교 육 학 석 사 학 위 논 문

수학적 사고 신장을 위한 학습지도

- 정적분에서의 Mathematica활용을 중심으로 -

2002년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 진 미

교 육 학 석 사 학 위 논 문

수학적 사고 신장을 위한 학습지도

- 정적분에서의 Mathematica활용을 중심으로 -

지도교수 표 용 수

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2002년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 진 미

김진미의 교육학석사 학위논문을 인준함

2002년 6월 21일

주 심 이학박사 박 용 범 (인)

위 원 이학박사 조 성 진 (인)

위 원 이학박사 표 용 수 (인)

목 차

TO HELP STUDENTS TO ENHANCE THEIR MATHEMATICAL CREATIVITY
-mainly using 'Mathematica' in studying a definite integral -

Jin-Mi Kim

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

Education in the 21st century should contribute to magnifying the effects of education by practicing differentiating education, creative education, humanistic education, education based on tracking, combined education, etc. These methods of education being far from the uniform education and cramming education in the past.

The newly developed software in mathematics education radically has changed the contents and the methods in teaching and learning mathematics. Because teaching and learning activities using computers can cause students to have high interest and active participation, and enhance their creativity by having them reflect on results produced from that activity, computers are being used as one of tools to renovate contents and methods in teaching and learning mathematics. But, despite the many benefits that we can expect to come from the use of computers, it is doubtable that computers can cover all of mathematics and the methods needed to teach it, however highly they were developed. Furthermore, an excessive use of computers might have students who do not have a solid understanding about previously learned materials depend on them too much, or maybe the entertaining aspect of computers might be hinder the teaching and learning of mathematics. As a result, the use of computers might be detrimental to students.

The role of teachers is critical with the use of computers. Teachers should play a role as the mediator between the unfamiliar software and students. They should be able to know where students are in the aspect of knowledge and understanding and be ale to match the learning level of each student. And students should be able to re-discover concepts through enhancing their creativity in learning mathematics.

The use of 'Mathematica' in studying a definite integral was mainly introduced in this paper. We expect that students' creativity can be raised by having them investigate the given materials using 'Mathematica' and discuss the results with each other. Also, we expect that students' understanding will improve based on their deep understanding of mathematical concepts. In addition, we expect that students' ability to solve problems will be strengthened by giving them the opportunity to improve their cooperative learning skills through group activities. Then, by presenting their findings in front of the whole group of students they will be able to work out any misunderstanding.

I. 서론

21세기 사회는 지식기반 정보화 사회로 특징지어지며, 이에 적합한 교육은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 그 중점을 두어야 한다. 이에 대비하기 위한 수학교과의 역할은 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하여 여러 가지 실생활 문제를 합리적으로 해결하며, 창의적인 문제 해결력을 배양시키는 것이다[6].

수학은 생각하면서 배우고(denkend lernen), 배우면서 생각하는(lernend denken) 가장 적합한 교과목임에도 불구하고 학생들은 학년이 올라갈수록 수학에 어려움을 느끼고 있으며, 수학에 대한 관심도 역시 저하되고 있다. 대학 입시를 위한 주입식 학교 교육은 수학 자체에 대한 관심보다는 대학 입시를 위한 교과목으로 인식되어 대학입학 이후에는 많은 학생들에게 외면당하고 있는 실정이므로, 대학에서도 교양수학 지도방법에 대한 개선이 요구되는 실정이다. 따라서 각종 수학학습 프로그램 활용의 필요성이 제기되고 있다.

현재, 수학학습에 사용되고 있는 프로그램으로는 Logo언어, Basic언어, Excel, MatheView, Maple, Mathematica, Matlab, Cabri Geometry, GSP, TI-92, 그래프 마법사 등을 들 수 있다. 그러나 이러한 학습 프로그램을 수학교과 지도에 사용하는 경우에 매우 신중하여야 한다. 이는 학생들의 수학적 사고력과 창의력을 신장시키는 방향에서 적용되어져야 하며, 어떤 내용에 적용하여 어떻게 최대의 교육 효과를 얻을 수 있는가에 대해 충분한 검토가 이루어져야 한다.

Mathematica 프로그램은 수학 개념을 시각화시키고, 수학적 시각화의 다양성을 제공하며, 학습자의 능동적인 수업 참여로 탐구학습이 가능하게

하며, 신속한 계산기능으로 오류 수정을 용이하게 하며, 수학의 실용성을 부여한다는 장점을 가지고 있다[19].

제 II장에서는 수학학습 프로그램 활용의 필요성과 그 유의점, 수학적 개념의 재창조를 위한 사고 실험과 수학적 개념 지도에 대하여 설명하였고, 제 III장에서는 수학적 사고 신장을 위한 교수-학습 방안의 한 예로, 원주, 원의 면적 및 정적분에 대한 Mathematica 프로그램 활용을 소개하였으며, 마지막 장에서는 결론 및 제언을 제시하였다.

II. 수학적 사고 실험과 개념 지도

2.1. 수학학습 프로그램 활용의 필요성

오늘날 수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 방법도 많이 달라지고 있다. 이러한 변화는 컴퓨터의 대중화에도 많은 영향을 받고 있다. 컴퓨터로 인해 지금까지 생각하지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 문제해결을 위한 접근 방법도 다양해지고 있다. 수학의 내용과 방법이 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 근사적인 것으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로, 사변적인 것에서 실험적인 것으로 변화되기 시작했다. 이러한 변화에 발맞춰 컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어는 물론 수학적 사고력을 향상시켜준다. 따라서 학생들이 수학 학습활동에서 컴퓨터와 계산기의 활용을 통해 더욱 친숙하게 수학에 다가갈 수 있을 것으로 생각한다. 컴퓨터는 추상적이고 형식적인 수학을 구체적인 표현 형태로 제시할 뿐만 아니라 수학적 대상의 조작을 학생 스스로 통제함으로써 학생 자신의 수학적 · 인지적 활동을 반성할 수 있으며, 학습 구성원 사이의 수학적 의사소통을 강화할 수도 있다.

