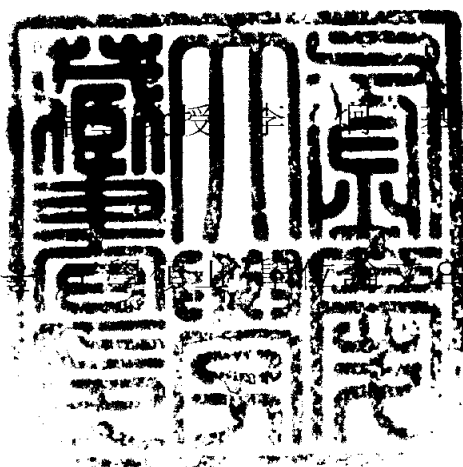


工學碩士學位論文

유연한 로봇팔의 선단위치 제어를  
위한 이산시간  $H_\infty$ 제어기 설계에  
관한 연구



이 論文은 釜慶大學에서 提出함

2004年 2月

釜慶大學校 大學院

制御計測工學科

朴基元

# 朴基元の 工學碩士 學位論文을 認准함

2003年 12月 23日

主 審      工學博士

崔 然 旭



委 員      工學博士

安 永 珠



委 員      工學博士

李 炯 基



# 목 차

I 서 론 .....	1
II 유연한 로봇팔의 상대공간 모델 .....	3
2.1 유연한 로봇팔의 구조 .....	3
2.2 유연한 로봇팔의 좌표 .....	4
2.3 운동방정식의 유도 .....	6
2.3.1 운동에너지 .....	7
2.3.2 위치에너지 .....	7
2.3.3 운동방정식 .....	8
III $H_{\infty}$ 제어이론 .....	12
3.1 연속시간에서의 $H_{\infty}$ 제어 .....	12
3.2 $H_{\infty}$ 제어문제의 정식화 .....	14
3.3 쌍일차 변환에 의한 연속시스템의 이산화 .....	19
3.4 쌍일차 시스템의 안정판별 .....	24
3.5 The Warping Problem .....	25
3.6 이산시간 $H_{\infty}$ 제어를 설계 .....	27
IV 제어시스템의 구성 .....	30
4.1 유연한 로봇팔의 전달함수 .....	30
4.2 PD제어기를 이용한 위치제어시스템 .....	31
4.3 이산시간 $H_{\infty}$ 제어를 이용한 위치제어시스템 .....	34
V 시뮬레이션 .....	38
5.1 유연한 로봇팔의 진동응답 .....	39

5.2 PD제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답 .....	41
5.3 이산시간 $H_{\infty}$ 제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답 .....	42
<b>VI 실험 및 고찰</b> .....	46
6.1 실험장치의 구성 .....	46
6.2 PD제어기와 이산시간 $H_{\infty}$ 제어기를 이용한 위치제어 시스템의 응답 비교 .....	48
<b>VII 결 론</b> .....	50
<b>참고 문헌</b> .....	51

# Design of Discrete-Time $H_\infty$ Controller for Position Control of a Flexible Manipulator

Ki-Won Park

*Department of Control & Instrumentation Engineering, Graduate School  
Pukyong National University*

## Abstract

Recently a robot manipulator has been widely used for various industrial fields such as manufacturing, transportation, and construction. As a result of this, we can greatly reduce production cost and improve quality of products, and more importantly obtain high accuracy. Various studies are now under way to obtain faster, cheaper and more accurate robot manipulators.

There are two types of manipulators, that is, stiff and flexible. Although the stiff manipulator is generally used in industrial area, it has some obvious disadvantages: it needs large space due to its size and weight, its motion speed is very slow and it consumes a lot of energy.

To cope with these difficulties, the flexible manipulator was introduced. However, it is very difficult to control a manipulator manufactured with light and flexible material because its flexibility and mass cause unnecessary vibration.

Therefore it is necessary to suppress the vibration in order to obtain precise position or tracking control. Many researchers have presented algorithms to get better results in case of using flexible manipulators.

In this paper, a discrete-time  $H_\infty$  controller for a flexible manipulator carrying an unknown payload at its free end is designed and confirmed its validity through experiment. Since obtaining good performance for flexible manipulators allows producing lighter robots, which operate at higher speed,

we try to design a robust discrete-time controller capable of ensuring satisfactory performance, in terms of hinge position regulation and vibration damping, besides, obviously guaranteeing internal stability in spite of plant parameter variations due to variance of the payload.

This paper adopted the discrete-time  $H_\infty$  design methodology to construct a robust controller for a flexible manipulator. The fundamental design steps are as follows :

Step 1 (Description of Modeling Uncertainties): Through mathematical analysis and experiments, we can estimate the differences ,that is, uncertainties between the nominal and real model.

Step 2 (Feedback Controller): We adopt the discrete-time  $H_\infty$  control theory is used to design a robust controller.

Step 3 (Experiments): The experimental system consists of the flexible manipulator with its supporting pedestal and the control system. The obtained controller is tested with different weights of payload: the range of payload weight is from 20 % to 80 % of the weight of the link.

# I 서 론

최근 로봇은 가공, 운반, 용접, 조립, 포장, 검사 및 산업현장의 자동화 부분에 널리 사용되어 제품 생산의 원가 절감, 품질, 생산성 및 정밀도의 향상에 크게 기여하고 있다. 특히 인간의 작업영역을 벗어난 원자력에 관련된 위험지역이나 해양, 항공, 우주, 여러 분야의 극한 환경 등에서 강체 로봇이 많이 응용되고 있으며, 이에 따라 로봇 움직임의 고속화, 선단위치 제어의 정밀화, 구동에너지의 절감 등을 위한 다양한 연구가 진행되고 있다. 가장 많이 사용되고 있는 강체 로봇은 크기와 무게로 인하여 넓은 공간을 필요로 하고 동작속도가 느리며, 구동장치가 크고, 그리고 운동에너지가 많이 소모되는 등의 단점을 가지고 있다.

이러한 강체 로봇이 가지는 단점을 보완하기 위해 로봇의 무게를 가볍게 함으로서 유연성 및 에너지의 효율성 그리고 안정성 등을 개선시키는 유연한 로봇팔에 관한 연구의 필요성이 제기되었다. 그러나 가벼운 재질로 제작된 유연한 로봇팔은 그 자체의 질량과 탄성으로 인하여 원하지 않는 진동이 발생한다. 따라서 정밀한 위치 제어나 궤적 제어를 실현하기 위해서는 진동을 가능한 한 억제하면서 주어진 설계사양을 만족시키는 제어기를 설계해야 한다는 문제점을 가지고 있다. 이와 같이 경량화된 유연한 로봇팔을 속응성 있게 제어하기 위해서는 동역학을 기초로 한 시스템의 모델링과 진동을 효율적으로 제어하기 위한 제어 알고리즘이 필요하게 된다<sup>1)</sup>.

일반적으로 재질이 가지는 탄성을 고려하는 방법으로는 가정된 모드(assumed mode)법과 유한 요소법(finite element method)이 많이 사용되고 있다. 이들 방법은 연속적인 시스템을 유한 차원을 가지는 이산화된 시스템으로 해석하는 것이다. 탄성물체에 발생하는 진동은 자유진동(free vibration)과 강제진동(forced vibration)으로 구분되며, 자유진동은 외력이 없는 경우에 시스템의 자체에 내재하는 힘에 의하여 발생한다. 자유진동인 경우에 시스템은 하나 또는 그 이상의 고유진동수(natural frequency)를 가지고 진동하며, 이 고유진동수는 질량과 강성의 분포에 의하여 결정되는 동적 시스템의 고유한 특성으로 주어진다. 강제진동은 외력의 작용 때문에 발생하는 진동으로 외력이 주기적인 경우에는 시스템이 여진과 동일한 주파수를 가지고 진동을 하게 되고, 외력 주파수가 시스템의 고유진동수 중

의 어느 하나와 일치하는 경우에 공진이 발생한다. 이러한 경우에는 진폭이 매우 커져서 위험 상태에 도달하게 된다.

고유진동수의 해석은 진동학의 연구에서 매우 중요한 분야이므로 유연한 로봇팔의 위치, 진동 및 힘의 제어시 고도의 정확성과 안정성을 필요로 하는 제어방법과 알고리즘이 요구된다.

본 연구에서는 비선형 시스템인 유연한 로봇팔의 해석에 적합한 것으로 알려진 가정된 모드(assumed mode) 방법과 오일러-라그랑제(Euler-Lagrange)운동방정식을 이용하여 고정-자유단 구조를 갖는 유연한 로봇팔의 상태공간 모델을 구하고<sup>[2]</sup>, 이 상태공간 모델을 기초로 하여 유연한 로봇팔에 가해지는 토크를 입력으로 하고 선단 변형을 출력으로 하는 기준모델(nominal model)의 전달함수를 유도하였다. 이 결과를 바탕으로, 몇 번의 측정을 통하여 제어기 설계에 필요한 기준모델이 가지는 시스템의 불확실성 영역을 계산한 후 진동을 효과적으로 억제할 수 있는 제어기법으로서, 유연한 로봇팔의 비선형 특성에 대해서도 제어성능이 뛰어난  $H_{\infty}$  제어 이론을 적용하여 이산시간  $H_{\infty}$ 제어기 설계하였다.

마지막으로 제안된 이산시간 제어기의 효과를 먼저 다양한 조건 아래 시뮬레이션을 실행하여 상기의 제어기가 예상한 대로의 성능을 나타내고 있음을 확인하였다. 또한 로봇팔 선단에 여러 종류의 부하(payload)를 부착한 뒤 제어기를 컴퓨터에 실장하여 실험한 결과, 본 연구에서 구현한 이산시간 제어기가 그의 능력을 충분히 발휘하고 있는 것이 확인 되었다.

제2장에서는 유연한 로봇팔의 상태공간 모델링에 대하여 기술하였으며, 기본적인  $H_{\infty}$ 제어 이론과 연속시스템의 이산화에 관한 제반 내용을 3장에 나타내었다. 제4장은 유연한 로봇팔의 위치제어시스템의 구성에 대하여 나타내었으며, 제5장에서는 구성된 제어시스템을 시뮬레이션한 결과를 나타내었다. 제6장에서는 실험결과 및 고찰을 기술하였다.

## II 유연한 로봇팔의 상태공간 모델링

이 장에서는 유연한 로봇팔의 비선형 동적 모델을 표현하였다. 시스템 구성을 먼저 나타내었고, 가정된-모드 방법을 이용하여 유연한 로봇팔에 발생하는 탄성변형(Elastic deflection)식을 구하며, 운동방정식은 오일러-라그랑제 방정식을 이용하여 유도하였다.

### 2.1 유연한 로봇팔의 구조

균일한 알루미늄 빔을 이용하여 고정-자유단 구조를 갖는 유연한 로봇팔의 구조를 그림2.1에 나타내었다.

