

공학석사 학위논문

유한요소-전달강성계수법을 이용한  
골조 구조물의 과도응답해석

지도교수 문 덕 홍

이 논문



제출함

2002년 2월

부경대학교 대학원

제어기계공학과

김 성 진

# 김성진의 공학석사 학위논문을 인준함

2001년 12월 26일

주 심 공학박사

양 주 호



위 원 공학박사

최 명 수



위 원 공학박사

문 덕 홍



# 목 차

Abstract .....	1
제 1 장 서 론 .....	3
제 2 장 유한요소-전달강성계수법을 이용한 구조물의 .....	
과도응답해석 알고리즘 .....	5
2.1 직선형 구조물의 과도응답해석 알고리즘 .....	5
2.1.1 모델링 .....	6
2.1.2 뉴마크 베타법 .....	7
2.1.3 강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의 .....	8
2.1.4 강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달 .....	9
2.1.5 과도응답 계산과정 .....	13
2.2 골조 구조물의 과도응답해석 알고리즘 .....	15
2.2.1 모델링 .....	15
2.2.2 강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의 .....	16
2.2.3 강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달 .....	20
2.2.4 과도응답 계산과정 .....	24
2.2.5 다양한 연결부의 정식화 .....	25

제 3 장 수치계산 결과 및 고찰 .....	28
3.1 직선형 구조물의 수치계산 .....	28
3.1.1 직선보형 구조물 .....	28
3.1.2 경탄성 지지를 갖는 직선보형 구조물 .....	36
3.2 골조 구조물의 수치계산 .....	40
3.2.1 굴곡형 구조물 .....	40
3.2.2 문형 구조물 .....	43
3.2.3 힌지를 갖는 문형 구조물 .....	50
제 4 장 결 론 .....	56
참고문헌 .....	57
부록 A .....	58
부록 B .....	59

# Transient Response Analysis of Frame Structures using the Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

Seong-Jin Kim

*Department of Control and Mechanical Engineering*

*The Graduate School*

*Pukyong National University*

## **Abstract**

In these days, the structural and mechanical systems are becoming increasingly complex and large. In static and dynamic analysis of these structures, the finite element method(FEM) is the most widely used and powerful analysis method. However, the FEM has a drawback which require a large computer memory and a lot of computation time in order to analyze complex and large structures accurately.

In this paper, the author suggests a new transient analysis algorithm in order to decrease remarkably the computation time and storage of the FEM without the loss of accuracy. This algorithm is derived from the combination of the transfer technique of the transfer stiffness coefficient method (TSCM), the modeling technique of the FEM, and the numerical integration technique of the Newmark  $\beta$  method.

In this paper, the transient response analysis algorithms for the straight-

line beam structures and the frame structures are formulated by the proposed method. The accuracy and computation efficiency of the proposed method are illustrated through the comparing with the computation results by the FEM for the straight-line beam structures, the crooked structures, and the portal structures with a hinge.

## 제 1 장 서 론

최근 산업의 발달과 더불어 기계, 건축, 토목분야의 구조물 형태는 점점 복잡·거대해지고 있다. 따라서 구조물의 안정성을 확보하기 위하여 설계시에 정적 해석과 더불어 동적 해석결과도 중요한 설계 자료가 된다. 동적 해석에는 자유진동해석과 강제진동해석 등이 있으며, 강제진동해석에는 정상상태응답을 구하는 주파수응답해석과 시간의 경과에 따라 구조물의 응답을 구하는 과도응답해석이 있다. 특히 대상 구조물에 갑자기 외력이나 지진 등이 작용할 때 구조물의 안정성을 확보하기 위해서는 설계시에 과도 응답해석을 수행할 필요가 있고, 이러한 과도응답을 계산하기 위하여 다양한 방법들이 제시된 바 있다<sup>1)~3)</sup>.

유한요소법<sup>4)</sup>은 구조물의 정적 및 동적 해석에 매우 폭넓게 이용되고 있다. 그러나 이 방법을 사용하여, 복잡하고 거대한 구조물의 동적 해석을 정확히 수행하기 위해서는 해석대상 구조물의 요소 분할수를 증가시켜야 할 필요가 있고, 따라서 기억용량이 아주 크고 계산속도가 빠른 컴퓨터를 필요로 한다. 기억용량이 적은 퍼스널 컴퓨터에서는 이러한 구조물의 해석에 대한 유한요소법을 적용하는 것이 곤란한 경우가 있다. 그러므로 많은 연구가들이 유한요소법에서의 이러한 문제점을 극복하기 위하여 다양한 연구를 진행하고 있다.

오래 전에 이와 같은 유한요소법의 문제점을 해결하기 위한 방법의 하나로 전달행렬법(transfer matrix method)<sup>5),6)</sup>이 제안된 바 있다. 이 방법은 유한요소법을 사용하는 경우에 비해 상대적으로 적은 기억용량의 퍼스널 컴퓨터로도 구조물의 동적 해석이 가능함을 알 수 있다.

따라서 전달행렬법은 퍼스널 컴퓨터 이용에 적합한 해석 방법이지만, 이 방법도 구조물의 중간에 경탄성지지가 존재한다든지, 구조물의 중간 절점이 릴리스 및 롤의 조인트 요소로 연결되어있는 경우에는 본래의 전달행렬법과 전혀 다른 복잡한 알고리즘을 사용하지 않으면 해석을 수행하기가 어려운 문제

점이 있다. 그러므로, 복잡하고 거대한 구조물의 해석을 퍼스널 컴퓨터에서 정확하고 쉽게 이용할 수 있는 해석 알고리즘이 필요하다.

이 논문에서는 퍼스널 컴퓨터에 적합하고, 기존의 유한요소법에 있어서의 다양한 모델링 기법을 쉽게 응용할 수 있는 유한요소-전달강성계수법을 제안한다. 이 방법은 전달강성계수법<sup>7~9)</sup>의 전달 기법과 유한요소법의 모델링 기법 그리고 뉴마크 베타법<sup>10)</sup>의 수치적분 기법을 조합함으로써 구성된다.

제안한 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)을 이용하여 직선형 구조물과 골조 구조물에 대한 과도응답해석 알고리즘을 정식화한다. 그리고 여러가지 직선형 구조물과 골조 구조물에 대한 수치계산을 수행하고, 그 결과와 유한요소법에 의한 결과를 비교·검토하여, 이 해석 기법의 유용성을 제시한다.

## 제 2 장 유한요소-전달강성계수법을 이용한 구조물의 과도응답해석 알고리즘

### 2.1 직선형 구조물의 과도응답해석 알고리즘

이 해석 기법의 개념을 설명하기 위하여 Fig. 2.1과 같은 직선보형 구조물을 해석모델로 고려하였다.

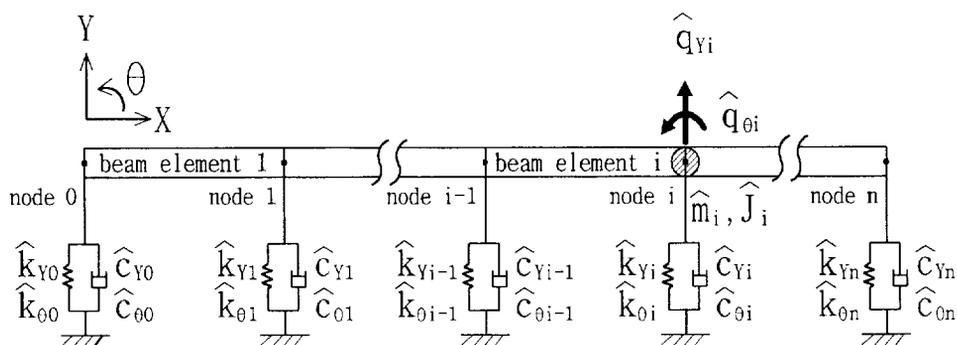


Fig. 2.1 Analytical model.

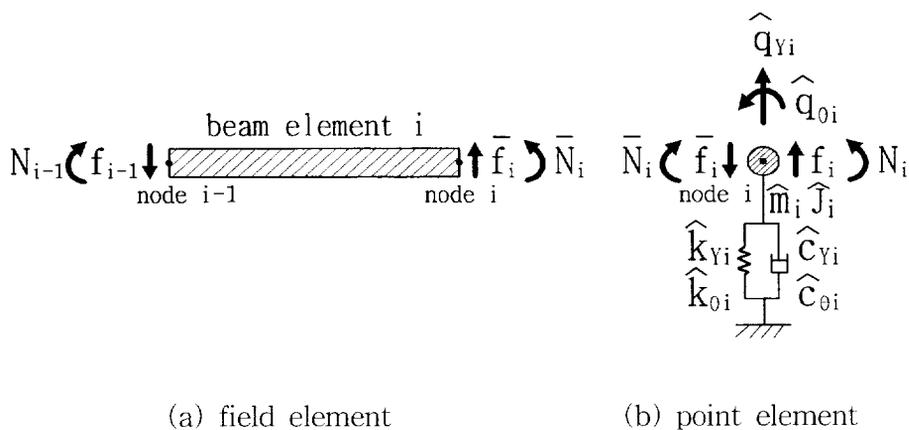


Fig. 2.2 Definition of the positive direction of the force vector.

### 2.1.1 모델링

Fig. 2.1에 나타낸 해석모델을 Fig. 2.2에 나타낸 필드요소와 포인트요소로 구성된 전달계(transfer system)로 모델링한다. 필드요소는 보요소에 상응하는 일관성 질량(consistent-mass), 감쇠와 강성을 가지며, 포인트요소는 집중질량(lumped-mass), 기초지지스프링과 감쇠기로 구성된다.

인접하는 보요소들의 연결점과 구조물의 양쪽 끝점을 절점(node)이라 부른다.  $n$  개의 필드요소를 가지는 구조물인 경우, 각각의 절점은 구조물의 좌측 끝에서부터 우측 끝까지 연속적으로 절점 0, 절점 1, ..., 절점  $n$  이라고 부른다.

이 해석기법에서, 구조물의 경계조건을 절점 0와 절점  $n$ 의 포인트요소로 모델링한다. 예를 들면, 좌단의 경계조건이 고정인 경우에는, 절점 0에서 선형과 회전 스프링상수( $\hat{k}_{y0}$ ,  $\hat{k}_{\theta 0}$ )의 값에 각각  $\infty$ 로, 자유인 경우에는 각각 0로 고려한다.

### 2.1.2 뉴마크 베타법

뉴마크 베타법으로부터, 시간  $t$  에서 속도 벡터  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \{ \dot{y}(t), \dot{\theta}(t) \}$ 와 가속도 벡터  $\ddot{\mathbf{u}}(t) = \{ \ddot{y}(t), \ddot{\theta}(t) \}$ 는 다음과 같이 시간  $t$  에서 변위 벡터  $\mathbf{u}(t) = \{ y(t), \theta(t) \}$ 와 시간 간격  $\Delta t$  이전의 벡터  $\mathbf{Z}_A(t-\Delta t)$ 와  $\mathbf{Z}_V(t-\Delta t)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}(t) + \mathbf{Z}_V(t-\Delta t) \quad (1.1a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{u}(t) + \mathbf{Z}_A(t-\Delta t) \quad (1.1b)$$

여기서

$$\mathbf{Z}_V(t-\Delta t) = -\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}(t-\Delta t) + (1-\frac{\gamma}{\beta}) \dot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) + (1-\frac{\gamma}{2\beta}) \ddot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{Z}_A(t-\Delta t) = -\frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \mathbf{u}(t-\Delta t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) + (1-\frac{1}{2\beta}) \ddot{\mathbf{u}}(t-\Delta t) \quad (1.2b)$$

이고,  $y(t)$ 와  $\theta(t)$ 는 절점의 횡변위와 각변위이고, 파라메타  $\beta$ 와  $\gamma$ 는 수치적분의 정확성과 안정성을 얻기 위해 결정되는 상수이다.

### 2.1.3 강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의

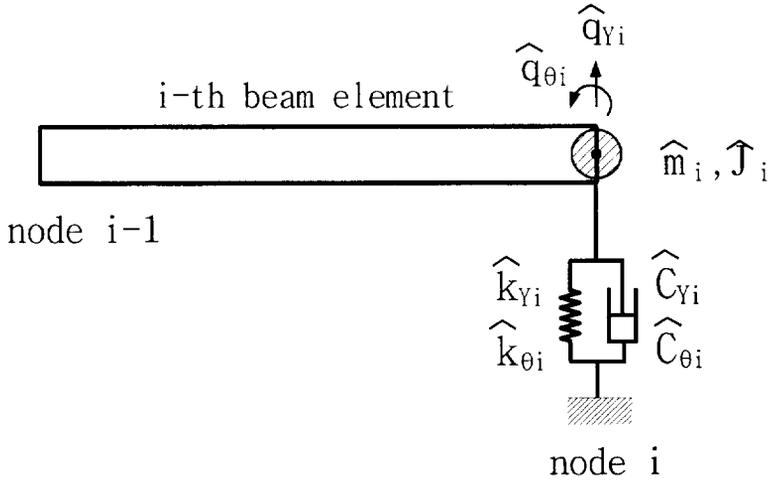


Fig. 2.3 Subsystem.

Fig. 2.1과 같은 해석모델은 Fig. 2.3과 같은 부분계(subsystem)의 직렬 연결로 고려할 수 있으므로, Fig. 2.3의 부분계를 기본요소로 보고, 이에 대한 정식화 과정을 설명한다.

임의의 절점  $i$  좌우측의 힘벡터  $\bar{\mathbf{f}}_i(t)$ 와  $\mathbf{f}_i(t)$  그리고 변위벡터  $\bar{\mathbf{u}}_i(t)$ ,  $\mathbf{u}_i(t)$  사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i(t) = \bar{\mathbf{S}}_i \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \bar{\mathbf{e}}_i(t) \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{S}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{e}_i(t) \quad (1.3b)$$

여기서  $\bar{\mathbf{S}}_i$ ,  $\mathbf{S}_i$ 를 각 절점  $i$  좌측과 우측의 강성계수행렬(stiffness coefficient matrix),  $\bar{\mathbf{e}}_i(t)$ ,  $\mathbf{e}_i(t)$ 를 각각 절점  $i$  좌측과 우측의 힘보정벡터(force corrective vector)라고 한다. 앞으로 하첨자  $i$ 는  $i$  번째 절점 또는  $i$  번째 요소에 관한 물리량을 나타내고, 상태변수  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{e}$  위에 “-”를 붙인 것은 절점 좌측의 상태량을,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{e}$  위에 아무것도 없는 것은 절점 우측의 상태량을 의미한다.

