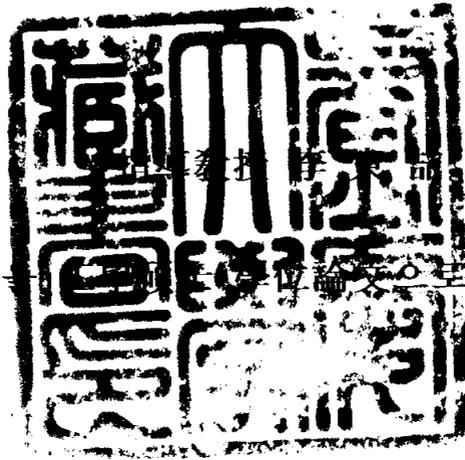


工學碩士 學位論文

축차계산을 이용한 시간영역의
건설동정에 관한 연구



이 論文은 釜慶大學 電氣工學科 安正益 提出함

2003年 2月

釜慶大學校 大學院

電氣工學科

安正益

목 차

제1장 서론	1
제2장 건설제어와의 정합성	3
2.1 모델집합의 표현	3
2.2 건설제어를 고려한 시스템의 동정	5
제3장 문제의 정식화	7
3.1 가법적 불확실성의 보간	7
3.2 건설동정의 평가함수	10
제4장 분자의 건설동정	11
4.1 분자 파라미터의 생성	11
4.2 분자의 동정	12
제5장 축차계산을 이용한 분모 분자의 건설동정	14
5.1 잡음이 없는 경우	14
5.2 관측잡음이 부가된 경우	22
제6장 시뮬레이션	28
제7장 결론	31
참고 문헌	32
부록	34
Abstract	43

그림 목차

Fig 1. Block diagram of LFT -----	5
Fig 2. Block diagram of System -----	9
Fig 3. Set relation of $\Gamma_{\widehat{n}_i}, \widehat{d}_i, \Gamma_{\text{arx}(\widehat{n}_i)}, \Gamma_{\text{oe}(\widehat{n}_i)}$ -----	13
Fig 4. Robust identification when denominator decision -----	18
Fig 5. Robust Identification by recursive computation -----	19
Fig 6. Robust identification when denominator decision -----	20
Fig 7. Robust Identification by recursive computation -----	21
Fig 8. Estimate value of the $G(p)$ into $Z_p U_p^{-1}$ -----	23
Fig 9. Relation of u_0 and e_i ($u_0=0.3, u_0=0.4, u_0=0.5$) ---	25
Fig 10. Relation of u_0 and e_i ($u_0=3, u_0=4, u_0=5$) -----	25
Fig 11. Comparison with the case that G_p is suppose to be $U_p^{-1} Y_p, \widehat{G}_p$ (In case of noiseless) -----	27
Fig 12. Robust identification of the case $G_p = U_p^{-1} Y_p$ ($u_0=5$) -----	29
Fig 13. Robust identification that is estimated G_p by least square method -----	30
Fig 14. Pole of transfer function $u^{-1}(z)$ -----	34
Fig 15. Estimation using input u which is obtained by equation (A. 1) -----	36

제1장 서론

시스템동정은 제어대상의 입·출력 데이터로부터 어떤 목적을 근거로 하여 대상과 동일한 것을 증명할 수 있도록 몇 개의 수학적모델(Mathematics model)을 구축하는 것이다. 결국 실 시스템의 여러 가지 물리적인 구조는 수식 또는 수치로 표현된다. 시스템동정은 제어 시스템 설계에 있어서 중요한 단계이며, 모델링의 가능 여부가 설계의 결과를 크게 좌우한다.

최소 2승법(Least squares method, LSM)을 대표하는 동정에서는 관측데이터에 부과된 확률적인 외란을 어떻게 제거할 것인가의 여부를 문제설정으로 고려해 왔다. 이에 대해 견실제어(Robust control)의 발전에 수반되는 연구가 성행되고 있는 견실동정(Robust identification)에서는 수식모델로써 정확하게 파악될 수 없는 부분 또는 환경에 의해서 변동하는 부분을 플랜트의 불확실성으로 인식하고 평가한다.

견실동정에 관한 연구는 시간영역과 주파수영역으로 나눌 수 있다. 이들 양자는, 얻어지는 정보로부터 미지의 부분을 보간이론(Interpolation theorem)에 의해 모두 고려할 수 있도록 공통접근을 취한다.

본 논문에서는 시간영역에 있어서 이산시간 시스템의 견실동정에 대하여 언급하고자 한다. Zhou & Kimura[1, 2]의 방법에서는 시간영역의 경우 데이터 수의 유한성에 의해 생기는 불확실성의 고차 임펄스 응답열(Higher impulse response series)을 Caratheodory-Feger[3]의 정리에 의해 보간되고 있다. 그러나 이 방법은 공칭모델(Nominal model)의 분모가 다른 추정방법 등으로 주어진다고 가정하면 공칭모델은 수치해석적으로 유효하게 구할 수 없다.

본 논문에서는 Zhou & Kimura 방법의 경우 수치해석상의 문제점을 지적하고 확률적 잡음의 유·무를 고려하여 축차계산을 이용한 건설동정을 제안했다. 그 동정법의 수치 시뮬레이션을 나타내어 그 유효성을 확인한다.

본 논문의 구성은 먼저 2장에서 건설제어와 건설동정의 관련성의 모델집합을 중심으로 논한다. 3장, 4장에서는 동정문제의 정식화를 행하고 Zhou & Kimura 방법의 유효성과 수치 해석상의 문제점을 지적한다. 5장, 6장에서는 그 문제점을 해결하는 방법을 제안하고 수치 시뮬레이션을 통하여 그 유효성을 확인한다. 또한 여기서는 확정적인 (Deterministic) 불확실성을 평가기준으로 하는 건설동정법에 대해 실제 동정실험에서 포함된다고 할 수 있는 확률적인 외란의 영향을 고려하여 논의를 진행하였다. 7장은 결론이다.

제2장 건설제어와의 정합성

2. 1 모델 집합의 표현[4]

건설제어 이론과의 정합성(Adjustment)에는 먼저 모델집합을 건설제어의 설계법에 기초하여 기술 할 필요가 있다. 모델집합의 기술은 모델에 포함되는 불확실성 구조를 결정하는 것에 대응되며, 건설제어에서 잘 이용되는 모델집합에는 구조화 되지 않은 불확실성과 구조화된 불확실성이 있다.

1) 구조화 되지 않은 불확실성

불확실성의 원인이 명확하지 않고 전체가 막연한 불확실성이나 주파수응답시험의 결과를 기본으로 하여 시뮬레이션과의 차이를 불확실성이라고 하는 경우 등이 해당된다.

$$\text{[가법적]} \quad G(z) = G_0(z) + \Delta(z)W(z) \quad (2. 1)$$

$$\text{[승법적]} \quad G(z) = (I + \Delta(z)W(z)) G_0(z) \quad (2. 2)$$

여기서, $G_0(z)$ 는 공칭모델, $\Delta(z)$ 는 불확실성을 나타내는 미지의 섭동행렬 (Perturbation matrix)이며, 보통 식(2. 3)과 같이 기준화 되어 있다.

$$\|\Delta(z)\|_{\infty} \leq 1 \quad (2. 3)$$

또, $W(z)$ 는 불확실성의 주파수 하중함수(Weighting function)이다.

2) 구조화 된 불확실성

불확실성의 원인이 어느 정도 특정되어 있고 플랜트 전체와 불확실성의 구조가 확실한 경우이다. 예를 들면, 플랜트의 어떤 물리정수의 수치에 불확실성이 있는 경우 등이 여기에 해당된다. 식(2. 1)이나 식(2. 2)의 불확실성의 $\Delta(z)$ 구조는 식(2. 4)와 같은 경우이다.

$$\Delta(z) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta_n \end{bmatrix} \quad (2. 4)$$

식(2. 1)이나 식(2. 2)는 선형분수변환(Linear fractional transformation, LFT) 식(2. 5)와 같이 표현된다.

$$G(z) = M_{11}(z) + M_{12}(z)\Delta(z) (I - M_{22}(z)\Delta(z))^{-1} M_{21}(z) \quad (2. 5)$$

식(2. 5)는 보통 식(2. 6)과 같이 나타 낼 수 있다.

$$G(z) = LFT (M(z) : \Delta(z)) \quad (2. 6)$$

$M(z)$ 는 식(2. 7)과 같다.

$$M(z) = \begin{bmatrix} M_{11}(z) & M_{12}(z) \\ M_{21}(z) & M_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (2. 7)$$

식(2. 1)의 가법적 불확실성은 식(2. 8)과 같다.

$$M(z) = \begin{bmatrix} G(z) & I \\ W(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (2. 8)$$

식(2. 2)의 승법적 불확실성은 식(2. 9)와 같이 놓은 경우에 해당된다.

$$M(z) = \begin{bmatrix} G(z) & I \\ G(z)W(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

이 LFT의 물리적 의미는 Fig. 1과 같다. 단, u , y 는 각각 시스템 $M(z)$ 의 입력, 출력을 나타내는 것이다.

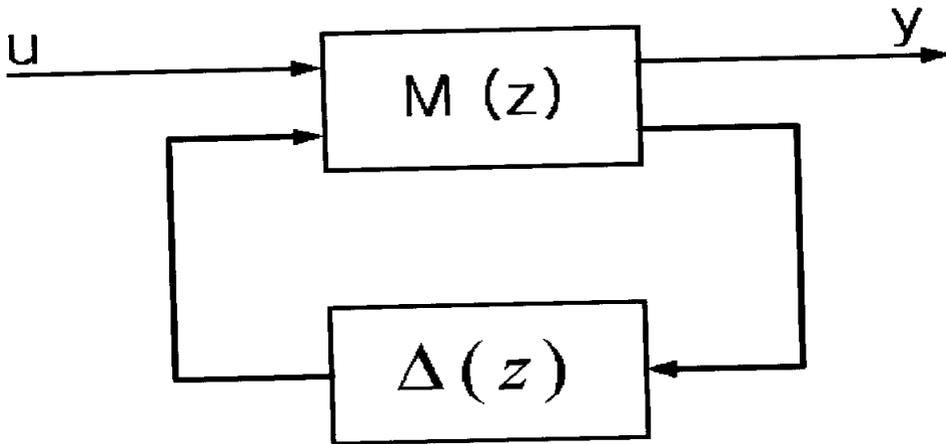


그림 1 LFT의 블록선도
Fig. 1 Block diagram of LFT

2. 2 견실제어를 고려한 시스템 동정[4]

앞 절에서 견실제어의 관점에서 모델집합의 표현에 대해 논하였다. 여기서는, 시스템동정의 측면에서 모델집합의 표현에 대해 논하고자 한다. 시스템동정에서는 동정대상에 관한 여러 가지 사전정보에 기초하여 관측한 입,출력 데이터를 이용하여 보다 정확한 사후정보의 사상(Mapping)을 행한다. 사전정보는 대상에 관한 지식에 한하지 않고 대상의 환경에 대한 지식, 즉 검출잡음이나 외란에 관한 정량적인 지식도 사전정보의 일종이다. 이와 같은 사전정보보다 앞 절에서 언급한 모델집합의 틀에 넣을 필요가 있고, 그때의 제어목적도 중요한

제어역할을 한다. 예를 들면, 가법적 불확실성이나 승법적 불확실성에 있어서 주파수 하중함수 $W(z)$ 는 사전정보가 되는 제어목적에 직접 관계되므로 영향을 미친다. 이들 제어시스템에 관계되는 불확실성의 수단도 사전정보의 일종이라고 할 수 있다. 사후정보는 모델링을 행하기 위해 얻으려는 지식이다. 결국, 시스템 해석을 하기 위해 얻는 실험 데이터라고 생각한다. 이와 같은 사후정보는 사전정보에 기초하여 모델집합의 타당성 평가에 이용 될 수 있다.