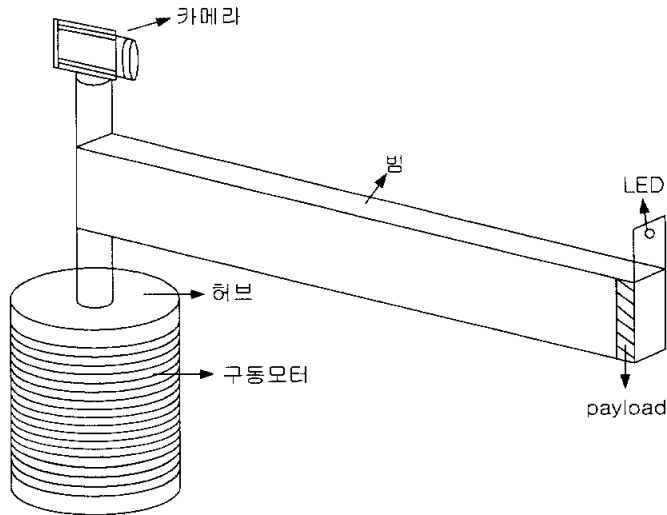


그림 2.1 유연한 로봇 팔의 구조

그림2.1에서 허브는 모터에 부착되어 회전하며 가늘고 긴 유연한 로봇팔이 직접 연결되어 있다. 유연한 로봇팔은 일정한 단면적과 물리적인 성질을 가진다. 허브에 고정된 유연한 로봇팔은 높이가 두께보다 훨씬 크고 균일한 Bernoulli-Euler 빔이다. 유연한 로봇팔의 진동은 수평방향으로만

진동하는 것으로 가정할 수 있으며 빔의 모든 변형은 작은 것으로 가정한다. 또한 유연한 로봇팔의 전단변형(Shear deformation)과 회전관성(Rotary inertia) 영향에서 작은 값들은 무시하기로 한다. 여기서 언급하는 유연한 로봇팔은 연속적으로 분포된 질량과 탄성을 갖는 것으로서 이러한 물체의 자유진동은 주 모드(principal mode)들의 합으로 주어진다. 주 진동 모드에서는 물체의 모든 질점(particle)은 각 평형 점을 기준으로 주파수 방정식의 특정 근에 해당하는 주파수로 단순한 조화운동을 한다. 운동이 시작될 때의 탄성곡선이 어느 하나의 주 모드와 완전히 일치하게 되면, 그 주 모드만이 나타나게 된다. 그러나 인가 또는 제거되는 힘에 의한 탄성곡선은 어떤 주 모드와 일치되기는 어려우므로 본 연구에서는 빔의 단면 특성이 일정한 탄성체의 정규모드(normal mode) 진동에 관한 비교적 간단한 시스템을 고찰하였다.

## 2.2 유연한 로봇팔의 좌표

그림 2.2는 그림 2.1에서 시스템의 운동방정식을 유도하기 위하여 구성한 유연한 로봇팔의 좌표도 이다.

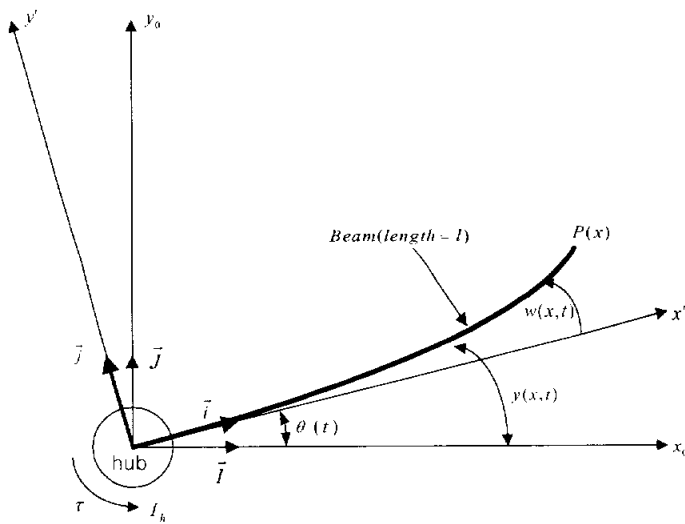


그림 2.2 유연한 로봇팔의 좌표계

- $\theta(t)$  : 모터의 회전각  
 $\tau$  : 입력토크  
 $w(x, t)$  : 거리  $x$ 에서 탄성변형  
 $y(x, t)$  : 제어시스템의 출력으로서 선단위치  
 $\vec{i}, \vec{j}$  : 고정 좌표계  $x_0$ 축과  $y_0$ 축방향의 단위벡터  
 $\vec{i}', \vec{j}'$  : 회전 좌표축  $x'$ 축과  $y'$ 축 방향의 단위벡터  
 $P(x)$  :  $x$  지점에서의 위치벡터  
 $I_h$  : 액추에이터와 로봇팔의 고정부를 합한  
 허브의 관성모멘트

그림 2.2에서 모터가  $x_0$  축에서  $x'$  축으로 각도로 회전할 경우 유연한 로봇팔은 빔의 진동 즉  $w(x, t)$ 의 탄성변형이 발생하게 된다. 이러한 경우  $x$  지점에서의 탄성변형  $w(x, t)$ 는 식(2.1)과 같이 정의되는 가정된-모드방법을 이용하여 표현할 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (2.1)$$

$q_i(t)$ 는 로봇팔의 진동성분중 시간에 대한 변화율로서  $q_0(t)$ 는  $\theta(t)$ 이다. 가정된 모드법은 임의의 함수를 이미 알고 있는  $n$ 개의 공간좌표의 함수인 가정된 모드형상과 미지의  $n$ 개의 시간함수인 일반화좌표의 선형적인 조합으로 근사하게 나타내는 방법이다.  $n$ 의 수가 커질수록 원래 함수를 더 정확하게 나타낼 수 있다. 여기에서는 탄성변형을 가정된 모드법으로 표현하여 자유도가 무한인 연속계를  $n$ 자유도의 이산화된 계로 나타낸다. 가정된 모드법은 모드 수를 조절하는 것이 가능하기 때문에 실제로 중요한 모드 몇 개만을 선택함으로써 상대적으로 작은 크기의 모델로 시스템을 나타내는 것이 가능하다. 가정된 모드 형상으로는 일반적으로 허용함수나 비교함수 또는 고유함수 등이 사용된다. 허용함수는 시스템의 기하학적 경계조건만을 만족하고 비교함수는 시스템의 기하학적 경계조건과 자연적 경계조건을 만족하며 고유함수는 시스템의 기하학적 경계조건과 자연적 경계조건 뿐만 아니라 시스템의 운동방정식도 만족한다. 식(2.1)에서  $\phi_i(x)$

는 로봇팔의  $i$  번째 모드의 휨의 정도를 나타내는 고정-자유단 구조에서의 고유함수로서 다음식으로 정의한다.

$$\phi_i(x) = c_i (\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x) - \sigma_i \cdot (\cos \beta_i x - \cosh \beta_i x) \quad (2.2)$$

$$\sigma_i = \frac{(\sin \beta_i l - \sinh \beta_i l)}{(\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l)} \quad (2.3)$$

여기서  $l$ 은 유연한 빔의 전체길이,  $\beta_i$ 는 식 (2.4)에 대한 해,  $c_i$ 는 일정한 값을 갖는 임의의 상수이다.

$$1 + \cos \beta l \cdot \cosh \beta l = 0 \quad (2.4)$$

이러한 시스템에 대한 상태공간 모델을 유도할 수 있으며, 유연한 로봇팔에 발생하는 토크를 입력으로 하고, 유연한 로봇팔의 끝단에 대한 선단 위치를 출력으로 하면 유연한 로봇팔의 끝점에서 발생하는 탄성변형  $w(l, t)$ 와 강체변형(rigid body deflection)  $\theta(t) \cdot l$ 의 합으로서 다음 식과 같다.

$$y(l, t) = w(l, t) + \theta(t) \cdot l \quad (2.5)$$

### 2.3 운동방정식의 유도

비감쇠계의 자유진동에서 에너지는 운동에너지와 위치에너지로 구분할 수 있다. 운동에너지는 속도에 의하여 질량에 저장되며, 위치에너지는 탄성변형에 의한 탄성에너지의 형태로 저장되거나 중력장 등에서 행하여진 일의 형태로 저장된다. 보존계인 경우에는 모든 에너지의 합이 일정하므로 에너지 보존법칙을 이용하여 운동에 대한 미분방정식을 유도할 수 있다.

시스템의 운동방정식을 유도하기 위해 오일러-라그랑제 방정식인 라그랑지언이라 불리는 운동에너지( $K$ )와 위치에너지( $V$ )의 차이를 이용하여 나타낸다. 먼저 시스템의 운동에너지와 위치에너지를 구한다.

### 2.3.1 운동에너지

시스템의 운동에너지를 구하기 위하여 모터의 축으로부터 로봇팔의 거리  $x$ 에 대한 위치벡터  $P(x)$ 는 그림 2.2의 좌표로부터

$$P(x) = \begin{bmatrix} \cos \theta x - \sin \theta w \\ \sin \theta x + \cos \theta w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

으로 주어지며,  $\dot{P}^T \dot{P}$ 는

$$\dot{P}^T \dot{P} = x^2 \dot{\theta}^2 + \dot{w}^2 + 2 \dot{w} x \dot{\theta} + w^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.7)$$

이다. 시스템의 운동에너지는 모터의 허브 부분, 유연한 로봇팔 부분 그리고 유연한 로봇팔의 끝 부분에 대한 질량등 세 부분으로 나타낼 수 있다.

따라서 유연한 로봇팔의 전체 운동에너지  $U$ 는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \dot{P}^t \dot{P} dm \\ &= \frac{1}{2} (I_h + I_b) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 + \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \int_0^l \phi_i x dm \end{aligned} \quad (2.8)$$

여기서  $I_h$ 는 허브 관성이고,  $I_b$ 는 빔의 관성,  $\dot{\theta}$ 는 유연한 로봇팔의 강체운동을 나타내는 각속도이며,  $w$ 는 탄성변형,  $dm$ 은 유연한 로봇팔의  $x$  지점에서의 미소 폭  $dx$  만큼의 무게이다.

### 2.3.2 위치에너지

시스템의 위치에너지는 유연한 로봇팔의 위치에너지와 끝 지점 질량에 의한 위치에너지로 나눌 수 있다. 유연한 로봇팔의 위치에너지는 탄성변형

에 의한 것과 중력에 의한 것으로 나눌 수 있다. 끝 지점 질량의 위치에너지와 중력에 의한 위치에너지는 무시한다. 그러므로 탄성변형에 의한 위치에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2 \quad (2.9)$$

여기서  $E$ 는 유연한 로봇팔의 강성,  $I$ 는 로봇팔의 단면에 대한 관성모멘트,  $\omega_i$ 는 고정-자유단 구조에서의 공진주파수이다.

### 2.3.3 운동방정식

일반적으로 시스템의 운동방정식을 유도하는 방법에는 크게 힘 및 모멘트 벡터를 이용하는 뉴턴 방정식과 위치 및 운동에너지를 이용하는 오일러-라그랑제 방정식으로 구분된다. 뉴턴 방정식은 시스템의 각 개별적인 구분에 대한 운동에 주로 이용되고, 오일러-라그랑제 방정식은 전체 시스템에 대한 운동에 주로 이용되므로 시스템의 운동학적 측면에서 운동에 대한 운동방정식을 유도하는데 편리하다. 본 논문에서는 유연한 로봇팔의 운동방정식을 유도하기 위하여 오일러-라그랑제 방정식을 이용한다. 유연한 로봇팔의 전체 운동에너지  $U$ 와 위치에너지를  $V$ 라 하면 라그랑지언 에너지 함수는  $L = U - V$ 에 식(2.8)과 식(2.9)을 대입하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$L = \frac{1}{2} (I_h + I_b) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \quad (2.10)$$

$$+ \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \int_0^l \phi x dm - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2$$

식(2.10)에서  $\omega_i$ 는 고정-자유단 구조에서 유연한 로봇팔의 공진주파수이며,  $q_i$ 는 유연한 로봇팔의 진동성분중 시간에 대한 변화율로 시스템의 일반화 좌표에서 표현할 수 있고, 오일러-라그랑제 방정식은 스칼라양인

운동에너지와 위치에너지를 일반화좌표로서 완전한 스칼라 법으로 적용할 수 있다. 따라서 유연한 로봇팔의 운동방정식은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (2.12)$$

여기서  $\tau$ 는 유연한 로봇팔을 구동하기 위해 모터에 가해지는 입력 토크이며, 식(2.11)과 식(2.12)을 식(2.10)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 운동방정식이 유도되어진다.