수학 교과의 특성상 컴퓨터만큼 수학학습의 과정을 풍요롭게 할 수 있는 교육매체도 드물 것이다. 이러한 컴퓨터는 Dienes가 제시한 수학 학습원리를 구현하기에 적절한 환경을 제공한다. 수학적 다양성의 원리에 따라 종래의 지필 환경에서 수행하기에는 한계가 있는 수학적 개념에 대하여 컴퓨터는 다양한 경우와 예를 용이하게 제시할 수 있어서 수학적 개념과 원리의 직관적인 이해를 도와 준다. 또한, 컴퓨터는 시각적 기능을 통하여 추상적인 수학적 개념으로의 접근을 용이하게 하며, 개념의 이해에서 출발하여 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계에서 그래프, 애니메이션, 동영상, 시뮬

레이션 등의 직관적 탐구활동으로 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.[7)]

전통적인 수학 교육에서 저학년의 경우에는 수학적 개념의 이해를 돕기 위해 구체물이나 반구체물 또는 손으로 조작할 수 있는 간단한 작도 도구를 활용하였으나, 테크놀로지를 기본 도구로 활용하는 정보화 사회에서는 수학 교육 역시 테크놀로지를 학습지도에 효과적으로 활용하는 방안들이 강구되고 있다[1)]. 컴퓨터를 이용한 교육에서 가장 중요한 위치를 차지하는 것 중의 하나는 그래픽과 애니메이션이다. 컴퓨터로부터 정보를 얻으려 할 때에는 청각보다 시각에 많이 의존하게 된다. 이러한 관점에서 컴퓨터 그래픽은 매우 중요한 역할을 한다. 그래픽과 애니메이션은 학습내용의 전달과 피드백을 강화하기 위하여 사용되는 매우 중요한 기능이며, 학습자들이 학습내용을 인지적으로 구조화하는데 도움을 준다. 컴퓨터를 이용한 학습에서 그래픽은 중요한 정보의 표현기능을 하며, 유추에 의한 설명은 물론 기억보조와 암시로서의 기능을 제공해 준다. 즉, 학생들에게 학습시키고자 하는 내용을 요약해 보여주거나 암시함으로써, 학생들의 호기심을 자극하고, 목표에 집중하도록 한다. 이러한 컴퓨터의 그래픽 기능을 활용하면 기하 개념을 지도하는데 좀더 직관적인 방법을 택할 수 있으며, 도형을 마음대로 조작할 수 있기 때문에 학생들의 시각적 직관력이나 공간추론 능력을 키우는데도 많은 도움이 된다.[15)] 그러나 컴퓨터 그래픽과 애니메이션이 수학학습에서 항상 긍정적인 효과만 수반하는 것은 아니다. 잘못 사용된 그래픽과 애니메이션은 학생들을 엉뚱한 곳에 집중하게 하거나 부정적인 효과를 수반할 수 있다. 그러므로 그래픽과 애니메이션을 수학교육에 활용하기 위해서는 이에 대한 충분한 고찰과 주의 깊은 적용이 필요하다.

2.2. 수학학습 프로그램 활용의 유의점

수학 학습상황에서 많이 나타나는 주요한 약점은 행동과 표현이 단절되어 있으며, 서로 다른 형태의 표현들이 충분히 연결되지 못한다는 점이다. 그러나 Hoyles는 다음의 세 가지 조건을 고려하여 지도한다면, 테크놀로지는 이러한 단절과 연결성 부족의 문제 해결에 많은 도움이 될 수 있다[16]고 하였다. 첫째, 테크놀로지의 사용자(교사, 학생)는 자신이 달성하고자 하는 것이 무엇이며, 테크놀로지가 어떻게 도움이 될 것인가에 대해 그 가치를 알아야 하고, 둘째는 테크놀로지 자체는 교육과정에 단순히 덧붙여지는 것이 아니라 신중을 기울여 접목되어야 한다는 것이다. 셋째로 무엇보다도 중요한 것은 모든 활동의 초점이 하드웨어나 소프트웨어에 있는 것이 아니라 일관되게 수학적 지식에 두어야 한다는 것이다.

또한, Cunningham은 교사가 시각화를 위하여 컴퓨터를 사용할 때, 다음 사항을 고려하여야 한다[20]고 하였다. 첫째, 이미지로 표현할 항목들을 결정하고 이 중에서 가장 중요한 것을 강조해서 학생들에게 보여주어야 하며, 여기에서 모순되는 정보는 제거되어야 한다. 둘째, 이미지를 이용하여 설명해야 할 내용에서 순서를 정하고, 이 내용을 논리적으로 연결되게 소개하여야 하며, 셋째로 학생들이 이미 가지고 있는 수학적 지식에 혼란이 일어나지 않으면서 그들의 지식을 넓힐 수 있도록 도와주어야 한다. 넷째는 학생들로 하여금 생동감 있고 발전적인 수학적 처리를 소개하는 기회를 찾고, 그것을 탐구하거나 조절할 수 있는 적절한 기회를 제공해야 한다. 마지막으로 학생들이 시각적으로 어떻게 학습할 것인지, 이러한 학습을 어떻게 평가할 것인지, 이를 학생들의 수학 학습의 다른 부분과 어떻게 통합할 것인지 주의 깊게 고찰하여야 한다.[9]

테크놀로지를 사용하는 경우에는 교육적 효과와 활용의 편리성은 물론 경제성과 부가적인 영향을 충분히 고려하여야 한다. 즉, 테크놀로지의 사용이

학습의 어떤 부분에는 효과가 있지만, 다른 부분에는 효과가 검증되지 않았거나 부정적일 수도 있으므로 효과가 보장된 부분에만 제한적으로 사용하여야 한다. 그리고 시스템의 구조나 소프트웨어의 사용 절차가 지나치게 복잡하면 비록 내용이 교육적으로 우수하다고 해도 그 사용을 고려해 보아야 한다. 제한된 시간에 본시 학습 내용을 충분히 다루는 수업 운영 방법도 매우 중요하다. 테크놀로지는 학습지도를 위한 하나의 도구로만 사용되어야 한다. 테크놀로지의 지나친 남용은 그것 없이는 수학을 할 수 없는 것처럼 생각하게 할 위험이 있다. 한 문제를 탐구하고 해결하는 데는 여러 가지 방법이 있을 수 있는데, 컴퓨터나 계산기의 활용은 여러 방법 중의 하나일 뿐이다.[1)] 컴퓨터를 활용하여 수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 직관적인 이해나 귀납적 발견활동에서 유의해야 할 사항은 목적을 분명히 해야 한다는 것이다.

