} 의 경우

$$\sum_{j \in V_i} \delta(a+2, x_j(t)) - \delta^*(a+2, x_i(t)) > \sum_{j \in V_i} \delta(a, x_j(t)) - \delta^*(a, x_i(t)) \tag{4.11}$$

이므로, $(\Delta E_{sy})_i < 0$ 이다, 나머지의 경우도 이와 동일하다.

따라서, $x(t) \neq x(t-2)$ 이면, $E_{sy}(x(t)) < E_{sy}(x(t-1))$ 이 되어 병렬의 경우에도 식(4.1)은 Lyapunov 함수를 만족함을 알 수 있다.

4.2.1 잡음 제거 알고리즘

제안하는 미디언 천이 규칙은 다음과 같다.

$$f_i(x) = \begin{cases} x_i - 1 & \text{if } |\{j \in V_i \mid x_j < x_i\}| > \frac{|V_i|}{2} \\ x_i + 1 & \text{if } |\{j \in V_i \mid x_j > x_i\}| > \frac{|V_i|}{2} \\ x_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.12)$$

각 픽셀은 0에서 255의 밝기값의 상태를 가지며, 4방향 또는 8방향의 이웃을 가진다. $|V_i|$ 는 이웃의 개수를 나타내므로 $\frac{|V_i|}{2}$ 는 4방향일 경우에는 2가 되며 8방향일 경우에는 4가 된다.

먼저 미디언 천이 규칙의 예제를 그림 4.1에서 나타내겠다. 첫번째의 경우에는 밝기값이 15이며, $\frac{|V_i|}{2} = 4$ 이다. 중심 픽셀의 밝기값이 15보다 작은 이웃 픽셀의 수 $(|\{j \in V_i \mid x_j < 15\}|)$ 는 5개이다. 그리고 큰 이웃 픽셀의 수 $(|\{j \in V_i \mid x_j > 15\}|)$ 는 3개이므로 픽셀의 밝기값이 1 감소하여 14가 된다. 두번째의 경우는 픽셀의 밝기값이 큰 이웃 픽셀의 수가 6, 픽셀 밝기값이 작은 이웃 픽셀의 수가 2이므로 1 증가하여 16이 된다. 세번째의 경우는 픽셀의 밝기값이 큰 이웃 픽셀의 수가 3, 값이 작은 이웃 픽셀의 수가 4이므로 원래의 밝기값을 가지게 된다.

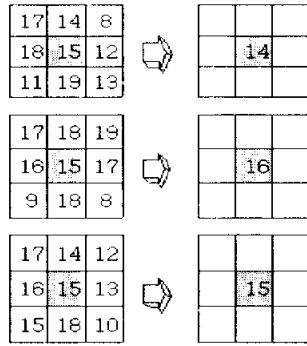


그림 4.1 제안된 규칙의 국소적인 변화

Fig. 4.1 Local evolution of the proposed rule.

제안하는 잡음 제거 방법은 미디언 천이 규칙에서 이웃 픽셀과의 관계에 의해 중심 픽셀의 밝기값을 증가 또는 감소시키는 형태를 나타낸다. 이웃 픽셀 중 중심 픽셀의 밝기값보다 큰 픽셀과 작은 픽셀의 개수를 측정한다. 그리고 $(\text{이웃 픽셀의 수})/2$ 보다 큰 값의 픽셀 수가 많으면 중심 픽셀의 밝기값을 1 증가시키고, 작은 값의 픽셀 수가 많으면 중심 픽셀의 밝기값을 1 감소시킨다. 즉 이웃 픽셀들과 급격한 밝기값의 차이가 나는 영역에 대해서만 연산을 처리함으로써 더 나은 잡음 제거를 할 수 있다.

제안된 미디언 천이 규칙 식(4.12)는 순차와 병렬 2가지 경우를 가진다. 각 미디언 천이 규칙은 식(4.1)에 대하여 $\delta(a, b) = \min(a, b)$, $\delta^*(a, b) = ab$, $b_i = \frac{|V_i|}{2}$ 로 표현할 수 있다. 일반적인 Hamiltonian으로 나타내면 식(4.13)과 같다.

$$H(x) = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in V} \min(x_i, x_j) + \sum_{i \in I} \frac{|V_i|}{2} x_i \quad (4.13)$$

순차적인 경우의 수렴성에 대한 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (\Delta H)_i &= H_i(\hat{x}) - H_i(x) \\
 &= \sum_{j \in V_i} (-\min(f_i(x), x_j) + \min(x_i, x_j)) + \frac{|V_i|}{2}(f_i(x) - x_i)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

식(4.14)에 대해서 다음의 3가지 경우를 고려한다.

$$i) \ f_i(x) = x_i \Rightarrow (\Delta H)_i = 0 \tag{4.15}$$

$$ii) \ f_i(x) = x_i + 1$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta H)_i &= \sum_{j \in V_i} (-x_i - 1 + x_j) + \frac{|V_i|}{2} \\
 &= -|\{ j \in V_i \mid x_j > x_i \}| + \frac{|V_i|}{2}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$f_i(x) = x_i + 1 \text{ iff } |\{j \in V_i \mid x_j > x_i\}| > \frac{|V_i|}{2} \text{ 때문에}$$

$$\therefore (\Delta H)_i < 0$$

$$iii) \ f_i(x) = x_i - 1$$

$$(\Delta H)_i = |\{ j \in V_i \mid x_j \geq x_i \}| - \frac{|V_i|}{2} \tag{4.17}$$

$$f_i(x) = x_i - 1 \text{ iff } |\{j \in V_i \mid x_j < x_i\}| > \frac{|V_i|}{2} \text{ 때문에}$$

$$\therefore (\Delta H)_i < 0$$

따라서, 순차적인 경우 식(4.12)에 의해 제안된 미디언 천이 규칙은 고정점으로 수렴함을 알 수 있다.

병렬의 경우에 고정점 또는 2주기로 수렴한다는 것을 증명한 다. 식(4.1)은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$E_{sy}(x(t)) = - \sum_{(i,j) \in V} \min(x_i(t), x_j(t-1)) + \sum_{i \in I} \frac{|V_i|}{2} (x_i(t) + x_i(t-1)) \quad (4.18)$$

식(4.18)에서

$$\Delta E_{sy} = \sum_{j \in V} (-\min(f_i(x), x_j) + \min(s, x_j)) + \frac{|V_i|}{2} (f_i(x) - x_i) \quad (4.19)$$

이며, $s = x_i, x_i + 1$ 이다. 식(4.19)에 대해서 다음의 3가지 경우를 고려한다.

$$\text{i) } f_i(x) = x_i \Rightarrow (\Delta E_{sy})_i = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{ii) } f_i(x) = x_i + 1$$

$$\begin{aligned}
(\Delta E_{sy})_i &= \sum_{j \in V_i} (-\min(x_i + 1, x_j) + \min(s, x_j)) + \frac{|V_i|}{2} \\
&= - \sum_{j \in V_i} \{x_i + 1 - x_j\} + \frac{|V_i|}{2} < 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\text{iii) } f_i(x) = x_i - 1$$

$$\begin{aligned}
(\Delta E_{sy})_i &= \sum_{j \in V_i} (\min(x_i - 1, x_j) - \min(s, x_j)) - \frac{|V_i|}{2} \\
&= \sum_{j \in V_i} \{x_i - 1 - x_j\} - \frac{|V_i|}{2} < 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

따라서, 병렬의 경우도 수렴함을 알 수 있다.