이 평가에는

- (1) 사전정보에 기초한 모델집합 중에 관측된 사후정보(데이터)을 발생시키는 모델이 적어도 한 개 존재하는가.
- (2) 사전정보에 기초한 모델집합이 관측된 사후정보(데이터)을 발생시키는 모델을 모두 포함하는가.

등의 두 종류가 있으며, 각각

- (1) \Rightarrow 사후 데이터와 정합하는 모델이 적어도 한 개 포함되는 최소모델을 구하는 문제.
- (2) \Rightarrow 사후 데이터와 정합하는 모델이 모두 포함되는 최소 모델 집합을 구하는 문제.

로써 정식화된다. 견실제어와의 정합성을 고려하면 최대 모델집합을 구하는 것이 필요하지만, 실제로는 최대 모델집합을 구하는 것은 곤란한 경우가 많다.

제3장 문제의 정식화

본 장에서는 문제설정을 (1)의 경우로 해석을 진행하기로 한다. 사전정보에 기초한 모델집합 중에 관측된 사후정보(데이터)를 발생시키는 모델이 한 개 포함되는 최소 모델집합을 구하는 문제로 해석을 진행하기로 한다.

3. 1 가법적 불확실성의 보간

동정대상은 이산시간의 단일입력 단일출력 시스템이며 그 플랜트의 전달함수 $G(z)$ 는 사전정보에 의해 식(2. 1)로 표현된다고 가정한다. 여기서, 주파수 하중함수 $W(z)$ 는 제어시스템의 설계사양에 의해 구성되므로 여기서는, $W(z)=1$ 이라고 한다. 이때 식(3. 1)이 성립한다.

$$G(z) = \tilde{G}(z) + \Delta(z) \quad (3. 1)$$

$\tilde{G}(z)$ 는 공칭모델을 나타내며 식(3. 2), (3. 3)의 유리함수로 표현된다.

$$\tilde{G}(z) = \frac{\tilde{N}(z)}{\tilde{D}(z)} \quad (3. 2)$$

$$= \frac{\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 z^{-1} + \dots + \tilde{n}_q z^{-q}}{1 + \tilde{d}_1 z^{-1} + \dots + \tilde{d}_q z^{-q}} \quad (3. 3)$$

식(3. 1)에서 가법적 불확실성 $\Delta(z)$ 를 z^{-1} 의 급수로 전개하여 식(3. 4)와 같이 표현한다.

$$\Delta(z) = \delta_0 + \delta_1 z^{-1} + \dots + \delta_p z^{-p} + \delta_{p+1} z^{-(p+1)} + \dots \quad (3.4)$$

입 · 출력 데이터가 $p+1$ 개 ($p > q+1$)라 하면, $\Delta(z)$ 의 p 차까지의 계수 ($\delta_0, \dots, \delta_p$)는 입 · 출력 데이터 ($u_0, \dots, u_p, y_0, \dots, y_p$)와 동정데이터 ($\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_q, \tilde{n}_0, \dots, \tilde{n}_q$)에 의해 결정된다.

그 이상의 고차항에 대해서는 미지이다.

이 고차항 (δ_{p+1}, \dots)의 취급에 관하여는 다음과 같은 사항을 생각 할 수 있다.

(1) $p+1$ 차 이하의 항은 0이라고 한다.

(2) $p+1$ 차 이상의 항은 미지이며, 모든 가능한 함수의 집합을 고려한다.

여기서는 (2)의 경우를 취급하기로 한다. 그리고 가법적 불확실성 $\Delta(z)$ 의 H_∞ 노름(norm)을 최소로 하여 보간하고 그 하계(Lower-bounded)를 평가하기로 한다.

[정리 3. 1] Caratheodory - Fejer 정리

$$\min_{g(z) \in H_\infty} \|x_0 + \dots + x_p z^{-p} + z^{-(p+1)} g(z)\|_\infty = \bar{\sigma}(X_p) \quad (3.5)$$

이 정리는 p 차까지의 계수 (x_0, \dots, x_p)가 기지함수 $x(z)$ 의 H_∞ 노름의 하계 Toeplitz행렬 X_p 의 최대 특이치(Maximum singular value)[5]로 된다. 그리고, Fig. 2와 같은 블록선도로 표현되는 시스템을 고려하자. 단, v 는 출력에 부가되는 백색관측 잡음이다.

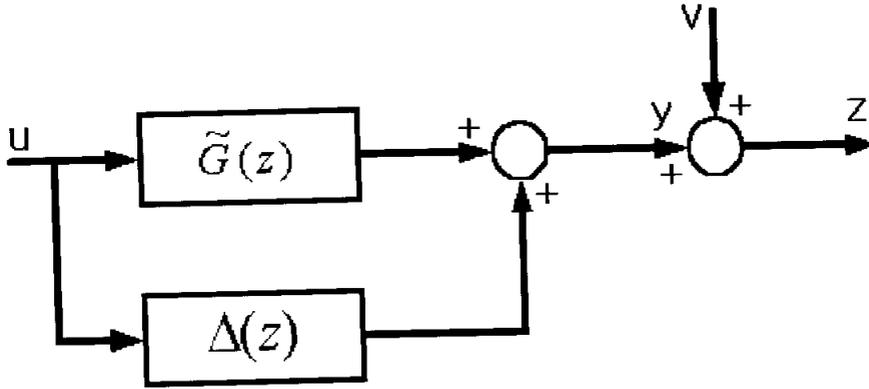


그림 2 시스템의 블록선도

Fig. 2 Block diagram of System

신호 u , z 잡음 v 전달함수 $\tilde{G}(z)$ 에 관한 Toeplitz행렬을 각각 U_p , Z_p , V_p 및 G_p 라 하면 식(3. 6)과 같이 표현된다.

$$Z_p = G_p U_p + V_p \quad (3. 6)$$

$u_0 \neq 0$ 이면 U_p^{-1} 가 존재하므로 식(3. 7)이 성립된다.

$$G_p = (Z_p - V_p) U_p^{-1} \quad (3. 7)$$

식(3. 1)에서 $G(z) = \tilde{G}(z) + \Delta(z)$ 이므로 $\tilde{G}(z)$, $\Delta(z)$ 의 Toeplitz행렬을 \tilde{G}_p , Δ_p 라 하면 식(3. 8)과 같이 표현된다.

$$\Delta_p = G_p - \tilde{G}_p \quad (3. 8)$$

식(3. 2)에서 $\tilde{G}_p = \tilde{N}_p \tilde{D}_p^{-1}$ 이므로 식(3. 9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta_p = (Z_p - V_p) U_p^{-1} - \tilde{N}_p \tilde{D}_p^{-1} \quad (3. 9)$$

단, \tilde{N}_p , \tilde{D}_p 는 $\tilde{N}(z)$, $\tilde{D}(z)$ 의 Toeplitz행렬이다. 따라서,

[정리 3. 1]을 이용하면 전개계수는 $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p$ 까지 알고 있을 때 $\Delta(z)$ 의 H_∞ 노옴의 최소치는 식(3. 10)과 같다.

$$\begin{aligned} \min_{g(z) \in H_\infty} & \quad \|\delta_0 + \dots + \delta_p z^{-p} + z^{-(p+1)} g(z)\|_\infty \\ & = \bar{\sigma}(\Delta_p) \\ & = \bar{\sigma}((Z_p - V_p)U_p^{-1} - \hat{N}_p \hat{D}_p^{-1}) \end{aligned} \quad (3. 10)$$

3. 2 견실동정의 평가함수

[정리 3. 2] [6, 7]

초기상태는 0으로 가정하여 길이 $p+1$ 의 입·출력 시계열 데이터는 $(u_i, y_i, u_0 \neq 0)$ 이라 하자. 이때 $\|\Delta(z)\|_\infty \leq \varepsilon$ 인 오차함수 $\Delta(z)$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은 식(3. 11)과 같다.

$$\bar{\sigma}(\Delta_p) = \bar{\sigma}((Z_p - V_p)U_p^{-1} - \hat{N}_p \hat{D}_p^{-1}) \leq \varepsilon \quad (3. 11)$$

식(3. 12)와 같은 평가함수를 정의한다.

$$J(\tilde{n}_i, \tilde{d}_i) = \bar{\sigma}((Z_p - V_p)U_p^{-1} - \hat{N}_p \hat{D}_p^{-1}) \quad (3. 12)$$

이 평가함수의 이용에 의해 [정리 3. 2]는 다음과 같이 논할 수 있다.

[정리 3. 3]

[$\tilde{n}_i, \tilde{d}_i = \arg \min J(\tilde{n}_i, \tilde{d}_i)$]일 때, $J(\tilde{n}_i, \tilde{d}_i) = \Gamma \leq \varepsilon$ 의 조건을 만족하면 Fig. 2에 나타낸 시스템의 입·출력데이터에 적합하고 $\|\Delta(z)\|_\infty \leq \varepsilon$ 을 만족하는 오차함수 $\Delta(z)$ 가 적어도 한 개 존재한다.

제4장 분자의 견실동정

본 장에서는 식(3. 12)와 같이 표현되는 평가함수를 최소로 하는 공칭모델의 추정법에 관하여 고찰한다.

4. 1 분자 파라미터의凸성(Convexness)[8, 9]

먼저, $v=0$ 일때 식(3. 9)는 식(4. 1)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\Delta_p = Z_p U_p^{-1} - \hat{N}_p \hat{D}_p^{-1} \quad (4. 1)$$

이때, 문헌[1, 2]의 방법에서, 모델의 분모 Toeplitz행렬인 \hat{D}_p 가 다른 추정방법으로 주어진다고 가정하여 정리[4. 1]을 유도하자.

[정리 4. 1]

$\bar{\sigma}(\Delta_p)$ 는 동정 파라미터 \tilde{n}_i 에 관하여凸성이다.

(단, $0 \leq i \leq q$)

따라서, 동정문제는 $\bar{\sigma}(\Delta_p)$ 를 최소로 하는 분자 파라미터 \tilde{n}_i 를 구하는 문제로 귀착되지만 함수 $\bar{\sigma}(\Delta_p)$ 의凸성을 이용하면 수치해석적으로 \tilde{n}_i 를 구할수 있다. 여기서, Δ_p 의 크기는 입·출력 데이터 수에 의해 $(p+1) \times (p+1)$ 가 되어 데이터 수가 크게 되면 행렬을 대상으로 한 해석이 필요하게 된다.