2.3. 수학개념의 재창조를 위한 사고 실험

수학적 사고 태도를 기르고, 학습 내용의 통찰을 가능하게 하며 통찰을 유지하면서 점진적인 형식화가 이루어지도록 하기 위하여 학생들로 하여금 수학 학습과정을 반성하도록 해주어야 한다.[10)]

Pestalozzi는 사고의 양식으로서 수학은 밖으로부터 아동에게 주입하는 것이 아니라 아동이 스스로의 활동을 통하여 구성해 내는 것이라고 주장하였으며, Dewey는 지식 교육에서 아동이 암기하고 있는 지식 자체를 중시하는 것이 아니라, 교과목의 지식과 아동의 경험사이에서 일어나는 상호작용에 중점을 두었다. 즉, 교과목의 지식을 학습한다는 것은 그것이 아동의 경험에 완전히 흡수되어 아동의 행위에 영향을 미치는 상태로 보고 있다. Freudenthal은 아동이 수학을 재창조할 수 있도록 지도하여야 하며,

이의 실현을 위한 수단으로 교사는 사고 실험을 할 것을 제안하고 있다.[1)]

Piaget의 이론에 따르면 수학 학습은 수학적 조작의 구성이다. 즉, 여러 가지 해결방법을 탐구하고 문제를 여러 가지로 변형시켜 다루면서 상호 관련성을 조정하고, 문제를 다양하게 변화시키는 조작 활동을 통하여 역동적인 수학적 사고 발달을 조장해야 한다는 것이다. 사고의 형성은 곧 조작의 형성이며, 조작의 형성은 조작의 구성이다. 조작의 구성은 탐구를 통해서 이루어지며, 모든 탐구는 문제로부터 시작한다. Wittmann은 반성을 통한 추상화보다는 포괄적인 문제해결 전략을 구성할 수 있도록 지도해야 하며, 반성적 사고가 자주적이고 생산적인 가장 중요한 수학적 사고 활동임을 강조한다.[18)]

수학은 학생들의 상호작용을 통한 반성적 사고를 거치면서 점진적인 수학화 과정이 이루어져야 한다. 학생들에게 지식의 기록이 아닌 정신활동으로서의 수학을 실행하고 재발명하게 하며, 수학자의 탐구하고 발명하는 수학 활동에서와 마찬가지로 학습의 자유, 시도하고 실험하는 자유, 종합에 앞서 분석하는 자유, 자료를 통합하고 오류를 범하고 그 오류로부터 학습하며 잠정적으로 사고하고 자신의 언어로 표현하는 권리가 허용되어야 한다.[11)]

2.4. 수학적 개념 지도

일상적으로 우리는 '한 사람이 어떤 것을 지칭하는 경우 그것이 어떤 것인지를 짐작할 수 있을 때', 그 지칭하는 것에 대하여 '개념을 가지고 있다'고 말한다. 개념의 사전적 정의는 '여러 관념 속에서 공통적인 요소를 뽑아 종합하여 얻은 하나의 보편적인 관념'으로 이야기한다. Skemp는 개념을 '여러 가지 사물의 공통적 속성의 정신적 표상'이라 하였다. 또한, 그는 일상적 개념과 수학적 개념을 비교하여 설명하였는데, 일상적 개념과는

달리 수학적 개념은 다른 하위 개념들과의 상호 관련성이 요구된다고 하였으며, 어떤 개념을 형성하기 위해서는 공통적인 성질을 갖는 다양한 경험을 필요로 한다고 하였다.[8)]

제 7차 수학 교육과정은 지식기반사회로의 사회 구조 변화에 능동적으로 대처할 수 있는 능력 향상을 위해, 수학적 사고력과 문제 해결력을 신장시키고, 수학의 실용성을 강조하며, 계산기나 컴퓨터를 교육적 도구로 활용하는 등의 다양한 교수·학습 방법과 평가 방법을 도입하는 방향으로 개정되었다. 그러나 현실적으로 교육과정의 총론에서 강조하는 방향과는 달리 수업 전개 방식이나 학습내용이 과거에 비해 크게 달라지지 않았고, 교수방법에서도 일관된 설명식 수업에서 벗어나지 못하고 있는 실정이다. 또한, 평가방법 역시 단편적 지식을 측정하는 객관식 선다형 문제 형태가 여전히 주를 이루고 있는 실정이다. 이러한 학습환경이 바뀌지 않는 한 학생들의 창의적인 수학적 개념을 형성하기는 쉽지 않을 것으로 생각한다.

수학적 개념 형성을 위해서는 생활 주변의 현상이나 구체적 사실을 학습 소재로 하여 수학의 기초 개념을 지도하여야 하며, 학생들의 경험과 욕구를 바탕으로 하여 개념을 간단하고 구체적인 것에서 추상적인 것으로 교수·학습하도록 해야 한다. 또한, 수학교육은 실세계를 기반으로 현실적으로 존재하는 것들을 중심으로 교육하여야 하며, 실세계의 문제를 해결하는데 활용되어야 한다.[8)]

개념이 형성되는 과정은 경험에 의하여 형성되는 경우와 구체적 설명에 의하여 형성되는 두 가지로 볼 수 있다. 특히, 개념 지도를 계획할 때에는 다음 사항을 유의하여야 한다. 첫째, 학생들의 지적 능력과 개념적 배경은 어떠한가? 하는 것이다. 만일 학생들의 지적 능력이 충분하다면 정의만으로도 개념을 지도할 수 있을 것이다. 그러나 지적 능력이 부족하다면 바른 예와 거짓 예를 충분히 제시하는 것이 좋다. 둘째는 이 개념을 교사 자신이

배울 때나 다른 반에서 지도할 때는 어떠하였는지를 생각하여 개념 지도를 위한 절차를 수정하고 더욱 적절하고 충분한 예나 거짓 예를 고안하여 사용하는 것이 바람직하다. 셋째는 이 개념이 얼마나 중요한가? 하는 것이다. 개념의 중요성에 따라 그 개념의 이해를 돕는 부수적 활동과 자료 활용의 비중을 달리하는 것이 바람직하다.[1)]

Treutlein는 직관기하 학습의 중요한 목적은 교과서에 나오는 단순한 언어나 기호의 암기보다 개념형성에 도움이 되는 현실적 경험이 필요하며, 그러한 경험의 장을 조직적으로 구성하는 것이 교사의 역할이라고 하였다.[12)] 즉, '다양한 방식의 개념 접근'을 위한 교수·학습 자료를 개발하여 학생의 개인차를 고려한 적절한 학습지도 방법을 교사가 선택하여 사용할 수 있도록 하는 것이 바람직하다. Piaget는 학생들에게 가장 용이하면서 흥미 있는 조작 구성을 위하여 학생 한 사람 한 사람에게 구체적인 자료를 다루게 하여 실제적인 행동을 시키는 것이라고 하였다.[12)] 행동의 내면화란 관점에서 보면, 학생들에게 구체적 활동을 시키지 않고 지도하는 경우에는 학생들이 수학적 개념을 충분히 이해하지 못하고 공식이나 규칙 또는 정의를 외우거나 여러 가지 계산방법을 기계적인 연습으로만 그치는 경우가 많음을 알 수 있다. van Hiele은 '구조 개념은 행동으로부터 나오며 분석과 명료화에 의해 보다 높은 사고 수준에 이른다'고 하였다.[17)]

III. Mathematica 활용의 예

이 장에서는 수학적 사고 실험과 개념 지도를 위해 Mathematica 프로그램을 활용하여 원주구하기, 구분구적분법에 의한 반원의 면적과 주어진 함수의 정적분의 값을 구해보려고 한다.