4.2.2 에지 추출 알고리즘

식(4.1)에 제안된 미디언 천이 규칙은 이웃 픽셀과의 밝기값 차이가 많은 곳에 대해서만 연산을 수행하므로 에지 추출에 사용할 수 있다.

제안하는 에지 추출 방법은 세 단계로 이루어져 있다. 처음 단계에는 에지를 추출하고자 하는 영상에 대해 미디언 천이 규칙을 적용한다. 순차, 병렬적인 방법이 적용가능하며, 세세한 에지 추출을 위해서 8방향의 이웃을 사용한다. 결과 영상은 미디언 천이 규칙의 특성에 의해 주변 이웃과의 밝기값의 차(difference)가 큰 부분만 원 영상과 다른 밝기값을 가지게 된다.

두번째 단계는 원 영상과 미디언 천이 규칙이 적용된 영상의 차 영상을 구한다. 영상이 가지는 각 픽셀들의 차는 일반적인 에지 추출 방법의 픽셀 밝기값과는 다르다. 일반적인 에지 추출 방법에서 결과 영상의 각 픽셀 밝기값은

중심 픽셀과 이웃 픽셀과의 밝기 경사, 즉 미분값을 가진다. 그러나 제안된 방법의 결과 영상의 픽셀 밝기값은 이웃 픽셀과의 관계를 이용하여 중심 픽셀에 적용된 연산량의 값을 가지게 된다. 일반적인 에지 추출 방법에서는 임계값이 대상 영상의 처리 결과에 따라서 변화된다. 그러나 제안된 방법의 임계값 결정은 모든 영상에 대해 고정적으로 적용시킬 수 있다.

마지막 단계에서는 에지를 강조하기 위해서 영상의 임계화를 실행한다. 두 개의 레벨을 이용하여 상한과 하한 임계값으로 픽셀의 밝기값을 변경한다. 작은 변화량을 가진 픽셀은 이웃 픽셀과의 차이가 거의 없는 곳이며, 너무 큰 변화량을 가진 픽셀은 잡음 성분이므로 제거하고 일정성분의 변화량을 가지는 픽셀을 선택하여 영상의 에지를 추출할 수 있다. 알고리즘은 아래와 같다.

```

/*Input                                     */
/* P(Original Image), Q(Transited Image)    */
/*Output                                    */
/* N(Edge Image)                           */
/*Initially                                 */
/* R(Row), C(Column)                       */
/*  $\theta_1$ (Minimal Threshold),  $\theta_2$ (Maximal Threshold) */
EdgeProcessing(P, Q, N)
{
    TransitionRule(Q);
    for(i=0;i<R;i++)
        {for(j=0;j<C;j++)
            x=|P(i,j) - Q(i,j)|;
        }
    }

```

```

        if( x >  $\theta 1$  && x <  $\theta 2$  )

            N(i,j)=255;

        else

            N(i,j)=0;}

}

```

4.3 실험 결과 및 고찰

실험은 256×256의 크기를 가지는 256 밝기값의 영상들을 이용했다. 본 논문에서 사용한 잡음모델은 균일분포잡음, 가우시안 잡음, 임펄스 잡음이다. 균일분포잡음은 원 영상의 전 영역에 균일한 잡음을 첨가하여 임의로 작성하였으며, 가우시안 잡음은 밝기값이 높은 영역에 잡음이 존재하며, 임펄스 잡음은 원 영상의 밝기값에 대칭되는 잡음을 첨가하였다.

이웃 픽셀은 잡음 제거 정도에 따라 결정할 수 있는데, 범위가 넓어질수록 잡음 제거에는 강해지나 영상의 에지 부분이 뭉개어지는 경향이 심하다. 따라서 3×3 영역에서 4방향과 8방향의 이웃을 이용하였다.

그림 4.2(a)는 원 영상을, (b)는 원 영상에 균일분포 잡음을 첨가한 영상을 나타낸다. 그림 4.2(b)의 히스토그램은 잡음이 첨가되어 그림 4.2(a)의 원 영상에 비해 영상의 정보가 왜곡되었음을 나타내고 있다. 그림 4.2(c)–(f)는 제안된 방법으로 잡음을 제거한 영상을 나타낸다. 그림 4.2(c),(d)는 순차적인 방법을 그림 4.2(e),(f)는 병렬적인 방법을 적용하였다. 그림 4.2(d),(f)의 8방향 이웃을 사용한 경우에는 그림 4.2(c),(e)의 4방향 이웃의 경우보다 잡음 제거에는 좀 더

효과적이나 영상의 세세한 에지 정보를 잃어버리고있다. 히스토그램에서 보듯이 원 영상의 히스토그램과 유사한 형태를 나타내어 효과적인 잡음 제거와 원 영상의 정보 복구가 있음을 알 수 있다. 그림 4.2(g),(h)의 평균 필터와 저주파 통과 필터의 경우에는 제안된 방법과 유사한 히스토그램의 형태를 나타낸다. 그러나 영상의 모든 영역에 대해 연산을 수행하므로 영상의 밝기값 정보를 전체적으로 변화시키는 단점이 있다. 또한 영상이 전체적으로 흐려지는 것을 알 수 있다. 그림 4.2(i)의 미디언 필터를 사용한 영상은 에지 보존성이 뛰어나지만 히스토그램상으로 볼 때 원 영상의 정보 복구에는 효과적이지 못함을 알 수 있다. 그림 4.2(j)의 가우시안 필터를 사용한 영상은 잡음이 전체적으로 차지하고 있음을 알 수 있다.

그림 4.3은 가우시안 잡음이 포함된 영상을 제안한 방법으로 잡음 제거를 하였다. 그리고 그림 4.4는 임펄스 잡음이 포함된 영상을 제안한 방법으로 잡음 제거를 하였다. 원 영상의 히스토그램과 유사한 형태를 나타내며 효과적인 영상의 잡음 제거와 복구가 되었음을 알 수 있다.

표 4.1은 각각의 방법에 대한 원 영상과 픽셀 밝기값의 비교(평균, 중간값, 표준편차, PSNR)를 나타내었다. 각 영상에 대한 전체 픽셀 밝기값들의 차이를 나타내는 평균과 중간값은 제안된 방법을 적용한 영상의 경우 원 영상과 상당히 유사함을 알 수 있다. 평균 필터, 저주파 통과 필터, 가우시안 필터의 경우 제안된 방법에 비해 원 영상과 각 픽셀 밝기값의 차이가 크다. 이것은 히스토그램의 형태는 원 영상과 유사하게 복구하나, 전체 픽셀의 밝기값을 변화시켜 원 영상의 정보가 손실됨을 나타낸다.