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau + \sum_{i=1}^n q_i \omega_i^2 \int_0^l \phi_i x dm}{I_h} \quad (2.13)$$

$$\ddot{q}_i = -\frac{\tau}{I_h} \int_0^l \phi_i x dm - q_i \omega_i^2 \cdot \left[ 1 + \frac{\left( \int_0^l \phi_i x dm \right)^2}{I_h} \right] \quad (2.14)$$

그러므로 유연한 로봇팔의 상태공간 방정식과 출력방정식은 식(2.13)과 식(2.14)을 이용하면 다음 식으로 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{q}_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 \\ 0 \\ -K_4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tau \quad (2.15)$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad \phi] \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{q}_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

여기서 계수  $K_1, K_2, K_3, K_4, a_i$ 는 각각

$$K_1 = \frac{\omega_i^2 a_i}{I_h}, \quad K_2 = \frac{1}{I_h}$$

$$K_3 = -\omega_i^2 \left[ 1 + \frac{a_i^2}{I_h} \right], \quad K_4 = -\frac{a_i}{I_h}$$

$$a_i = \int_0^l \phi_i x dm$$

이다. 이러한 모델의 공진 모드는 실험적으로 구할 수 있으며, 식(2.15)에서 시스템의 입력은 모터에 공급되는 토크에 대한 상태공간 방정식이다. 시스템의 입력을 모터에 공급되는 전압으로 표현하면 다음과 같다.

$$\tau = G_a \cdot K_t \cdot v \quad (2.17)$$

여기서  $G_a$ 는 서보 증폭기의 이득,  $K_t$ 는 모터의 토크 상수,  $v$ 는 모터에 공급되는 전압이다. 따라서 식(2.17)을 식(2.15)에 대입하면 유연한 로봇팔의 상태공간 방정식과 출력방정식은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ \dot{q}_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2' \\ 0 \\ -K_4' \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v \quad (2.18)$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad \phi] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ \dot{q}_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

여기서 계수  $K_1, K_2, K_3, K_4, a_i$ 는 각각 다음과 같다.

$$K_1 = \frac{\omega_i^2 a_i}{I_h},$$

$$K_2' = G_a \frac{K_t}{I_h}$$

$$K_3 = -\omega_i^2 \left[ 1 + \frac{a_i^2}{I_h} \right],$$

$$K_4' = -\frac{G_a K_t}{I_h} \cdot a_i$$

$$a_i = \int_0^l \phi_i x dm$$

### III $H_\infty$ 제어 이론

1970년대에 LQG방법의 단점들이 점점 더 확연해지자, 고전제어 이론에 대한 관심이 다시 높아지기 시작했다. 일반적으로는 일정한 조건하의 돌발적인 외란, 다른 환경조건에서 드리프트(drift)성의 외란 등, 다양한 외란이 동일한 제어시스템에 가해지는 것이 보통이다. 따라서 고정된 크기의 외란 아래서만 최적성을 보증하는 LQG의 비현실성에 대한 비판이 1980년대 초반에 제기되었고 그 뒤를 이어  $H_\infty$  제어라는 새로운 방법이 출현했다. 이 이론은 G. Zames에 의하여 처음으로 정형화 되었다.  $H_\infty$  제어의 본질은 피드백 제어를 이용하여 주어진 전달함수의 크기를 어떤 값 이하로 하는 것에 있다. 이때 크기를 측정하기 위한 하나의 도구로서, 전달함수의 주파수응답의 절대값으로 정의되는  $H_\infty$  norm이 이용되고 있다. 결론적으로  $H_\infty$  제어한 강인한 제어 시스템을 설계하기 위한 주파수 영역의 최적화 방법이었다.

#### 3.1 연속시간에서의 $H_\infty$ 제어

LQG의 설계사상이 입력의 크기와 과도응답 성능 사이의 타협을 중시한 것이며 LQG의 한계를 극복하기 위해서는 주파수영역을 분리하여 각 영역에서 감도함수의 이득 특성이 바람직한 모양을 가질 수 있도록 제어를 설계하는 주파수정형(frequency shaping)의 방법이 도입되었다.

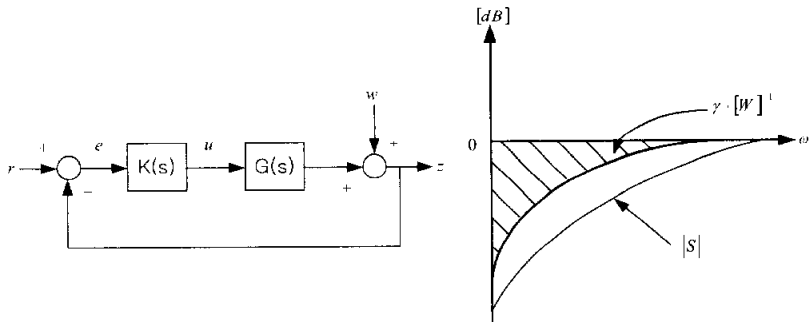


그림 3.1 (a) 페루프 시스템

(b) 주파수 정형

그림3.1 (a)로 주어진 폐루프시스템을 생각해 보자. 외란  $w(s)$  와 오차 제어량  $z(s)$  사이의 전달함수  $S(s)$  는 다음식으로 주어진다.

$$z(s) = S(s)w(s), \quad S(s) = \frac{1}{(1 + L(s))}, \quad L(s) = K(s)G(s) \quad (3.1)$$

여기서  $S(s)$  는 감도함수이며 기준입력  $r(s)$  로부터 오차  $e(s)$  까지의 전달함수로도 된다. 즉

$$e(s) = S(s)r(s) \quad (3.2)$$

이다. 식(3.1)을 주파수영역에서 해석해 보자. 이는 외란  $w$  나 기준신호  $r$  이 가지는 주파수특성과 관계없이 정상상태에서 신호  $z$  나  $e$  의 크기(즉  $|e(j\omega)|$  또는  $|z(j\omega)|$ )는 주파수  $\omega$  에서  $|S(j\omega)|$  배로 된다는 것을 나타내고 있다.

따라서  $|S(j\omega)|$  의 크기를 직접 조절할 수 있다면 입력신호의 대역적인 성질에 의존하지 않은 시스템의 특성을 보증할 수 있다. 이것이 주파수 정형의 기초가 된다.

$\omega$  나  $r$  의 주파수특성을 고려해서  $S(s)$  가 임의의  $W(s)$  와  $\gamma$  에 대해서

$$|S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W(j\omega)|}, \quad \forall \omega \quad (3.3)$$

을 만족시키고자 하는 요구가 있다고 하면(그림3.1(b) 참조) 이를 위해서는

$$\max_{\omega} |\Phi(j\omega)| < \gamma, \quad \Phi(s) := W(s)S(s) \quad (3.4)$$

를 만족하는 제어기  $K(s)$  가 존재하지 않으면 안 된다. 식(3.4)의 좌변은

함수  $\Phi$ 의  $H_\infty$  norm 으로 불려지며  $\|\Phi\|_\infty$ 로 표현된다. 다시 말하면

$$\|\Phi\|_\infty = \max_{\omega} |\Phi(j\omega)| \quad (3.5)$$

으로 정의된다.  $H_\infty$  norm 은 안정한 전달함수에 대해서 정의되며 proper 한 함수에 대해서만 유한한 값을 가진다.

$$\|\Phi\|_\infty = \max_{\text{입력}} \frac{\text{출력 power}}{\text{입력 power}}$$

가 성립하고  $\|\Phi\|_\infty$ 는 전달함수  $\Phi(s)$ 의 일반화된 의미에서의 이득이라고 생각되어진다.  $\Phi(s)$ 가 행렬인 경우에는  $H_\infty$  norm 을 다음과 같이 정의 한다.

$$\|\Phi\|_\infty = \max_{\omega} \sigma(\Phi(j\omega)), \quad \sigma; \text{최대특이값} \quad (3.6)$$

주파수응답의 정형에서 중요한 것은 안정성과 실현가능성이다.  $H_\infty$  제어의 목적은 어떤 전달함수의  $\infty$ -norm 을 최소화하는 것이다.

### 3.2 $H_\infty$ 제어문제의 정식화

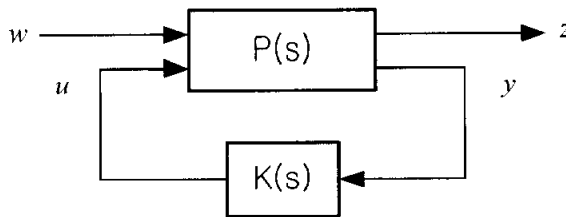


그림3.2 일반화 플랜트

그림 3.2에서 일반적으로  $H_\infty$  제어시스템에서 사용되는 Two-Port 형식을 도입했다. 블록선도는 일반화플랜트  $P(s)$ 와 제어기  $K(s)$ 을 포함하고 있다. 여기서 일반화플랜트(generalied plant)란 제어의 대상인 플랜트에 각종 함수들을 추가시킨 시스템을 의미한다. 제어입력  $u$ 는 플랜트를 구동하는 제어기의 입력, 외부입력  $w$ 는 모든 외부신호의 집합, 관측출력  $y$ 는 제어기의 입력으로 사용되는 신호, 제어량  $z$ 는 제어되어야 할 신호 즉 실제로 제어를 하고자 하는 신호를 의미한다.

그림 3.2의 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

일반화플랜트  $P(s)$ 에 대해서

$$u = Ky \quad (3.8)$$

을 이용하여 귀환을 수행하면  $w$ 에서  $z$ 까지의 전달함수는 식(3.8)을 식(3.7)에 대입함으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$z = P_{zw}w \quad (3.9)$$

$$P_{zw} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

제어의 목적은 외부입력  $w$ 에 대해서 제어량  $z$ 를 가능한 한 작게 억제하고자 하는 것으로, 전달함수  $P_{zw}$ 의 크기를 어떤 의미에서 작게 할 수 있는 제어기  $K$ 를 설계하고자 하는 것이다. 이때  $P_{zw}$ 의 크기에 대한 하나의 척도로서  $H_\infty$ norm이라고 하는 것을 이용한 것이  $H_\infty$ 제어이다.

안정한 전달함수  $P_{zw}$ 의  $H_\infty$ norm은  $\|P_{zw}\|_\infty$ 로 표시하며 다음과 같이 정의된다.

$$\|P_{zw}\|_{\infty} = \sup_{0 \leq \omega < \infty} \bar{\sigma} P_{zw}(j\omega) \quad (3.10)$$

또한  $P_{zw}$ 의  $H_{\infty}$ norm은 시스템의 입출력 신호를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|P_{zw}\|_{\infty} = \sup_{\omega} \frac{\sqrt{\int_0^{\infty} z_{\tau}(t) z(t) dt}}{\sqrt{\int_0^{\infty} w_{\tau}(t) w(t) dt}} = \sup_{\omega} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \quad (3.11)$$

다시 말하자면,  $H_{\infty}$ norm이란 모든 종류의 입력이 인가되었을 경우 표준화된 출력 에너지의 “최악의 값”을 의미하고 있는 것으로 해석할 수 있다. 이상의 사실을 바탕으로,  $H_{\infty}$ 제어란 일반화 플랜트  $P(s)$ 에 대하여  $u = Ky$ 의 궤환 제어를 수행하여 구성된 폐루프 시스템의 내부 안정성을 확보하면서 동시에 주어진 정수  $\gamma$ 에 대해서

$$\|P_{zw}\|_{\infty} < \gamma \quad (3.12)$$

을 만족하는 제어기  $K(s)$ 를 구하는 것이다.

여기서 일반화 플랜트  $P(s)$ 의 상태공간 실현을 다음과 같이 정의하며

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

다음의 가정이 만족될 때 “표준  $H_{\infty}$ 제어문제”라 부르며 일반적으로 널리 이용되고 있다.

<가 정>

1.  $(A, B_2)$ 는 가안정 동시에  $(C_2, A)$ 는 가검출이어야 한다.
2.  $D_{12}$ 는 column full rank, 동시에  $D_{21}$ 는 row full rank 로 되어야 한다.
3.  $P_{12}$ 는 허수축상에 불변영점을 가지지 않는다.
4.  $P_{21}$ 는 허수축상에 불변영점을 가지지 않는다.