효과적인 학습지도를 위하여 교사는 다음 단계를 고려하여 Mathematica 프로그램을 활용하여야 할 것이다.

첫째, 교사는 학습 장면을 주도 면밀하게 설정하여야 한다. 수업 준비과정에서 교사는 토파즈 현상, 즉 학생들이 사고하며 발견해야 할 수학적 지식까지 제시하지 않도록 유의하여야 한다.

둘째, 학생들을 3 4명의 소집단으로 구성하되, 소집단의 유형은 학생들의 수학적 지식 수준이나 컴퓨터 활용능력을 고려한 이질집단으로 구성하는 것이 바람직할 것이다.

셋째, Mathematica 수학학습 프로그램을 자세하게 소개한다. 이 과정에서는 Mathematica 명령어와 이미 작성된 프로그램의 다양한 예들을 제시함으로써 학습에 어려움을 느끼지 않도록 충분한 설명이 이루어져야 한다. 그러나 Mathematica 프로그램의 조작 활동 그 자체가 수업의 목적이 되지 않도록 유의해야 할 것이다.

넷째, 교사의 지도에 따라 Mathemaica 프로그램을 활용하여 원주, 반원의 면적 및 일반 함수의 정적분의 값을 구해보도록 한다. 이 과정에서 교사는 Mathematica 프로그램과 준비된 문제에 대해 학습자와 함께 토론하며, 수업시간 틈틈이 학습자의 학업 수용능력과 성취도를 점검하여야 한다. 또한, 소집단내에서 학생들 상호간에 협력 학습이 이루어지도록 자유로운 토의 분위기를 만드는 등의 적절한 학습환경을 조성해 주어야 한다.

다섯째, Mathematica 프로그램을 활용하여 소집단별 구성원의 협력으로

수학 프로젝트를 작성하여 제출하도록 한다.

여섯째, 소집단별로 완성된 프로젝트를 각 소집단에서 발표하도록 하고, 각 프로젝트에 대해 전체 학생이 함께 토론하는 시간을 갖도록 한다.

마지막으로, 수업을 통한 반성의 과정을 거쳐야 한다. 수업을 통한 반성의 과정에서 우리는 다음을 유의하여야 한다.

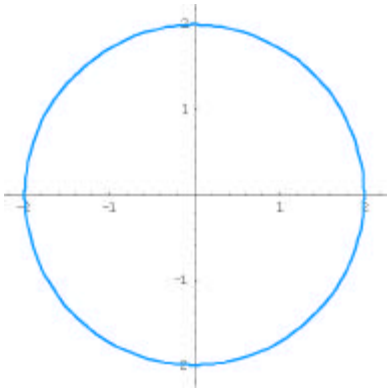
① 학생들에게 Mathematica에 대한 설명이 어렵거나 지루하지는 않았는지, 학생 개개인이 이를 잘 습득하였는지를 점검하고 교수방법에 대한 반성이 이루어져야 한다.

② 교사의 일방적인 설명식 수업으로 치중되지는 않았는지 생각해 보아야 한다. 또한, 학생 스스로 수업을 이끌어 나갈 수 있도록 교사는 적절한 시기에 안내자, 조언자로서의 역할을 잘 수행하였는지를 반성하여야 한다.

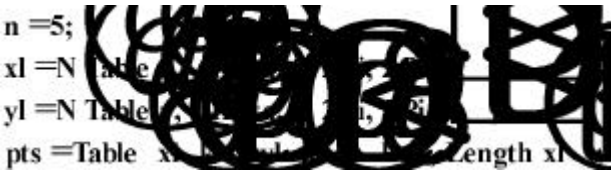
③ 자유롭게 토의할 수 있는 학습 분위기가 조성되었는지, 학생 스스로 수학적 아이디어와 재발견이 가능하도록 유도된 수업이었는지에 대해 반성되어져야 한다.

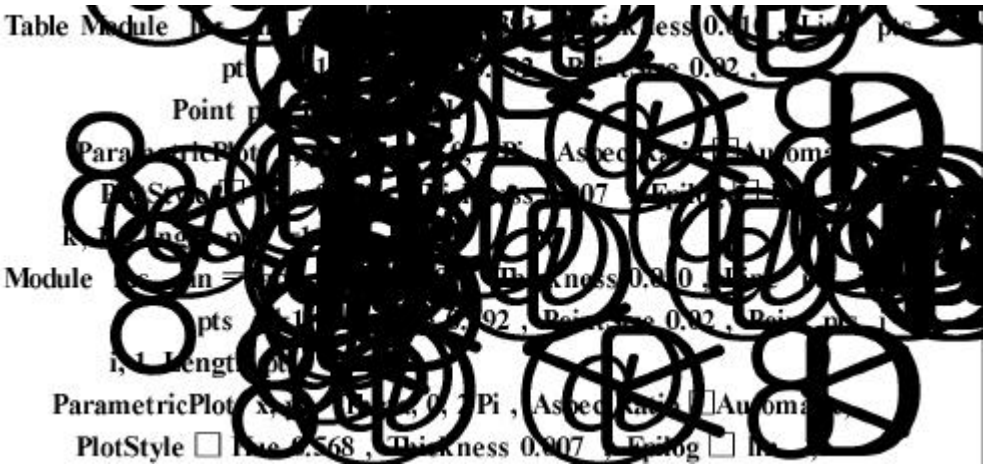
3.1. 원주

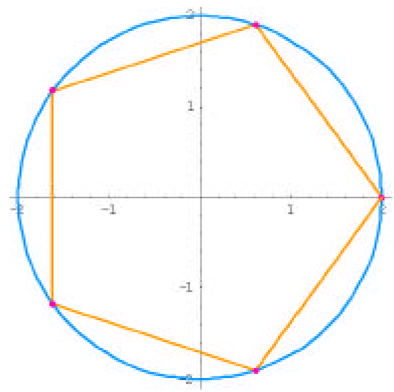
반지름이 2인 원의 원주를 구하기 위하여 먼저 다음과 같이 Mathematica 명령어를 사용하여 반지름이 2인 원을 그려보자.



먼저, 원주와 원에 내접하는 정다각형의 변의 길이와의 관계를 생각하도록 하고, 다음의 Mathematica 프로그램을 실행하여 반지름이 2인 원에 내접하는 정 5각형을 그려보도록 지도한다. 이 과정에서 학생들로 하여금 정 5각형을 그리는 방법에 대해 먼저 토론하게 한다.