또한 영상의 명암 대비 정도를 나타내는 표준편차값도 제안된 방법이 기존

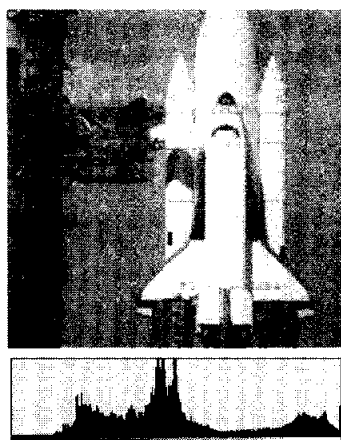
방법에 비해 원 영상과 상당히 유사함을 알 수 있다. PSNR를 이용하면 결과 영상과 원 영상과의 유사도를 비교할 수 있다. PSNR은 두 영상의 픽셀 밝기 값들의 차이에 대한 MSE를 이용하여 구하며, 높은 값일수록 원 영상과 유사하다. MSE는 식(4.23), PSNR은 식(4.24)과 같이 나타낸다.

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |P(m, n) - Q(m, n)|^2 \quad (4.23)$$

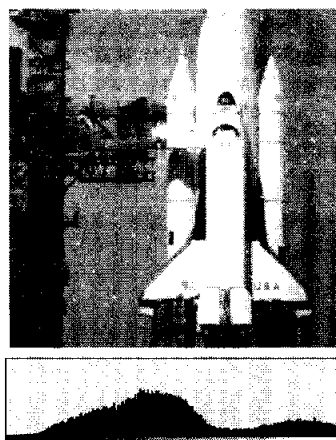
단, $P(m, n)$ 은 원 영상 픽셀 (m, n) 의 밝기값을 나타내며 $Q(m, n)$ 은 천이 영상 픽셀 (m, n) 의 밝기값을 나타낸다. MN 은 영상의 총 픽셀수를 나타낸다. PSNR는

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{b^2}{MSE} \quad (4.24)$$

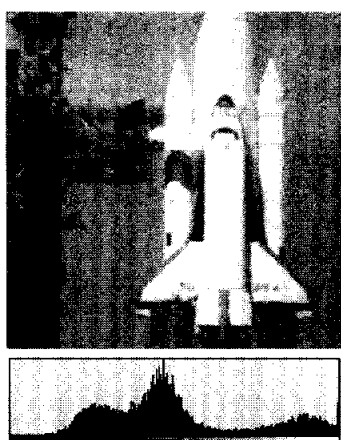
이다. 여기서 b 는 픽셀의 최대값으로 8비트 밝기값에 대해서 255이며, PSNR은 데시벨(dB)로 표현한다.



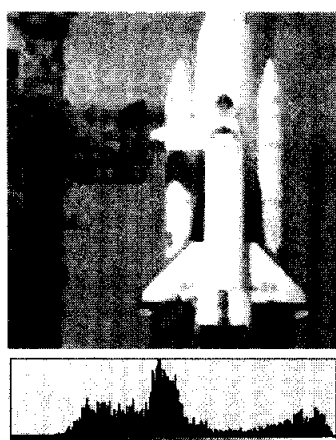
(a) 원 영상



(b) 균일분포잡음 영상



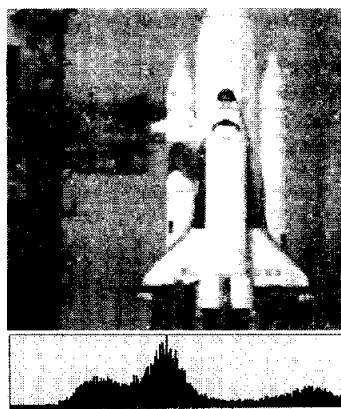
(c) 4-방향 순차 CA 영상



(d) 8-방향 순차 CA 영상

그림 4.2 제안한 CA 방법의 균일분포잡음 제거 영상

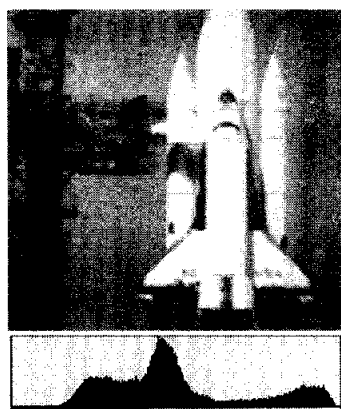
Fig. 4.2 Uniform distributive noise removal of proposed CA method.



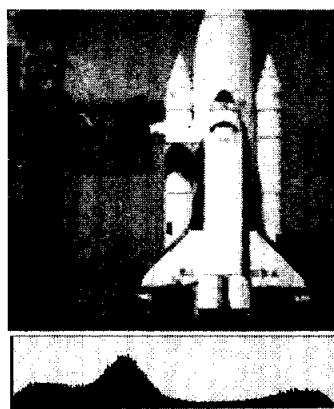
(e) 4-방향 병렬 CA 영상



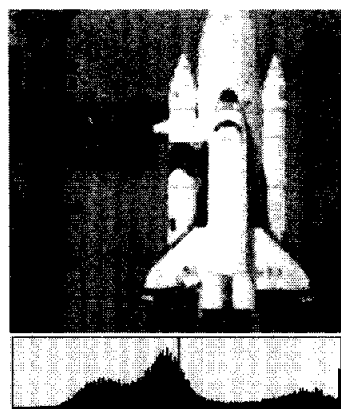
(f) 8-방향 병렬 CA 영상



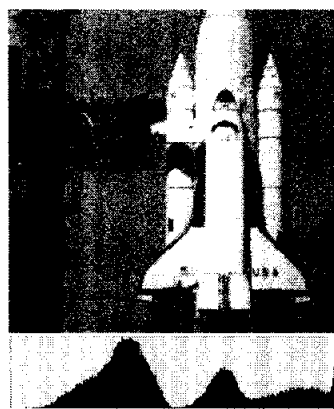
(g) 평균 필터 영상



(h) 저주파 통과 필터 영상

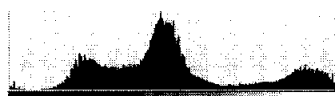
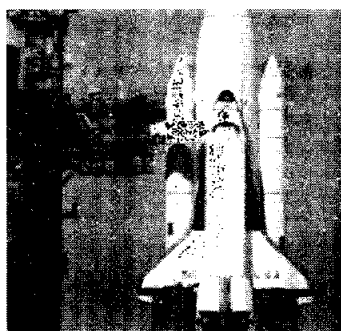


(i) 미디언 필터 영상

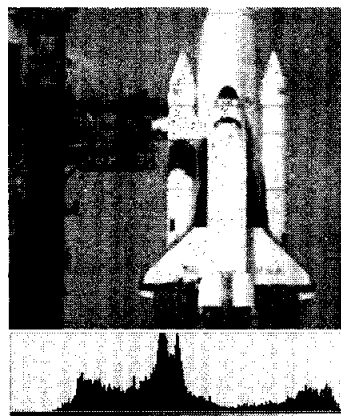


(j) 가우시언 필터 영상

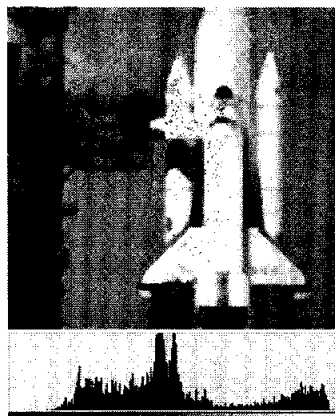
그림 4.2 계속
Fig. 4.2 Continue.