4. 2 분자의 동정

본 절에서는 문헌[1, 2]의 동정 알고리즘에 있어서, 다른 추정법으로 주어진 분모가 분자의 견실동정에 주는 영향에 대해 검토한다. 최소 2승법 및 출력 오차법에 의해 추정된 모델의 분모를 각각 $d_{i, arx}$, $\bar{d}_{i, oe}$ 라 한다. 식(4. 1)의 경우, 식(4. 2), (4. 3), (4. 4)의 집합을 정의한다.

$$\Gamma_{\widehat{n}_i, \widehat{d}_i}; \text{파라미터 } \widetilde{n}_i, \widetilde{d}_i \text{에 관한} \\ [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p] \text{의 집합} \quad (4. 2)$$

$$\Gamma_{arx(\widehat{n}_i); \widetilde{d}_i = \bar{d}_{i, arx}} \text{일 때 파라미터 } \widetilde{n}_i \text{에 관한} \\ [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p] \text{의 집합} \quad (4. 3)$$

$$\Gamma_{oe(\widehat{n}_i); \widetilde{d}_i = \bar{d}_{i, oe}} \text{일 때 파라미터 } \widetilde{n}_i \text{에 관한} \\ [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p] \text{의 집합} \quad (4. 4)$$

이때, 식(4. 5), (4. 6)의 관계가 명확하게 된다.

$$\Gamma_{(\widehat{n}_i, \widehat{d}_i)} \supset \Gamma_{arx(\widehat{n}_i)} \quad (4. 5)$$

$$\Gamma_{(\widehat{n}_i, \widehat{d}_i)} \supset \Gamma_{oe(\widehat{n}_i)} \quad (4. 6)$$

또, $\bar{d}_{i, arx} \neq \bar{d}_{i, oe}$ 일 때 $\Gamma_{arx(\widehat{n}_i)} \neq \Gamma_{(\widehat{n}_i, \widehat{d}_i)}$ 가 성립한다. 이상의 것을 Fig. 3으로 나타냈다.

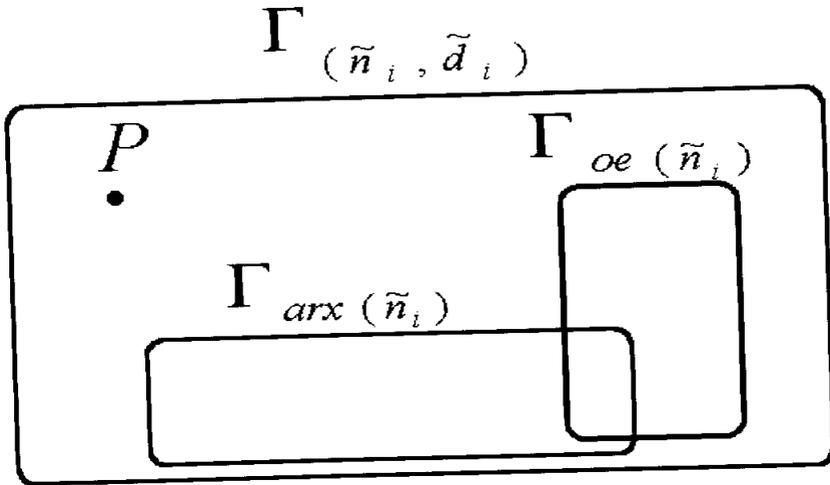


그림 3 $\Gamma_{\tilde{n}_i, \tilde{d}_i}, \Gamma_{arx}(\tilde{n}_i), \Gamma_{oe}(\tilde{n}_i)$ 의 집합관계
 Fig. 3 Set relation of $\Gamma_{\tilde{n}_i, \tilde{d}_i}, \Gamma_{arx}(\tilde{n}_i), \Gamma_{oe}(\tilde{n}_i)$

Fig. 3에서 알 수 있는 바와 같이 식(3. 12)를 최소로 하는 $[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_p]$ 이 점 P 의 위치에 존재한다고 하면 다른 방법으로 분모에 영향을 주면 최적 추정치는 얻을 수 없는 것은 분명하다.

제5장 축차계산을 이용한 분모분자의 견실동정

본 장에서는 공칭모델의 분모를 다른 방법으로 얻을 수 있을 뿐만 아니라 축차계산에 의해 분모분자를 함께 추정하는 방법을 제안한다.

5. 1 잡음이 없는 경우 [10, 11]

Toeplitz행렬의 특성 (부록 B참조)

- (1) Toeplitz행렬의 역행렬도 Toeplitz행렬이 된다.
- (2) Toeplitz행렬의 곱은 서로 교환 가능하다.
- (3) Toeplitz행렬의 곱은 Toeplitz행렬이 된다.

이상의 것을 이용하여 식(4. 1)의 Δ_p 를 식(5. 1)과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \Delta_p &= Z_p U_p^{-1} - \tilde{N}_p \tilde{D}_p^{-1} \\
 &= \tilde{D}_p^{-1} (\tilde{D}_p Z_p - \tilde{N}_p U_p) U_p^{-1} \\
 &= (\tilde{D}_p U_p)^{-1} (\tilde{D}_p Z_p - \tilde{N}_p U_p) \quad (5. 1)
 \end{aligned}$$

식(5. 1)에서 $\tilde{D}_p Z_p - \tilde{N}_p U_p$ 의 인자가 \tilde{D}_p , \tilde{N}_p 에 관한 선형임을 알 수 있다. 그리고 식(5. 2)와 같은 점근식(Asymptotic equa -

tion)을 고려하자.

$$\Delta_p^{(m)} = (\tilde{D}_p^{(m-1)} U_p)^{-1} (\tilde{D}_p^{(m)} Z_p - \tilde{N}_p^{(m)} U_p) \quad (5. 2)$$

[정리 5. 1]

$\bar{\sigma}(\Delta_p^{(m)})$ 은 동정 파라미터 $\tilde{n}_i^{(m)}, \tilde{d}_i^{(m)}$ 에 관한 함수이다.

(증명) v 와 A 를 식(5. 3), (5. 4)와 같이 나타낸다.

$$v = [n_0^{(m)}, \dots, n_q^{(m)}, d_1^{(m)}, \dots, d_q^{(m)}]^T \quad (5. 3)$$

$$A = (\tilde{D}_p^{(m-1)} U_p)^{-1} Y_p, \quad B = (\tilde{D}_p^{(m-1)})^{-1} \quad (5. 4)$$

또 $\beta(v), X(v)$ 를 식(5. 5), (5. 6)과 같이 정의한다.

$$\beta(v) = \bar{\sigma}(\Delta_p^{(m)}) = \bar{\sigma}(A \tilde{D}_p^{(m)} - B \tilde{N}_p^{(m)}) \quad (5. 5)$$

$$X(v) = A \tilde{D}_p^{(m)} - B \tilde{N}_p^{(m)} \quad (5. 6)$$

또 임의의 $v_1 \in R^{(2q+1)}, v_2 \in R^{(2q+1)}$ 에 대해 Toeplitz행 $\tilde{N}_{P_1}^{(m)},$

$\tilde{D}_{P_1}^{(m)}, \tilde{D}_{P_2}^{(m)}$ 를 구성한다. 여기서, $0 \leq \mu \leq 1$ 이다.

$$\begin{aligned} & X^T [\mu v_1 + (1-\mu) v_2] X [\mu v_1 + (1-\mu) v_2] \\ &= [\mu(A \tilde{D}_{P_1}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_1}^{(m)}) + (1-\mu)(A \tilde{D}_{P_2}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_2}^{(m)})]^T \\ & \quad \times [\mu(A \tilde{D}_{P_1}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_1}^{(m)}) + (1-\mu)(A \tilde{D}_{P_2}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_2}^{(m)})] \end{aligned} \quad (5. 7)$$

$$\begin{aligned} &= \mu [A \tilde{D}_{P_1}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_1}^{(m)}]^T [A \tilde{D}_{P_1}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_1}^{(m)}] \\ & \quad + (1-\mu) [A \tilde{D}_{P_2}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_2}^{(m)}]^T [A \tilde{D}_{P_2}^{(m)} - B \tilde{N}_{P_2}^{(m)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu(1-\mu) [A(\tilde{D}_{P_1}^{(m)} - \tilde{N}_{P_2}^{(m)}) - B(\tilde{N}_{P_1}^{(m)} - \tilde{N}_{P_2}^{(m)})]^T \\
& \times [A(\tilde{D}_{P_1}^{(m)} - \tilde{N}_{P_2}^{(m)}) - B(\tilde{N}_{P_1}^{(m)} - \tilde{N}_{P_2}^{(m)})] \quad (5. 8)
\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}
& X^T[\mu v_1 + (1-\mu)v_2]X[\mu v_1 + (1-\mu)v_2] \\
& \leq \mu X^T(v_1)X(v_1) + (1-\mu)X^T(v_2)X(v_2) \quad (5. 9)
\end{aligned}$$

그러므로,

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\max} \{ X^T[\mu v_1 + (1-\mu)v_2]X[\mu v_1 + (1-\mu)v_2] \} \\
& \leq \lambda_{\max} \{ \mu X^T(v_1)X(v_1) + (1-\mu)X^T(v_2)X(v_2) \} \\
& \leq \mu \lambda_{\max} \{ X^T(v_1)X(v_1) \} \\
& \quad + (1-\mu) \lambda_{\max} \{ X^T(v_2)X(v_2) \} \quad (5. 10)
\end{aligned}$$

이상으로부터 임의의 $v_1 \in R^{2q+1}$, $v_2 \in R^{2q+1}$ 에 대하여 식(5. 11)이 성립된다.

$$\beta(\mu v_1 + (1-\mu)v_2) \leq \mu\beta(v_1) + (1-\mu)\beta(v_2) \quad (5. 11)$$

■

이상으로부터 다음과 같은 추정방법을 취하기로 한다.

Step 1. 다른 방법으로 초기치 $\tilde{D}_p^{(1)}$ 을 추정한다.

Step 2. $\tilde{D}_p^{(m-1)}$ 을 이용하여 $\Delta_p^{(m)}$ 의 최대 특이치를 최소화하는

$\tilde{N}_p^{(m)}$, $\tilde{D}_p^{(m)}$ 를 계산한다.

Step 3. $\hat{N}_p^{(m)}$, $\hat{D}_p^{(m)}$, $\hat{N}_p^{(m-1)}$, $\hat{D}_p^{(m-1)}$ 을 각각 식(3. 9)에 대입하여 그들의 최대 특이치의 차이를 평가한다.

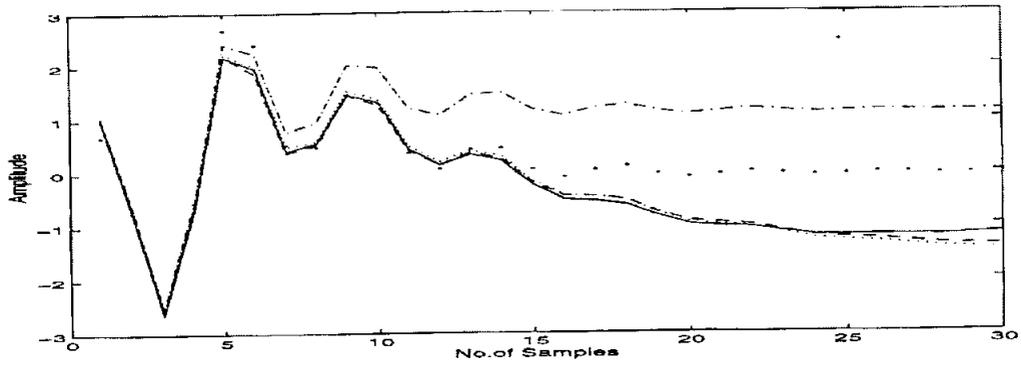
Step 4. 차이가 공칭값보다 클때는 Step. 2 에, 작을때는 축차하여 종료한다.