표준  $H_\infty$  제어문제의 해를 구하기 위해 리카치방정식을 사용한다.  
 리카치방정식의 일반형을 다음과 같이 정의한다.

$$A^T X + XA + Q - (XB + S)R^{-1}(B^T X + S^T) = 0 \quad (3.14)$$

리카치방정식의 안정화 해를 다음과 같이 정의한다.

$$X = Ric\{H\} \quad (3.15)$$

로 표기한다. 단

$$H = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}S^T & -BR^{-1}B^T \\ -Q + SR^{-1}S^T & -(A - BR^{-1}S^T)^T \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

일반화플랜트에 대해서 표준  $H_\infty$  제어문제의 해  $K(s) \in R^{m_2 \times l_2}$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$X = Ric\{H_X\}, \quad Y = Ric\{H_Y\} \quad (3.17)$$

가 존재해서

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad \lambda_{\max}(XY) < \gamma^2 \quad (3.18)$$

을 만족하는 것이다. 여기서  $\lambda_{\max}(\cdot)$ 는 행렬의 최대고유치를 나타내며

$$H_X = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & B_1 B_1^T / \gamma^2 - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 + C_1^T D_{12} D_{12}^T C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$H_Y = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & C_1^T C_1 / \gamma^2 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T + B_1 D_{21}^T D_{21} B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

또한 표준  $H_\infty$  제어문제가 해를 가지는 경우, 사양을 만족시키는 제어기는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$K(s) = \widehat{K}_{11} + \widehat{K}_{12} U (I - \widehat{K}_{22} U)^{-1} \widehat{K}_{21} \quad (3.21)$$

여기서  $U(s)$ 는 자유파라미터로서 그 크기가  $\|U\|_\infty < \gamma$ 로 제한되는 안정한 행렬다항식으로 주어진다. 또  $\widehat{K}_{ij}$ 는 다음 식으로부터 결정되는 행렬다항식이다.

$$\widehat{K}(s) = \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11}(s) & \widehat{K}_{12}(s) \\ \widehat{K}_{21}(s) & \widehat{K}_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \widehat{A} & \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 \\ \hline \widehat{C}_1 & 0 & I_{m_2} \\ \widehat{C}_2 & I_{b_2} & 0 \end{array} \right] \quad (3.22)$$

단,

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 &= B_1 D_{21}^T + Y C_2^T \\ \widehat{B}_2 &= B_2 + Y C_1^T D_{12} / \gamma^2 \\ \widehat{C}_1 &= -(D_{12}^T C_1 + B_2^T X) (I - YX / \gamma^2)^{-1} \\ \widehat{C}_2 &= -(C_2 + D_{21} B_1^T X / \gamma^2) (I - YX / \gamma^2)^{-1} \\ \widehat{A} &= (A - B_1 D_{21}^T C_2) + Y (C_1^T / \gamma^2 - C_2^T C_2) + \widehat{B}_2 \widehat{C}_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

이 정리는 일반화플랜트  $P(s)$ 의 상태공간정보로부터 결정되는 두 개의 리카치방정식의 안정화해를 구해서 이들이 반 정정행렬 등과 같은 세 개의 조건식을 만족한다면 주어진 설계사양을 만족시키는 안정한 제어기가 반드시 존재한다는 사실과 그와 같은 모든 제어기는 식 (3.21)의 형식으로 자유 파라미터  $U(S)$ 를 이용해서 기술할 수 있다는 것을 나타내고 있다.

### 3.3 쌍일차 변환에 의한 연속시스템의 이산화

쌍일차 변환에 의한 가상영역에서의 설계법을 적용함으로써 샘플링 주기가 긴 경우에도 이산시간 제어 시스템의 안정성을 보장받을 수 있다. 이산시간 제어 시스템이 안정성을 확보하기 위해서는 페루프의 특성다항식의 근이  $Z$ -평면에서 단위원 내에 존재하여야 하며 쌍일차 변환을 이용하여 변환된 특성 다항식의 근이  $\chi$ -평면에서 왼쪽 평면 내에 존재하여야 한다는 것을 알 수 있다. 이 사실을 바탕으로 그림 3.3(a)의 이산시간 제어 시스템과 그림 3.3(b)의 연속시간 제어시스템의 안정성이 등가라는 것을 유도할 수 있다.

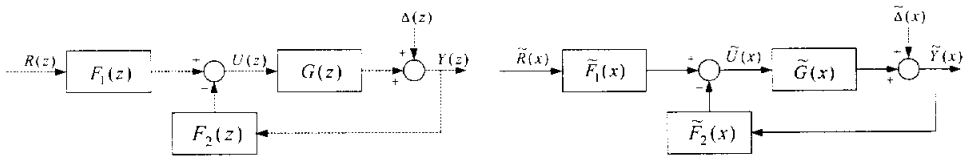


그림 3.3(a) 2자유도 이산시간 제어 시스템      (b) 가상제어시스템

그림 3.3(b)의  $\tilde{G}(x)$ ,  $\tilde{F}_i(x)(i=1,2)$ ,  $\tilde{R}(x)$ ,  $\tilde{\Delta}(x)$ ,  $\tilde{Y}(x)$ 는 각각  $G(z)$ ,  $F_i(z)(i=1,2)$ ,  $R(z)$ ,  $\Delta(z)$ ,  $Y(z)$ 에

$$z = \frac{(2/T) + \chi}{(2/T) - \chi} \quad (3.24)$$

을 대입하여 얻어진 함수이다. 변수  $\chi$ 는 라플라스 변환에 있어서 미분 작

용소를 나타낸다. 여기서 미분 작용소에  $s$ 를 사용하지 않고  $\chi$ 를 사용하고 있는 것은 그림 3.3(b)의 연속시간 제어 시스템이 그림 3.3(a)의 이산시간 제어 시스템에서 안정도 판별 도구로서 형식적으로 생성된 것이며, 실제의 제어 시스템과는 틀리다는 사실을 명확하게 하기 위한 것이다. 이 의미에서 그림 3.3(b)의 시스템을 가상제어시스템으로 부른다.

$\tilde{G}(\chi)$  및  $\tilde{F}_i(\chi)$ 를 가상영역에서의 제어대상 및 보상요소,  $\tilde{R}(\chi)$ ,  $\tilde{\Delta}(\chi)$ ,  $\tilde{Y}(\chi)$ 등을 역 라플라스 변환하여 얻어지는 연속시간 함수  $\tilde{r}(\tau)$ ,  $\tilde{\delta}(\tau)$ ,  $\tilde{y}(\tau)$ 등을 가상신호,  $\chi$ 의 공간을 가상 라플라스 영역,  $\chi$ 를 순허수

$$\chi = j\xi \quad (3.25)$$

로 두었을 때의  $\xi$ 를 가상 각주파수라고 부른다.

쌍일차 변환에 의한 가상영역에서의 디지털 제어 시스템 설계법은 다음과 같다.

단계1 : 주어진 제어대상  $G_{cb}(s)$ 에 대하여 제어대상 측의 전달함수  $G(z)$ 를

$$G(z) = \mathcal{J} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_{cb}(s) \right] \quad (3.26)$$

로서 구하고, 가상영역에서 제어대상의 전달함수  $\tilde{G}(\chi)$ 를

$$\tilde{G}(\chi) = G \left( \frac{(2/T) + \chi}{(2/T) - \chi} \right) \quad (3.27)$$

으로 계산한다. 위의  $\tilde{G}(\chi)$ 에 대하여 연속시간 제어시스템의 설계법을 적용하여 그림 3.3(b)의 가상 제어 시스템을 설계한다.

단계2 : 단계1에서 얻어진 가상영역에서의 보상요소  $\tilde{F}_i(\chi)$  ( $i=1, 2$ )에 대

하여 이산시간 보상 요소  $F_i(z)$ 를

$$F_i(z) = \tilde{F}_i\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (3.28)$$

로서 결정한다.

단계3 : 단계2에서 얻어진  $F_i(z)$ 를 사용하여 그림 3.3(a)의 이산시간 제어 시스템을 만든다.

가상 각주파수  $\xi$ 와 실제 제어 시스템의 각주파수  $\omega$ 와의 관계는 다음과 같다.

식(3.24)을 역으로 풀어서  $\chi$ 를  $z$ 로 나타내면

$$\chi = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (3.29)$$

로 된다. 이 식에  $z$ 와  $s$ 와의 관계식  $z = e^{Ts}$ 을 대입하면

$$\chi = \frac{2(e^{Ts} - 1)}{T(e^{Ts} + 1)} \quad (3.30)$$

이 얻어진다. 여기서  $s$ 를 순 허수

$$s = j\omega \quad (3.31)$$

인 경우를 생각해 보면  $\chi$ 도 순 허수로 되어 식(3.19)와 같이 두었을 경우의  $\xi$ 는

$$\xi = \frac{2}{T} \tan \frac{T}{2} \omega \quad (3.32)$$

로서 주어진다. 식(3.32)의 대응관계를, 증개 변수인  $z$ 의 값과 함께 그림3.4에 표시하였다.

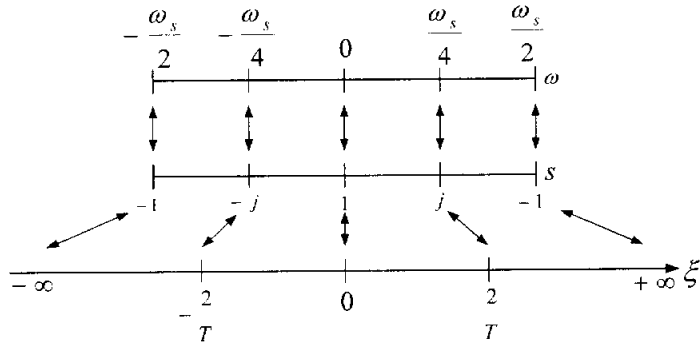


그림 3.4 가상 각주파수  $\xi$ 와 각 주파수  $\omega$ 와의 관계

위의 그림으로부터 가상 각주파수  $\xi$ 는 실 각주파수  $\omega$ 의  $-\omega_s/2 \sim \omega_s/2$ 부분을  $-\infty \sim +\infty$ 로 확대하여 사상한 것이다.  $-\omega_s/2 \sim \omega_s/2$ 라고 하는 주파수 대역은 디지털 시스템에 있어서 기본이 되는 주파수 대역이며, 가상영역에서의 설계법은 이 부분을  $-\infty \sim +\infty$ 라고 하는 대역으로 확대함으로써 안정문제를 연속시간 시스템의 안정문제로 귀착시키는 것이 된다. 또한,

$$\left. \frac{d\xi}{d\omega} \right|_{\omega=0} = 1 \quad (3.33)$$

이므로 원점부근에서는

$$\xi \approx \omega \quad (3.34)$$

이 성립한다.

위 설계법을 고전적 지표에 적용시켜 보면,  $y(k)$ 를  $k \rightarrow \infty$ 에서 일정한 값에 수렴하는 신호라고 한다면, 최종값 정리의 공식으로부터

$$y_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - z^{-1})Y(z) \quad (3.35)$$

을 얻는다. 더욱이  $y(k)$ 에 대응하는 가상신호를  $\tilde{y}(\tau)$ 로 한다면

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(2/T) + x} \tilde{y}(\tau) \quad (3.36)$$

로 된다. 여기서  $\tilde{y}(\tau)$ 에 대한 최종값 정리의 공식을 사용하면

$$y_{\infty} = T \cdot \tilde{y}_{\infty} \quad (3.37)$$

이라는 관계를 얻을 수 있다.

위 식은 그림 3.5에서 보이는 것처럼 정상상태에서, 이산시간 신호  $y(k)$ 에 대응하는 임펄스 열  $y^*(t)$ 의 면적을 균일하게 한 것이 가상신호  $\tilde{y}(\tau)$ 로 되어 있는 것을 의미한다. 따라서 가상제어시스템의 정상편차와 디지털 제어 시스템의 샘플링 시각에서의 정상 편차가 비례한다는 것을 알 수 있다.