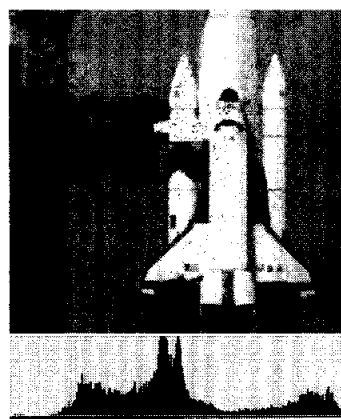
(a) 가우시안 잡음 영상



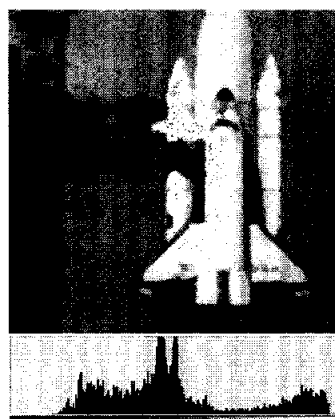
(b) 4-방향 순차 영상



(c) 8-방향 순차 영상

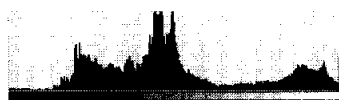
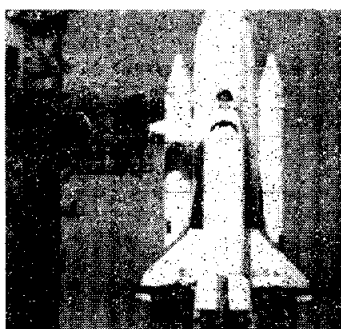


(d) 4-방향 병렬 영상

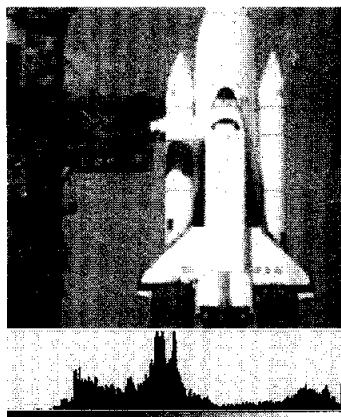


(e) 8-방향 병렬 영상

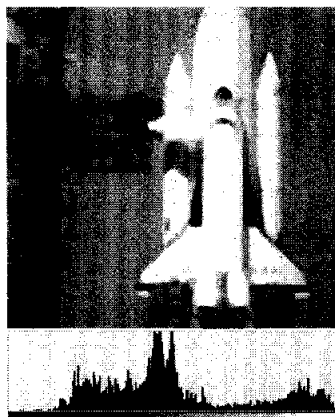
그림 4.3 제안한 CA 방법의 가우시안 잡음 제거 영상
Fig. 4.3 Gaussian noise removal of proposed CA method.



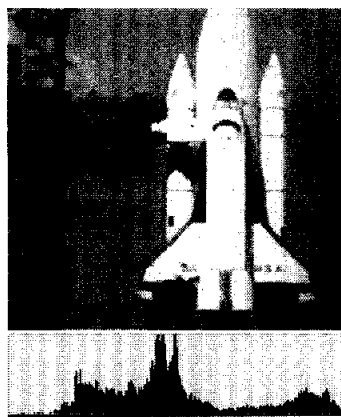
(a) 임펄스 잡음 영상



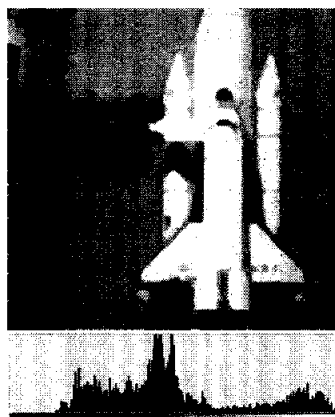
(b) 4-방향 순차 영상



(c) 8-방향 순차 영상



(d) 4-방향 병렬 영상



(e) 8-방향 병렬 영상

그림 4.4 제안한 CA 방법의 임펄스 잡음 제거 영상
Fig. 4.4 Impulse noise removal of proposed CA method.

표 4.1 그림 4.2-4.4의 잡음 제거 영상 분석

Table 4.1 Image analysis of noise removal in Fig. 4.2-4.4.

구분				평균			중간값			표준편차			PSNR		
원 영상				128.05			117			57.67			•		
잡음포함				균일분포	가우시안	임펄스	균일분포	가우시안	임펄스	균일분포	가우시안	임펄스	균일분포	가우시안	임펄스
C A	순차	4방향	127.93	127.40	127.99	116	116	116	58.39	58.79	58.74	24.45	22.33	20.94	
		8방향	128.16	127.71	127.96	117	117	117	56.40	56.50	56.81	29.59	25.41	29.35	
	병렬	4방향	128.25	127.61	128.07	116	116	116	55.52	55.52	56.27	28.93	24.87	27.76	
		8방향	128.19	127.71	127.96	117	117	117	56.42	56.49	56.81	29.13	25.41	29.35	
	평균 필터	4방향	128.43	127.61	128.08	117	117	117	55.58	55.61	56.21	28.39	24.67	27.30	
		8방향	128.18	126.61	127.20	116	116	116	54.91	54.00	53.26	28.63	25.09	27.35	
저주파 통과 필터				100.15	126.90	127.48	86	86	86	68.38	54.04	53.15	18.25	24.96	26.73
미디어 필터				127.83	127.81	127.87	117	117	117	56.16	55.42	56.46	28.37	25.12	28.48
가우시안 필터				127.35	126.87	127.43	98	98	98	56.93	56.72	57.03	23.17	23.49	22.57

표 4.1에서 PSNR은 균일분포 잡음이 포함된 영상에 대해 평균 필터를 적용한 영상이 4.18dB, 미디어 필터의 경우 3.92dB 향상되었다. 이에 반해 제안된 방법의 결과 영상은 순차적인 방법의 경우 5.14dB, 병렬적인 경우 4.68dB 향상되어 효과적인 잡음 제거가 되었다. 가우시안 잡음이 포함된 영상에 대해 평균 필터를 적용한 영상이 2.76dB, 저주파 통과 필터의 경우 2.63dB, 미디어 필터의 경우 2.79dB, 가우시안 필터의 경우 1.16dB 향상되었다. 그러나 제안한 방법의 경우 3.08dB 향상되어 제안한 방법이 우수함을 알 수 있다. 또한 임펄스 잡음이 포함된 영상의 경우 평균 필터를 적용한 영상이 6.41dB, 저주파 통과 필터의 경우 5.79dB, 미디어 필터의 경우 7.54dB, 가우시안 필터의 경우 1.63dB 향상되었다. 그러나 제안한 방법은 8.41dB 향상되어 효과적인 잡음 제거와 복구가 되었음을 알 수 있다.