### 2.1.4 강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달

시간  $t$  에서 보요소  $i$  에 대한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{M}_i \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i^L(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_i^R(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_i^L(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_i^R(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^L(t) \\ \mathbf{u}_i^R(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^L(t) \\ \mathbf{f}_i^R(t) \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

여기서  $\mathbf{M}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$ 과  $\mathbf{K}_i$ 는 각각 보요소  $i$ 의 질량, 감쇠 그리고 강성행렬이다 (부록 A 참고).  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  및  $\mathbf{f}(t)$ 의 하첨자 “ $i$ ”는  $i$  번째 보요소에 관한 물리량을 나타내고, 상첨자 “L”, “R”은 보요소의 좌측과 우측을 나타낸다.

제안한 기법의 개념을 쉽게 기술하기 위하여, 각 절점을 해석적으로 좌측과 우측으로 나누어 생각한다. 보요소  $i$ 의 우측은 절점  $i$ 의 좌측이 되고, 보요소  $i+1$ 의 좌측은 절점  $i$ 의 우측이 된다.

식 (1.4)에 식 (1.1a)와 (1.1b)를 대입하므로써, 다음 식들이 구해진다.

$$\mathbf{A}_i \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \mathbf{w}_{i-1}(t) = \mathbf{f}_{i-1}(t) \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_{i-1}(t) + \mathbf{D}_i \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \bar{\mathbf{w}}_i(t) = \bar{\mathbf{f}}_i(t) \quad (1.5b)$$

여기서

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{i-1}(t) \\ \bar{\mathbf{f}}_i(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\mathbf{f}_i^L(t) \\ \mathbf{f}_i^R(t) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{i-1}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}_i(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^L(t) \\ \mathbf{u}_i^R(t) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{i-1}(t) \\ \bar{\mathbf{w}}_i(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\tilde{\mathbf{w}}_i^L(t) \\ \tilde{\mathbf{w}}_i^R(t) \end{Bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{A}}_i & -\tilde{\mathbf{B}}_i \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & \tilde{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix}, \quad (1.6) \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & \tilde{\mathbf{B}}_i \\ \tilde{\mathbf{C}}_i & \tilde{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M}_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C}_i + \mathbf{K}_i, \\ \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_i^L(t) \\ \tilde{\mathbf{w}}_i^R(t) \end{Bmatrix} &= \mathbf{M}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_{A_i}^L(t-\Delta t) \\ \mathbf{Z}_{A_i}^R(t-\Delta t) \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_{V_i}^L(t-\Delta t) \\ \mathbf{Z}_{V_i}^R(t-\Delta t) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

이고,  $\bar{\mathbf{f}}_i(t)$ 와  $\bar{\mathbf{u}}_i(t)$ 는 절점  $i$ 의 좌측에서 힘벡터와 변위벡터이고,  $\mathbf{f}_{i-1}(t)$ 와  $\mathbf{u}_{i-1}(t)$ 는 각각 절점  $i-1$ 의 우측에서 힘벡터와 변위벡터이다. 힘벡터는 전단력  $f(t)$ 과 굽힘모멘트  $N(t)$ 로 구성되며, 힘벡터의 양의 방향 정의로 Fig. 2.2와 같다.

절점  $i-1$ 의 우측에서 절점  $i$ 의 좌측까지, 즉 필드요소  $i$ 를 가로지르는 강

성계수행렬과 힘보정벡터의 전달을 고려해보자. 행렬  $\bar{\mathbf{S}}_i$ 와 벡터  $\bar{\mathbf{e}}_i(t)$ 를 식 (1.3a), (1.3b), (1.5a)와 식 (1.5b)에  $i = i-1$ 를 대입하여 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{V}_i \quad (1.7a)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{G}_i^{-1} \{ \mathbf{w}_{i-1}(t) - \mathbf{e}_{i-1}(t) \} + \bar{\mathbf{w}}_i(t) \quad (1.7b)$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{A}_i$$

이고, 식 (1.7a)와 (1.7b)를 강성계수행렬과 힘보정벡터의 필드 전달식이라고 부른다.

만약 Fig. 2.2처럼 집중질량, 탄성스프링, 그리고 점성감쇠기가 절점  $i$ 에 있다면, 절점  $i$ 에서 힘벡터의 평형방정식과 변위벡터의 연속조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i(t) + \hat{\mathbf{M}}_i \ddot{\mathbf{u}}_i(t) + \hat{\mathbf{C}}_i \dot{\mathbf{u}}_i(t) + \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}_i(t) = \mathbf{f}_i(t) + \hat{\mathbf{q}}_i(t) \quad (1.9a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) \quad (1.9b)$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_i &= \begin{bmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{J}_i \end{bmatrix}_i, & \hat{\mathbf{C}}_i &= \begin{bmatrix} \hat{c}_y & 0 \\ 0 & \hat{c}_\theta \end{bmatrix}_i \\ \hat{\mathbf{K}}_i &= \begin{bmatrix} \hat{k}_y & 0 \\ 0 & \hat{k}_\theta \end{bmatrix}_i, & \hat{\mathbf{q}}_i(t) &= \begin{bmatrix} \hat{q}_y(t) \\ \hat{q}_\theta(t) \end{bmatrix}_i \end{aligned} \quad (1.10)$$

이고,  $\hat{m}$ 과  $\hat{J}$ 는 질량과 질량관성모멘트,  $\hat{c}_y$ 와  $\hat{k}_y$ 는 선형 감쇠계수와 스프링 상수를,  $\hat{c}_\theta$ 와  $\hat{k}_\theta$ 는 회전 감쇠계수와 스프링상수를 나타낸다.  $\hat{q}_y$ 와  $\hat{q}_\theta$ 는 각각 외력과 외력 모멘트이다.

절점  $i$ 의 좌측에서 절점  $i$ 의 우측까지 강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달을 고려해보자. 우리는 행렬  $\mathbf{S}_i$ 와 벡터  $\mathbf{e}_i(t)$ 를 식 (1.1a), (1.1b), (1.3a), (1.3b), 그리고 (1.9a)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i = \bar{\mathbf{S}}_i + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \dot{\hat{\mathbf{M}}}_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \hat{\mathbf{C}}_i + \hat{\mathbf{K}}_i \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{e}_i(t) = \bar{\mathbf{e}}_i(t) - \hat{\mathbf{q}}_i(t) + \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{Z}_{A_i}(t-\Delta t) + \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{Z}_{V_i}(t-\Delta t) \quad (1.11b)$$

그리고 식 (1.11a)와 (1.11b)를 강성계수행렬과 힘보정벡터의 포인트 전달식이라고 부른다.

좌단의 경계조건을 절점 0의 기초지지요소로 모델링하였으므로, 절점 0 좌측의 힘벡터  $\bar{\mathbf{f}}_0(t)$ 를 영벡터(null vector)로 간주하고, 행렬  $\mathbf{S}_0$ 와 벡터  $\mathbf{e}_0(t)$ 를  $i=0$ 가 대입된 식 (1.1a), (1.1b), (1.3b)와 (1.9a)로부터 다음과 같

은 식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \hat{\mathbf{M}}_0 + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \hat{\mathbf{C}}_0 + \hat{\mathbf{K}}_0 \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{e}_0(t) = \hat{\mathbf{M}}_0 \mathbf{Z}_{A0}(t-\Delta t) + \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Z}_{V0}(t-\Delta t) - \mathbf{a}_0(t) \quad (1.12b)$$

이고, 식 (1.12a)와 (1.12b)로부터 행렬  $\mathbf{S}_0$ 와 벡터  $\mathbf{e}_0(t)$ 을 구한 후, Fig. 2.1과 같은 해석 모델에 대해서 식 (1.7a), (1.7b), (1.11a)와 (1.11b)를, 즉 필드 전달식과 포인트 전달식을 연속적으로 적용하며, 최종적으로 구조물의 끝단인 절점  $n$ 의 우측에서 행렬  $\mathbf{S}_n$ 와 벡터  $\mathbf{e}_n(t)$ 을 구할 수 있다.

### 2.1.5 과도응답 계산과정

절점  $n$ 의 우측을 해석적으로 자유,  $\mathbf{f}_n(t) = 0$ ,로 간주할 수 있다. 왜냐하면 우측 끝의 경계조건은 절점  $n$ 의 포인트요소로 고려되었기 때문이다. 우측 끝의 경계조건과  $i = n$ 를 대입한 식 (1.3b)로부터, 절점  $n$ 의 변위벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{u}_n(t) = - \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{e}_n(t) \quad (1.13)$$

$i = i-1$ 를 대입한 식 (1.3b)와 식 (1.5a)로부터, 필드요소  $i$  좌우측의 변위벡터들의 관계는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_{i-1}(t) = \mathbf{V}_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \mathbf{G}_i^{-1} \{ \mathbf{w}_{i-1}(t) - \mathbf{e}_{i-1}(t) \} \quad (1.14)$$

구조물의 과도응답은 구조물의 우측 끝에서 좌측 끝까지 연속적으로 계산된다. 식 (1.13)으로부터 절점  $n$ 의 변위벡터가 계산된 후, 다른 절점에서 변위벡터는 식 (1.9b)와 (1.14)를 반복적으로 사용함으로써 구할 수 있다.

유한요소법에 의해 구조물의 과도응답을 계산하게 되면, 질량, 감쇠, 그리고 강성행렬은 구조물의 총 자유도수와 같아진다. 그 결과 유한요소법에서는 많은 컴퓨터 메모리를 필요로 한다. 하지만 이 해석 기법에서는 상기의 전달식들을 사용함으로써 사용 메모리를 상당히 줄일 수 있다.

## 2.2 골조 구조물의 과도응답해석 알고리즘

굴곡형 구조물, 배관계, 문형구조물과 힌지를 갖는 문형 구조물 등 공학분야에서 자주 볼 수 있는 골조 구조물을 대상으로 유한요소-전달강성계수법으로 과도응답해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 정식화한다.

### 2.2.1 모델링

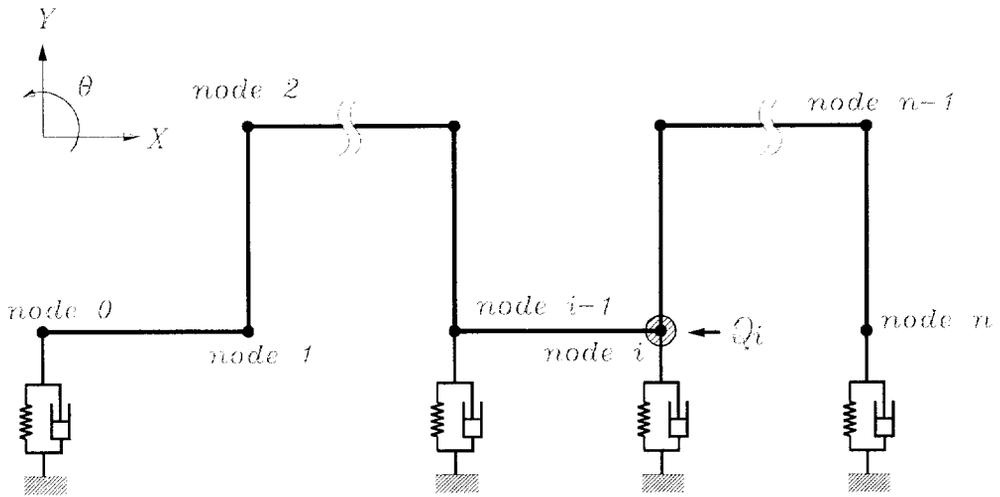


Fig. 2.4 Analytical model.

다수의 부재요소, 기초지지스프링과 굴곡부로 구성되는 다양한 골조 구조물의 과도응답해석 알고리즘을 정식화하기 위하여 Fig. 2.4와 같은 평면 골조 구조물을 해석모델로 채택하였다.

이 절에서 절점이란 해석대상 구조물의 좌단과 우단, 강제외력이 작용하는 점, 기초지지요소와의 결합점, 그리고 좌표변환이 요구되는 굴곡점(crooked point)을 뜻한다. 좌단에서 우단으로 각 절점을 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n이라고 한다.

구조물 좌단의 경계조건은 절점 0의 기초지지요소로 모델링하였고, 우단의 경계조건은 절점 n의 기초지지요소로 모델링하였다. 골조 구조물의 면내진동인 경우, 각 절점의 변위벡터 ( $\mathbf{u}$ )는 종변위  $x$ , 횡변위  $y$  그리고 각변위  $\theta$ 로 구성되고, 힘벡터 ( $\mathbf{f}$ )는 축력  $F_x$ , 전단력  $F_y$  그리고 모멘트  $N$ 로 구성된다.

### 2.2.2 강성계수행렬과 힘보정벡터의 정의

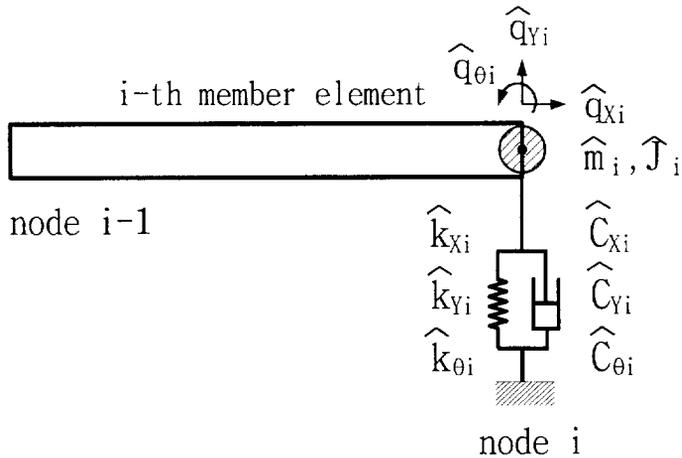


Fig. 2.5 Subsystem.

Fig. 2.4와 같은 해석모델은 부분계(Fig. 2.5)와 굴곡부(Fig. 2.6)의 연속으로 볼 수 있다.  $i$  번째 부분계는 일정단면을 갖는 직선부재요소와 기초지지요소로 구성된다. 기초지지요소는 기초와 보요소 사이의 병진 스프링상수(  $\hat{k}_x$ ,  $\hat{k}_y$ )와 회전 스프링상수(  $\hat{K}_\theta$ ), 그리고 병진 감쇠계수(  $\hat{c}_x$ ,  $\hat{c}_y$ )와 회전 감쇠계수(  $\hat{C}_\theta$ )로 구성된다.

전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, 절점을 해석적으로 절점의 좌측과 우측으로 나누어 생각한다. 즉,  $i$  번째 부재요소와  $i$  번째 절점 사이의 결합점을 절점  $i$ 의 좌측이라 하고,  $i+1$  번째 부재요소와  $i$  번째 절점 사이의 결합점을 절점  $i$ 의 우측이라 한다.