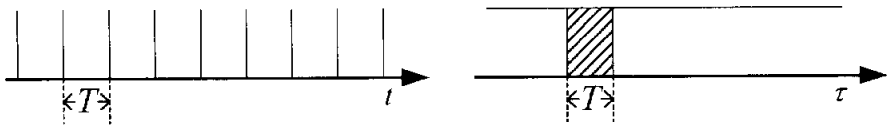


그림 3.5 (a) 정상상태에서의 임펄스 열  $y^*(t)$       (b) 가상신호  $\tilde{y}(\tau)$

다음으로 이득여유와 위상여유를 살펴보면, 식(3.18)의 관계로부터  $x$ 를 순허수  $j\xi$ 로 하고, 가상주파수  $\xi$ 를  $-\infty \sim +\infty$ 로 변화시키면  $z$ 는 단위원 위를 시계반대방향으로 1주 한다. 따라서 일반의 펄스전달함수  $H(z)$ 에 대하여,  $H(z)$  자신의 벡터궤적과 가상영역에서의 전달함수  $\tilde{H}(x)$ 의 벡터궤적은 일치한다. 따라서 그림 3.6(b)의 가상영역 시스템의 이득여유, 위상여유와, 그것을 기초로 하여 만든 이산제어시스템의 이득 위상여유는 일치한다.

### 3.4 쌍일차 시스템의 안정판별법

쌍일차 함수는  $z$ 를 복소수로 한다면 다음과 같이 주어진다.

$$x = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3.38)$$

이때, 쌍일차 변환은 식(3.38)에 의하여 정의되는  $z$ 에서  $x$ 로의 사상이다. 식(3.38)가 정수로 되는 경우를 피하기 위하여  $a, b, c, d$ 는  $ad \neq bc$ 를 만족하는 것으로 둔다. 쌍일차 함수는,  $z = -d/c$  ( $c=0$ 인 경우에는  $z = \infty$ )에 1차의 극을 가지며 확장된 복소평면을 쌍일차 함수 자체에 1대 1 대응시키는 유리함수이다. 쌍일차 변환식(3.38)에 의하여  $z$ -평면상의 원은  $x$ -평면상의 직선으로 사상된다.

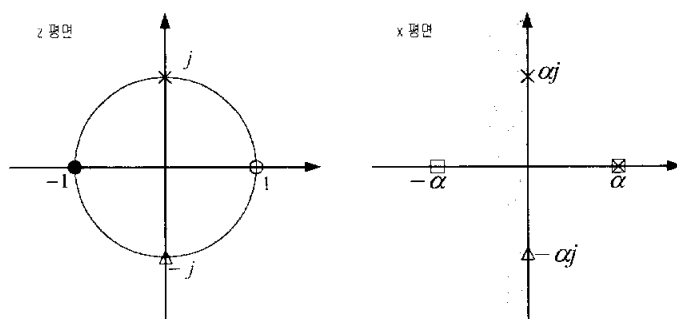


그림 3.6  $z$ 평면에서  $x$ 평면으로의 사상

쌍일차 변환 중에서

$$a = \alpha, b = -\alpha, c = d = 1 \quad (3.39)$$

일 경우를 생각해보면

$$x = \alpha \frac{z-1}{z+1} \quad (\alpha > 0) \quad (3.40)$$

이 되며 그림 3.6에서 보이듯이  $z$ -평면상의 단위원을  $\chi$ -평면상의 허수축으로, 그리고 단위원의 내부를 좌반평면으로 사상한다.

식(3.38)과 관련한 대표점의 대응관계를 몇 개 조사하여 보면, 단위원 상의 점에 대해서는

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow -\frac{1}{2} \omega_s + 0, & z &\rightarrow -1, & \chi &\rightarrow -\infty j \\ \omega &\rightarrow -\frac{1}{4} \omega_s, & z &\rightarrow -j, & \chi &\rightarrow -aj \\ \omega &\rightarrow 0, & z &\rightarrow 1, & \chi &\rightarrow 0 \\ \omega &\rightarrow \frac{1}{4} \omega_s, & z &\rightarrow j, & \chi &\rightarrow aj \\ \omega &\rightarrow \frac{1}{2} \omega_s + 0, & z &\rightarrow -1, & \chi &\rightarrow \infty j \end{aligned}$$

로 되며, 그 외의 점에 있어서는

$$\begin{aligned} z = 0, & \quad \chi = -a \\ z = \infty, & \quad \chi = a \end{aligned}$$

로 된다.

따라서 「 $z$  평면에서 페루프 특성다항식의 근이 전부 단위원 내에 존재한다」라는 조건은 「 $\chi$  평면에서 페루프 특성다항식의 근이 전부 좌반평면에 존재한다」라고 하는 조건과 등가로 된다는 사실을 알 수 있다.

### 3.5 The Warping Problem

다음과 같은 대역폭이  $a$ 인  $s$ -평면에서의 전달함수에 대하여 생각하여 보자.

$$H(s) = \frac{1}{s/a + 1} \quad (3.41)$$

여기에 쌍일차 변환을 적용하면

$$H(z) = \frac{1}{\frac{1}{T} \frac{z-1}{z+1} \frac{1}{a} + 1} \quad (3.42)$$

로 된다. 이산화된 필터의 주파수 특성을 조사하기 위하여  $z = e^{j\omega T}$ 를 대입하고 정리하면  $H(z)$ 의 주파수 특성을 나타내는 식은

$$H_z(\omega) = \frac{1}{j\left(\frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}\right) \frac{1}{a} + 1} \quad (3.43)$$

따라서 이산시간 시스템으로 주어진 필터 식(3.43)의 대역폭은

$$\omega_{BW} = \frac{2}{T} \tan^{-1}\left(\frac{aT}{2}\right) \quad (3.44)$$

으로 계산된다. 이 공식은 연속시간 시스템과 이산시간 시스템이 동일한 대역폭을 가지기 위한 조건식이며 쌍일차 변환에 의해서 주파수 영역에서 이산시간의 시스템이 얼마나 왜곡 되는가를 보여주고 있다. 식(3.44)에서 알 수 있는 바와 같이, 샘플링 시간  $T$ 가 짧아지면  $\tan^{-1}(\theta) \approx \theta$ 의 관계가 성립되므로 이산시간 시스템에서의 대역폭은 연속시간 시스템에서의 그것과 거의 같아지게 될 것이다. 또한, 샘플링 시간이 길어진다면 이산시간의 대역폭은 전혀 다른 값을 가지게 됨을 쉽게 짐작할 수 있다.

이와 같은 warping문제는 이산화 하기 전에 연속시간 시스템을 prewarping함으로서 어느정도 해결할 수 있다. 이것은 식(3.41)의  $H(s)$ 에서  $a$ 를 다음식으로 정의 되는  $\bar{a}$ 로 바꾸어 주는 것이다.

$$\text{Prewarping: } \bar{a} = \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2} \quad (3.45)$$

원래의 연속시간 시스템을

$$H_{pw}(s) = \frac{1}{s/a + 1} \quad (3.46)$$

로 바꾸고 여기에 쌍일차 변환을 적용하면, 얻어지는 이산화 된 시스템은  $H(s)$ 와 동일한 대역폭을 가지게 될 것이다.

여기서 한가지 주의할 점은 시스템  $H(s)$ 를 prewarping하여  $H_{pw}(s)$ 로 하였다면 쌍일차 변환을 적용할 경우 저주파이득이 변화될 것이라는 것을 알 수 있다. 따라서 이런 dc이득의 변화를 방지하기 위해서는 먼저 시스템을  $a$ 로 나눈뒤, prewarping을 적용하는 것이다. 즉

$$H(s) = \frac{K/a}{s/a + 1} \rightarrow H_{pw}(s) = \frac{K/a}{s/a + 1} \quad (3.47)$$

이다.

### 3.6 이산시간 $H_\infty$ 제어기 설계

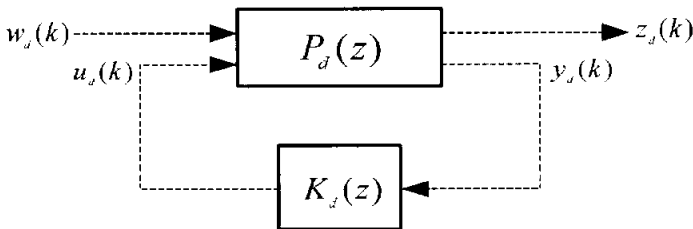


그림 3.7 이산시간 Two-Port 구조

그림 3.7은 이산시간  $H_\infty$ 제어기 설계를 위한 일반적인 Two-Port 구조이다.

이산시간  $H_\infty$ 제어기를 설계하는 가장 간단한 방법은 연속시간  $H_\infty$ 제어기를 쌍일차 변환을 통하여 변화하는 것이다. 그 이유는 쌍일차 변환 후에도  $H_\infty$  norm의 값이 보존되기 때문이다.

그림 3.7의 이산시간  $H_\infty$ 제어기  $K_d(z)$ 를 쌍일차 변환을 통하여 설계하는 방법은 다음과 같다.

단계1: 주어진 이산시간 일반화 플랜트  $P(s)$ 가 다음과 같을 경우

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.48)$$

단계2: 이산시간 일반화 플랜트  $P_d(z)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$P_d(z) = \left[ \begin{array}{c|cc} A_d & B_{1d} & B_{2d} \\ \hline C_{1d} & D_{11d} & D_{12d} \\ C_{2d} & D_{21d} & D_{22d} \end{array} \right]$$

$$A_d = \left(I + \frac{T}{2}\right)^{-1} \left(I - \frac{T}{2}A\right)^{-1} \quad (3.49)$$

$$B_d = 2 \left(I - \frac{T}{2}A\right)^{-1} B$$

$$C_d = 2C \left(I - \frac{T}{2}A\right)^{-1} B$$

$$D_d = 2C \left(I - \frac{T}{2}A\right)^{-1} D$$

단계3: 이산시간 일반화 플랜트  $P_d(z)$ 를 위한 제어기  $K_d(z)$ 를 설계한다.

$K_d(z)$ 의 상태 모델은 다음식과 같다.

$$K_d(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A_{kd} & B_{kd} \\ \hline C_{kd} & D_{kd} \end{array} \right] \quad (3.50)$$

## IV 제어시스템의 구성

이 장에서 유연한 로봇팔에 발생하는 진동을 제어하기 위하여 PD제어기를 이용한 위치제어시스템과 이산시간  $H_\infty$  제어를 이용한 위치제어시스템을 구성하였다. 위치제어시스템의 전달함수를 각각 유도하였다.

### 4.1 유연한 로봇팔의 전달함수

유연한 로봇팔의 전달함수를 고찰하기 위하여 2장에서 유도한 상태공간 모델의 상태공간 방정식과 출력 방정식 즉 식(2.18)와 식(2.19)의 각 상태변수에 라플라스변환을 취하여 유연한 로봇팔의 구성도를 나타내면 그림4.1과 같다.

그림4.1에서  $V(s)$ 는 전압,  $W(s)$ 는 유연한 로봇팔의 탄성변형으로  $Q(s)$ 와 같으며,  $\theta(s)$ 는 모터의 회전각,  $Y(s)$ 는 시스템의 출력으로서 유연한 로봇팔의 선단위치이다.

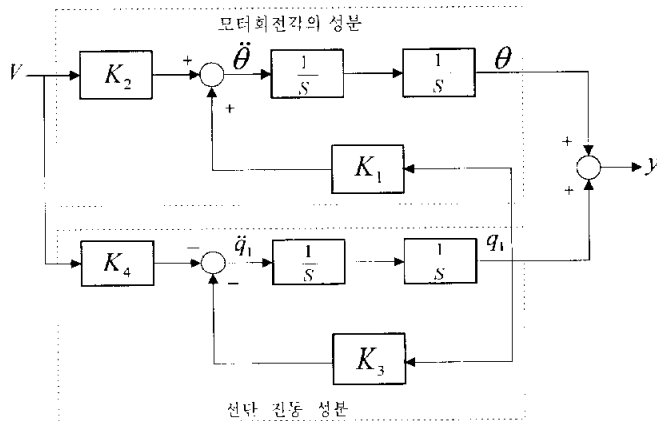


그림 4.1 유연한 로봇팔의 블록선도

그림4.1에 대한 전달함수를 구하기 위하여 유연한 로봇팔에 발생하는 탄

성변형  $W(s)$ 는 다음 식과 같다.

$$W(s) = - \frac{K_4}{s^2 + K_3} \cdot V(s) \quad (4.1)$$

모터의 회전각  $\theta(s)$ 는

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2} [ K_2 V(s) + K_1 W(s) ] \quad (4.2)$$

이며 유연한 로봇팔의 선단위치  $Y(s)$ 에 대한 개루프 전달함수는 식(4.1)과 식(4.2)를 이용하면

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \theta(s) + W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_0}{s^4 + a_2 s^2} \quad (4.3)$$

이고 식(4.3)에서 분모 및 분자의 계수  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_2 &= K_3 \\ b_0 &= K_3 K_2 - K_1 K_4 \\ b_2 &= K_2 - K_4 \end{aligned}$$

## 4.2 PD제어기를 이용한 위치제어시스템

이 절에서는 그림4.1의 제어시스템에 PD제어기를 이용하여 위치제어시스템을 구성한다. PD제어기의 전달함수는 다음 식과 같다.

$$G_{pd}(s) = K_p + K_d s \quad (4.4)$$

여기서  $K_p$  는 PD제어기의 비례계수이며,  $K_d$  는 미분계수이다. 그림4.1의 제어시스템에 제어편차  $E(s)$ 를 보상하기 위하여 PD제어기를 이용한 위치 제어시스템의 구성도를 그림4.2에 나타내었다.