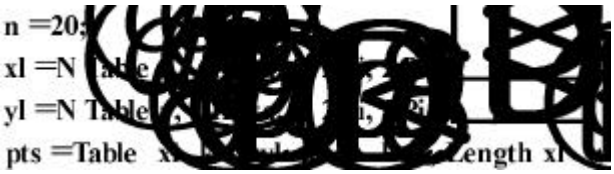
다음에 다각형의 변의 길이에 대한 개념을 토의하면서, 원에 내접하는 정 5각형의 변의 길이를 구하는 방법을 생각해 보도록 한 후, 다음 프로그램으로 길이를 구하도록 한다.

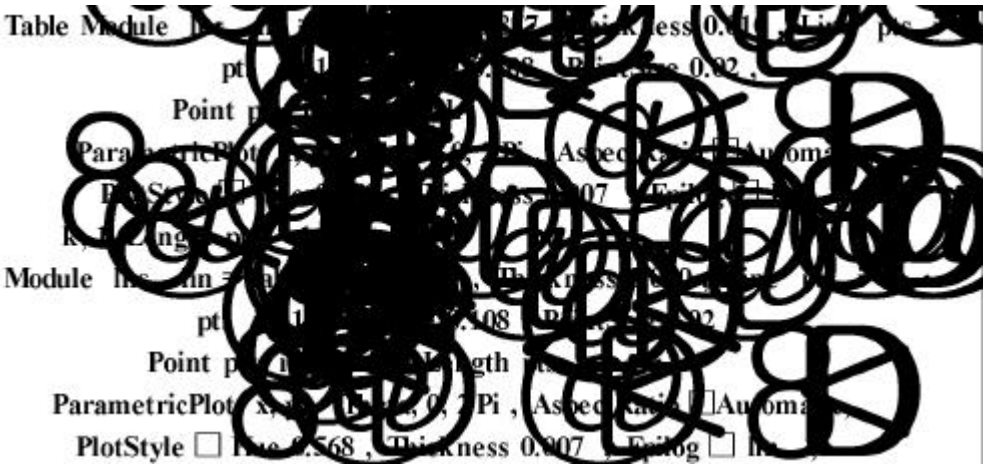
```
Sum S[illegible]
[illegible] Si[illegible] Pi k [illegible] Pi [illegible]
[illegible] 557
```

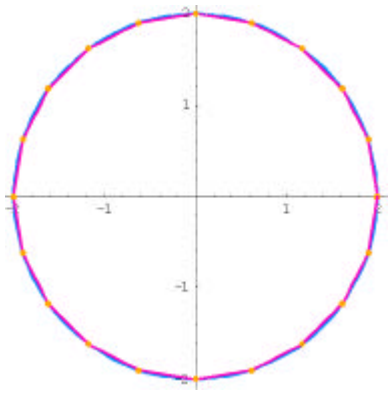
같은 방법으로 반지름이 2인 원에 내접하는 정 10각형 또는 정 20각형을 그려보고 그 변의 길이를 학생 스스로 구해보도록 한다.

다음의 Mathematica 명령어는 반지름이 2인 원에 내접하는 정 20각형과 그 변의 길이를 구한 것이다. 학생들이 이미 알고 있는 반지름이 2인 원의 원주와 원에 내접하는 정 5각형과 정 20각형의 길이를 비교해 보도록 하여 사고력을 증진시킨다.

```
Clear "[illegible]"
r =2; x =r *Cos Th[illegible] ;
cl =ParametricPlot[illegible] Pi [illegible] Asp[illegible] Automatic,
        PlotRange □ [illegible] 2.2[illegible], [illegible] 2.2[illegible] ,
        PlotStyle □ [illegible] 568 , [illegible] ness 0.[illegible] 07
```







이와 같은 단계를 거치면서 반지름이 2인 원에 내접하는 정 n각형의 변의 길이를 n에 대한 극한개념으로 생각하여 원주를 구할 수 있음을 학생

스스로 이해할 수 있도록 한다. 이는 공식으로 알고 있던 원주를 안내된 재발견의 과정을 거치면서 학생이 직접 프로그램을 실행하고 토의하는 가운데 학습할 수 있게 된다.

아울러 반지름을 변화시켜 가면서 원주를 구해보도록 하여, 원주와 반지름 또는 지름과의 관계를 알아보도록 하여 원주율 π을 자연스럽게 학습하도록 한다.

3.2. 원의 면적

교사는 원의 면적을 구하기 위하여 먼저 반원의 면적을 Mathematica 명령어를 사용하여 구해보도록 한다. 다음과 같이 Mathematica 명령어를 사용하여 반지름이 1인 반원의 면적을 구해보면 1.5708임을 알 수 있다.

```
f x_,r_ := Sqrt[r^2 - x^2];

r = 1;

ft = Plot f[x, r], {x, -r, r}, GridLines -> Automatic,
     Axes -> True, AspectRatio -> Automatic, ImageSize -> 350,
     PlotStyle -> {Thickness[0.007], Hue[0.85]}]
```

N Integrate

1.5708

다음에는 구분구적분법을 이용하여 반지름이 1인 반원의 면적을 구해보도록 한다.

구간 [- 1, 1]을 먼저 4등분하고 두 배씩 등분해 가면서 반원의 면적을 구해보면, 128등분하였을 경우의 구분구적법에 의한 면적은 1.56965로 반원의 면적과 거의 일치함을 알 수 있다. 학생들에게 원의 반지름을 변화시켜서 원의 면적과 반지름과의 관계를 서로 토의하면서 살펴보도록 한다.

m =6;