Fig. 2.5의  $i$  번째 부분계에서, 절점  $i$  좌우측의 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 강성계수행렬  $\mathbf{S}$  및 힘보정벡터  $\mathbf{e}(t)$ 를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i^i(t) = \bar{\mathbf{S}}_i^i \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) + \bar{\mathbf{e}}_i^i(t) \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{f}_i^i(t) = \mathbf{S}_i^i \mathbf{u}_i^i(t) + \mathbf{e}_i^i(t) \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{f}_i^{i+1}(t) = \mathbf{S}_i^{i+1} \mathbf{u}_i^{i+1}(t) + \mathbf{e}_i^{i+1}(t) \quad (2.1c)$$

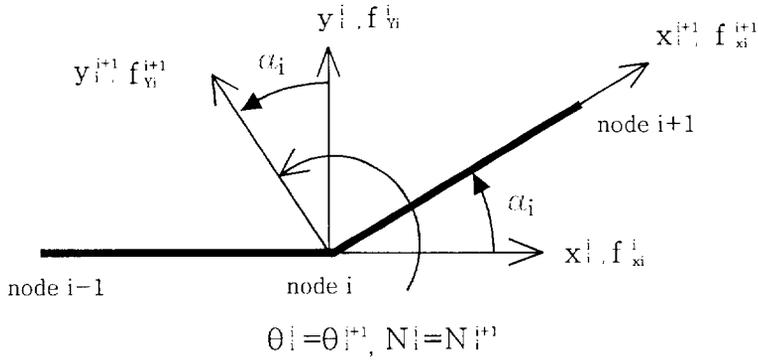


Fig. 2.6 Positive direction of state variables for member elements.

이 연구에서 하첨자  $i$ 는  $i$  번째 절점 또는  $i$  번째 부재에 관한 물리량을 뜻하고 상첨자  $i$ 는 상태량을 정의할 때 사용된 좌표계가  $i$  번째 부재요소의 국부좌표계(local coordinate system)와 동일함을 나타낸다.

국부좌표계  $i$ 와  $i+1$ 로 나타낸 절점  $i$ 의 힘벡터와 변위벡터의 정방향은 Fig. 2.6과 같다.  $i+1$  번째 부재요소가  $i$  번째 부재요소로부터 반시계방향으로  $\alpha_i$  만큼 기울어져 있다면, 변위벡터와 힘벡터의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_i^{i+1}(t) = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{u}_i^i(t) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{f}_i^{i+1}(t) = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{f}_i^i(t)$$

여기서  $\mathbf{R}(\alpha_i)$ 는

$$\mathbf{R}(a_i) = \begin{bmatrix} \cos(a_i) & \sin(a_i) & 0 \\ -\sin(a_i) & \cos(a_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

이고, 좌표변환행렬  $\mathbf{R}(a_i)$ 은 다음과 같은 성질을 가진다.

$$\mathbf{R}(a_i)^T = \mathbf{R}(a_i)^{-1} \quad (2.4)$$

여기서 상첨자 T는 행렬의 전치(transpose)를 뜻하고,  $-1$ 은 역행렬을 나타낸다.

### 2.2.3 강성계수와 힘보정벡터의 전달

시간  $t$  에서 부재요소  $i$  에 대한 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{M}_i \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^L(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}_i^R(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{C}_i \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^L(t) \\ \dot{\mathbf{u}}_i^R(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_i \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^L(t) \\ \mathbf{u}_i^R(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_i^L(t) \\ \mathbf{f}_i^R(t) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

여기서  $\mathbf{M}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$ 와  $\mathbf{K}_i$ 는 각각 부재요소  $i$ 의 질량, 감쇠 그리고 강성행렬이다(부록 B 참고).  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  및  $\mathbf{f}(t)$ 의 하첨자 "i" 는  $i$  번째 부재요소에 관한 물리량을 나타내고, 상첨자 "L", "R"은 부재요소의 좌측과 우측을 나타낸다.

절점  $i-1$ 의 우측과 절점  $i$ 의 좌측의 변위벡터  $\mathbf{u}(t) = \{x, y, \theta\}^T$ 와 힘벡터  $\mathbf{F}(t) = \{F_X, F_Y, M\}^T$  사이의 관계식은 식 (2.5)에 식 (1.1a)와 (1.1b)를 대입하므로써, 다음 식들이 구해진다.

$$\mathbf{A}_i \mathbf{u}_{i-1}(t) + \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \mathbf{w}_{i-1}(t) = \mathbf{f}_{i-1}(t) \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{C}_i \mathbf{u}_{i-1}(t) + \mathbf{D}_i \bar{\mathbf{u}}_i(t) + \bar{\mathbf{w}}_i(t) = \bar{\mathbf{f}}_i(t) \quad (2.6b)$$

절점  $i-1$  우측의 강성계수행렬  $\mathbf{S}_{i-1}^i$ 과 힘보정벡터  $\mathbf{e}_{i-1}^i(t)$ 를 이미 알고 있다면, 절점  $i$  좌측의 강성계수행렬  $\bar{\mathbf{S}}_i^i$ , 힘보정벡터  $\bar{\mathbf{e}}_i^i(t)$ 를 식 (2.1a), (2.6) 그리고, 식 (2.1c)의  $i$  대신에  $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 식 (2.7)과 같이 구할 수 있다. 즉, 식 (2.7)은  $i$  번째 부분계에서 절점  $i-1$  우측과 절점  $i$  좌측사이의 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드 전달식이 된다.

$$\bar{\mathbf{S}}_i^i = \mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{V}_i \quad (2.7a)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i^i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{G}_i^{-1} \{ \mathbf{w}_{i-1}(t) - \mathbf{e}_{i-1}(t) \} + \bar{\mathbf{w}}_i(t) \quad (2.7b)$$

여기서  $\mathbf{V}_i$ 와  $\mathbf{G}_i$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i \quad (2.8)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{A}_i$$

만약 Fig. 2.2처럼 집중질량, 탄성스프링, 그리고 점성감쇠기가 절점  $i$ 에 있다면, 절점  $i$ 에서 힘벡터의 평형방정식과 변위벡터의 연속조건은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{M}}_i \ddot{\mathbf{u}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{C}}_i \dot{\mathbf{u}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}_i^i(t) = \mathbf{f}_i^i(t) + \hat{\mathbf{q}}_i^i(t) \quad (2.9a)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^i(t) = \mathbf{u}_i^i(t) \quad (2.9b)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J} \end{bmatrix}_i, \quad \hat{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} \hat{c}_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}_\theta \end{bmatrix}_i$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \begin{bmatrix} \hat{k}_x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_\theta \end{bmatrix}_i, \quad \hat{\mathbf{q}}_i^i(t) = \begin{Bmatrix} \hat{q}_x(t) \\ \hat{q}_y(t) \\ \hat{q}_\theta(t) \end{Bmatrix}_i \quad (2.10)$$

이고,  $\hat{m}$ 과  $\hat{j}$ 는 질량과 질량관성모멘트,  $\hat{k}_x$ ,  $\hat{k}_y$ 와  $\hat{c}_x$ ,  $\hat{c}_y$ 는 각각 X축 방향과 Y축 방향의 병진 스프링상수와 감쇠계수를,  $\hat{k}_\theta$ 와  $\hat{c}_\theta$ 는 회전 스프링상수와 감쇠계수를 상징한다.  $\hat{q}_x$ ,  $\hat{q}_y$  그리고  $\hat{q}_\theta$ 는 각각 X축과 Y축 방향의 외력인 축력과 전단력 그리고 외력 모멘트이다.

절점  $i$ 의 좌측에서 절점  $i$ 의 우측까지 강성계수행렬과 힘보정벡터의 전달을 고려해보자. 식 (2.1a), (2.1b), (2.9a) 그리고 절점에서 변위벡터의 연속조건 식 (2.9b)으로부터, 절점  $i$  우측의 강성계수행렬  $\mathbf{S}_i^i$ 와 힘보정벡터  $\mathbf{e}_i^i(t)$ 는 식 (2.11)과 같이 구할 수 있다. 즉, 식 (2.11)은 절점  $i$  좌측과 절점  $i$  우측사이의 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 포인트 전달식이 된다.

$$\mathbf{S}_i^i = \bar{\mathbf{S}}_i^i + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \hat{\mathbf{M}}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{C}}_i + \hat{\mathbf{K}}_i \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{e}_i^i(t) = \bar{\mathbf{e}}_i^i(t) - \hat{\mathbf{q}}_i^i(t) + \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{z}_{A_i}(t - \Delta t) + \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{z}_{V_i}(t - \Delta t) \quad (2.11b)$$

절점  $i$ 에 굴곡점이 있다면, 전달과정을 수행하기 위하여 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 좌표변환해야 한다. 이는 식 (2.1b), (2.1c), (2.2) 그리고, 식 (2.4)로부터 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^{i+1} = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{S}_i^i \mathbf{R}(\alpha_i)^T \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{e}_i^{i+1}(t) = \mathbf{R}(\alpha_i) \mathbf{e}_i^i(t) \quad (2.12b)$$

첫 번째 부분계에 대하여 포인트 전달식을 적용하기 위해서는 절점 0의  $\mathbf{S}_0^1$ ,  $\mathbf{e}_0^1(t)$ 를 미리 알고 있어야 한다. 이는 좌단의 경계조건과 힘의 평형식으로부터 구한다. 즉, 구조물의 좌단에서의 경계조건을 절점 0의 기초지지 스프링으로 고려하였으므로, 절점 0 좌측의 힘벡터  $\mathbf{f}_0^1(t)$ 는 해석적으로 영벡터로 간주한다. 따라서 첫 번째 부재의 국부좌표계로 나타낸 절점 0에서의 힘의 평형식(식 (2.9a))과 식 (2.1c)에  $i=0$ 을 대입한 식으로부터 절점 0의 강성계수행렬  $\mathbf{S}_0^1$ 와 힘보정벡터  $\mathbf{e}_0^1(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_0^1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \hat{\mathbf{M}}_0 + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \hat{\mathbf{C}}_0 + \hat{\mathbf{K}}_0 \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{e}_0^1(t) = \hat{\mathbf{M}}_0 \mathbf{z}_{A0}(t-\Delta t) + \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{z}_{V0}(t-\Delta t) - \mathbf{q}_0^1(t) \quad (2.13b)$$

따라서 식(2.13)을 시작으로 식(2.11)과 식(2.12)에  $i = 1, 2, \dots, n$ 을 반복적으로 대입하면, 각 절점의 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 전달하면서 구할 수 있고, 최종적으로 구조물 끝단의 강성계수행렬  $\mathbf{S}_n^n$ 과 힘보정벡터  $\mathbf{e}_n^n(t)$ 을 구할 수 있다.

## 2.2.4 과도응답 계산과정

구조물 우단(끝단)의 경계조건을 절점  $n$ 의 기초지지요소로 고려하였으므로, 절점  $n$ 의 우측은 해석적으로 경계조건이 자유,  $\mathbf{f}_n^n(t) = 0$ ,로 간주할 수 있다. 따라서  $\mathbf{f}_n^n(t) = 0$ 와 식 (2.2)에  $i = n$ 을 대입한 식으로부터 우단의 변위벡터  $\mathbf{u}_n^n(t)$ 을 아래와 같이 절점  $n$  우측의 강성계수행렬 및 힘보정벡터로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{u}_n^n(t) = - \mathbf{S}_n^{n-1} \mathbf{e}_n^n(t) \quad (2.14)$$

식 (2.7), (2.11), (2.1b)의  $i$  대신에  $i-1$ 을 대입하여 구한 식으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{u}_{i-1}^i(t) = \mathbf{V}_i \mathbf{u}_i^i(t) + \mathbf{G}_i^{-1} \{ \mathbf{w}_{i-1}(t) - \mathbf{e}_{i-1}(t) \} \quad (2.15)$$

따라서 식 (2.14)을 시작으로 변위벡터의 연속조건  $\mathbf{u}_i^i(t) = \bar{\mathbf{u}}_i^i(t)$ 와 식 (2.15) 그리고 좌표변환식인 식 (2.2)로부터, 모든 절점의 변위벡터를 우단에서 좌단으로 순차적으로 계산할 수 있다.

## 2.2.5 다양한 연결부의 정식화

탄성 스프링과 릴리스와 같은 다양한 중간 연결부가 포함된 구조물의 과도 응답해석을 이 해석 기법으로 수행하기 위하여, 각 연결부별로 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 유도한다.

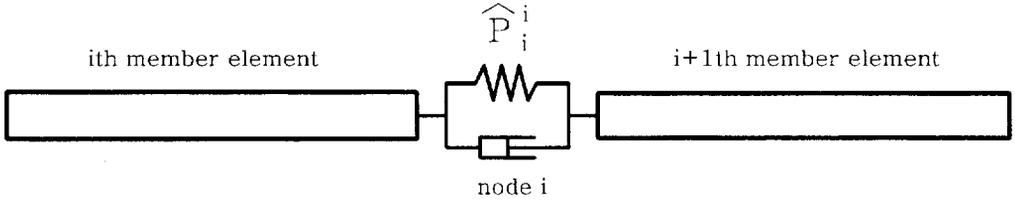


Fig. 2.7 Equivalent spring and damper of connection point.

두 부재가 탄성 스프링과 점성감쇠기로 연결된 경우, 또는 복잡한 연결부를 등가화하여 Fig. 2.7과 같은 스프링과 감쇠기로 구성된 등가 포인트요소로 모델링할 경우가 있다. Fig. 2.7과 같은 등가 포인트요소  $i$ 의 좌측(절점  $i$ 의 좌측)과 우측(절점  $i$ 의 우측)의 힘의 평형식은

$$\mathbf{f}_i^i(t) = \bar{\mathbf{f}}_i^i(t) = \hat{\mathbf{P}}_i^i \{ \mathbf{u}_i^i(t) - \bar{\mathbf{u}}_i^i(t) \} \quad (2.16)$$

가 되고, 여기서 등가 포인트 강성행렬  $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 는  $X$ 축과  $Y$ 축 방향의 병진 스프링상수 그리고 회전 스프링상수( $\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_\theta$ )로 구성되는 대각행렬이 된다.