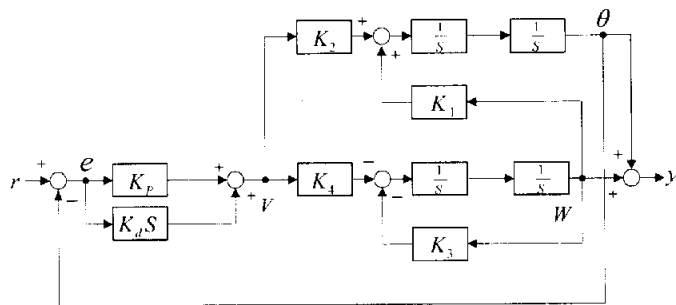


그림 4.2 PD 제어기를 이용한 위치제어

그림4.2에 대한 전달함수를 구하기 위하여 제어편차  $E(s)$ 는

$$E(s) = R(s) - \theta(s) \quad (4.5)$$

이며 모터에 공급되는 전압 즉 조작량  $V(s)$ 는 다음 식과 같다.

$$V(s) = G_{pd}(s) \cdot E(s) \quad (4.6)$$

유연한 로봇팔에 발생하는 탄성변형  $W(s)$ 는

$$W(s) = - \frac{K_4}{s^2 + K_3} \cdot V(s) \quad (4.7)$$

이고 모터의 회전각  $\theta(s)$ 는 식(4.6)과 식(4.7)을 이용하면

$$\theta(s) = \frac{1}{s^2} [ K_2 V(s) + K_1 W(s) ] \quad (4.8)$$

이고 유연한 로봇팔의 선단위치  $Y(s)$ 에 대한 개루프 전달함수는 식(4.7)과 식(4.8)을 이용하면

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \theta(s) + W(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_2 s^2} \quad (4.9)$$

식(4.9)에서 분모, 분자의 계수  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_2 &= K_3 \\ b_0 &= K_p(K_3 K_2 - K_1 K_4) & b_1 &= K_d(K_3 K_2 - K_1 K_4) \\ b_2 &= K_p(K_2 - K_4) & b_3 &= K_d(K_2 - K_4) \end{aligned}$$

유연한 로봇팔의 선단위치  $Y(s)$ 에 대한 폐루프 전달함수는 식(4.9)와 Mason의 이득공식을 이용하면

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.10)$$

이고 식(4.10)에서 분모, 분자의 계수  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ 는

다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_0 &= K_p(K_3 K_2 - K_1 K_4) & b_0 &= K_p(K_3 K_2 - K_1 K_4) \\ a_1 &= K_d(K_3 K_2 - K_1 K_4) & b_1 &= K_d(K_3 K_2 - K_1 K_4) \\ a_2 &= K_3 + K_p K_2 & b_2 &= K_p(K_2 - K_4) \\ a_3 &= K_d K_2 & b_3 &= K_d(K_2 - K_4) \end{aligned}$$

### 4.3 이산시간 $H_\infty$ 제어를 이용한 위치제어시스템

이산시간  $H_\infty$  제어를 설계하기 위해서 플랜트의 불확실한 영역이 필요하다. 실험을 통해 플랜트에 주파수를 1~30Hz로 변화시키면서 payload를 0g, 32g, 64g를 부착한 후에 각각 플랜트의 특성응답을 그림4.3과 그림4.4와 같이 나타내었다.

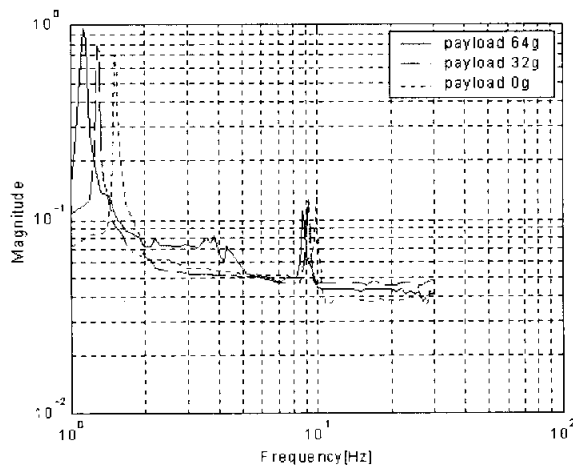


그림 4.3 유연한 로봇팔의 주파수 응답

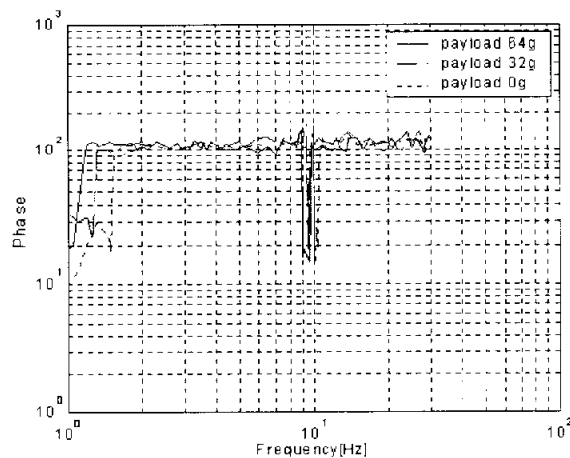


그림 4.4 유연한 로봇팔의 위상응답

$H_\infty$  제어를 설계하기 위한 주파수 영역에서의 정형을 위하여 혼합감도 피드백 시스템을 구성한다.

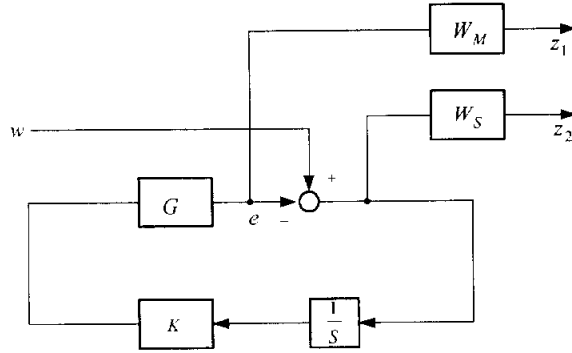


그림 4.5 혼합감도 피드백 시스템의 구성

위의 시스템을 일반화 플랜트  $P(s)$ 를 포함한 2입력 2출력 시스템으로서 나타내면 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

연속시간 일반화 플랜트  $P(s)$ 를 이산시간 일반화 플랜트  $P_d(z)$ 로 변환하고 이산시간 제어기  $K_d(z)$ 를 설계한다.

이산화된 제어시스템의 블록선도는 다음과 같다.

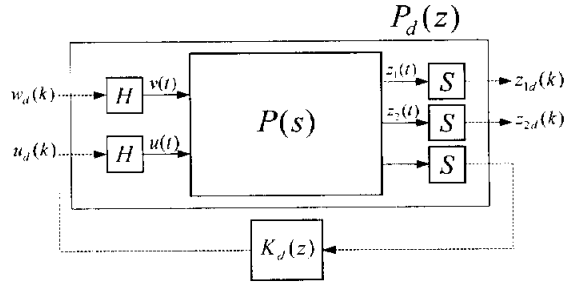


그림 4.6 이산시간  $H_\infty$  제어기를 이용한 위치 제어

그림4.6를 간략화 하면 다음과 같다.

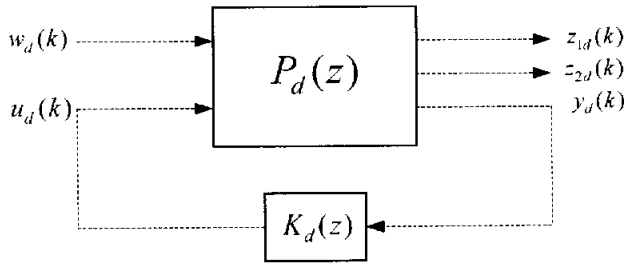


그림 4.7 간략화한 이산시간  $H_\infty$  제어기를 이용한 위치 제어

이산시간 시스템의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A_d x(k) + B_{1d} w_d(k) + B_{2d} u_d(k) \\
 z(k) &= C_{1d} x(k) + D_{11d} w_d(k) + D_{12d} u_d(k) \\
 y(k) &= C_{2d} x(k) + D_{21d} w_d(k) + D_{22d} u_d(k)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

전달함수를 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
P_d(z) &= \left[ \begin{array}{c|cc} A_d & B_{1d} & B_{2d} \\ \hline C_{1d} & D_{11d} & D_{12d} \\ C_{2d} & D_{21d} & D_{22d} \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{c} C_{1d} \\ C_{2d} \end{array} \right] (zI - A_d)^{-1} [ B_{1d} \ B_{2d} ] + \left[ \begin{array}{cc} D_{11d} & D_{12d} \\ D_{21d} & D_{22d} \end{array} \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

연속시간의 경우와 마찬가지로 제어기  $K_d(z)$ 를 시스템의 페루프 전달함수인  $H(z) = F_L(P(z), K_d(z))$ 가 내부적으로 안정하고 각 주파수 대역에서 크기가 가장 큰 값인  $H_\infty$  norm의 값이 충분히 큰 값인  $\gamma$ 보다 작게 설계한다.  $H_\infty$  norm은  $\|H\|_\infty$ 로 표시하며 다음과 같이 정의된다.

$$\|H\|_\infty := \sup_{\omega} \overline{\sigma}(H(e^{j\omega})) < \gamma \quad (4.14)$$

위의 과정은 행렬  $(A, B, C, D)$ 의 데이터를 쌍일차 변환식을 사용하여 변환함으로서 완성된다.

## V 시뮬레이션

이 장에서는 4장에서 구성한 유연한 로봇팔에 대한 위치제어시스템의 응답을 고찰하기 위하여 시뮬레이션을 행하였다. 시뮬레이션에 이용한 유연한 빔과 카메라의 매개변수의 값은 표5.1에 나타내었으며, DD모터의 매개변수의 값은 표5.2에 나타내었다.

Table 5.1 Specifications of a flexible beam and camera.

Parameter	Value	Unit
카메라 감도	26	$\mu\text{m}$
카메라 질량	0.47	kg
화소 수	2048	pixels
렌즈 초점길이	85	mm
렌즈 질량	0.36	kg
빔의 길이	1.2	m
빔의 높이	25.4	mm
빔의 두께	1.95	mm
빔의 재질	알루미늄	

표5.1과 표5.2에 주어진 매개변수의 값을 식(2.18)에 대입하여 상태공간 방정식의 계수행렬 A와 B의 계수를 구하면  $K_1 = 250$ ,  $K_3 = 325$ ,  $K_2 = 103$ ,  $K_4 = 103$  으로 주어진다.

Table 5.2 Specifications of DD motor.