Table n

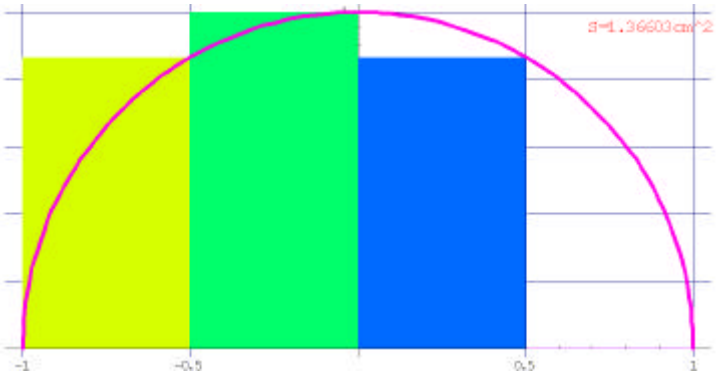
Show

Rectangle

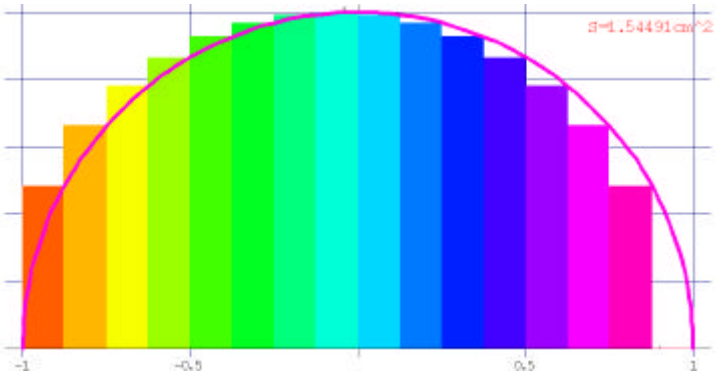
AspectRatio

Prolog

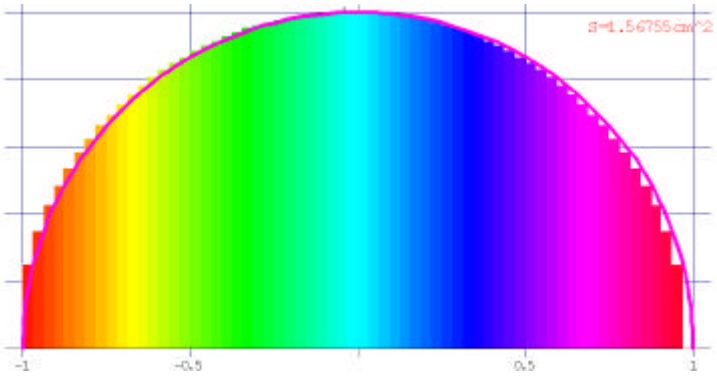
FontColor Hue .999



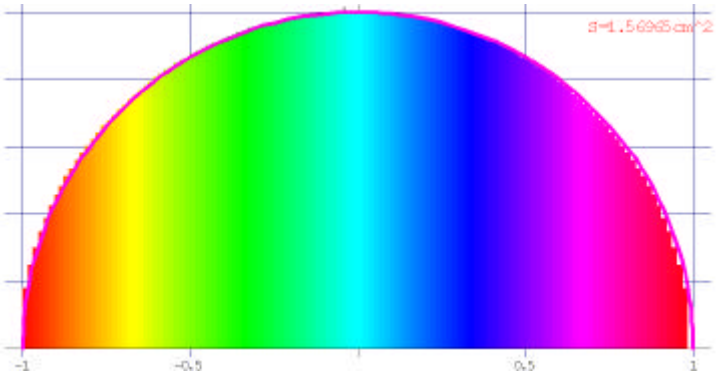
<4등분한 경우>



< 16등분한 경우>



< 64등분한 경우>



< 128등분한 경우>

3.3. 정적분

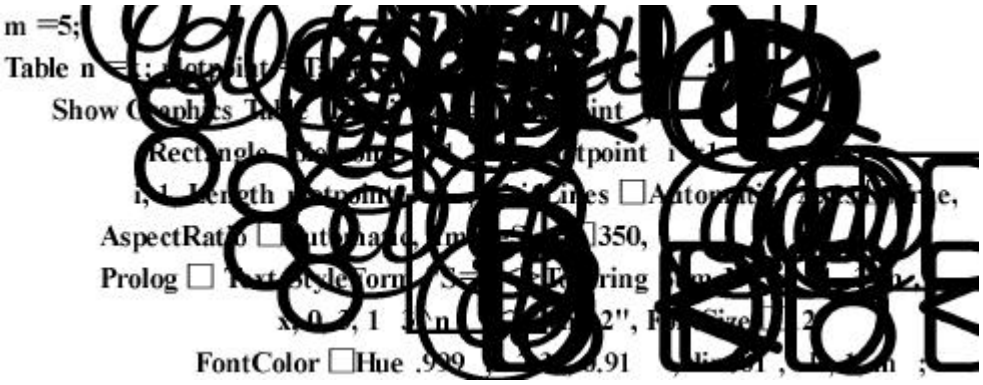
폐구간 [0, 3]**에서 함수** $f(x) = 2x - x^2$**의 정적분의 값을 구해보려고 한다. 다음의** Mathematica **명령어를 사용하여 그래프를 그리고, 정적분의 값을 구해보면** 0**이 됨을 알 수 있다.**

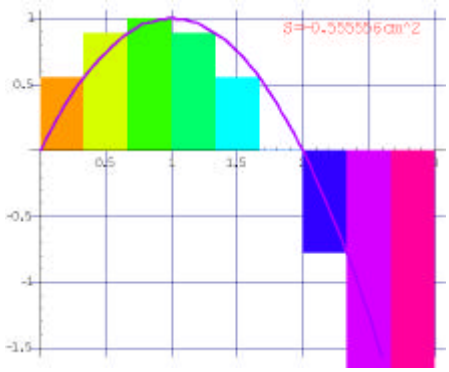
```
f x_
line01 = Plot f
    Axes True,
    PlotRange
    PlotStyle
```

```
Integrate f
0
```

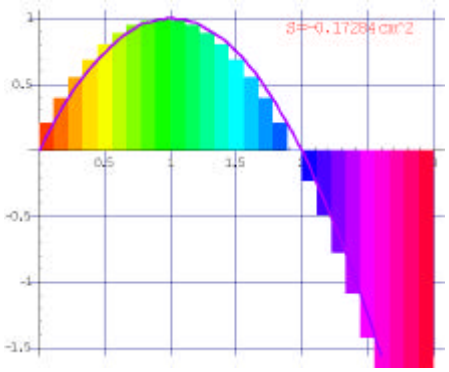
이제부터는 폐구간 [0, 3]**를 먼저** 9**등분하고 주어진 구간을** 3**배씩 세분해 가면서 구분구적분법을 이용하여 그 값을 구해보려고 한다.**

다음과 같이 Mathematica **명령어를 사용하여, 폐구간** [0, 3]**을** 729**등분한 값을 구분구적분법으로 구하면,** -0.00618**이 됨을 알 수 있다.**

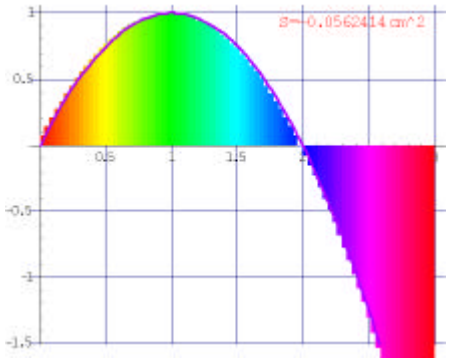




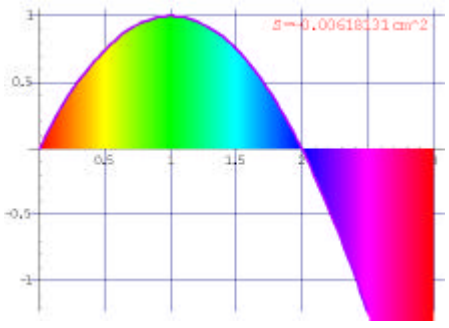
<9등분한 경우>



<27등분한 경우>



<81등분한 경우>



<729등분한 경우>

이를 참고로 하여 소집단별로 Mathematica를 활용하여 타원의 길이와 면적, 여러 가지 함수에 대한 정적분의 값을 구해 보도록 한다.