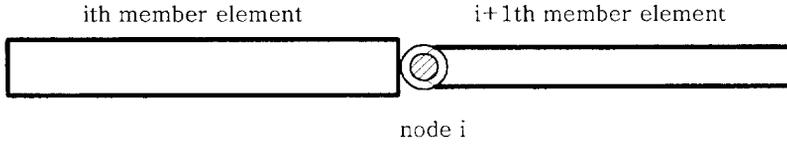
등가 포인트요소  $i$ 의 좌측에서 우측으로의 포인트 전달식은 식 (2.1a), (2.1b) (2.7a), (2.7b) 그리고 식 (2.16)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_i^i = \{ (\bar{\mathbf{S}}_i^i)^{-1} + (\hat{\mathbf{P}}_i^i)^{-1} \}^{-1} \quad (2.17a)$$

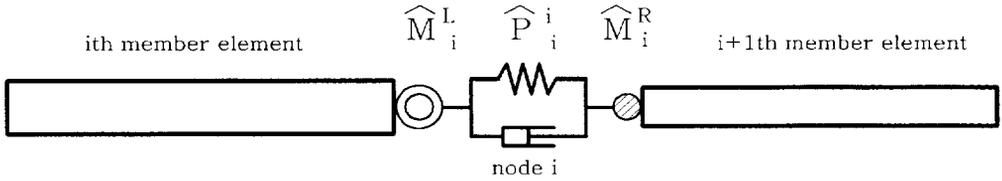
$$\mathbf{e}_i^i(t) = \{ (\bar{\mathbf{S}}_i^i)^{-1} + (\hat{\mathbf{P}}_i^i)^{-1} \}^{-1} (\bar{\mathbf{S}}_i^i)^{-1} \bar{\mathbf{e}}_i^i(t) \quad (2.17b)$$

따라서,  $i$  번째 부재와  $i+1$  번째 부재사이에 Fig. 2.7과 같은 연결부가 있을 경우에는 식 (2.11) 대신에 식 (2.17)을 사용하여 강성계수행렬 및 힘보정벡터를 전달할 수 있다.

릴리스 연결과 같이 연결부의 변위벡터 중 일부가 불연속인 경우에도 연결 조건에 해당하는 등가 포인트 강성행렬  $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 을 만든 후, 식 (2.17)을 그대로 사용하면 된다. 예를 들어 설명하면, 부재요소  $i$ 와 부재요소  $i+1$ 의 연결점인 절점  $i$ 에서 변위벡터가  $X$ ,  $Y$ 축 방향으로 연속이고  $Z$ 축의 회전방향으로는 불연속인 경우,  $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 는 병진 스프링  $\hat{k}_{xi}$ ,  $\hat{k}_{yi}$ 에  $\infty$ 에 가까운 아주 큰 값을, 회전 스프링  $\hat{k}_{\theta i}$ 에 0에 가까운 아주 작은 값을 대입한다. 릴리스에 해당하는 스프링상수의 값에 0을 대입하지 않은 이유는 0을 대입하면 식 (2.17)에서 행렬  $\hat{\mathbf{P}}_i^i$ 의 역행렬을 계산할 수 없기 때문이다. 참고로 실제의 수치계산에서는 릴리스에 해당하는 병진 및 회전 스프링상수의 값은 각각  $10^{-20}$  N/m,  $10^{-20}$  N·m/rad을, 강결합(剛結合)에는 각각  $10^{20}$  N/m,  $10^{20}$  N·m/rad을 대입하여 계산한다.



(a) Knuckle element



(b) Equivalent model

Fig. 2.8 Equivalent model of knuckle element.

구조물의 연결부가 관절인 경우, 관절을 포인트요소와 등가 포인트요소로 모델링하여 정식화할 수 있다. 예를 들면, Fig. 2.8의 (a)와 같은 관절요소를 (b)와 같이 관절 좌측부의 질량  $\hat{M}_i^L$ 과 우측부의 질량  $\hat{M}_i^R$  그리고 좌우측 질량의 연결상태를 모델링한 등가 포인트 강성행렬  $\hat{P}_i$ 의 결합으로 모델링한다. 여기서 관절요소는 2개의 포인트요소와 1개의 등가 포인트요소로 대체될 수 있고, 식 (2.11)과 식 (2.17) 그리고 식(2.11)을 차례로 적용하면 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 포인트 전달을 수행할 수 있다.

## 제 3 장 수치계산 결과 및 고찰

직선형 구조물과 골조 구조물을 해석대상으로 하여 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 수치계산을 행한 후, 그 결과를 유한요소법(FEM)에 의한 결과와 비교하였다.

### 3.1 직선형 구조물의 수치계산

이 절에서는 2.1절에서 정식화한 직선형 구조물에 대한 과도응답해석 알고리즘의 유용성을 확인하기 위하여, 2개의 직선보형 구조물을 대상으로 유한요소-전달강성계수법, 유한요소법으로 과도응답을 계산하였다.

#### 3.1.1 직선보형 구조물

Fig. 3.1의 수치계산 모델 I은 직선보가 스프링과 감쇠기로 지지된 구조물이며, 구조물을 40개의 보요소로 분할하였다. 구조물의 물성치는 전체 길이 2 m, 직경 0.01 m, 밀도 7860 kg/m<sup>3</sup>, 종탄성계수 206 GPa. 횡방향 기초지지 스프링상수는 10<sup>5</sup> N/m이다. 그리고 점성감쇠기의 감쇠계수는 각각 0, 10, 100 N·s/m 이다.

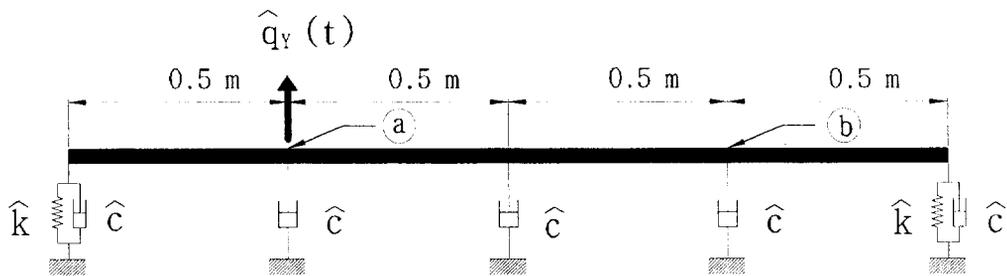


Fig. 3.1 Numerical model I.

참고로 Table 1은 수치계산 모델 I의 고유진동수를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과이다.

Table 1. Natural frequency for model I (unit : Hz)

Order \ Method	FE-TSCM	FEM
1st	5.014	5.014
2nd	19.904	19.904
3rd	44.208	44.208
4th	77.067	77.067
5th	117.029	117.029

수치계산에서, 시간 간격  $\Delta t$ 를 0.001초로 하여 0.4초까지 구조물의 과도응답을 계산하였다. 뉴마크 베타법의  $\beta$ 와  $\gamma$ 는 각각 0.25와 0.5로 두었다.

Fig. 3.1의 ㉠점에 횡방향의 조화 강제외력  $\hat{q}_y(t) = Q \cos \Omega t$  ( $Q = 10$  N,  $\Omega/2\pi = 5$  Hz)이 작용할 때, ㉠점의 횡방향 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과가 Fig. 3.2이다. 그리고, ㉡점의 횡방향 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 3.3이다. 수치계산 결과를 통해 두 기법의 결과가 잘 일치하였다. Fig. 3.4는 시간 경과에 따른 전체 직선형 구조물의 거동을 유한요소-전달강성계수법으로 계산한 결과이다.

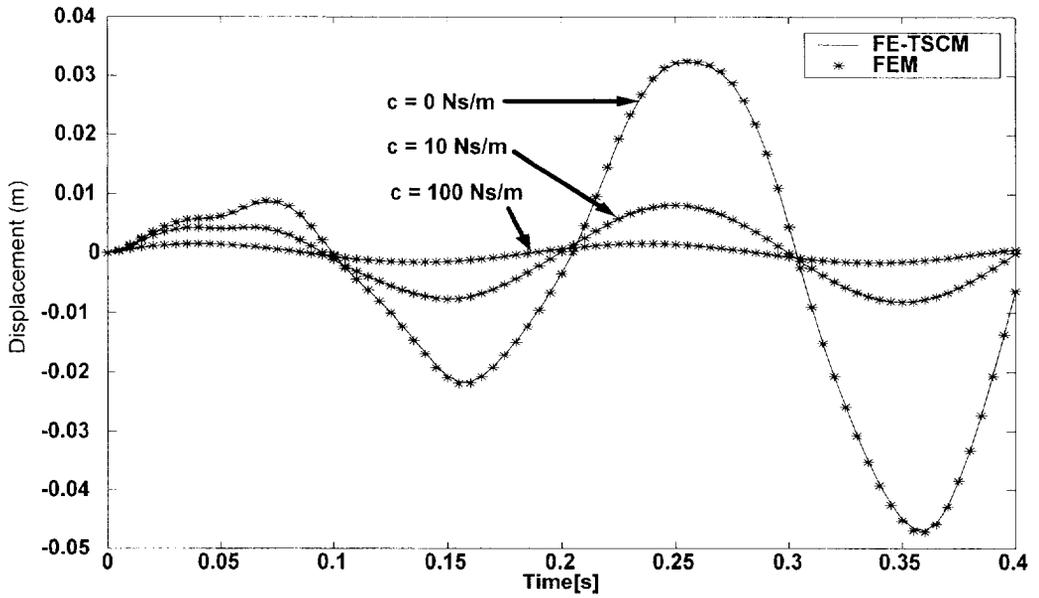


Fig. 3.2 Transient response at point (a) of numerical model I.

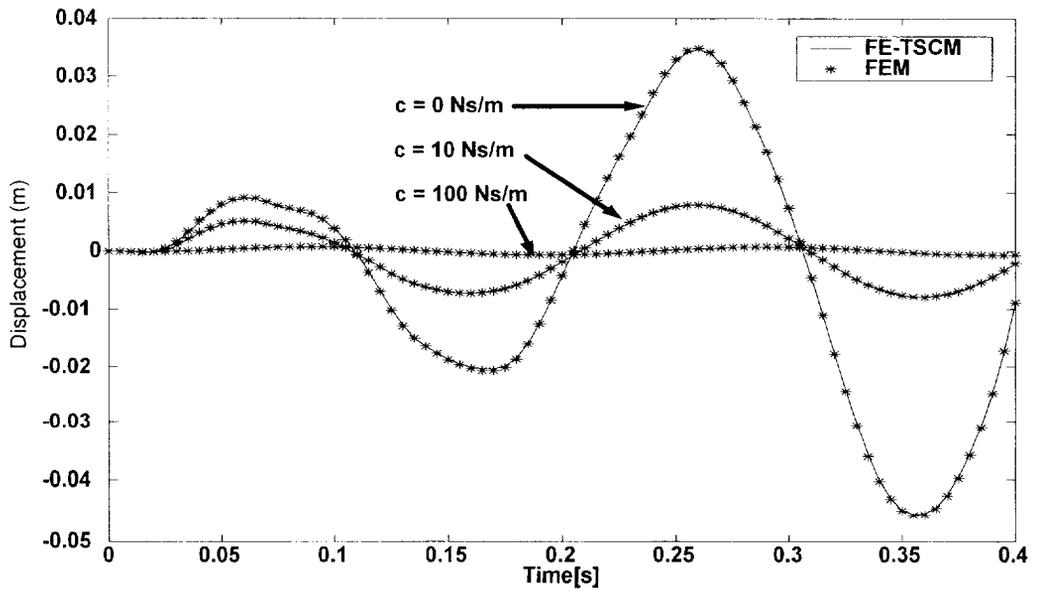


Fig. 3.3 Transient response at point (b) of numerical model I.

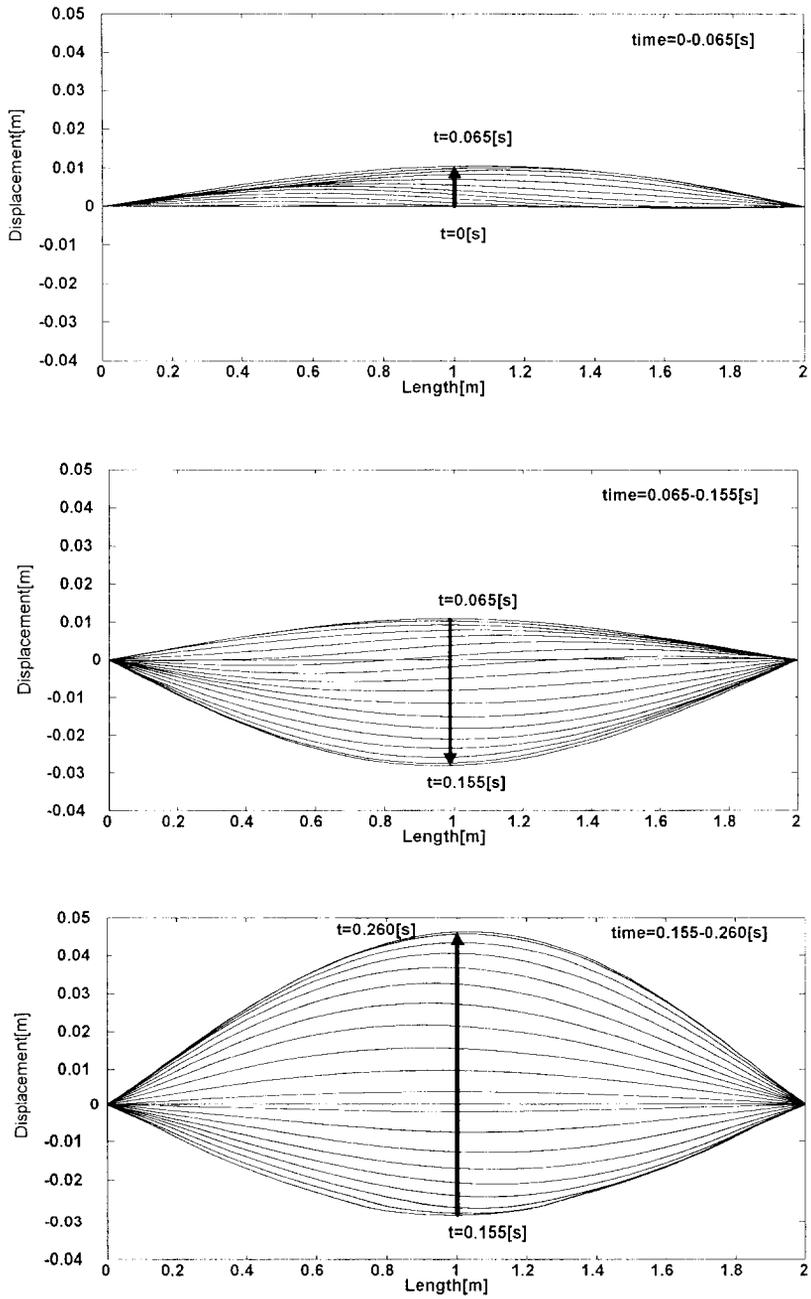


Fig. 3.4. Transient response simulation.