그림 4.5에서 그림 4.8까지는 영상에 대한 에지 추출 결과를 나타낸다. (a)는 원 영상, (b)와 (c)는 제안한 방법을 적용하여 에지를 추출한 영상, (d)는 모폴로지 필터를 적용한 영상, (e),(f)는 각각 소벨과 라플라시안 필터를 사용한 영상이다. 모폴로지 필터를 사용한 결과 영상은 에지의 강도가 약하며 곡선 부

분과 밝기값이 완만히 변하는 부분에서 효과적인 에지 추출이 되지 않았다. 또한 영상에서 복잡한 부분에 대해서는 에지 추출이 되지 않았다. 소벨 필터는 대각선 성분의 에지에 대해서만 민감하게 반응했으며 추출된 에지가 너무 두꺼운 단점이 있었다. 이에 반해 라플라시안 방법은 직선과 곡선 성분의 에지를 모두 추출할 수 있었으며 비교적 에지도 선명하게 나타났다. 그러나 밝기값이 완만한 경사를 이루는 곳에서는 에지 추출이 효과적이지 못했다. 제안된 에지 추출 방법은 직선과 곡선 성분의 모든 에지가 선명하게 추출되었으며 복잡한 부분에 대해서도 효과적으로 에지를 추출할 수 있었다. 또한 라플라시안 방법에 비해 밝기 변화가 완만한 곳에서도 효과적인 에지 추출을 할 수 있었다.



(a) 원 영상



(b) 8방향 순차 결과 영상



(c) 8방향 병렬 결과 영상



(d) 모폴로지 필터 결과 영상



(e) 소벨 필터 결과 영상



(f) 라플라시안 필터 결과 영상

그림 4.5 에지 추출 결과의 비교(레나 영상)

Fig. 4.5 Comparision of edge detection results(Lenna image).



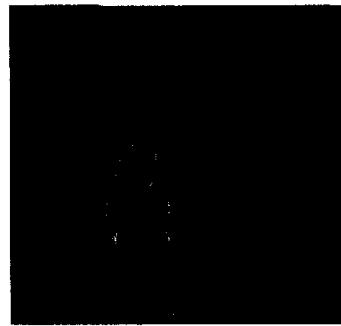
(a) 원 영상



(b) 8방향 순차 결과 영상



(c) 8방향 병렬 결과 영상



(d) 모폴로지 필터 결과 영상



(e) 소벨 필터 결과 영상



(f) 라플라시안 필터 결과 영상

그림 4.6 에지 추출 결과의 비교(앵무새 영상)

Fig. 4.6 Comparson of edge detection results(parrot image).



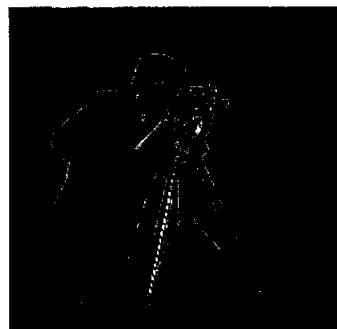
(a) 원 영상



(b) 8방향 순차 결과 영상



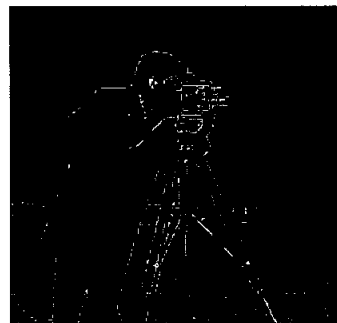
(c) 8방향 병렬 결과 영상



(d) 모폴로지 필터 결과 영상



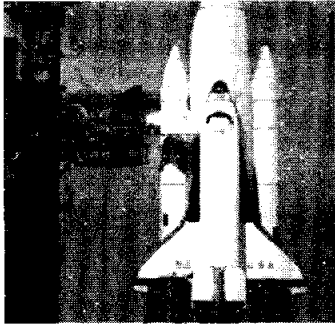
(e) 소벨 필터 결과 영상



(f) 라플라시안 필터 결과 영상

그림 4.7 에지 추출 결과의 비교(카메라 영상)

Fig. 4.7 Comparson of edge detection results(camera image).



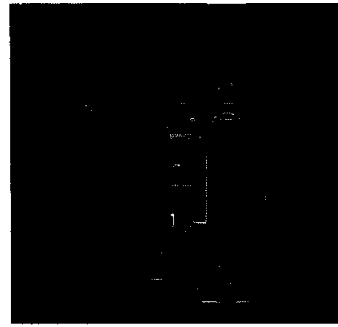
(a) 원 영상



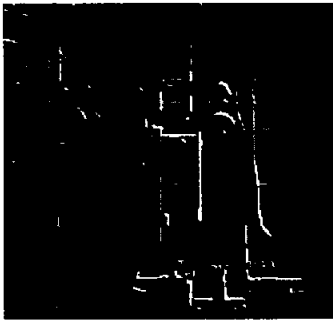
(b) 8방향 순차 결과 영상



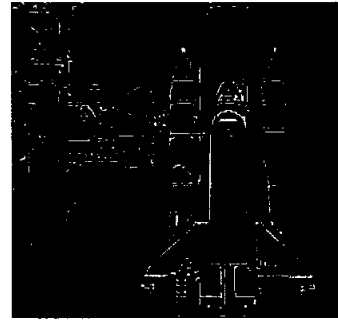
(c) 8방향 병렬 결과 영상



(d) 모폴로지 필터 결과 영상



(e) 소벨 필터 결과 영상



(f) 라플라시안 필터 결과 영상

그림 4.8 에지 추출 결과의 비교(우주선 영상)

Fig. 4.8 Comparison of edge detection results(shuttle image).

제 5 장 국소 천이 규칙을 갖는 셀룰러 오토마타를

이용한 영상 첨예화

5.1 실험 배경

영상 첨예화는 영상의 전체적인 특징을 변화시키지 않고, 미세한 부분을 강조하거나 뭉그러진 영상이나 영상 획득시 발생할 수 있는 잡음을 개선하는 효과를 가지는 영상 처리법이다. 인쇄기술에서부터 의료용 영상 처리 및 군사용 등 다양한 응용 분야를 가진다. 기본적인 영상 첨예화 기법은 각 픽셀간의 변화가 급격한 영역을 상대적으로 강조해 주는 고주파 통과 필터링에 기초를 두고 있으며, 고주파 증대 필터링이나 미분 필터링 등이 이에 속한다. 그러나 영상 첨예화 기법은 영상내에서 강조나 개선되어야 할 특정부분에 연산을 집중시키면 보다 나은 결과를 얻을 수 있다. 이와 같은 연산형태로 GST(gray scale transform)와 같은 비선형 연산이 주로 이용되나 연속적인 연산이 불가능하다는 단점이 있다. 이같은 단점을 보완하기 위해 자신과 인접한 픽셀들 사이의 관계로 연산을 수행하는 비선형 연산인 CA를 적용할 수 있다[55].

본 논문에서는 3가지의 국소 천이 규칙을 이용해서 영상 첨예화 알고리즘을 제안한다. 각 국소 천이 규칙은 이웃 픽셀과의 관계를 정의한 것으로 대상 영상을 국부적으로 밝기값의 차이를 증가 및 감소시켜 영상을 첨예화한다. 반대의 과정으로 영상의 평활화 효과도 낼 수 있다. 또한 본 방법을 통해 잡음이 섞인 영상에서도 효과를 가져온다.

5.2 영상 첨예화를 위한 알고리즘

5.2.1 기본 정의

하나의 영상은 각 픽셀로 이루어진 공간 격자로 나타낼 수 있으므로 그림 5.1과 같은 유한 상태 그래프의 확장으로 볼 수 있다.

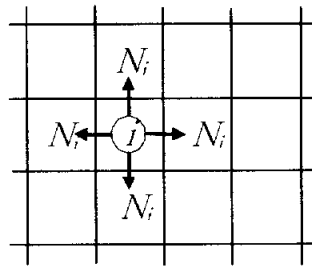


그림 5.1 영상의 유한 상태 그래프 표시

Fig. 5.1 Finite state graph of image.