이상으로부터 식(3. 12)를 최소로 하는 공칭모델은凸해석법을 이용하여 수치해석법으로 구할 수 있다.

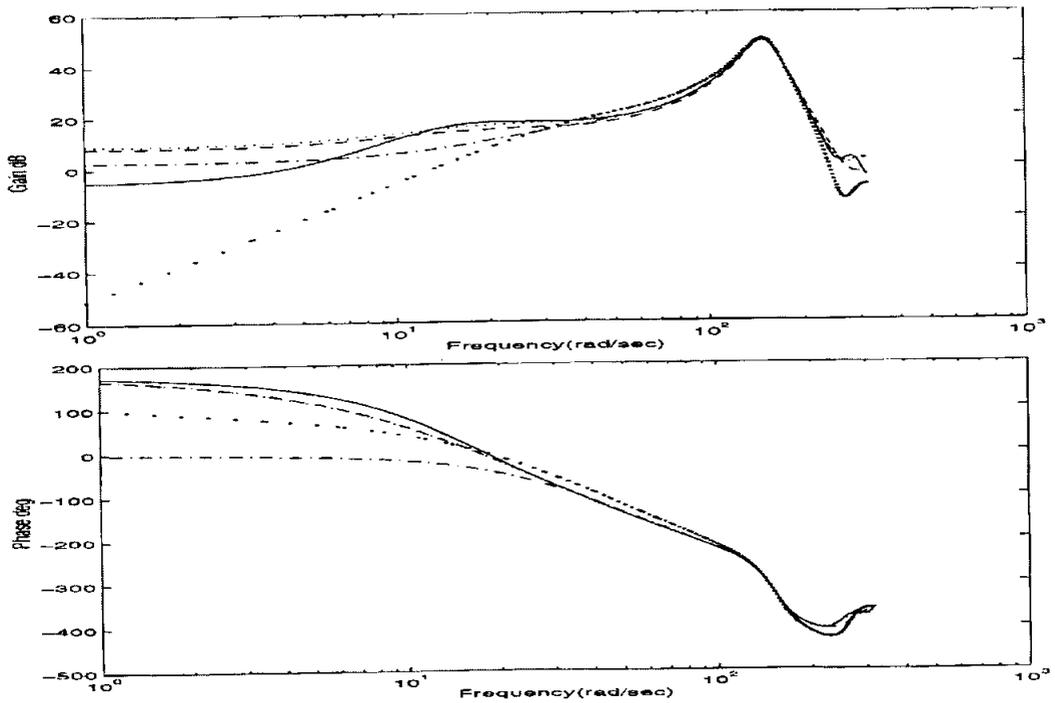
수 치 예

Fig. 4, Fig. 6은 분모를 최소 2승법, 출력오차법의 분모 추정치로 확정시킨 경우의 견실동정이며, Fig. 5, Fig. 7은 축차계산을 이용한 견실동정의 결과이다. 각각 8차의 실시시스템을 5차, 6차에서 근사시켰다(시뮬레이션의 상세한 것은 6장 참조). 최소 2승법이나 출력오차법으로 주어진 분모추정치를 이용한 견실동정은, 이에 크게 영향을 받고 있음을 알 수 있다. 축차계산을 이용한 견실동정은, 어느 방법이든지 초기치에서는 그 영향을 받지 않는 양호한 결과를 나타내고 있다.

Discrete Step Response (5th order model)



Bode Plot Model (5th order model)

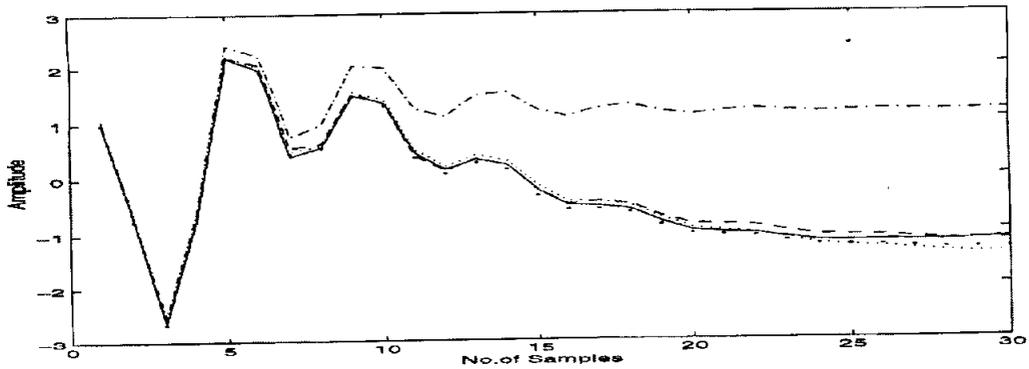


Solid line : system Dashed line : equation error
 Dotted line : output error Dots : proposed (equation error)
 Broken line : proposed (output error)

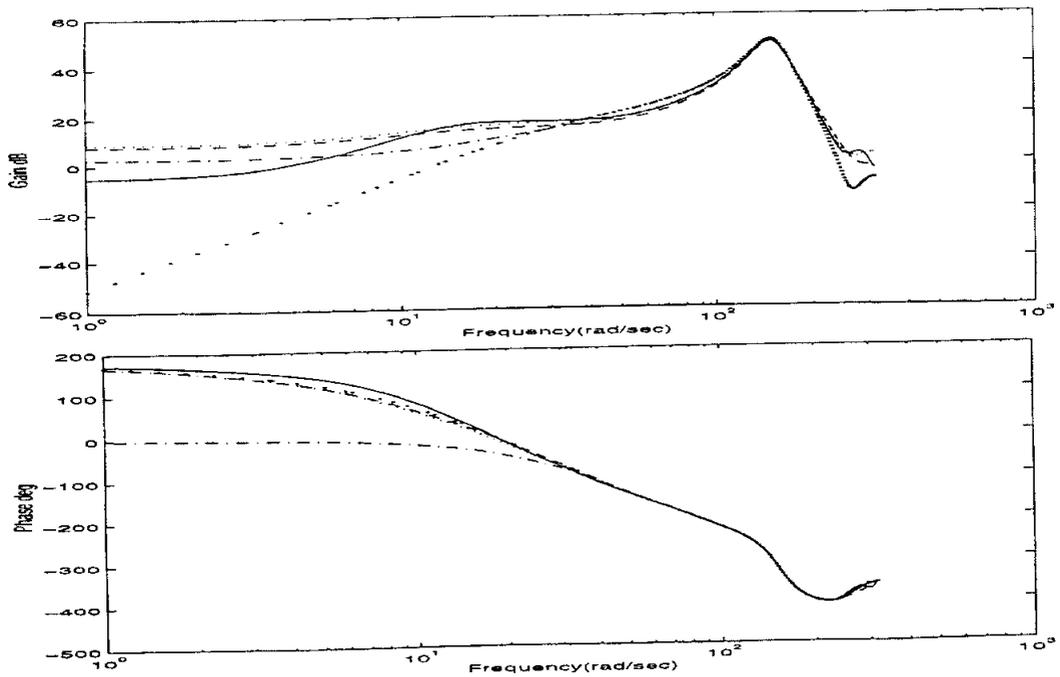
그림 4 분모확정일 때의 견실동정

Fig. 4 Robust identification when denominator decision

Discrete Step Response (5th order model)



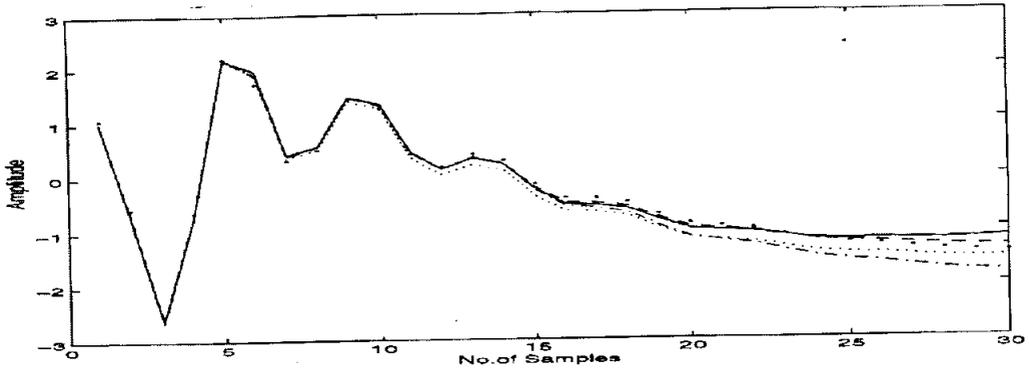
Bode Plot Model (5th order model)



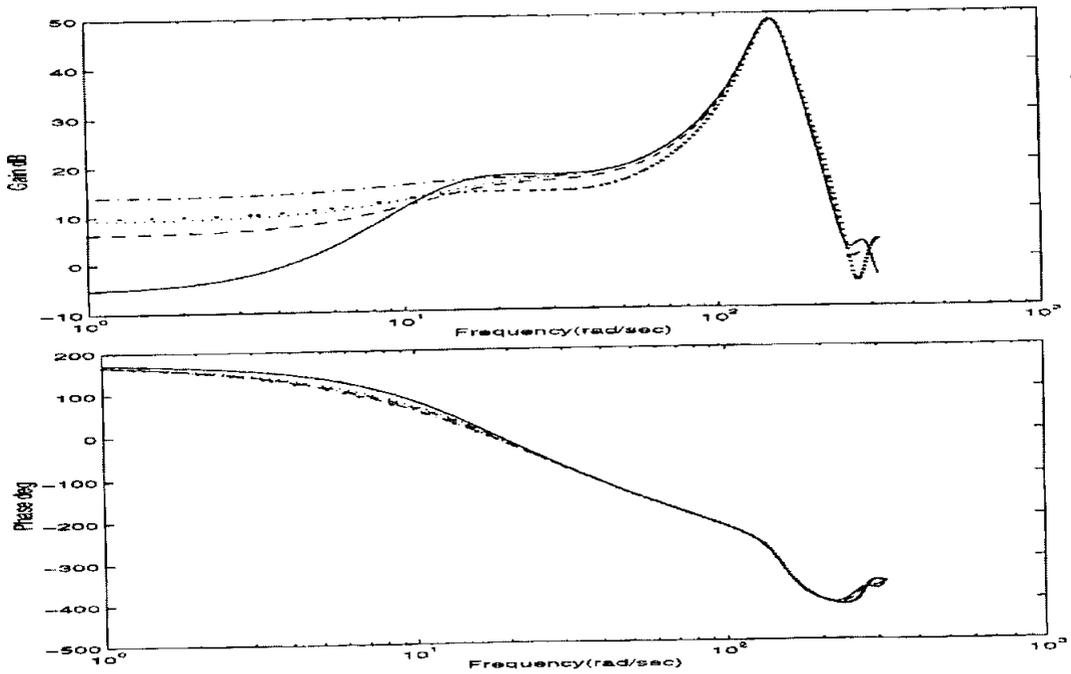
Solid line : system Dashed line : equation error
 Dotted line : output error Dots : proposed (equation error)
 Broken line : proposed (output error)