이 장에서 제시한 수업형태와 같이 미리 준비한 학습장면에 따라 프로그램을 제시하고, 학생들의 수학적 활동과 토론을 통해 수학적 지식과 발명을 이끌어내는 과정, 즉 발견학습을 통하여 수학적 사고 실험이 형성될 수 있을 것으로 생각한다. 수학적 사고 실험은 이와 같이 교사의 개입 없이도 학생과 컴퓨터 사이의 긴밀한 상호작용을 통해 학생들의 학습이 보장될 수 있어야 한다. 학생 자신이 구성한 프로그램을 토대로 그 결과를 출력하여 발생되는 오류를 수정하는 과정을 통해 수학적 반성 사고와 문제 해결력이 신장될 수 있을 것이다. 또한, 협력학습의 기회를 가짐으로 편협하게 치우칠 수 있는 자신의 수학적 지식을 조정하고, 서로의 수학적 아이디어를 교류·토론하는 과정에서 수학적 힘을 신장시킬 수 있을 것이다.

앞서 소개한 Mathematica 프로그램의 명령어가 다소 복잡하여 처음으로 접하는 학생에게는 약간의 무리가 있을 수 있다고 생각한다. 그러나 명령어를 잘 살펴보면 그래프에 있어서 선명한 선의 구별과 Mathematica의 장점인 시각화를 살리기 위해서 좌표평면, 점, 그래프의 형태에 대한 명령어의 숫자변환이 많을 뿐, 명령어 그 자체는 그다지 어렵지 않음을 알 수 있다. 아울러 이러한 수업은 프로그램 명령어에 대한 충분한 설명이 이루어진 후에 시행될 것이므로, 학생들의 Mathematica 프로그램 활용에 큰 문제가 되지 않을 것으로 생각한다.

Ⅳ. 결론 및 제언

21세기 교육은 지난날의 획일적이고 통제적인 지식주입 위주의 교육에서 탈피하여 차별화 교육, 창의적 교육, 인성교육, 단계 수준별 교육, 통합교육 등을 통하여 학생 개인과 집단에게 더욱 질 높은 교육을 실시하여 교육 효과의 극대화를 도모하여야 한다.

컴퓨터의 발달과 함께 다양한 수학학습 프로그램의 개발은 수학교육의 방법과 내용을 급속히 변화시키고 있다. 컴퓨터는 학교 수학의 교육방법 개선의 도구로 활용되고 있으며, 이와 관련된 많은 연구가 이루어지고 있다. 이는 컴퓨터를 이용한 수학교육이 학생들의 흥미를 유발하고 적극적인 학습활동 참여를 유도하여 탐구활동을 하게 하여, 그 결과를 사고하고 반성하게 함으로써 수학 학습은 물론 창의력을 신장시키기 때문이다.

컴퓨터의 기능은 프로그램의 종류, 사용자의 기술이나 상황에 따라 달라질 수 있으므로, 그 활용방법에 따라 학습효과도 현저하게 달리 나타날 수 있다. 컴퓨터 활용이 주의력을 끌어 사고력을 신장시키고, 동기를 유발하여 학습의 심화를 촉진시키며 창의력을 제공하는 도구로서 훌륭한 장점을 지니고 있지만, 컴퓨터가 수학의 모든 내용을 프로그램으로 소화해 낼 수는 없다. 또한, 지나친 컴퓨터 사용은 선행지식이 없는 학습자에게는 매체에 종속되는 결과를 가져올 수도 있으며, 때로는 오락적 측면만이 부각될 수도 있다. 그러나 컴퓨터 활용이 위계성이 매우 엄격한 수학교과에서 앞서 학습한 선행지식의 이해를 돕고, 논리를 중요시하는 측면에서는 엄격한 연역적 구조로부터 발견적 사고를 이끌어 내어 논리적 추론능력을 향상시키는 효과적인 수단임에는 틀림이 없다. 적절한 컴퓨터 사용을 위해서는 교수-학습 프로그램이 다양하게 개발되어야 하고, 기존의 프로그램은 학습자의 수준에 알맞게 재구성하여야 한다. 여기서 교사의 역할은 매우 중요

하다. 학습자 개개인의 인지수준을 파악하여 생소한 프로그램과 학습자간의 중재자로서 수학적 지식과 개념들을 학생 개개인의 능력에 맞도록 지도함으로써 수학적 사고 신장을 통한 개념의 재발견이 이루어지도록 하여야 한다.

이 논문에서는 정적분에서의 Mathematica 프로그램을 활용하여 수학적 사고 신장을 위한 교수-학습 방안을 예시하였다. Mathematica 프로그램을 활용하여 탐구한 내용을 학생 스스로 발표하고 토론하는 가운데 수학적 사고 능력이 신장되며, 이 능력을 토대로 하여 수학적 개념들이 이해되고 재창조되어 보다 높은 수준으로 올라설 수 있을 것으로 생각한다. 또한, 소집단 중심의 개별화 학습을 통해 협동심을 키우고, 각자의 수학적 아이디어와 지식을 토론하는 가운데 자신의 수학적 오류를 수정할 수 있는 기회를 가지게 함으로써 문제 해결력을 더욱 신장시킬 수 있을 것이다.

학습자가 외면하는 교과목은 그 중요성이 아주 높다고 하더라도 학습 효과 면에서 뒤쳐질 수밖에 없으므로, 탐구적 환경을 조성하여 학습자들의 능동적인 참여를 유도하여야 한다. 그리고 다양한 방법을 모색하여 학습자에게 필요한 수학적 개념을 개발하고, 학생들 개개인의 문제해결 능력을 향상시키며 수학적 사고 발달 및 흥미를 유도할 수 있는 환경을 갖추어야 한다. 아울러, 수학적 사고 신장을 위한 다양한 수학학습 프로그램의 개발이 요구되며, 그 활용에 있어서 수학학습 프로그램의 장점과 부작용이 충분히 고려되어야 한다.