Fig. 3.5는 Fig. 3.1의 수치계산 모델 I에서 강제외력의 진동수를 10 Hz로 할 때, Fig. 3.1의 ㉔점의 횡방향 과도응답을 계산한 결과이다. 그리고, Fig. 3.6은 ㉕점에서 횡방향 과도응답을 계산한 결과이다. 수치계산 결과를 통해 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법의 결과가 잘 일치하였다. Fig. 3.7은 시간 경과에 따른 전체 직선형 구조물의 거동을 유한요소-전달강성계수법으로 계산한 결과이다.

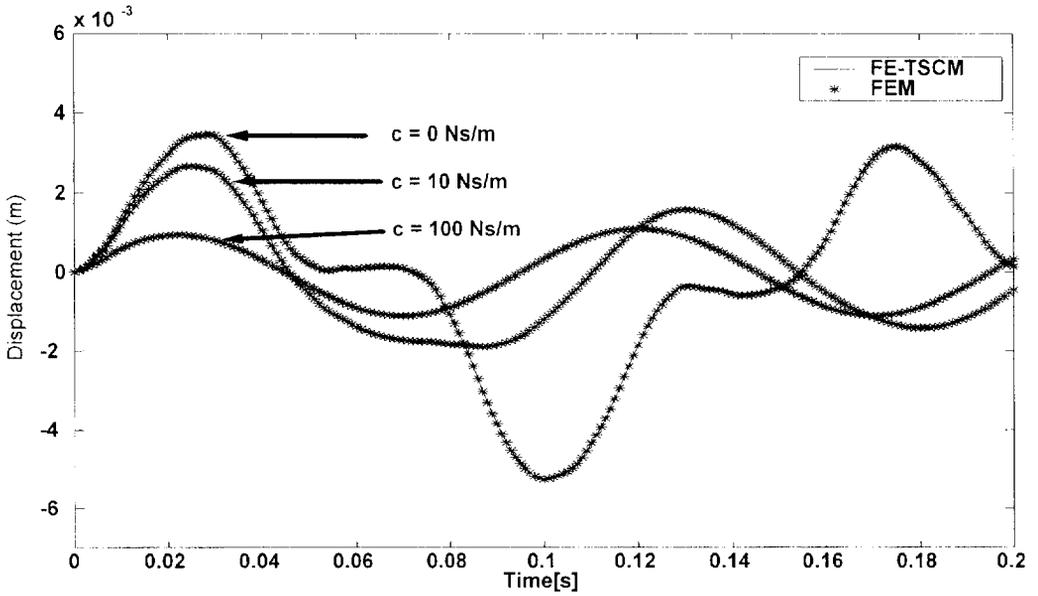


Fig. 3.5 Transient response at point (a) of numerical model I.

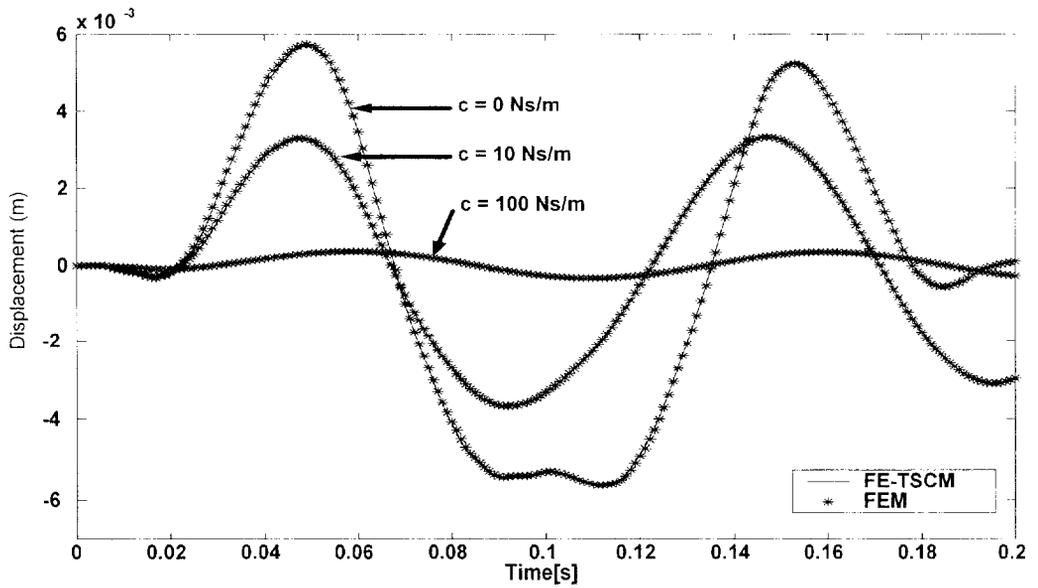


Fig. 3.6 Transient response at point (b) of numerical model I.

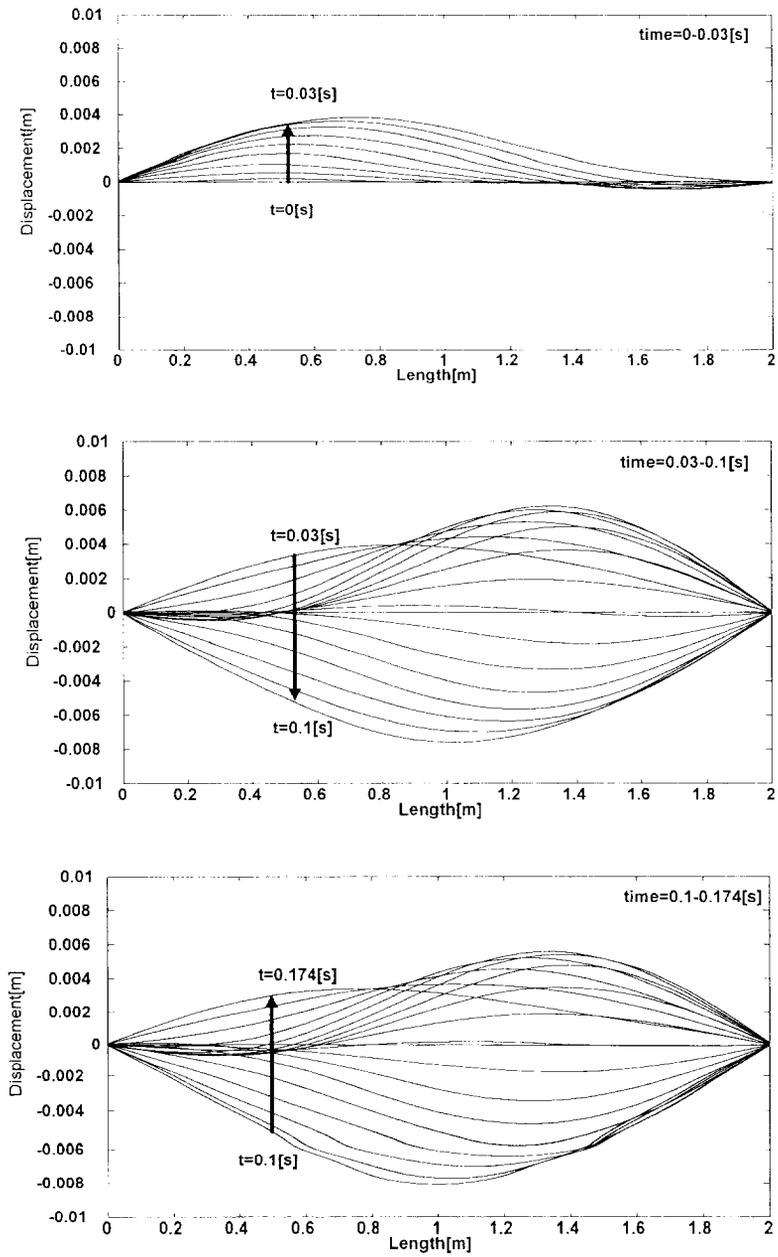


Fig. 3.7 Transient response simulation.

### 3.1.2 경탄성 지지를 갖는 직선보형 구조물

Fig. 3.8의 수치계산 모델 II는 직선보가 스프링과 감쇠기로 지지되어 있고, 구조물 중간에 경탄성 지지를 갖는 구조물이다. 구조물의 물성치는 수치계산 모델 I과 동일하다.

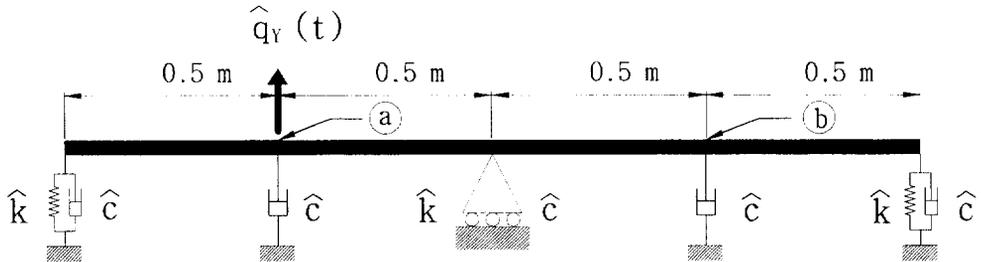


Fig. 3.8 Numerical model II.

참고로 Table 2는 수치계산 모델 II의 고유진동수를 유한요소-전달강성계 수법과 유한요소법으로 계산한 결과이다.

Table 2. Natural frequency for model II (unit : Hz)

Order \ Method	FE-TSCM	FEM
1st	19.904	19.904
2nd	30.943	30.943
3rd	77.067	77.067
4th	96.265	96.265
5th	161.981	161.981

수치계산에서, 시간 간격  $\Delta t$ 를 0.001초로 하여 0.2초까지 구조물의 과도응답을 계산하였다.

Fig. 3.8의 ㉠점에 횡방향의 조화 강제외력  $\hat{q}_y(t) = Q \cos \Omega t$  ( $Q = 10$  N,  $\Omega/2\pi = 10$  Hz)이 작용할 때, ㉠점의 횡방향 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과가 Fig. 3.9이다. 그리고, ㉡점의 횡방향 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 3.10이다. 수치계산 결과를 통해 두 기법의 결과가 잘 일치하였다. Fig. 3.11은 시간 경과에 따른 전체 직선형 구조물의 거동을 유한요소-전달강성계수법으로 계산한 결과이다.

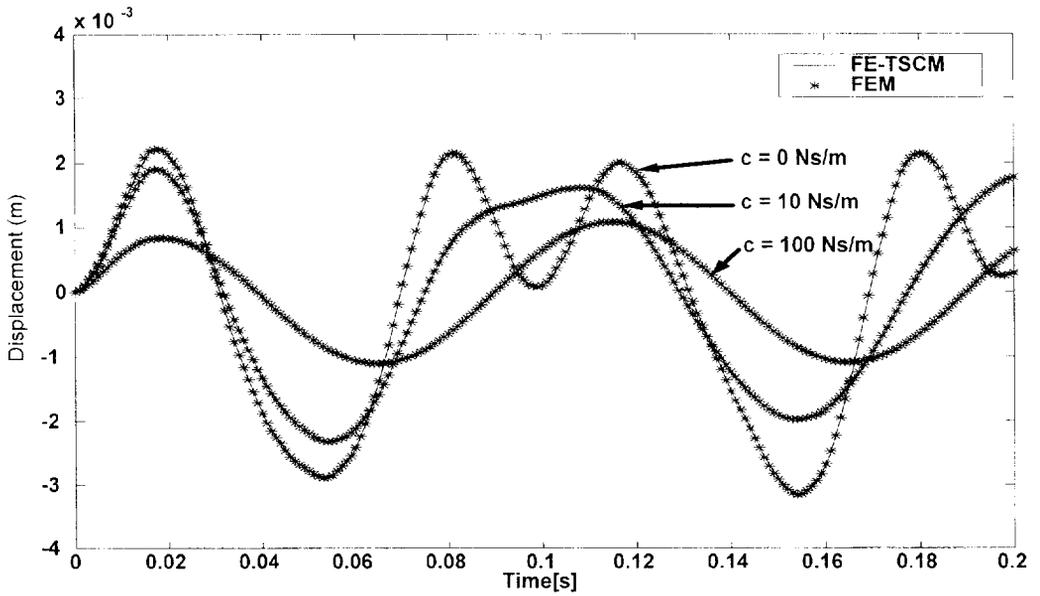


Fig. 3.9 Transient response at point (a) of numerical model II.

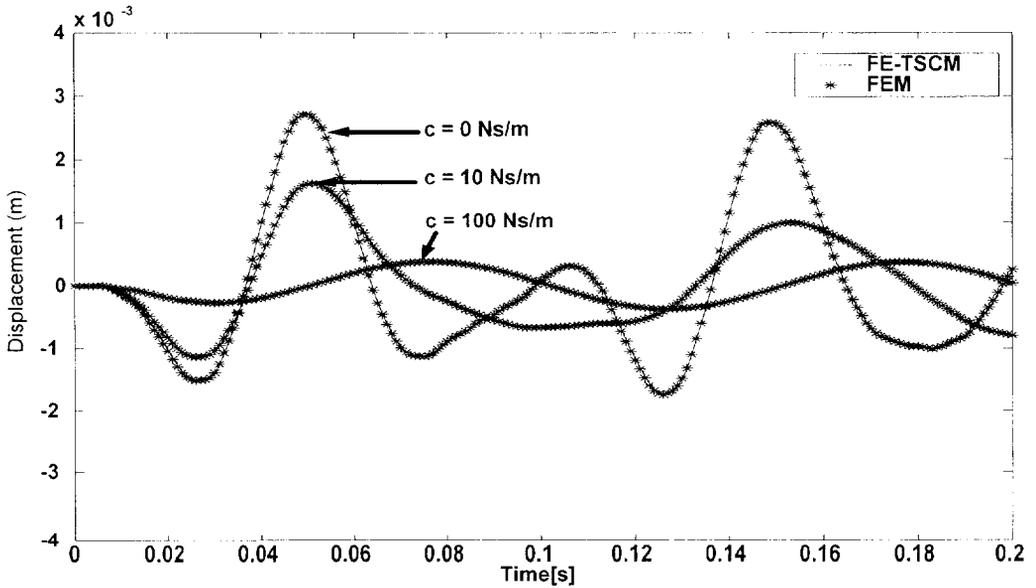


Fig. 3.10 Transient response at point (b) of numerical model II.