그림 5 축차계산에 의한 견실동정
 Fig. 5 Robust Identification by recursive computation

Discrete Step Response (6th order model)



Bode Plot Model (6th order model)

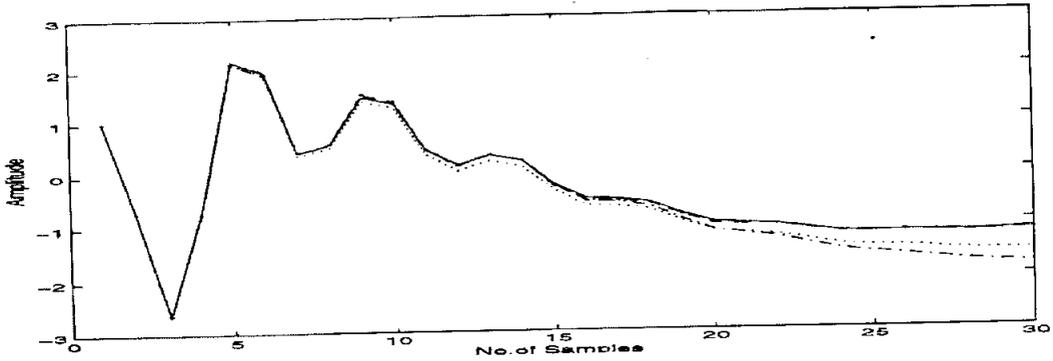


Solid line : system Dashed line : equation error
 Dotted line : output error Dots : proposed (equation error)
 Broken line : proposed (output error)

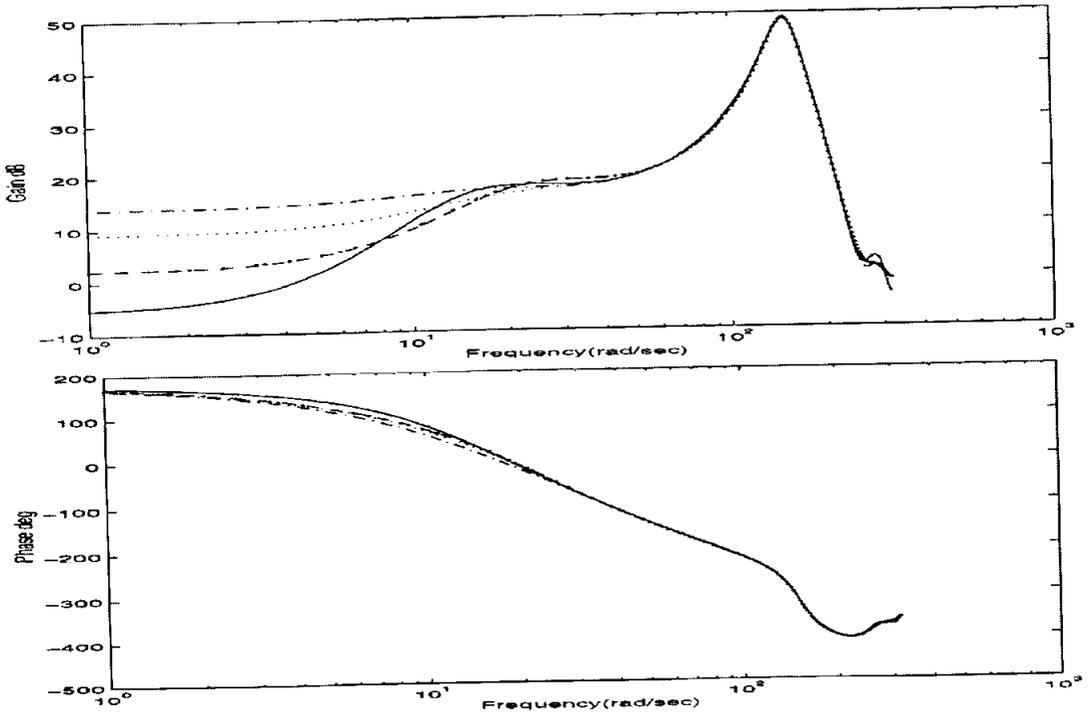
그림 6 분모확정일 때의 건설동정

Fig. 6 Robust identification when denominator decision

Discrete Step Response (6th order model)



Bode Plot Model (6th order model)



Solid line : system
 Dashed line : equation error
 Dotted line : output error
 Dots : proposed (equation error)
 Broken line : proposed (output error)

그림 7 축차계산에 의한 견실동정

Fig. 7 Robust Identification by recursive computation

5. 2 관측잡음이 부가된 경우 [12]

본 방법에 의한 견실동정은 확정적인 불확실성을 대상으로 하는 것이다. 이 불확실성은 참(True)시스템과 모델사이의 구조차에 의해 일어난다. 따라서, 관측 데이터가 무한대로 되어도, 그 영향은 남아 있게 된다. 본 절에서는 그 확정적 불확실성에 가해진 확률적 외란에 기인한 잡음도 고려한 견실동정을 취급한다. 그리고, 여기서는 출력에 백색잡음이 부가된 시스템을 대상으로 논하고자 한다.

관측잡음이 부가된 경우, 식(3. 9)에 나타난 Δ_p 의 최대 특이치의 최소화를 행하지만 여기서는 미지의 V_p 의 취급이 문제가 된다.

5.2.1 G_p 를 $Z_p U_p^{-1}$ 로 간주한 경우

먼저, 관측잡음을 무시한 경우에 대해 고려하자. 여기서, 식(5. 12)로 표현되는 Δ'_p 를 정의하자.

$$\Delta'_p = Z_p U_p^{-1} - \tilde{G}_p \quad (5. 12)$$

결국 이 경우, Fig. 8에 나타낸 $\Delta'_p(z)$ 의 Toeplitz행렬의 최대 특이치를 최소화하는 $\tilde{N}'_p(z)$, $\tilde{D}'_p(z)$ 를 추정하는 것이다. 식(3. 8), (3. 9)에 의해 $\Delta_p = Y_p U_p - \tilde{G}_p$ 를 이용하면 관계식은 식 (5. 13)과 같다.

$$\Delta'_p = \Delta_p + V_p U_p^{-1} \quad (5. 13)$$

결국 Δ'_p 의 최대 특이치의 최소화에는 $V_p U_p^{-1}$ 가 추정치에 어떤

영향을 미친다. 그래서 $V_p U_p^{-1}$ 의 $(i, 1)$ 요소를 e_i 라 두면 식(3. 4)에 의해 식(5. 14)가 성립된다.

$$\begin{aligned} \Delta'(z) = & (\delta_0 + e_0) + (\delta_1 + e_1)z^{-1} + \dots + (\delta_p + e_p)z^{-p} \\ & + (\delta_{p+1} + e_{p+1})z^{-(p+1)} + \dots \end{aligned} \quad (5. 14)$$

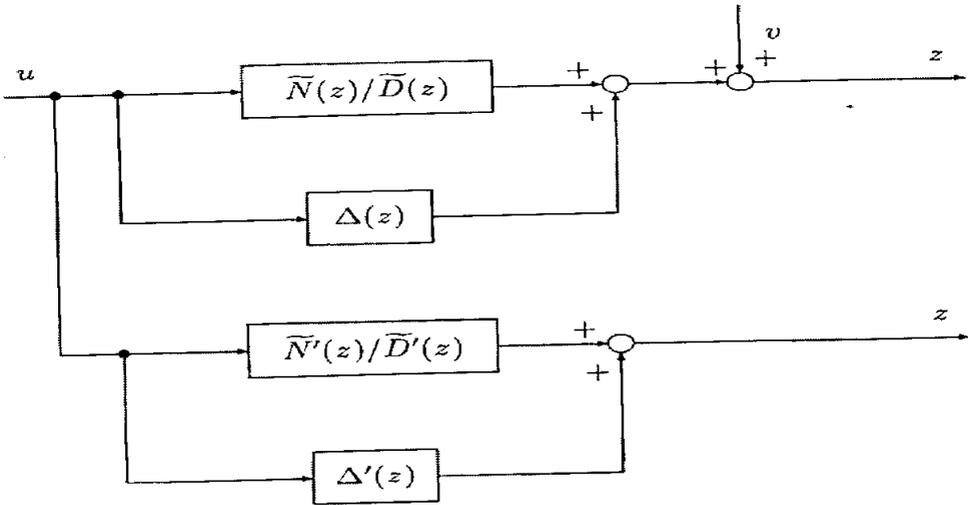


그림 8 $G(p)$ 의 추정치를 $Z_p U_p^{-1}$ 으로 한 경우
 Fig. 8 Estimate value of the $G(p)$ into $Z_p U_p^{-1}$

수 치 예

Fig. 9, Fig. 10에 $|e_i|$ 의 일예를 그래프로 나타냈다. 단, 관측잡음 v 에는 평균치 0, 분산 0.01의 정규난수를 이용했다. Fig. 9는 입력의 초기치 u_0 를 0.3, 0.4, 0.5로 선택하고, 그 후는 평균치 0, 분산 1의 정규난수를 이용했다. $|e_{30}|$ 은 어느 쪽도 10^4 을 초과하는 매우 큰 값

임을 알 수 있다. Fig. 10은 입력의 초기치 u_0 를 3, 4, 5로 하고 그 이후는 전과 같이 평균치 0, 분산1의 정규난수를 이용했다. 이 경우 $|e_i|$ 는 0.12미만에 그치게 하고 앞의 경우와 비교하면 매우 적은 값이 된다. 여기서, 입력 u_0, u_1, \dots, u_p 를 이용하여 전달함수 $u^{-1}(z)$ 는 식(5. 15)와 같이 정의한다.

$$u^{-1}(z) = \frac{1}{u_0 + u_1 z^{-1} + \dots + u_p z^{-p}} \quad (5. 15)$$

$e = u^{-1}(z)v$ 라 하면 $u^{-1}(z)$ 는 안정한 전달함수가 아닌 e_i 의 값은 발산한다. 결국 Fig. 9는 $u^{-1}(z)$ 가 불안정한 경우, Fig. 10은 안정한 경우의 수치예를 나타낸 것이다 (부록 A에 안정한 $u^{-1}(z)$ 를 구성하는 일예를 나타냈다.). 결국, 적당한 입력에 의해 확률적인 관측 잡음의 영향을 경감하면 식(3. 9)의 최대 특이치를 최소로 하는 공칭 모델은 양호한 추정치가 된다.