Parameter	Value	Unit
모터 토크 상수	0.17	Nm/A
모터 관성	0.023	kg · m <sup>2</sup>
증폭기 이득	20	A/V
정격 출력	450	W
최대 출력 토크	60	Nm
정격 회전수	1.5	rps
엔코더 분해능	655360	p/rev

### 5.1 유연한 로봇팔의 진동응답

유연한 로봇팔의 진동응답을 고찰하기 위하여 식(4.1)에 기준입력을 단위 계단함수를 인가하였을 경우에 유연한 로봇팔의 진동응답을 그림5.1에 나타내었다. 그림5.1에서 유연한 로봇팔의 고유진동수는 실험적으로  $\omega_i = 8.7[\text{rad/s}]$ 로 측정되었다.

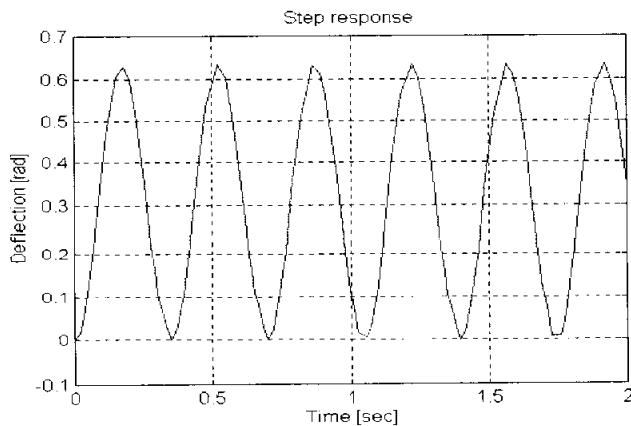


그림 5.1 유연한 로봇팔의 진동응답

먼저 유연한 로봇팔의 진동특성을 고찰하기 위하여 식(4.3)의  $b_2$  계수가 0 이 되어 다음 식과 같이 주어진다.

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{7766.2}{s^4 + 325.4 s^2} \quad (5.1)$$

식(5.1)에 대한 극점, 영점의 위치를 그림5.2에 나타내었다. 그림 5.2에서 4 개의 극점  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_{3,4} = 0 \pm j18.04$  들이 모두 허수축 상에 위치하게 되므로 유연한 로봇팔의 진동특성은 임계 진동함을 예측할 수 있다.

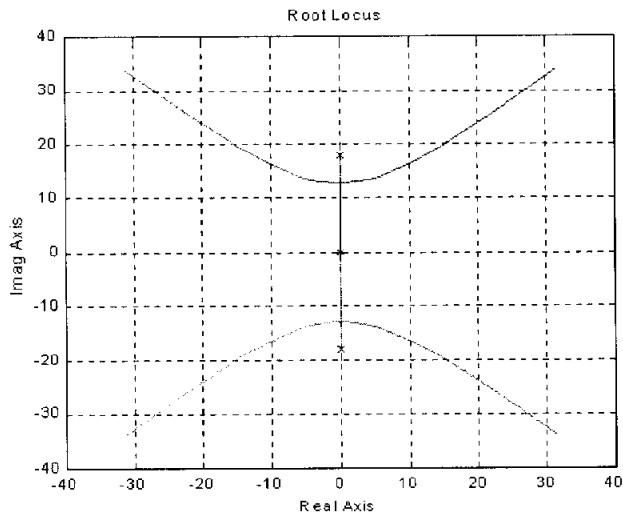


그림 5.2 유연한 로봇팔의 근궤적

근궤적은 개루프 전달함수의 이득  $K$ 를 0에서  $\infty$ 로 증가시킬 경우에 특성방정식의 근 즉  $1 + G(s)H(s) = 0$  을 만족하는  $s$ 가  $s$ 평면에서 그리는 궤적이다. 개루프 전달함수의 이득을  $K = 0$ 에서  $K = \infty$ 로 증가시킬 경우 그림5.2의 근궤적을 살펴보면 4개의 극점이 허수축으로 이동하다가 무한원점에 이르러 끝나므로 유연한 로봇팔의 개루프 제어시스템은 불안정함을 알 수 있다.

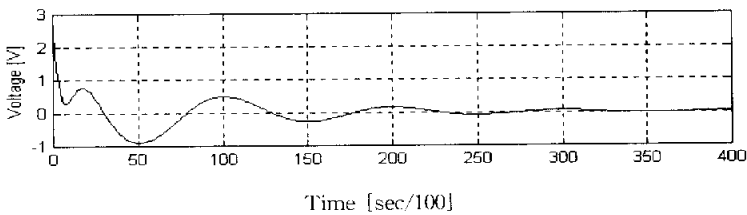
유연한 로봇팔의 진동특성은 그림5.2에서 보듯이 4개의 극점들이 허수축에 위치하기 때문에 임계진동함을 알 수 있다. 따라서 유연한 로봇팔의 진동특성은 4개의 극점들을 근궤적의 좌반평면으로 이동시킬 수 있도록 적절한 보상이 필요함을 알 수 있다.

## 5.2 PD제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답

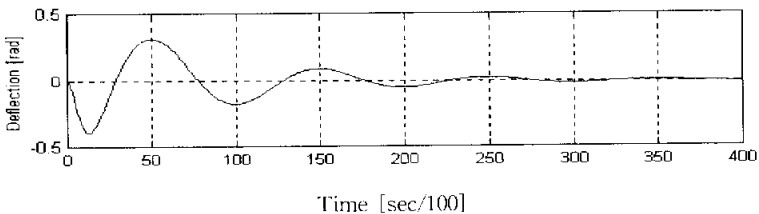
PD제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답을 고찰하기 위하여 식(4.9)에 표5.1과 표5.2에 주어진 매개변수 값을 대입하여 그림4.2에 대한 패루프 전달함수를 구하면 다음 식과 같다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{31064.8s + 93194.4}{s^4 + 412s^3 + 1561s^2 + 31064.8s + 93194.4} \quad (5.2)$$

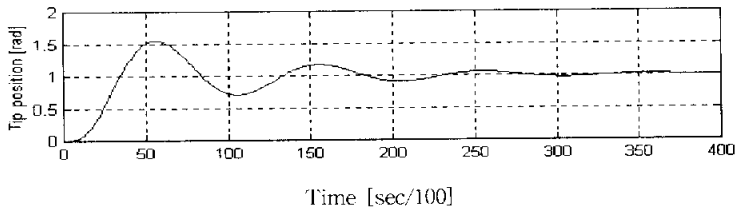
PD제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답을 고찰하기 위하여 식(5.2)에 기준입력을 4초 사이에 단위계단 함수를 인가하였을 경우에 응답특성을 그림5.3에 나타내었다. 그림 5.3에서 (a)는 전압, (b)는 탄성변형, (c)는 입력 신호에 대한 시스템의 출력특성으로 선단위치이다.



(a) 전압



(b) 탄성변형



(c) 선단위치

Fig. 5.3 PD제어기를 사용한 위치제어 시스템의 (a) 전압 (b) 빔의 편향 (c) 선단 위치의 시간응답

PD제어기에 사용되는 계수는 비례계수  $K_p = 2.5$ , 미분계수  $K_d = 0.3$ 이다. 계수값의 결정은 시뮬레이션의 실험값으로 선단위치, 탄성변형의 두 부분으로 나누어 평가하여 최적의 조건일 경우를 선택하였다.

PD제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답특성을 보면 정상상태에서 큰 오버슈터를 가지며 감쇠진동함을 그림 5.3에서 알 수 있다. 따라서 PD제어기를 이용한 위치 제어 시스템도 적절한 보상이 필요함을 알 수 있다.

### 5.3 이산시간 $H_\infty$ 제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답

4.2장에서 실험한 데이터를 Matlab을 이용하여 제어기를 구했다.

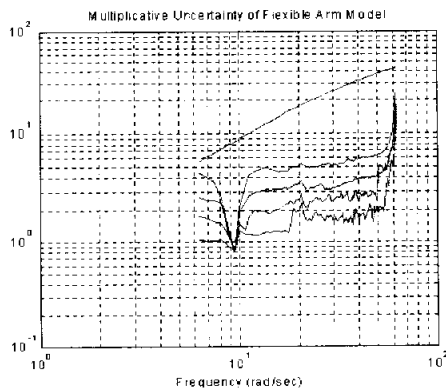


그림 5.4 불확실성 가중치  $W_M(s)$ 의 모델

그림5.4는 곱셈형 불확실성  $\Delta_m$ 을 포함하는 가중함수  $W_M(s)$ 의 보드선도이다.

실제 플랜트  $\tilde{G}(s)$

$$\tilde{G}(s) = (1 + \Delta_m(s)) G(s), \quad |\Delta(j\omega)| \leq |r(j\omega)| \quad (5.4)$$

이다. 이 식에서 불확실성 혹은 모델화 오차는

$$|\Delta_m(s)| = \left| \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)} \right| \quad (5.5)$$

으로 주어지며 실제모델과의 오차를 백분율로 표시한 양이다. 이런 형태의 오차는 액추에이터나 센서의 동적인 특성에 의한 모델화오차를 표현하는데 사용된다. 곱셈형 가중함수  $W_M(s)$ 는

$$|\Delta_m| \leq |W_M| \quad (5.6)$$

이고 Matlab을 이용하여 구하면

$$W_M(s) = \frac{72.3426s^3 + 239.1144s^2 + 196.7901s + 0.1966}{s^3 + 84.077s^2 + 280.4746s + 220.7288} \quad (5.7)$$

이다. 감도함수에 대한 가중함수  $W_S(s)$ 는 다음과 같다.

$$W_S(s) = \frac{23.9063s + 135.9979}{s^3 + 2.6835s^2 + 2.8911s + 1.3943} \quad (5.8)$$

위의 가중함수와 플랜트 전달함수로 구성된 일반화 플랜트  $P(s)$ 를 쌍일차 변환을 통하여 이산화된 일반화 플랜트  $P_d(z)$ 로 변환한다.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow P_d(z) = \begin{bmatrix} P_{11d} & P_{12d} \\ P_{21d} & P_{22d} \end{bmatrix}$$

샘플링 시간을 10ms로 설정할 경우 이산시간제어기  $K_d(z)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$K_d(z) = \frac{8.213 \times 10^7 z^{10} - 5.565 \times 10^8 z^9 + 1.626 \times 10^9 z^8 - 2.664 \times 10^9 z^7 + 2.656 \times 10^9 z^6}{z^{11} - 5.334z^{10} + 11.65z^9 - 13.2z^8 + 7.935z^7 - 2.135z^6} \\ \frac{-1.62 \times 10^9 z^5 + 5.6 \times 10^8 z^4 - 7.714 \times 10^7 z^3 - 9.632 \times 10^6 z^2}{-0.006421 \times 10^9 z^5 + 0.7714z^4 + 0.01311z^3 - 0.005943z^2} \\ \frac{+ 3.314 \times 10^6 z + 2.394}{+ 1.049 \times 10^{-7} z + 1.1 \times 10^{-24}} \quad (5.9)$$

페루프시스템의 스텝응답 특성을 살펴 보면 아래의 그림5.5과 같다. 그림 5.5에서 보듯이 PD제어기보다 이산시간  $H_\infty$  제어기가 개선된 제어성능을 나타내었다. 또한 그림5.6는 샘플링 시간을 변화할 경우 스텝응답 특성을 나타내었다.