픽셀 i 의 이웃 N_i 는 같은 거리에 있는 노드들의 집합들로 정의해 각 픽셀의 이웃은 픽셀의 위치에 따라 4개에서 8개의 이웃을 갖는데, 식(5.1)로 표현된다.

$$N_i = \{ j \in T : i \in E, j \in E \text{ and } j \neq i \} \quad (5.1)$$

T 는 전체 영상의 픽셀을 나타내고, E 는 각 노드를 나타낸다. 또한 픽셀들은 8비트 밝기값 영상인 경우 0에서 255까지의 정수값을 가진다. 영상의 각

픽셀을 다음 상태로 전이시키는 천이 함수 $f_i(x_j)$ 는 i 의 이웃 중 최대 및 최소값이나 자신의 값으로 변환된다. 다음 식(5.2)와 (5.3)은 천이 함수의 특성을 나타낸다.

$$f_i(x_j: j \in N_i) \in \{s_i, S_i, x_i\} \quad (5.2)$$

$$\text{if only } x_i \notin \{s_i, S_i\}$$

$$s_i = \min\{x_j: j \in N_i\}, S_i = \max\{x_j: j \in N_i\} \quad (5.3)$$

영상의 침예화는 영상내 각 영역의 칼라 또는 밝기값의 차이를 증가시키고 영상의 중요한 특성들의 변화가 손상되지 않게 비슷한 영역에서는 그 값이 변하지 않게 해야 한다. 또한 모든 영역을 일괄적인 방법으로 처리하는 것보다 처리가 필요한 특정 부분을 집중적으로 연산할 수 있는 방법이 보다 효과적인 침예화를 가져올 수 있다. CA의 3가지 국소 천이 규칙은 완만한 밝기값의 차이를 나타내는 영역을 자동으로 찾아 그 차이를 명확하게 해주는 처리로 각 이웃들의 최대 및 최소값 및 자신의 값을 그 기준으로 한다.

5.2.2 국소 천이 규칙

영상의 경우 각 픽셀이 가질 수 있는 상태값은 256개, 이웃은 4개, 셀의 개수를 n 이라고 하면 각 픽셀이 다음 단계에서 가질 수 있는 상태값은 n^{256^4} 가 된다. 따라서 규칙의 설정이 잘못되면 다음 상태로 천이가 무한히 일어나는 오류를 가질 수 있다. 따라서 본 논문에서는 무한 루프에 빠지지 않는 3가지의 국소 천이 규칙을 가지며, 영상의 각 픽셀에서 4연결 이웃과 자유 경계조

건을 가지는 CA를 제안한다. 각 규칙은 각각 고유한 특징을 가지면서 영상을 점예화한다. 또한 이러한 CA는 순차적이고 병렬적인 움직임을 가지며, Lyapunov 함수를 만족하는 감소함수로 표현된다. CA 자체가 발산이나 무한 루프에 빠지지않고 안정화되어 매우 빠른 속도로 하나의 고정된 값으로 수렴하게된다.

<국소 천이 규칙>

- ▷ 규칙 1 : 현재 자신의 밝기값이 이웃의 최대 및 최소와 비교하여 그 값의 차이가 작은 쪽의 값으로 천이된다.
- ▷ 규칙 2 : 이웃 픽셀의 합을 구하고, 자신의 밝기값을 이웃의 개수와 곱한 후, 그 차이를 구해 0보다 큰 경우 최소, 0보다 작은 경우 최대의 값으로 천이된다.
- ▷ 규칙 3 : 현재 자신의 밝기값을 이웃의 밝기값과 비교하여 이웃보다 큰 개수와 작은 개수들 중 같거나 많은 경우 이웃의 최대값으로, 그 반대의 경우 최소값으로 천이된다.

단, 모든 3가지의 국소 천이 규칙은 현재의 밝기값이 이웃의 최대와 최소값의 사이에 존재해야 하고, 그렇지 않은 경우에는 자신의 밝기값이 다음 상태로 천이된다.

5.2.3 국소 천이 함수의 수렴 조건

제한한 규칙은 발산이나 무한 루프에 빠지지 않고 안정화되어 하나의 고정된 점으로 수렴해야 한다. 국소 천이 규칙의 동적 행동은 다음 식(5.4)와 같이 Lyapunov 함수를 만족하는 양자화(quantity) 함수로 표현된다.

$$H(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a^{(x_i - x_j)} \quad (5.4)$$

단, $a > d = \max |N_i|$

이 함수가 순차적 반복(sequential iteration) 환경에서 Lyapunov 함수가 성립하기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\Delta H = H(x') - H(x) \leq 0 \quad (5.5)$$

단, $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, $x'_i = x_i$ 이며 모든 $j \neq i$ 일 때 $x'_i = f(x_j: j \in N_i)$ 이다.

5.3 실험 결과 및 고찰

그림 5.2의 (a)는 원 영상을 나타내고, 그림 5.2(b) (d)는 3가지 국소 천이 규칙을 적용한 후 첨예화된 영상을 나타낸다. 각 국소 천이 규칙들은 고유한 특성을 나타내면서 영상을 첨예화하였다. 그림 5.2(b)는 규칙 1을 659 단계를 거쳐 안정된 영상으로 밝기값의 차이가 완만한 부분에 차이를 나타낸다. 그림 5.2(c)는 규칙 2를 적용한 영상으로 머리 부분이 보다 강조되었다. 수행 단계는 약 849회의 연산을 하였다. 그림 5.2(d)는 규칙 3을 적용한 영상으로 영상에서 비교적 비슷한 밝기값을 갖는 넓은 영역에서의 구분은 확실하나, 머리카락 영역이 뭉게지는 효과를 나타내었다. 연산 횟수는 2340회였다. 그림 5.2(e)는 원 영상에 가우시안 잡음을 넣은 것이고, 그림 5.2(f)는 그림 5.2(e)에 규칙 2를 적용한 것으로 잡음이 섞인 경우에도 비교적 좋은 첨예화 결과를 보인다.

영상의 첨예화는 각 영역의 밝기값의 차이를 증가시켜 세밀한 부분을 강조하거나 뭉그러진 영상을 개선하는 영상처리 방법이다. 본 논문에서는 CA의 고정된 점으로 수렴하는 동적인 특성을 이용하여 3개의 영상 첨예화 국소 천이 규칙을 개발, 실험하였다. 이 방법은 영상에 대한 사전 지식 없이 첨예화가 필요한 영역 즉, 상대적으로 밝기값의 차이가 완만한 부분에 연산을 집중해 기존의 일괄적인 방법보다 나은 영상 첨예화를 할 수 있다.



(a) Lenna의 원 영상



(b) 규칙 1을 적용한 영상



(c) 규칙 2을 적용한 영상



(d) 규칙 3을 적용한 영상



(e) 가우시안 잡음이 들어간 원 영상



(f) 그림(e)에 규칙 2를 적용한 영상

그림 5.2 제안한 규칙의 영상 첨예화

Fig. 5.2 Image sharpening using the proposed rule.