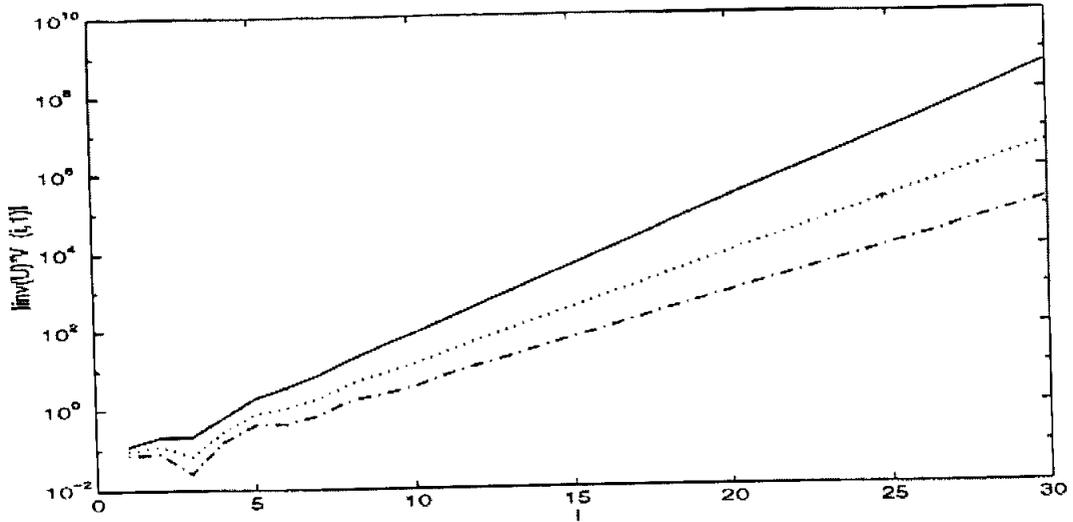


그림 9 u_0 와 e_i 의 관계

Fig. 9 Relation of u_0 and e_i

(Solid line: $u_0 = 0.3$, Dotted line: $u_0 = 0.4$, Dashed line: $u_0 = 0.5$)

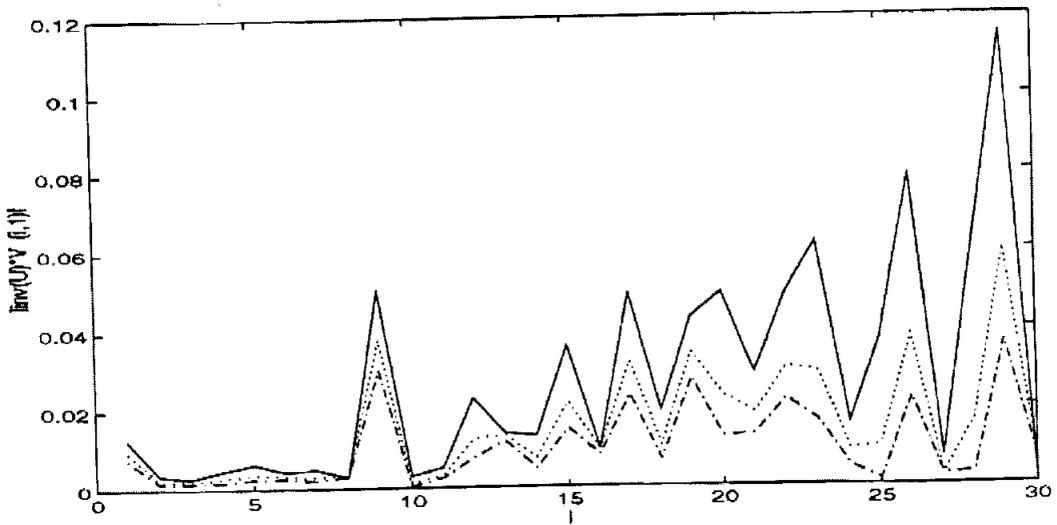


그림 10 u_0 와 e_i 의 관계

Fig. 10 Relation of u_0 and e_i

(Solid line: $u_0 = 3$, Dotted line: $u_0 = 4$, Dashed line: $u_0 = 5$)

5.2.2 G_p 를 최소 2승법으로 추정한 경우

먼저, 확률적 외란을 최소 2승법으로 제거하는 것을 고려하자. G_p 를 플랜트 $G(z)$ 의 임펄스 응답열 $\{g_i\}$ 의 Toeplitz행렬임에 주의하면 임펄스 응답열을 최소 2승법으로 추정하여 \hat{G}_p 를 구성하면 식(5.16)과 같이 나타 낼 수 있다.

$$\Delta_p = \hat{G}_p - \hat{N}_p \hat{D}_p^{-1} \quad (5.16)$$

또, 점근식은 식(5.17)과 같이 표현 할 수 있다.

$$\Delta_p^{(m)} = \hat{D}_p^{m-1} (\hat{D}_p^{(m)} \hat{G}_p - \hat{N}_p^{(m)}) \quad (5.17)$$

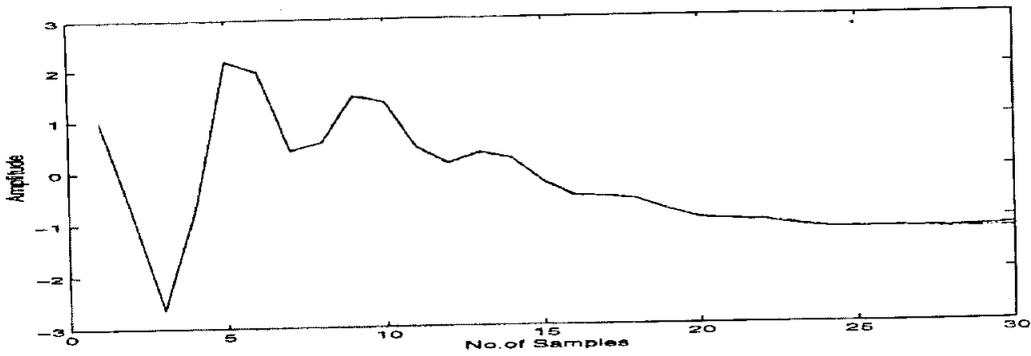
$G_p = Y_p U_p^{-1}$ 일 때와 마찬가지로 식(3.12)를 최소로 하는 공칭모델은 유효하게 구할 수 있다.

수 치 예

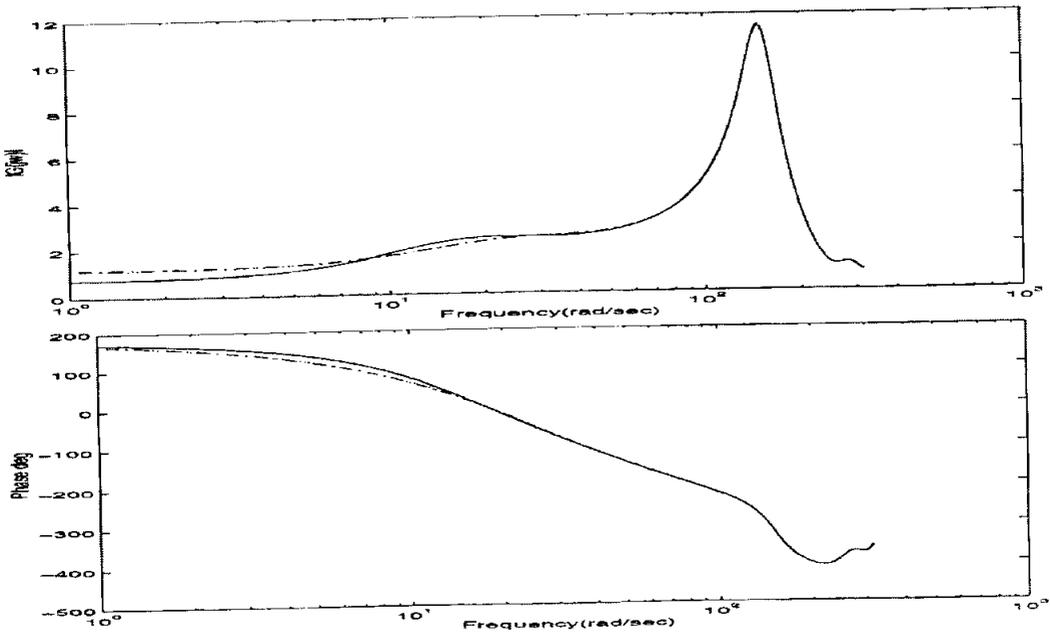
Fig. 11에 관측잡음이 부가되지 않은 경우, G_p 를 $Y_p U_p^{-1}$ 와 최소 2승법으로 추정한 경우의 견실동정 시뮬레이션을 나타냈다. (시뮬레이션의 자세한 것은 6장 참조)

이로부터 어느 경우라도 동등한 추정치가 구해지는 것이 확인되었다. 관측잡음이 있는 경우라도 최소 2승법에 의해 플랜트의 임펄스 응답열의 추정치가 구해지고, 이로부터 \hat{G}_p 를 구성하면 식(5.16), (5.17)이 성립되고, 식(3.12)를 최소로 하는 공칭모델이 추정된다고 할 수 있다.

Discrete Step Response (6th order model)



Bode Plot Model (6th order model)



Solid line : system

Dotted line : $G_p = Y_p U_p^{-1}$

Dashed line : $G_p = \hat{G}_p$

그림 11 G_p 를 $U_p^{-1} Y_p$, \hat{G}_p 로 한 경우의 비교 (잡음이 없는 경우)

Fig. 11 Comparison with the case that G_p is suppose to be

$U_p^{-1} Y_p$, \hat{G}_p (In case of noiseless)

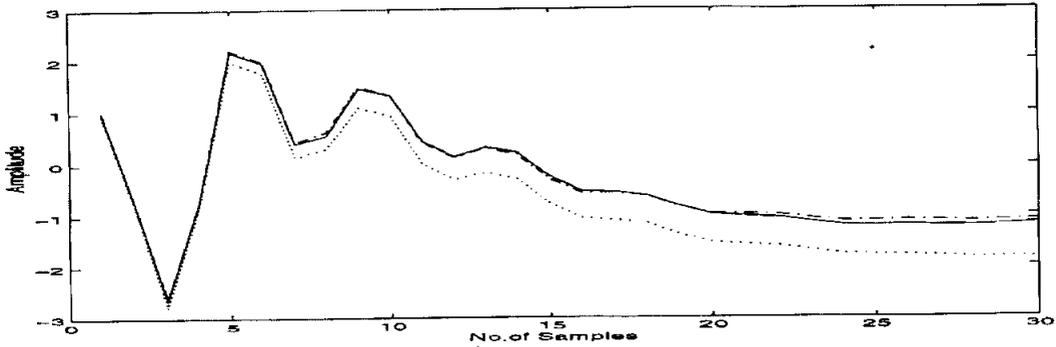
제 6장 시뮬레이션

앞 장에서 관측잡음의 영향을 저감시키는 두가지 방법을 제안했다. 하나는, 입력 u 의 초기치인 u_0 를 크게 취하는데 따라 $u^{-1}(z)$ 를 안정한 전달함수로 하는 것이다. Fig. 12에 $u_0=5$ 일 때의 수치예를 나타낸다. 또 한가지 방법은, 최소 2승법에 의한 시스템의 임펄스 응답을 추정하고, 그에 의한 식(3. 12)를 최소로 하는 공칭모델을 추정하는 방법이며, Fig. 13에 그 수치예를 나타냈다. 단, 동정대상은 다음의 8차 유리전달 함수로 나타냈다.