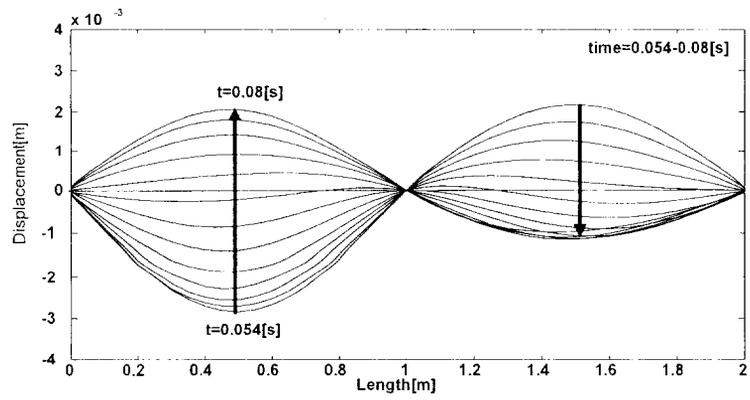
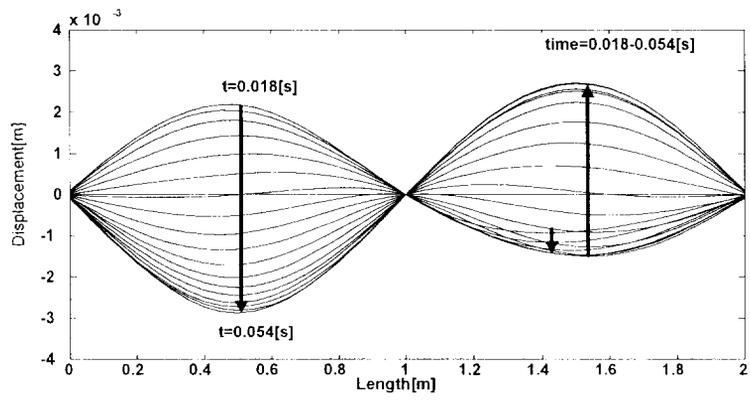
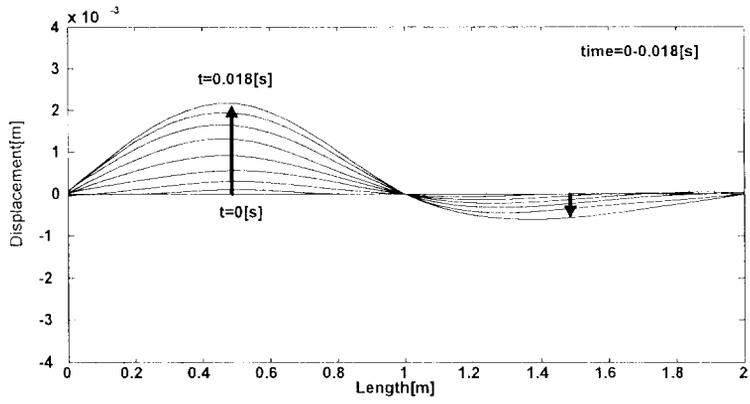


Fig. 3.11 Transient response simulation.

### 3.2 골조 구조물의 수치계산

이 절에서는 2.2절에서 정식화한 골조 구조물의 과도응답해석 알고리즘의 유용성을 확인하기 위하여, 굴곡형 구조물, 문형 구조물과 힌지를 갖는 문형 구조물을 대상으로 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 과도응답을 계산하였다.

#### 3.2.1 굴곡형 구조물

Fig. 3.12의 수치계산 모델 III은 계의 좌, 우단과 굴곡부가 스프링과 감쇠기로 지지된 구조물이며, 구조물을 60개의 부재요소로 분할하였다. 구조물의 물성치는 전체 길이 1.5 m, 직경 0.01 m, 밀도 7860 kg/m<sup>3</sup>, 종탄성계수 206 GPa. 축방향과 횡방향의 기초지지 스프링상수는 10<sup>5</sup> N/m이고, 점성감쇠기의 감쇠계수는 10 N·s/m이다.

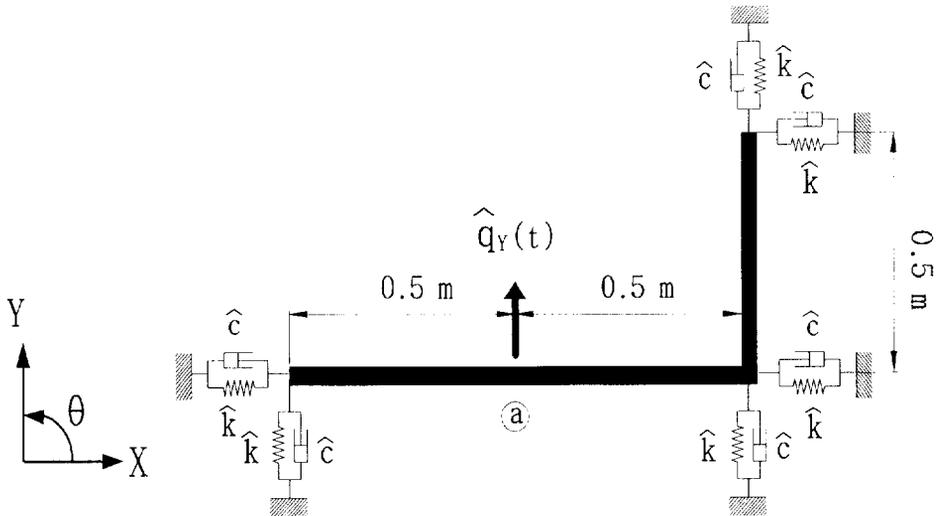


Fig. 3.12 Numerical model III.

Table 3은 수치계산 모델 III의 고유진동수를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과이다.

Table 3. Natural frequency for model III (unit : Hz)

order \ method	FE- TSCM	FEM
1st	25.099	25.099
2nd	71.525	71.525
3rd	81.830	81.830
4th	106.830	106.830
5th	122.620	122.620

수치계산에서, 시간 간격  $\Delta t$ 를 0.001초로 하여 0.3초까지 구조물의 과도응답을 계산하였다.

Fig. 3.12의 ㉠점에 횡방향의 조화 강제외력  $q_y(t) = Q \cos \Omega t$  ( $Q = 10 \text{ N}$ )이 작용할 때, ㉠점의 횡방향 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 3.13이다. 여기서 조화 강제외력의 진동수 ( $\Omega/2\pi$ )를 각각 10, 20, 25 Hz로 하여 각 진동수별로 과도응답을 계산하였고, 유한요소-전달강성계수법의 결과와 유한요소법의 결과가 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 가진 진동수가 25 Hz인 경우 과도응답이 증폭되는 이유는 Table 3에서 알 수 있듯이 25 Hz가 1차 고유진동수의 부근이기 때문이다.

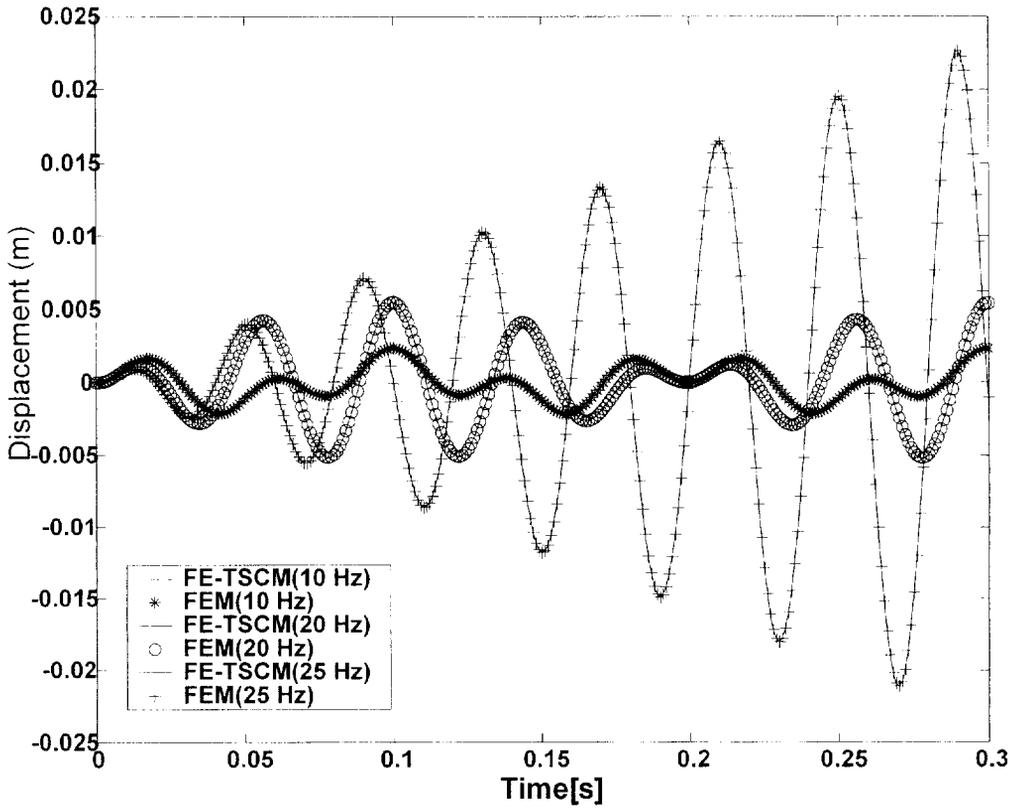


Fig. 3.13 Transient response at point (a) of numerical model III.

### 3.2.2 문형 구조물

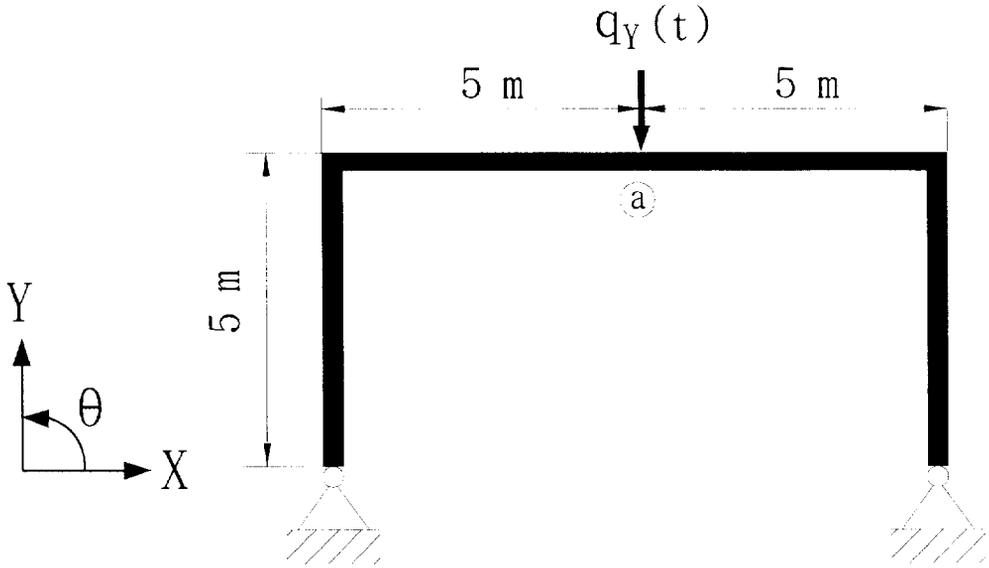


Fig. 3.14 Numerical model IV.

Fig. 3.14의 수치계산 모델 IV는 교량과 크레인 등에서 쉽게 볼 수 있는 문형구조물이고, 구조물을 400개의 부재요소로 분할하였다. 구조물 양단의 경계 조건은 단순지지이다. 따라서 유한요소-전달강성계수법에서는 경계조건을 병진스프링( $\hat{k}_x = \hat{k}_y = 10^{20}$  N/m)과 회전스프링( $\hat{k}_\theta = 0$  N·m/rad)으로 모델링하였다. 구조물의 물성치는 구조물 전체 부재의 단면을 Fig. 3.15과 같은 I형강(W200×200)이고, 전체 길이 20 m, 밀도 7860 kg/m<sup>3</sup>, 종탄성계수 206 GPa. 비례감쇠는 강성의 0.5%로 고려하였다.

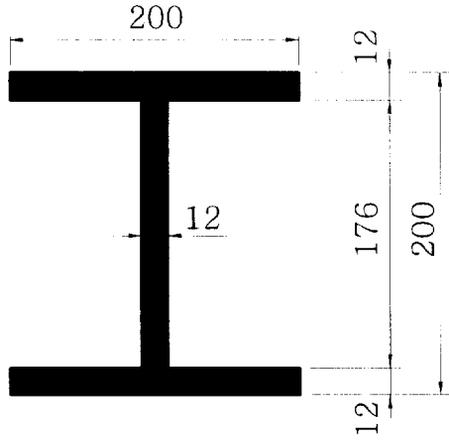


Fig. 3.15 Cross section of numerical model IV(unit : mm).

참고로 Table 4는 수치계산모델 IV의 고유진동수를 유한요소-전달강성계수 법과 유한요소법으로 계산한 결과이다.

Table 4. Natural frequency for model IV (unit : Hz)

order \ method	FE-TSCM	FEM
1st	2.471	2.471
2nd	9.230	9.230
3rd	24.462	24.462
4th	29.824	29.824
5th	38.898	38.898

Fig. 3.16은 수치계산 모델 IV의 1차, 2차와 3차 고유모드를 나타낸 그림이다.

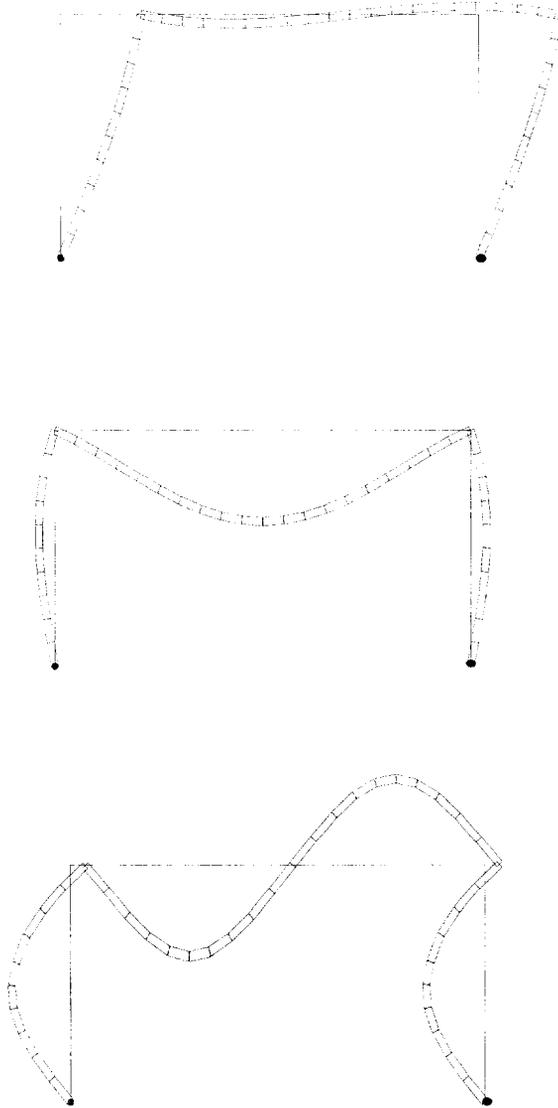


Fig. 3.16 Natural mode of numerical model IV.