제 6 장 결 론

본 논문에서는 선형 TPMACA의 행동을 분석하여 기본 경로를 통하여 나머지 상태의 위치를 단순히 XOR 연산으로 구하는 방법을 제안하였다. 그리고 여원 TPMACA는 XNOR 논리를 적용하고 그것의 상태전이 그래프는 선형 TPMACA의 0-트리의 기본 경로와 단순한 덧셈 연산에 의해 구하였다. 선형 TPMACA의 특별한 경우인 선형 TPSACA와 여원 TPSACA의 특성을 이용하여 트리를 구성하였고, 이를 이용하여 완전 해시 알고리즘을 제안하고 효율성을 확인하였다. 해시 주소의 비트 정보가 줄어들게 하는 MRT를 이용하여 해시 주소를 결정할 수 있음을 보였다.

영상 강조를 위하여 새로운 CA 천이 규칙을 제안하고 그것을 이용한 영상의 잡음 제거 및 에지 추출, 침예화 알고리즘을 개발하였다. 제안한 천이 규칙은 대상 영상에 대한 특징을 그대로 보존하면서 천이 규칙에 따라 국소적으로 밝기값의 차이를 증가 및 감소시킨다. 본 알고리즘은 순차적이고 병렬적인 움직임 작업을 가지고 Lyapunov 함수를 만족한다. 제안한 천이 규칙은 랜덤 잡음을 가진 대상 영상에 대해 빠른 수렴 속도를 가지고 안정적인 처리 결과를 나타낸다. 히스토그램과 PSNR의 비교를 통해 유용성을 검증하였다.

잡음 제거에 있어서 각 픽셀의 밝기값을 증가시키거나 감소시켜 중간값을 가지는 규칙을 적용하여 에지에서의 흐림 효과를 최소화하여 효과적인 영상 정보의 복구가 이루어졌다. 또한 간단한 천이 규칙을 반복 적용함으로써 영상의 구조와 잡음의 특성에 상관없이 효과적인 잡음 제거가 가능함을 알 수 있었다.

에지 추출에 제안된 방법은 기존의 방법에 비해 섬세한 에지 추출이 가능하

며 선명한 결과 영상을 얻을 수 있었다. 그리고 기존 방법에서는 임계값이 대상 영상의 처리 결과에 따라서 변화되어야 하지만 제안된 방법은 각 픽셀이 연산 처리 횟수를 가지므로 고정적인 임계값의 사용이 가능하였다.

영상 첨예화는 CA의 고정된 점으로 수렴하는 동적인 특성을 이용하여 3개의 천이 규칙을 개발, 실험하였다. 이 방법은 영상에 대한 사전 지식 없이 상대적으로 밝기값의 차이가 완만한 부분에 연산을 집중해 효율적인 첨예화된 영상을 얻을 수 있었다.

향후의 연구 과제로는 비트(bit) 단위를 기본으로 한 연구에서 바이트(byte) 단위로 확장하는 계층적인 면에서의 연구가 필요하다. 예를 들면 $GF(2)$ 상에서의 TPMACA 및 TPSACA에 관한 연구에서 $GF(2^p)(p: \text{소수})$ 상에서의 연구로 확장할 필요가 있다. 그리고 현재의 단순한 해싱 방법을 좀 더 복잡하고 많은 데이터에 적용할 수 있는 알고리즘의 개발이 필요하다.

또한, CA를 이용한 영상 처리 분야에서는 범용성을 갖는 새로운 영상 강조 CA 천이 규칙의 개발, 각 천이 규칙에 따른 처리 시간의 수학적 모델링, 원 영상과의 차이를 정량적으로 계산할 수 있는 방법의 개발 및 컬러 영상의 적용에 대한 연구가 필요하다. 이러한 연구 결과는 CA를 패턴 인식, 암호 생성, 에러 정정, 부울 방정식 해석 등에 효율적으로 이용할 수 있는 새로운 단서를 제공할 것으로 사료된다.

참고 문헌

- [1] 스티븐 레바, *인공생명*, 사민서각, 1997.
- [2] 미첼 워드롭, *카오스에서 인공생명으로*, 범양사 출판부, 1995.
- [3] C. G. Langton, *Artificial life*, Mitpress, 1996.
- [4] 강훈, "Cellular automata," *대한전자공학학회 논문지*, 제24권, 제3호, pp. 32-43, 1997.
- [5] M. Mihaljevic, Z. Yuliang, and H. Imai, "A fast and secure stream cipher based on cellular automata over $GF(q)$," in *Proc. IEEE Conf. Global Telecomm.* vol. 6, pp. 3250-3255, 1998.
- [6] P.P. Chaudhuri, D.R. Chowdhuri, S. Nandi, and S. Chattopadhyay, *Additive cellular automata theory and applications*, IEEE Press, New York, 1997.
- [7] D.R. Chowdhury, S. Basu, I.S. Gupta, and P.P. Chaudhuri, "CA based byte error-correcting code," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 44, pp. 371-382, 1996.
- [8] D.R. Chowdhury, S. Basu, I.S. Gupta, and P. P. Chaudhuri, "Design of caecc cellular automata based error correcting code," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 43, pp.759-764, 1994.
- [9] K. Cattell and J. C. Muzio, "Analysis of one-dimensional linear hybrid cellular automata over $GF(q)$," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 45, no. 7, pp. 782 -792, 1996.

- [10] A. K. Das, Additive Cellular automata : *Theory and application as a built-in self-test structure*, Ph D thesis, I.I.T., Kharagpur, India, 1990.
- [11] A. K. Das and P. P. Chaudhuri, "Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its application for pseudo-exhaustive test pattern generation," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 42, no. 3. pp. 340-352, 1993.
- [12] M. Serra, T. Slater, J. C. Muzio, and D. M. Miller, "The analysis of one dimensional linear cellular automata and their aliasing properties," *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 9, pp. 767-778, 1990.
- [13] 조성진, 최연숙, 김한두, 김석태, 이석기, "TPMACA의 트리 구성에 관한 연구," *한국정보처리학회 학술대회 논문집*, 제 8권 제 2호, pp.1071-1074. 2001.
- [14] S. Bhattacharjee, S. Sinha, C. Chattopadhyay, and P. P. Chaudhuri, "Cellular automata based scheme for solution of boolean equations," in *Proc. IEE Comput. Digit. Tech.*, vol. 143, no. 3, pp. 174-180, 1996.
- [15] S. Chakraborty, D. R. Chowdhury, and P. P. Chaudhuri, "Theory and application of nonlinear cellular automata for synthesis of easily testable finite state machines," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 45, no. 7, pp. 769-781, 1996.
- [16] P. P. Choudhury and R. Barua, "Cellular automata based VLSI architecture for computing multiplication and inverses in $GF(2^m)$," in *Proc. IEEE 7th Int. Conf. VLSI Design*, pp. 279-282, 1994.
- [17] J. H. Weston, C. N. Zhang, and Hua Li, "Some space considerations of