참 고 문 헌

1) 강옥기(2001), 수학과 학습지도와 평가론, 서울 : 경문사.

2) 교육부(1997), 초·중등학교 교육과정, 교육부 고시 제1997-15호.

3) 김민경·노선숙(2001), "수학교육 현장에서 교육정보화의 현황과 과제", 대한수학교육학회지 <학교수학>, 제3권 제1호, pp. 45-74.

4) 김안현, 김향숙, 류재칠, 신준용, 이강래, 표용수(2000), 수학에서의 Mathematica 활용, 서울 : 경문사.

5) 김향숙(2001), "평면변환기하에 있어서 Mathematica를 이용한 교수-학습 방법", 한국수학교육학회지 시리즈 A, <수학교육>, 제40권 제1호, pp. 93-102.

6) 나귀수(2002), "수학 교육과정과 교과서", 교육인적자원부, 교육마당, pp. 84 85.

7) 류희찬(2002), "사고력 신장을 위한 수학교육", 교육인적자원부, 교육마당, pp. 88 90.

8) 배종수(2002), "수학교육에서의 개념형성", 대한수학회 소식, 제82호, pp. 20-28.

9) 신동선·류희찬(1998), 수학교육과 컴퓨터, 서울 : 경문사.

10) 우정호(1998), 학교수학의 교육적 기초, 서울 : 서울대학교출판부.

11) 우정호(2001), "수학 학습-지도 원리와 방법", 서울 : 서울대학교출판부

12) 우정호·박한식·김응태(1997), 수학 교육론 개론, 서울 : 서울대학교출판부.

13) 최수정, 표용수(2000), "Cabri II를 활용한 도형의 교수-학습 방안", 대한수학교육학회지, <학교수학> 제2권, 제1호, pp. 165-181.

14) **한기완**(2001), “**공간과제의 지도 방안에 관한 연구** - ‘2-**가**’**와** ‘3-**가**’ **단계의 공간감각 기르기 소영역을 중심으로**-”, **대한수학교육학회지**, <**학교수학**> **제**3**권 제**2**호**, pp. 355-371.

15) Alessi, S. M. and Trollip, S. R.(1985), “Computer-based instruction : methods and development”, Englewood cliffs, NJ : Printice Hall.

16) Hoyles, C.(1998), “Steering between skills and creativity : A Role for the Computer?”, Proc. of ICMI-EARCOME, Vol. 1, 211-226.

17) van Hiele, P. M.(1986), Structure and insight : A theory of mathematic education, Academic Press.

18) Wittmann, E.(1978), Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg.

19) Wolfram, S.(2000), Mathematica(4th ed.), Cambridge Univ. Press.

20) Zimmermann, W. and Cunningham, S.(1991), Visualization in teaching and learning mathematics. A project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of the Mathematical Association of America.

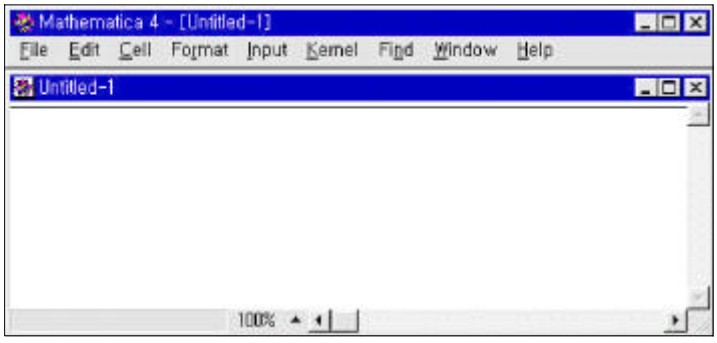
Mathematica 소개

수학적 계산이나 학습에 유용하게 사용할 수 있는 다양한 컴퓨터 프로그램이 개발되어 널리 사용되고 있으며, 그 중요성은 날로 증가하고 있다. 수학교육 지도방법의 변화가 절실히 요구되는 현실에서, 대학에서 사용하는 수학용 소프트웨어로는 Mathemetica, Maple, Matlab 등을 들 수 있다.

그 중에서 보편적으로 사용되고 있는 매스매티카(Mathematica)는 1988년 6월 미국의 이론물리학자 겸 수학자인 Stephen Wolfram에 의하여 버전 1이 Wolfram Research 회사에서 개발된 이후, 여러 가지 운영체제에 적용될 수 있도록 계속 발전되어 왔다. 본 논문에서는 Window용 Mathemetica를 사용하여 정적분에 대한 사고력 신장을 위한 도구로 버전 4.0의 Mathematica 프로그램을 사용하였다.

Mathematica는 수학의 거의 전 분야에서 활용이 가능하며, 수학 개념을 시각화하여 추상적 수학에 보다 쉽게 접근하게 하며, 계산을 용이하게 할 뿐 아니라 화려한 그래픽 시각화를 통해 학생들에게 관심과 흥미를 유발시킬 수 있는 장점을 가진 컴퓨터 프로그램이다.

Mathematica 프로그램 설치한 후, 실행하면 다음과 같은 화면이 나타난다.



위와 같은 빈 노트북(notebook)파일이 하나 생기게 되고(이하 nb파일이라 한다), 이 빈 노트북에 여러 가지 명령들을 입력하고 실행하면(동시에 Shift + Enter 키를 누른다), 그 결과가 이 노트북 파일에 곧바로 나타난다.

예를 들어, "1+1" 을 입력하고 실행하면, 자동으로 입, 출력표시, In[ ], Out[ ]이 생기면서 "2" 라는 값이 출력된다.

```
In[1]:=1+1
Out[1]:=2
```

즉, 화면에 나타난 In[ ], Out[ ]는 일종의 프롬프트로 명령(1+1)을 입력한 다음 실행(Shift+Enter)하면, 그 다음에 자동으로 화면에 표시되는 것이다. In[ ]이라는 프롬프트는 사용자가 입력한 내용(명령)에 대하여 붙여지는 것이며, Out[ ]이라는 것은 그 명령을 실행했을 때 나타나는 결과에 붙여지는 것이다. 다음은 Mathematica 프로그램을 사용할 때, 반드시 주의하여할 사항이다.

(1) Mathematica에서는 대, 소문자를 구별하여 사용하여야 한다.

(2) 명령어 및 예약상수, 수학 함수들의 첫 글자는 항상 대문자를 사용하여야 한다.

(3) 여러 단어로 이루어진 명령어의 각 단어의 첫 글자도 대문자이어야 한다.

(4) 변수는 계속 연결되어 사용되므로 다른 목적으로 같은 변수를 사용하는 경우에는 Clear[변수] 명령을 이용하여 변수를 깨끗이 정리해 주지 않으면 오류가 생길 수 있다.