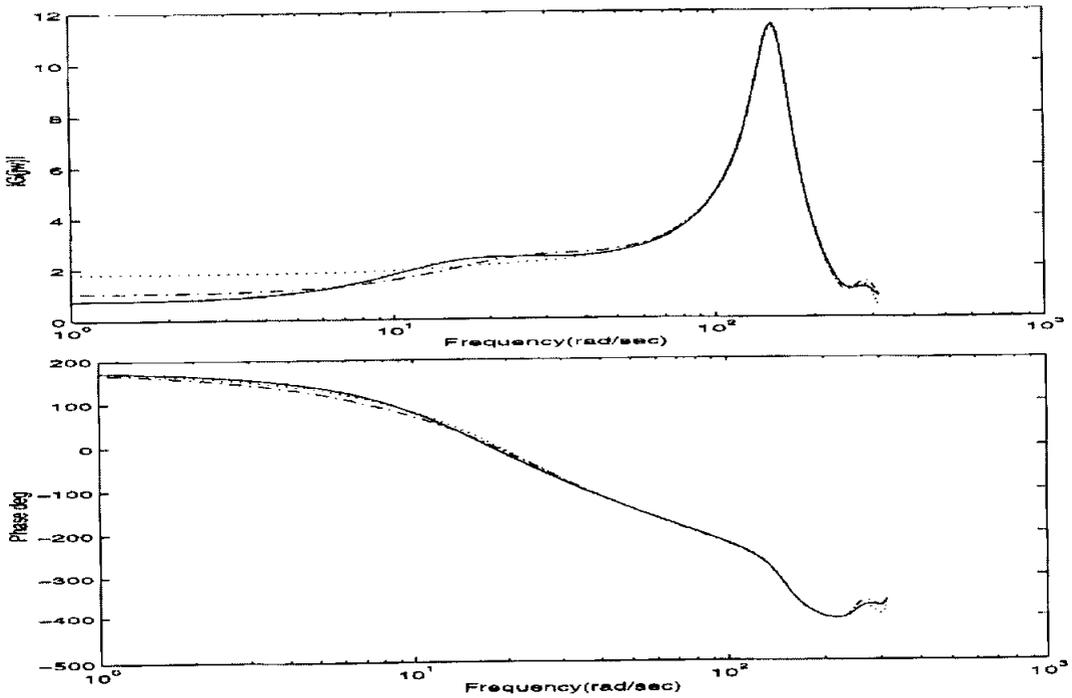
$$\begin{aligned}
 D(z) &= 1 - 1.5942 z^{-1} + 0.4392 z^{-2} + 0.2292 z^{-3} - 0.4376 z^{-4} \\
 &\quad + 0.5182 z^{-5} - 0.0094 z^{-6} - 0.1401 z^{-7} + 0.0083 z^{-8} \\
 N(z) &= 1 - 3.3283 z^{-1} + 1.3024 z^{-2} + 4.4025 z^{-3} - 1.7907 z^{-4} \\
 &\quad - 3.1866 z^{-5} + 0.4246 z^{-6} + 1.2822 z^{-7} - 0.1164 z^{-8}
 \end{aligned}$$

이 동정대상은 6차로 추정한다. 공칭모델 분모의 초기치에 대해서는 최소2승법(식오차법, ARX)(Matlab System Identification Toolbox) [13, 14]으로 추정했다. 견실동정에 의한 최적해는 Matlab-Toolbox의 다변수 함수, 최소화 함수(Simplex법)을 이용했다. Fig. 12, Fig 13에 나타난 수치예에 의해 이들 방법의 유효성이 확인되었다.

Discrete Step Response (6th order model)



Bode Plot Model (6th order model)



Solid line : system

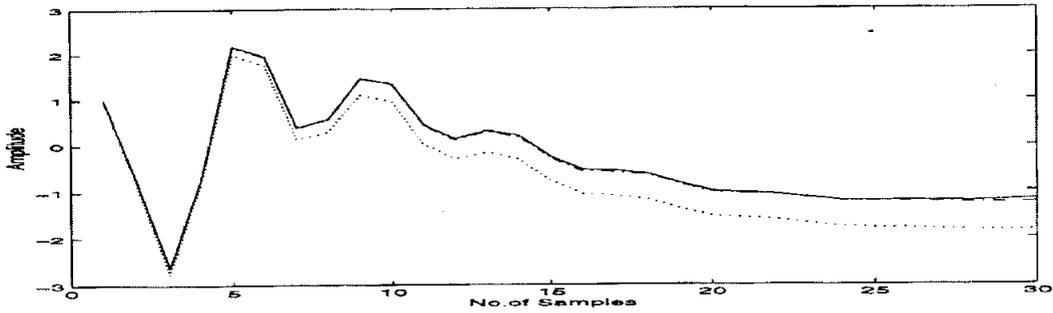
Dotted line : equation error

Dashed line : proposed (equation error)

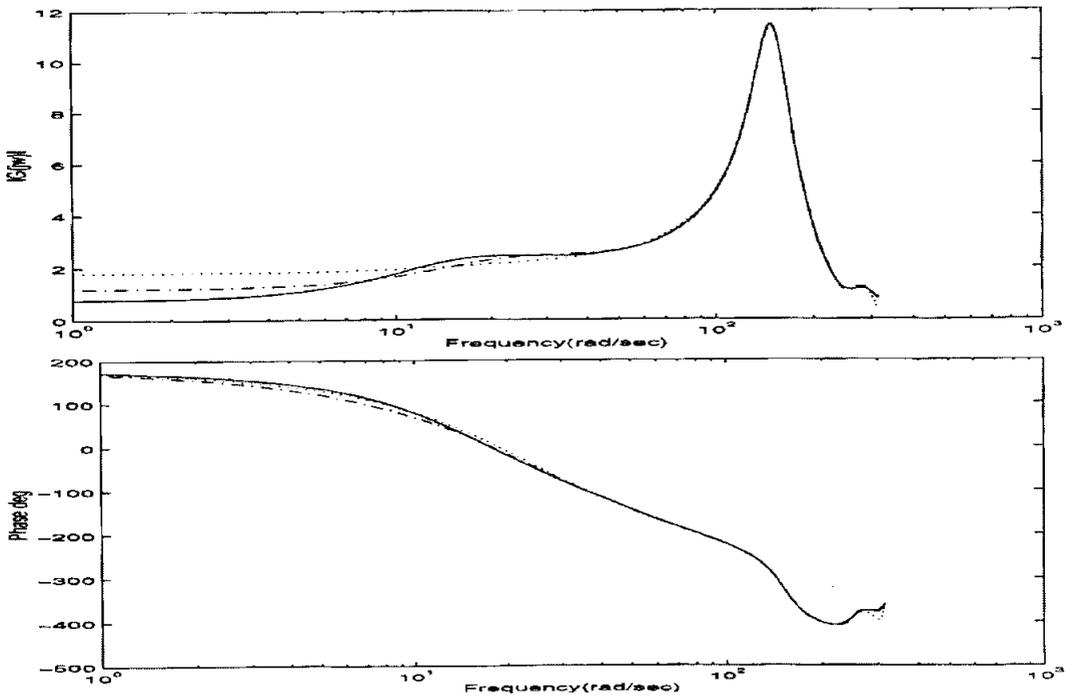
그림 12 $G_p = U_p^{-1} Y_p$ 로 했을때의 건설동정 ($u_0 = 5$)

Fig. 12 Robust identification of the case $G_p = U_p^{-1} Y_p (u_0 = 5)$

Discrete Step Response (6th order model)



Bode Plot Model (6th order model)



Solid line : system

Dotted line : equation error

Dashed line : proposed (equation error)

그림 13 G_p 를 최소 2승법에 의해 추정된 견실동정

Fig. 13 Robust identification that is estimated G_p by least square method

제 7 장 결 론

본 연구는 Caratheodory-Fejer의 정리를 이용한 견실동정법에 대해 논했다.

특히, 문헌 [1, 2]의 방법의 경우, 수치해석상의 문제점을 지적하고 확률적 잡음의 유·무를 고려하여 축차계산을 이용한 견실동정법을 제안했다. 또, 그 동정법의 수치 시뮬레이션을 나타내어 그 유효성을 확인했다. 데이터수에 대한 문제는 남아 있지만,凸해석법에 의한 공칭 모델의 추정을 행하는 것이 유용하다. 이 방법의 기본적 특성으로서, 최소 2승법이 일반적으로 부적합하다는 저주파 대역에 있어서 이득추종 특성에 관하여 제안한 동정법은 양호한 성능을 나타냈다.

5장에서 확률적 외란을 경감시키는 방법을 2가지 제안했다. 이들 방법의 선택은 다른 방법보다 어느 것이 양호한 실 시스템의 임펄스 응답이 추정되는가를 결정한다. 또, 부록 A에서 예로 나타낸 안정한 $u^{-1}(z)$ 을 구성하는 방법은 흥미있는 것이라고 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] T. Zhou and H. Kimura, "Simultaneous Identification of Nominal Model, Parameteric Uncertainty for Robust Control", *Automatica*, Vol 30-3, pp .391-402, 1994
- [2] T. Zhou and H. Kimura, "Time Domain Identification for Robust Control", *System & Control Letters*, Vol. 20-3, pp. 167-178, 1993
- [3] C. Caratheodory and L. Fejer, "Über den Zusammenhang der Extremen von Harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und Über der Picard-Landauschen Satz", *Rend. Circ. Mat. Palermo*. Vol. AC-36, pp. 218-239, 1911
- [4] 木村英紀, ロバスト制御のためのシステム同定, SICEセミナー-制御のためのシステム同定-テキスト計測自動制御學會, 1995
- [5] 伊理, 兒玉, 須田特異値分解とそのシステム制御への 応用計測と制御, Vol. 21, No. 8, pp. 763-772, 1983
- [6] 津村, 初音, 濟藤, "打ち切りモデルを用いた H_{∞} 同定", システム制御情報學會論文誌, Vol. 9, No. 12, pp. 565-572, 1996
- [7] 津村 幸治, ロバスト制御を考慮したシステム同定, ロバスト制御研究會資料, 1995
- [8] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996
- [9] 岩崎, LMIと制御, 昭晃堂, 1997

- [10] J.S. Shamma. "Robust Stability with Time-varying Structured Uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Control.*, AC-39(4), pp. 714-724, 1994
- [11] K. Poolla and A. Tikku. "Robust Performance Against Time-varying Structured Perturbations," *IEEE Trans., Automat. Contr.* AC-40(9), pp. 1589-1602, 1995
- [12] 吳楊, 片山徹, バイアス補償法による入出力雑音を受ける線形システムの同定, システム制御情報学会論文誌, Vol. 5, No. 11, pp. 454-460, 1992
- [13] Cybernet System Co. LTD., *LMI Control Toolbox for MATLAB*, 1995
- [14] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J.Laub, and M. chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1994

부 록 A

안정한 $u^{-1}(z)$ 의 구성

$$u_i^m = u_i^{m-1} + \phi_m u_{m-i}^{m-1}$$

$$u_m^m = \phi_m \quad | \phi_m | < 1, \quad i=1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (\text{A. 1})$$