- VLSI systolic array mappings," *IEEE Trans. Circ. Sys. II. analysis digital signal processing*, vol. 48, no. 4, pp. 419-424, 2001.
- [18] R. Gonzalez and P. Wintz, *Digital image processing*, Addison Wesley, 1993.
- [19] G. A. Baxes, *Digital image processing: principles and applications*, John Wiley and Sons, 1994.
- [20] K. R. Castleman, *Digital image processing*, Practice-Hall, 1996.
- [21] K. Tsirikolias and B. G. Mertzios, "Image feature extraction using coordinate logic filter," *D.S.P.*, vol. 5, no. 3, pp. 879-892, 1997.
- [22] W. Frei and C. C. Chen, "Fast boundary detection: A generalization and a new algorithm," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C 26, no. 10, pp. 988-998.
- [23] M. Skolnick, S. Kim, and R. O'Bara "Morphological algorithms for computing non-planar point neighborhoods on cellular automata," in *Proc. 2nd Int. conf. Comput. Vision*, pp. 106-111, 1988.
- [24] G. Hernandez and H. J. Herrmann, "Cellular automata for elementary image enhancement," *Graphical Models and Image Processing*, vol. 58, no. 1, pp. 82-89, 1996.
- [25] J. Von Neumann, *The General and Logical Theory of Automata*, Collected Works, A. H. Taub, vol. 5, pp. 288, 1963.
- [26] S. Wolfram, *Cellular automata and complexity*, Addison Wesley Publishing Company, pp. 115-157, 1994.
- [27] B. Chopard and M. Droz, *Cellular automata modeling of physical sys-*

ems, Cambridge Univ. Press. 1998.

- [28] S. Wolfram, *Computational Theory of Cellular Automata in cellular automata and Complexity*, Addison-Wesley, pp. 150-202, 1984.
- [29] C. Langton, *Life at the edge of chaos*, in *Artificial Life II*, pp. 41-91, 1992.
- [30] C. Langton, *Computation at the edge of chaos: phase transition and emergent computation in Emergent Computation*, S. Forrest (ed), MIT press/North Holland, vol. 42, pp. 12-37, 1991.
- [31] S. Wolfram, "Computation theory of cellular automata," *Commun. Math. Phys.*, vol. 96, pp.15-57, 1984.
- [32] S. Wolfram, "Statical mechanics of cellular automata," *Review of Modern Physics*, vol. 55, pp. 601-644, 1983.
- [33] W. Li, N. H. Packard, and C. G. Langton, "Transition phenomena in cellular automata rule space," *Physics*, vol. D45, pp. 77-94, 1990.
- [34] W. Li and N. H. Packard, "The structure of the elementary cellular automata rule space," *Complex Systems*, vol. 4, pp. 281-297, 1990.
- [35] C. G. Langton, "Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent computation," *Physics*, vol. D42, pp. 12-37, 1990.
- [36] P. H. Bardell, "Analysis of cellular automata used as pseudo-random pattern generators," in *Proc. IEEE Int. Test. Conf.*, pp. 762-767, 1990.
- [37] S. Nandi and P. P. Chaudhuri, "Analysis of periodic and intermediate boundary 90/150 cellular automata," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 45, no. 1, pp. 1-12, 1996.

- [38] S. Nandi, B. K. Kar, and P. P. Chaudhuri, "Theory and application of cellular automata in cryptography," *IEEE Trans. Comput.*, vol. 43, no. 12, pp. 1346-1357, 1994.
- [39] S. J. Cho, U. S. Choi, and H. D. Kim, "Some properties of one dimensional linear nongroup cellular automata over $GF(2)$," *J. Korea Multimedia Society*, vol. 4, no. 1, pp. 91-95, 2001.
- [40] A. K. Das, M. Pandey, A. Gupta, and P.P. Chaudhuri, "Built-in self-test structures around cellular automata and counters," in *Proc. E , IEE, Comput. Dig. Tech.*, vol. 137, iss 4, pp. 269-276, 1990.
- [41] Seok-Ki Lee, Seok Tae Kim, Sung-Jin Cho, and Un-Sook Choi, "Construction of trees using basic path of the complemented CA derived from a linear TPMACA," in *Proc. EALPIIT2003*, Ulaanbaatar, Mongolia, pp.263-267, 2003.
- [42] S. Chattopadhyay, *Some studies on theory and applications of additive cellular automata*, Ph. D. Thesis, I.I.T., Kharagpur, India, 1996.
- [43] R. Cichelli, "Minimal perfect hash functions made simple," *Comm. ACM*, vol. 23, pp. 17-19, 1980.
- [44] C. K. Koc and A. M. Apohan, "Inversion of cellular automata iterations," in *Proc. IEE Int. Conf. Digit. Tech.*, pp. 279-284, 1997.
- [45] C. Cook and R. Oldehoeft, "More on minimal perfect hash table," *Tech. Report. TR-82*, 1982.
- [46] A. J. Menezes, P. C. van Oorschot, and S. A. Vanstone, *Handbook of applied cryptography*, CRC Press, 1997.

- [47] R. Crane, *A simplified approach to image processing : Classical and Modern Techniques in C*, Practice-Hall, 1997.
- [48] S. Sarker and K. L. Boyer, "On optimal infinite impulse response edge detection filters," *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 13, no. 11, pp. 699-714, 1986.
- [49] C. Lamberti and F. Sgallari, "A work station based system for 2-D echocardio graphy visualization and image processing," *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, vol. 37, pp. 796-802, 1990.
- [50] S. M. Collins, "Computer-assisted edge detection in two dimensional echocardiography : Comparision with anatomic data," *The American Journal of Cardiology*, vol. 53, pp. 1380-1387, 1984.
- [51] H. P. Kramer and J. B. Bruckner, "Iteration of non linear transformation for enhancement of digital images," *Pattern Recognition*, vol. 7, pp. 53-58, 1975.
- [52] Y. F. Wu, "The Potts model," *Rev. of Modern Phys.*, vol. 54(1), pp. 235-315, 1982.
- [53] 이석기, 김석태, 조성진, "Potts automata를 이용한 영상의 잡음 제거 및 에지 추출," *한국통신학회 논문지*, 제28권 제3C호, pp. 327-335, 2003.
- [54] E. Goles and S. Martinez, *Neural and automata networks*, Kluwer Academic Publisher, pp. 197-236, 1990.
- [55] B. Viher, A. Dobnikar, and D. Zazula, "Follicle recognition in ultrasonic image using the cellular automata," in *Proc, 10th IEEE Symp. Computer-Based Medical Systems*, pp. 11-13, 1997.

감사의 글

본 논문이 완성되기까지 변함없는 사랑으로 따듯이 격려해 주시고 날카로운 관찰력과 해박한 지식으로 지도해 주신 김석태 교수님께 깊이 감사드립니다. 바쁘신 와중에도 좋은 논문이 될 수 있도록 세심히 검토해 주시고 조언과 격려를 아끼지 않으신 조성진 교수님, 문광석 교수님, 장주석 교수님 그리고 부산 외국어 대학교의 권기룡 교수님께도 진심으로 감사드립니다. 또한 지금의 결실을 얻기까지 많은 도움과 사랑을 아끼지 않으셨던 정신일 교수님, 윤종락 교수님, 하덕호 교수님, 김성운 교수님들께도 감사드립니다.

그동안 정보시스템 연구실에서 같이 생활을 하며 다방면으로 도움을 주었던 이대원 선배, 최은희, 정현진, 이수명, 옥민우, 문종현, 박영일, 산업대학원생들에게 고마움을 전합니다.

끝으로 오늘이 있기까지 사랑과 헌신으로 돌봐주시고, 지켜봐 주신 부모님과 사랑하는 아내에게 깊은 감사를 드립니다.

2004년 2월

이 석 기