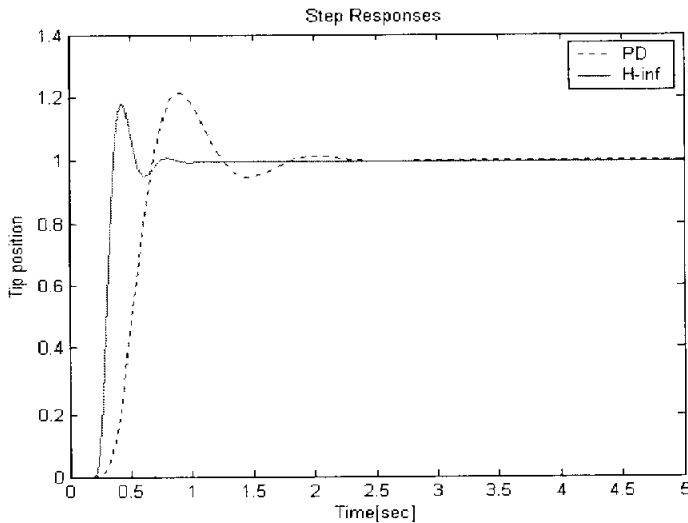


그림 5.5 시뮬레이션 결과 : 페루르 시스템의 스텝응답

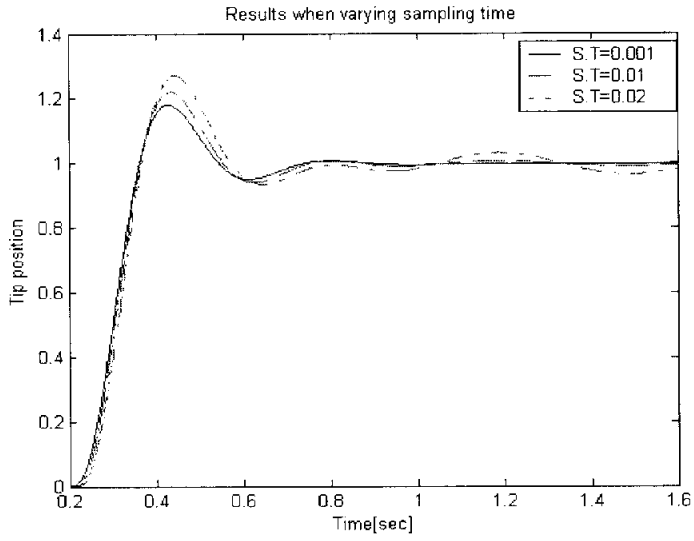


그림 5.6 시뮬레이션 결과 : 샘플링 시간을 변화시킬 때의 결과

## VI 실험 및 고찰

이 장에서는 4장에서 구성한 위치제어시스템에 대하여 실험을 통하여 PD제어기를 이용할 경우와 이산시간  $H_{\infty}$  제어기를 이용할 경우 위치제어시스템의 응답을 각각 비교 검토하였다. 이산시간  $H_{\infty}$  제어기  $K_d(z)$ 는 실험을 위해 차수를 8차로 줄여 사용하였다.

### 6.1 실험장치의 구성

본 연구에 사용된 전체 제어시스템의 실험장치를 그림6.1에 나타내었다. 그림6.1에서 실험장치의 구성은 IBM PC, 서보 드라이버, 인터페이스, DD 모터, PSD(Position Sensor Detector)카메라, 유연한 빔, 고감도 LED를 이용하여 구성하였다.

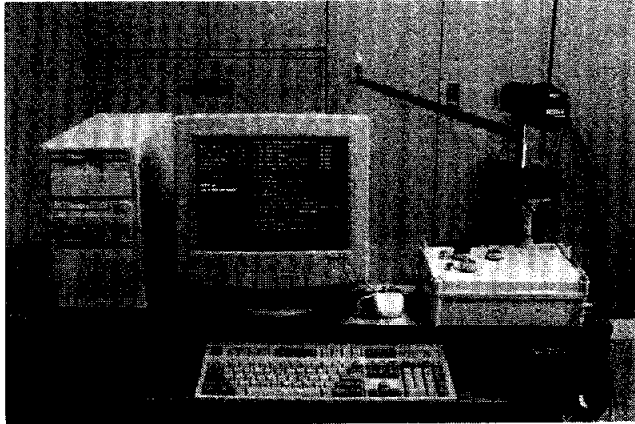


그림 6.1 실험 장비의 실제 모습

유연한 로봇팔의 선단위치를 제어하기 위한 실험장치의 구성도를 그림6.2에 나타내었다.



## 6.2 PD제어기와 이산시간 $H_\infty$ 제어기를 이용한 위치제어시스템의 응답 비교

그림6.3에서 알 수 있듯이 PD제어기를 이용한 위치제어시스템은 payload 가 증가할수록 진동이 커진다. 그러나 그림6.4의 이산시간  $H_\infty$  제어기를 이용한 위치제어시스템은 진동은 약간 존재하나 PD제어기보다 훨씬 더 진동성분이 적음을 알 수 있었고 payload 가 증가함에 따라 진동이 거의 같음을 알 수 있었다.

PD제어기를 이용한 위치제어시스템의 경우 진동성분은 정상상태에서 최대  $8^\circ$  로 감쇄진동을 하였다. 그러나 이산시간  $H_\infty$  제어기를 이용한 위치제어시스템의 경우 진동성분은 최대  $2^\circ$  에서 감쇄진동함을 알 수 있었다. 이산시간  $H_\infty$  제어기를 이용한 위치제어시스템은 PD제어기를 이용한 위치제어시스템보다 훨씬 더 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있었다.

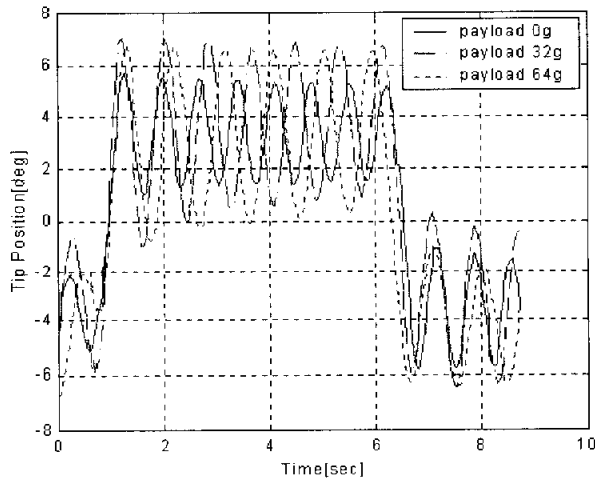


그림 6.3 PD 제어기를 사용한 제어시스템의 위치응답

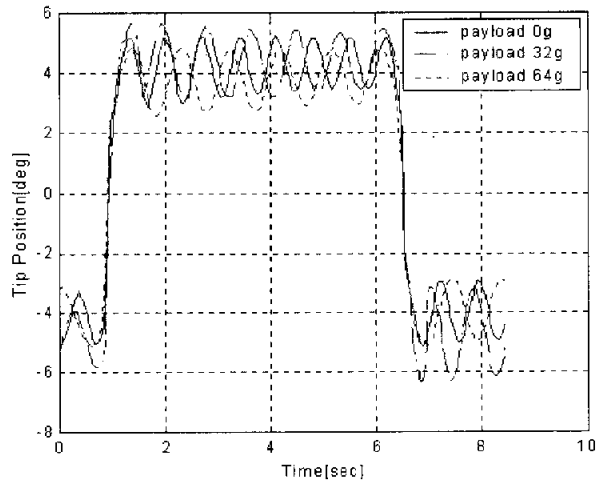


그림 6.4 이산시간  $H_{\infty}$  제어를 사용한 제어시스템의 위치응답

## Ⅶ 결 론

비선형 시스템인 유연한 로봇팔을 제어하는 경우에 가볍고 유연한 재질로 인해 원하지 않는 저주파 진동이 발생하여 빔의 위치제어와 진동제어를 하는 경우 고도의 정확성과 안정성이 필요로 한다. 따라서 본 연구에서는  $H_{\infty}$  제어이론을 적용하여 제어대상의 모델링 과정에서 발생한 오차나 파라미터의 변동 등을 모델링 불확실성으로 간주하고 과도특성과 정상특성 등에 대해 적절히 대처할 수 있는 로버스트 제어를 설계하였다.

본 연구에서는 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, PD제어를 이용하여 유연한 빔의 진동성분을 제어할 수 있었으나 PD제어기에서는 선단위치의 최대 진동성분이 약  $8^{\circ}$  에서 감쇄진동을 하였다.

둘째, 이산시간  $H_{\infty}$  제어기를 설계하기 위해 payload 을 부착한 상태에서 주파수를 변화시켜 플랜트의 특성응답을 구하여 이산시간 제어기를 설계하였다.

셋째, 설계된 이산시간  $H_{\infty}$  제어기를 이용하여 실험한 결과 진동성분이 최대 약  $2^{\circ}$  에서 감쇄진동을 하였다.

따라서 이산시간  $H_{\infty}$  제어기는 PD제어기에 비교해서 부하의 변동 및 파라미터 변동에도 불구하고 강인한 특성을 나타내었다.

향후과제는 진동성분을 더욱 더 줄일 수 있도록 더 정밀한 제어기를 설계하고 샘플링 시간과 제어기의 성능과의 관련성을 좀더 명확히 하는 것이 요구된다.

## 참 고 문 헌

- 1) D. Wang, M. Vidyasagar, "Passive Control of a Single Flexible Link." In Proc, IEEE Conf. on Robotics and Automation, IEEE Computer Society Press, Silver Spring, MD, pp.1432-1437, 1990
- 2) C. Trautman, D. Wang, "Non-collocated Passive Control of a Flexible Link Manipulator", Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation, pp.1107-1114, 1996.
- 3) A. Tchernychev, A. Sideris, "Constrained  $H_\infty$  Control of an Experimental Flexible Link", Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, pp. 206-211, 1997
- 4) S. V. Savant, H. H. Asada, "Integrated Structure/Control Design Based On Model Validity and Robustness Margin", Proceedings of the American Control Conference, pp. 2871-2875, 1999
- 5) Susy Thomas, Jong-Hwan Kim, "Alleviation of Chattering in Variable Structure Control Signal for Flexible One-link Manipulator", Proc. IEEE Int. Conf on Robotics & Automation, pp. 3847-3852, 2001
- 6) S. Nicosia, P. Tomai, A. Tornambe, "Non-linear control and observation algorithms for a single-link flexible robot arm", INT. J. CONTROL, pp. 827-840, 1989
- 7) 최연욱, "현대제어이론의 기초", 청문각, 2001
- 8) 권세현, "복소 쌍입력 기술함수를 갖는 비선형제어기를 이용한 유연한 로봇팔의 위치제어", 동아대학교, 박사학위논문, 1998
- 9) 박윤명, 박양수, 하홍근, 이형기, 최부귀, "유연한 매니퓰레이터를 위한 기준계적신호 제어", Proceedings of the 13<sup>th</sup> KACC, pp208-211, 1998
- 10) 소일영, 정사철, 함운철, "가변 구조 제어 이론을 이용한 유연한 로봇 매니퓰레이터의 제어기 설계", KACC, pp579-582, 1995
- 11) 신춘식, 안영주, 변기식, "MARLAB과 함께한 제어시스템 해석 및 설계", 동일출판사, 1999
- 12) 황우현, 안성모, "MATLAB을 이용한 제어시스템 설계", 대광서림, 1997
- 13) 김창화, "센서리스 자기 부상계의 강인한 위치제어기 설계에 관한 연구", 부경대학교, 박사학위논문, 1998

## 감사의 글

본 논문이 완성되기 까지 여러 가지로 부족한 저를 아낌없는 지도와 격려로 보살펴 주신 이형기 지도 교수님께 진심으로 감사 드립니다.

바쁘신 와중에서도 본 논문의 심사를 맡으시면서 많은 가르침을 주신 최연욱 교수님, 안영주 교수님께 깊은 감사를 드리며, 석사 과정동안 진심어린 충고와 격려로 지켜봐 주신 변기식 교수님, 김남호 교수님, 황용연 교수님, 김만고 교수님, 신춘식 선생님께도 감사의 말씀을 드립니다.

아울러 정상철 선배님과 김관형 선배님, 배상범 선배님, 박성진 선배님, 한학식 선배님, 이상준 선배님, 임재환 선배님 그리고 2년 동안 힘이 되어준 임상진씨와 정광덕, 김동원, 김성훈, 서재현, 김태곤, 장우영 후배에게도 감사의 마음을 전합니다.

오늘이 있기까지 헌신적인 사랑과 믿음으로 보살펴 주신 부모님과 조부모님께 이 논문을 바치며, 항상 관심을 아끼지 않았던 가족, 친지분들과 주위의 모든 분들께도 진심으로 감사를 드립니다.

지금까지 부족한 저에게 크고 작은 관심을 가져준 모든 분들께 기대에 어긋나지 않는 사람이 되도록 앞으로 더욱 노력할 것을 다짐합니다.

2003년 12월  
박 기 원 올림