수치계산에서, 시간 간격  $\Delta t$ 를 0.005초로 하여 0.5초까지 구조물의 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산하였다. Fig. 3.14의 ㉠점에 횡방향의 조화 강제외력  $q_y(t) = Q \cos \Omega t$  ( $Q = 2000 \text{ N}$ )이 작용할 때, ㉠점의 횡방향 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 3.17이다. 여기서 조화 강제외력의 진동수 ( $\Omega/2\pi$ )를 각각 5, 7, 9 Hz로 하여 각 진동수별로 과도응답을 계산하였다.

Fig. 3.14의 ㉠점에 스텝하중이  $Q = 10000 \text{ N}$ 으로 작용할 때 ㉠점의 횡방향 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과가 Fig. 3.18이다. 그리고 Fig. 3.14의 ㉠점에 임펄스하중이 작용할 때 ㉠점의 횡방향 과도응답이 Fig. 3.19와 같았다.

다양한 하중들에 대하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 문형 구조물의 과도응답을 해석한 결과가 잘 일치하였다.

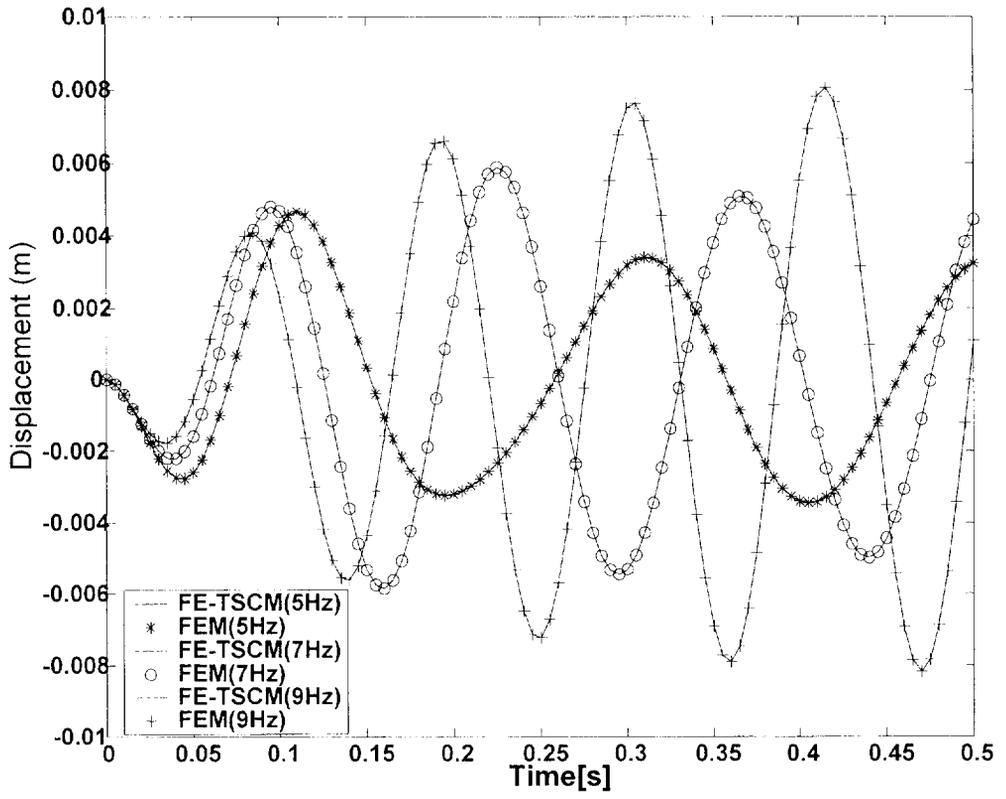


Fig. 3.17 Transient response at point (a) of numerical model IV.

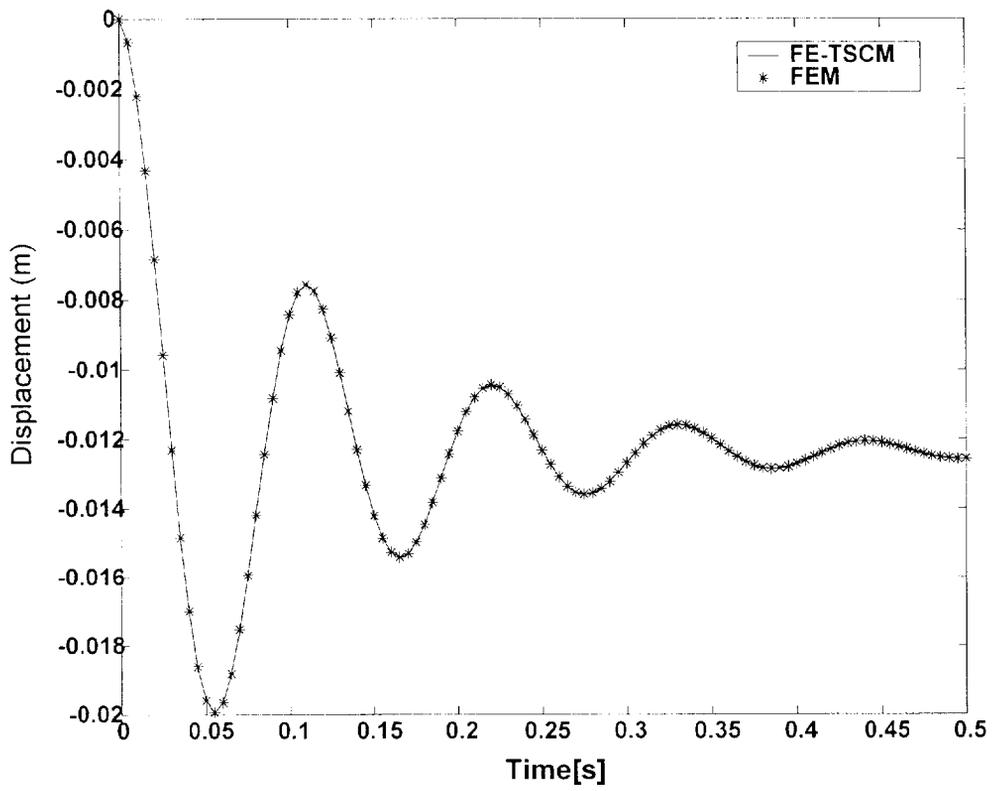


Fig. 3.18 Transient response at point (a) of numerical model IV.

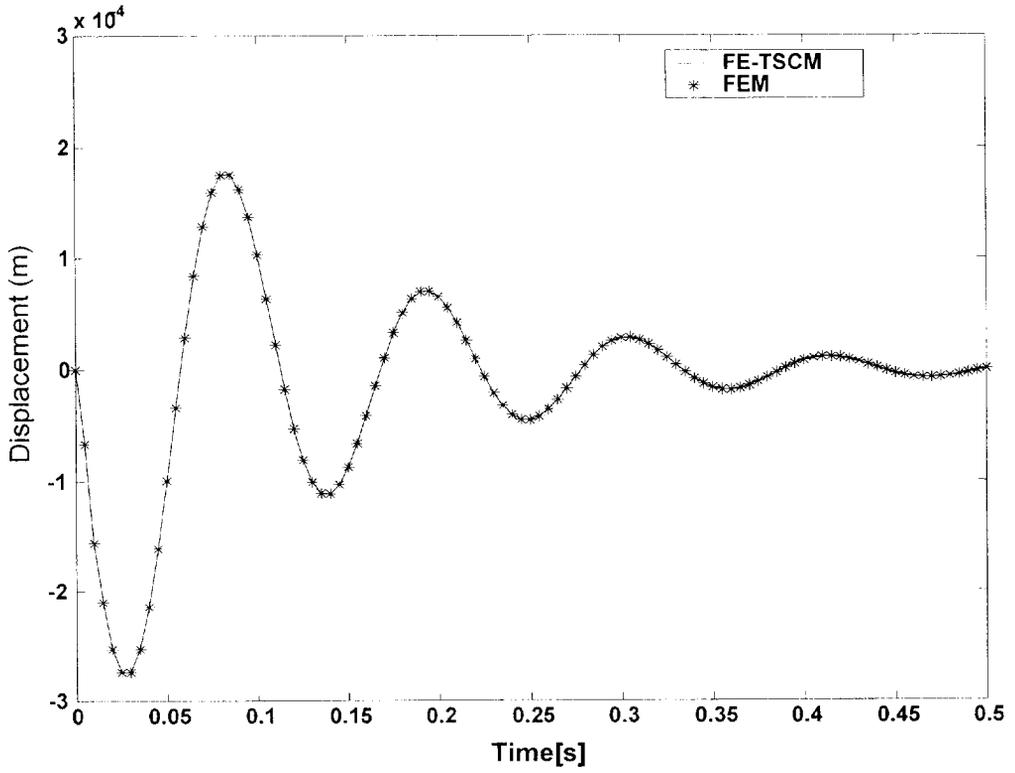


Fig. 3.19 Transient response at point ① of numerical model IV.

### 3.2.3 힌지를 갖는 문형 구조물

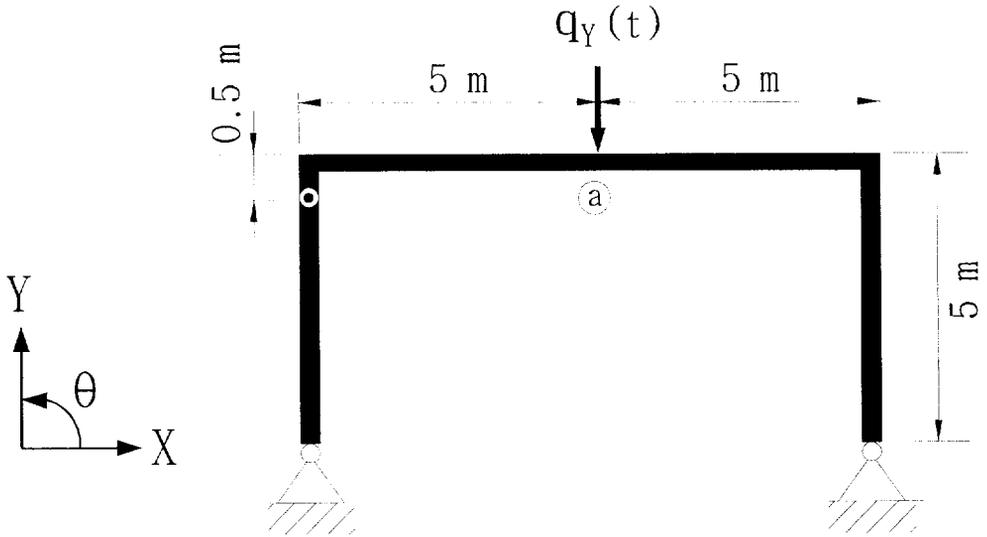


Fig. 3.20 Numerical Model V.

Fig. 3.20의 수치계산 모델 V는 힌지를 갖는 문형구조물이다. 구조물의 물성치는 수치계산 모델 IV와 동일하다. 힌지는 굴곡점에서 0.5 m 떨어져 있고, 유한요소-전달강성계수법으로 수치계산시에는 병진 및 회전 스프링상수의 값을  $10^{20}$  N/m,  $10^{-20}$  N·m/rad로 고려하였다.

Table 5는 수치계산 모델 V의 고유진동수를 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과이다.

Table 5. Natural frequency for model V (unit : Hz)

order \ method	FE-TSCM	FEM
1st	1.414	1.414
2nd	7.620	7.620
3rd	23.720	23.720
4th	28.742	28.742
5th	34.923	34.923

수치계산에서, 시간 간격  $\Delta t$ 를 0.005초로 하여 1초까지 구조물의 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산하였다. Fig. 3.20의 ㉠점에 횡방향의 조화 강제외력  $q_y(t) = Q \cos \Omega t$  ( $Q = 2000$  N)이 작용할 때, ㉠점의 횡방향 과도응답을 계산한 결과가 Fig. 3.21이다. 여기서 조화 강제외력의 진동수 ( $\Omega/2\pi$ )를 각각 5, 7, 9 Hz로 하여 각 진동수별로 과도응답을 계산하였다.

Fig. 3.20의 ㉠점에 스텝하중이  $Q = 10000$  N으로 작용할 때 ㉠점의 횡방향 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산한 결과가 Fig. 3.22이다. 그리고 Fig. 3.20의 ㉠점에 임펄스하중이 작용할 때 ㉠점의 횡방향 과도응답이 Fig. 3.23과 같았다.

다양한 하중들에 대하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 힌지를 갖는 문형 구조물의 과도응답을 해석한 결과가 잘 일치하였다.

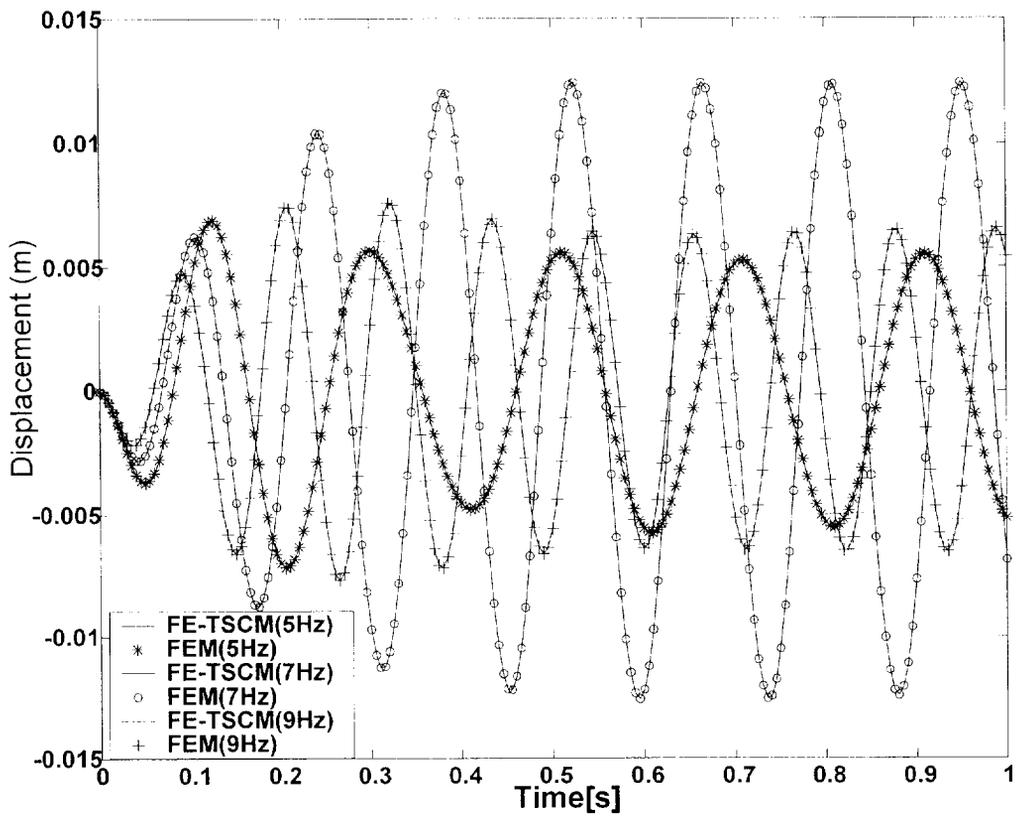


Fig. 3.21 Transient response at point (a) of numerical model V.

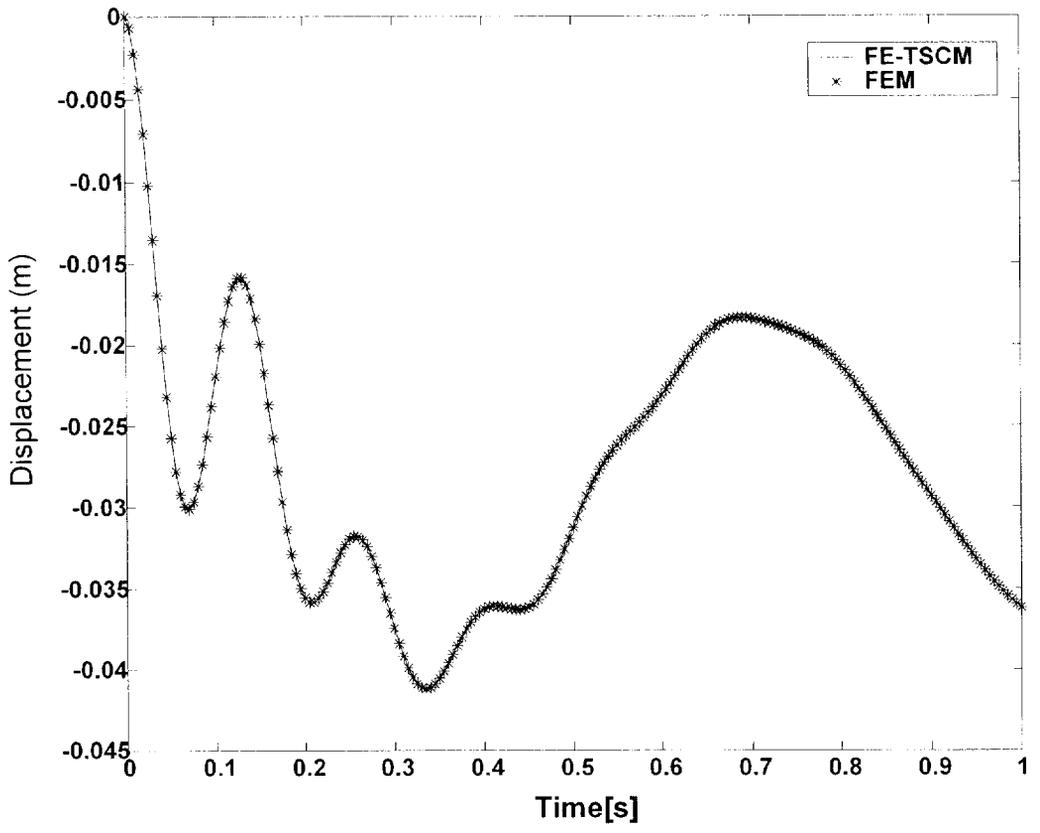


Fig. 3.22 Transient response at point (a) of numerical model V.

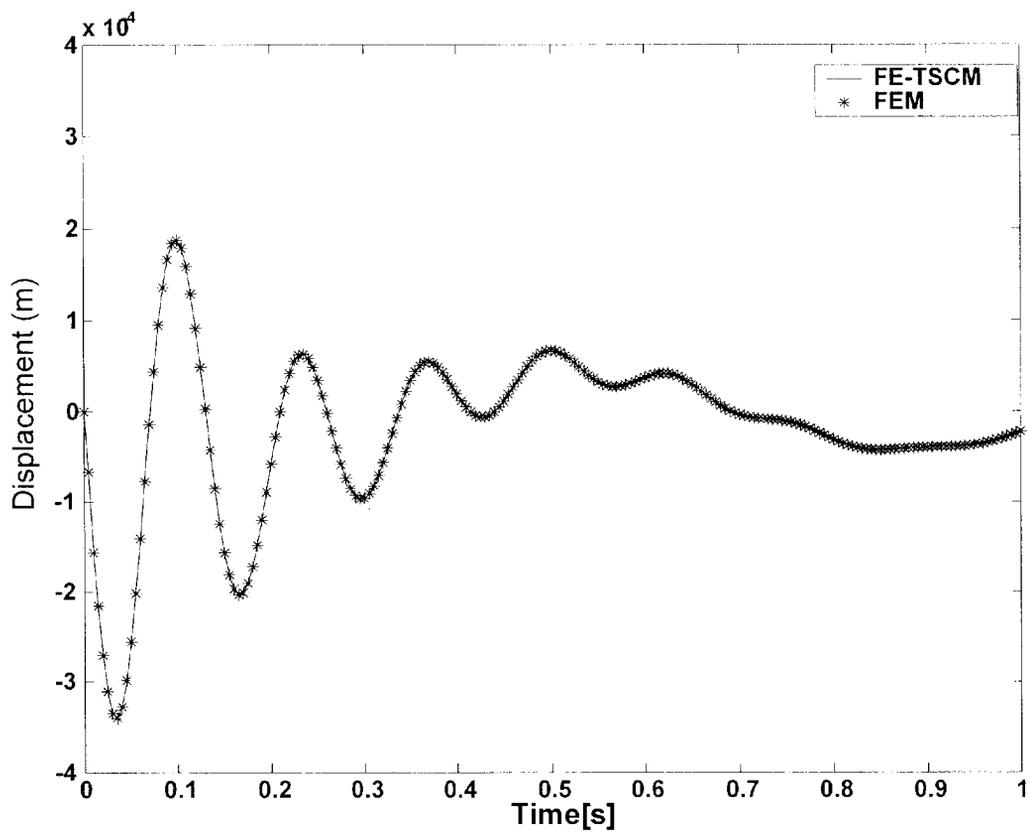


Fig. 3.23 Transient response at point (a) of numerical model V.

Table 6은 힌지를 갖는 문형 구조물에 조화 강제외력( $Q = 2000 \text{ N}$ ,  $\Omega/2\pi = 5 \text{ Hz}$ )이 작용할 때 0.005초 간격으로 0.3초까지의 과도응답을 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 계산하는 데 소요된 시간이다. Table 6으로부터 부재요소의 분할 수가 증가할수록 유한요소-전달강성계수법이 계산시간면에서 유한요소법보다 우수함을 알 수 있다.

Table 6. Comparison of computation time for model V (unit : s)

Number of beam elements	FE-TSCM	FEM
100	2.2	4.5
200	4.5	23.8
300	6.7	66.0
400	8.7	140

## 제 4 장 결 론

이 논문에서는 기존의 유한요소법에 있어서의 모델링 기법을 쉽게 이용할 수 있는 유한요소-전달강성계수법을 새롭게 제안하였다. 이 방법을 사용하여 직선형 구조물과 골조 구조물의 과도응답해석 알고리즘을 정식화하였고, 직선형 구조물, 굴곡형 구조물, 문형 구조물 등에 대한 수치실험을 수행하였다. 그 결과들을 유한요소법에 의한 결과들과 비교·검토를 통하여 제안한 해석기법의 유용성을 확인할 수 있었다.

## 참 고 문 헌

- (1) Joseph W. Tedesco, William G. McDougal, C. Allen Ross, 1999, Structural Dynamics Theory and Application, Addison-Wesley.
- (2) 김대근, 김대영, 안재현, 박철림, 1997, “유사동적 실험법을 이용한 구조물의 내진 성능 평가”, 한국지진공학회논문집, 제1권 제2호, pp. 49~57.
- (3) 전대한, 1997, “ 응답스펙트럼법에 의한 고층 건축물의 탄소성 지진응답해석법”, 한국지진공학회논문집, 제1권 제4호, pp. 1~9.
- (4) DARYL L. LOGAN, 1992, A first course in the finite element method(2nd ed.), PWS Publishing Company.
- (5) H. Yamakawa, T. Ohinishi, 1983, “Dynamic Response Analysis of Structure with Large Degrees of Freedom by Step-by-step Transfer Matrix Method”, Bull. of JSME, Vol. 26, No. 211, pp. 109~116
- (6) A. S. Kumar, T. S. Sankar, 1986, “A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems”, Computers & Structures, Vol. 23, No. 4, pp. 545~552
- (7) D. H. Moon, M. S. Choi, 2000, “Vibration Analysis for Frame Structures using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient”, Journal of Sound & Vibration, Vol. 234, No. 5, pp. 725~736.
- (8) 문덕홍, 최명수, 1999, “강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석”, 대한기계학회논문집 A권, 제23권, 제2호, pp. 344~356.
- (9) 최명수, 1999, 강성계수의 전달을 이용한 구조물의 진동해석기법, 부경대학교 대학원 공학박사 학위논문.
- (10) Singiresu S. Rao, 1990, Mechanical vibration(2nd ed.), Addison-Wesley.

## 부록 A

보요소의 질량행렬, 강성행렬과 감쇠행렬은 다음과 같다.

1) 보요소의 질량행렬

$$M = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & -4L^2 \end{bmatrix}$$

여기서  $\rho$ 는 보요소의 밀도,  $A$ 는 단면적,  $L$ 은 길이를 나타낸다.

2) 보요소의 강성행렬

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

여기서  $E$ 는 종탄성계수,  $I$ 는 단면2차모멘트이다.

3) 보요소의 감쇠행렬

$$C = \alpha M + \beta K \quad \text{또는} \quad C = \text{diag}[0 \dots 0, c_j, 0 \dots 0]$$

여기서  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 상수이고,  $c_j$ 는 계의  $j$ 번째 자유도의 점성 감쇠계수이다.

## 부록 B

평면 부재요소의 질량행렬, 강성행렬과 감쇠행렬은 다음과 같다.

1) 평면 부재요소의 질량행렬

$$M = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & -4L^2 \end{bmatrix}$$

여기서  $\rho$ 는 보요소의 밀도,  $A$ 는 단면적,  $L$ 은 길이를 나타낸다.

2) 평면 부재요소의 강성행렬

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

여기서  $E$ 는 종탄성계수,  $A$ 는 단면적,  $I$ 는 단면2차모멘트이다.

3) 평면 부재요소의 감쇠행렬

$$C = \alpha M + \beta K \quad \text{또는} \quad C = \text{diag}[0 \dots 0, c_j, 0 \dots 0]$$

여기서  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 상수이고,  $c_j$ 는 계의  $j$ 번째 자유도의 점성 감쇠계수이다.

## 감사의 글

어느덧 시간이 흘러 인생의 한 단계를 마무리하는 순간입니다. 학문적, 정신적으로 힘든 대학원 생활에 길을 보여주신 여러 고마운 분들에게 짧은 글로나마 감사의 마음을 드리고 싶습니다.

늘 부족함을 느끼는 저를 변함없는 관심과 배려로 열과 성의를 다해 지도해주신 문덕홍 교수님께 깊은 감사를 드립니다.

항상 인자한 얼굴로 격려해주시던 안수길 교수님, 학문에 대한 열정과 변함없는 관심을 주신 양주호 교수님, 강의에 열과 성의를 다하시는 고성위 교수님, 항상 지대한 관심을 보여주신 김시영 교수님, 한규일 교수님, 고대권 교수님, 장지성 교수님 모두에게 감사드립니다.

대학원 시작부터 논문이 완성되는 그 순간까지 세세한 충고와 학문의 진로를 인도하고 자세하게 가르쳐 주신 최명수 교수님, 실무경험을 중심으로 나아가갈 학문의 방향을 가르쳐 주시고 귀중한 실무지식과 현장체험을 습득하게 해주신 허철원 선생님, 항상 제 곁에서 부족한 전공 기초지식을 닦아주시고 대학원 생활의 정신적 터전을 마련해주신 강현석 선배님 그리고 해양수산연수원에 계시지만 항상 자상하게 챙겨주시고 살피주시는 김용복 교수님께 감사의 마음을 전합니다.

세미나를 통한 학문적 깊이와 여러 학술대회 참석을 통한 학문적 시야와 경향을 넓힐 수 있었던 대학원 생활이 좋았고, 이러한 것들을 함께 공유할 수 있었던 선후배, 동기들이 있어 더욱 값진 대학원 생활이었습니다. 대학원 생활 이후의 삶을 항상 걱정해주신 김원래 선배님, 세상사의 힘든 점을 알려주신 권석재 선배님과 김병수 선배님, 후배의 힘든 점을 헤아려 주시는 멋진 하용이형, 대학원 시작부터 마지막까지 꾸준히 함께 한 동기 현주, 다재다능한 동기 성호, 매사 진지한 후배 종구 그리고 기계역학 연구실의 학부생들인 정훈이, 승훈이, 형훈이, 상훈이, 대회에게 고마움을 전합니다. 그리고 서로에게 격려와 힘이 되어주신 제어기계공학과 대학원 선배님들인 조규학 선배님, 김영완 선배님, 주영석 선배님, 이기동 선배님, 그리고 동기들인 용순이 형, 정업이, 창영이, 종대, 귀영이, 경환이, 황훈이와 후배 여러분들에게 감사의 인사를 드립니다.

마지막으로 그동안 무사히 학업을 마칠 수 있도록 많은 이해를 해주신 사랑하는 할머니, 아버지, 어머니, 형, 누나, 여동생 그리고 여러 친지분들의 격려와 도움에 정말 감사드립니다.

2002년 1월 김 성 진 올림