식(A. 1)을 만족하는 u_i^m 을 u_i 와 $u_0=1$ 라 하면 식(5. 15)에 나타난 $u^{-1}(z)$ 은 안정하게 되고, e_i 값을 감소시킬 수 있다. 여기서, 간단한 수치예를 나타낸 Fig. 14는 전달함수 $u^{-1}(z)$ 의 극점을 나타낸 것이며, 식(A. 1)에서 구한 $u^{-1}(z)$ 은 안정한 전달함수임이 확인된다. 다음 식(A. 1)에서 구한 입력 u 를 이용하여 시뮬레이션을 행했다.(시뮬레이션의 상세한 것에 대해 6장을 참조하기 바람)

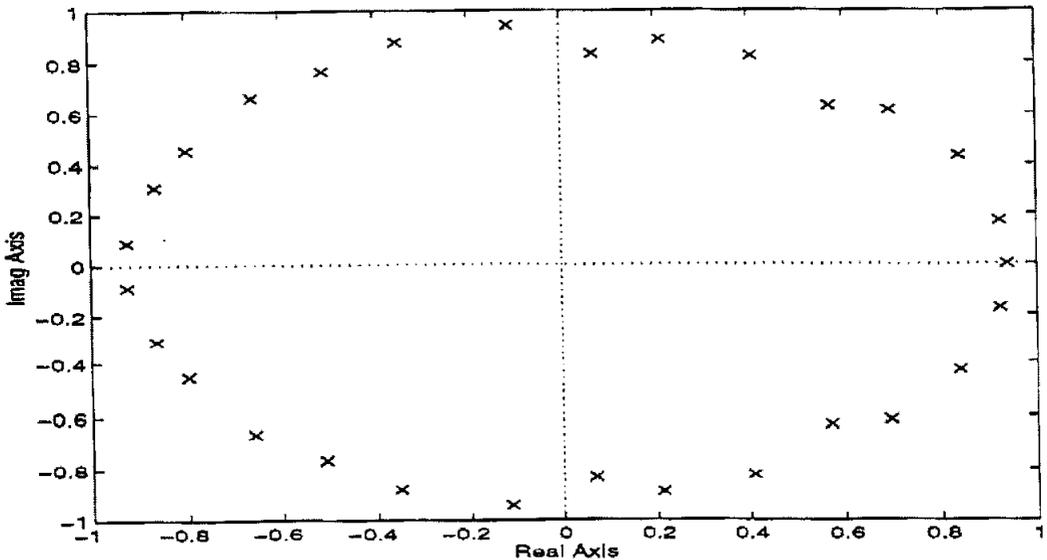
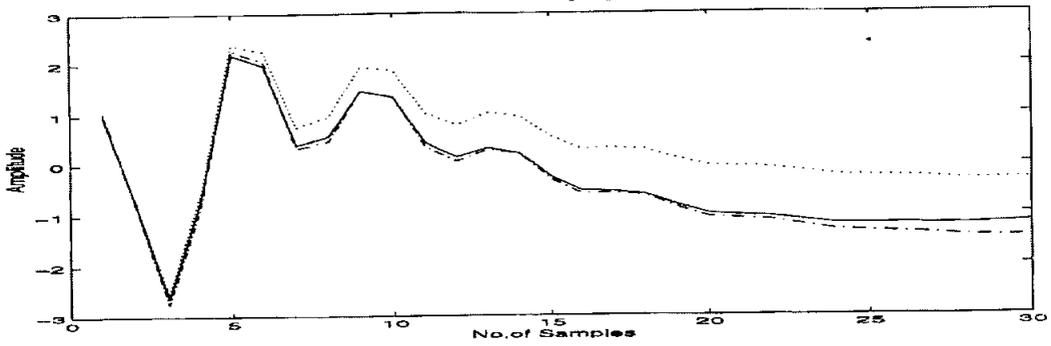


그림 14 전달함수 $u^{-1}(z)$ 의 극

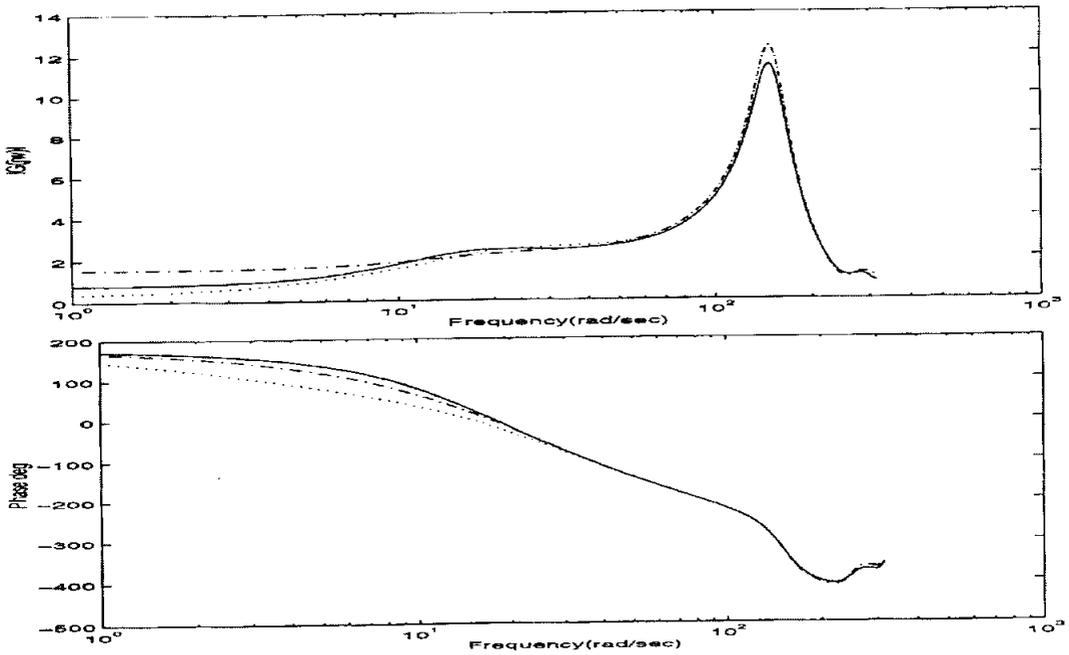
Fig. 14 Pole of transfer function $u^{-1}(z)$

Fig. 15의 수치예에서 알 수 있는 바와 같이 잡음의 영향은 경감되지만 양호한 결과라고는 할 수 없다. 확률적인 잡음의 영향을 감소시키는 데는 보통 데이터 수를 크게 취한다. 여기서는, 안정한 전달함수 $u^{-1}(z)$ 을 이용하여 시간의 경과와 함께 잡음의 영향을 0으로 수렴시키는 방법을 취하고 있기 때문이다. 예를 들어, 데이터 수가 무한대가 되어도 그 영향은 남게된다.

Discrete Step Response (6th order model)



Bode Plot Model (6th order model)



Solid line : system

Dotted line : equation error

Dashed line : proposed (equation error)

Fig 15 식(A. 1)에 의해 얻은 입력 u 를 이용한 추정

Fig. 15 Estimation using input u which is obtained

by equation(A. 1)

부 록 B

Toeplitz 행렬

B. 1 Toeplitz행렬의 성질

Toeplitz행렬은 주 대각선을 따라 같은 요소가 열거된 행렬이다.

이 Toeplitz행렬은 다음과 같은 특성이 있다.

- (1) Toeplitz행렬의 역행렬도 Toeplitz행렬이 된다.
- (2) Toeplitz행렬의 곱은 서로 교환 가능하다.
- (3) Toeplitz행렬의 곱은 Toeplitz행렬이 된다.

[증명]

B. 1 Toeplitz행렬 $A \in F^{n \times n}$ 을 식(B. 1)과 같이 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 1})$$

A의 역행렬은 식(B. 2), (B. 3)과 같다.

$$A A^{-1} = I \quad (\text{B. 2})$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \quad (\text{B. 3})$$

$\text{adj}(A)$ 는 여인자 행렬(Cofactor matrix)이며, 식(B. 4)와 같이 나타낸다.

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B. 4})$$

$adj(A)$ 의 제 i 행, j 열 번째 요소를 ϕ_{ij} 라 하면 식(B. 5)와 같이 나타낸다.

$$\phi_{ij} = (-1)^{i+j} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j+1} & \cdots & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_{n-i+1} & a_{n-i-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 5})$$

여인자 행렬 $\phi_{12} \sim \phi_{1n}, \phi_{23} \sim \phi_{2n}, \dots, \phi_{n-1n}$ 을 계산하면 모두 0이며, 결국 상삼각요소(Upper triangular)는 0이 된다. 예를 들면 Toeplitz행렬 A 의 역행렬 A^{-1} 은 식(B. 6)과 같이 Toeplitz행렬이 된다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B. 6})$$



[증명]

B. 2 Toeplitz행렬 $A \in F^{n \times n}$, $B \in F^{n \times n}$ 을 식(B. 7)과 같이 나타내고, AB , BA 를 구하면 식(B. 8), (B. 9)와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_n & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 7})$$

$$AB = \begin{bmatrix} & a_1 b_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2 b_1 + a_1 b_2 & & a_1 b_1 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 8})$$

$$BA = \begin{bmatrix} & b_1 a_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & b_2 a_1 + b_1 a_2 & & b_1 a_1 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ b_n a_1 + b_{n-1} a_2 + \cdots + b_1 a_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_1 a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 9})$$

이상으로부터 $AB=BA$ 인 것은 명확하며, Toeplitz행렬의 곱은 교환가능함을 나타냈다. ■

[증명]

B. 3 (2)의 결과로부터 Toeplitz행렬의 곱은 Toeplitz행렬이 된다.

B. 2 Toeplitz행렬에 의한 표현

입·출력 데이터를 $u = \{ u_0, u_1, \dots, u_n \}$, $y = \{ y_0, y_1, \dots, y_n \}$ 전달 함수를 $G(z)$ 라 하면 식(B. 10), (B. 11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = G(z) \quad (\text{B. 10})$$

$$= \frac{n_0 + n_1 z^{-1} + \dots + n_n z^{-n}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}} \cdot u \quad (\text{B. 11})$$

$N(z) = n_0 + n_1 z^{-1} + \dots + n_n z^{-n}$, $D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}$ 라 두면 식(B. 12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} D(z) y_0 &= y_0 \\ D(z) y_1 &= y_1 + d_1 y_0 \\ &\vdots \\ D(z) y_n &= y_n + d_1 y_{n-1} + \dots + d_n y_0 \end{aligned} \quad (\text{B. 12})$$

마찬가지로 식(B. 13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N(z) u_0 &= n_0 u_0 \\ N(z) u_1 &= n_0 u_1 + n_1 u_0 \\ &\vdots \\ N(z) u_n &= n_0 u_n + n_1 u_{n-1} + \dots + n_n u_0 \end{aligned} \quad (\text{B. 13})$$

이상의 것을 구하면 식(B. 14), (B. 15)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_n & \cdots & d_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_1 & n_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n_n & \cdots & n_1 & n_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (\text{B. 14})$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_n & \cdots & d_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_1 & n_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n_n & \cdots & n_1 & n_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (\text{B. 15})$$

$G(p)$ 를 식(B. 16)과 같이 두면 식(B. 17)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} G(p) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ d_n & \cdots & d_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_1 & n_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n_n & \cdots & n_1 & n_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ g_n & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B. 16})$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ g_n & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (\text{B. 17})$$

또, 임의의 $k < n$ 에 대해 식(B. 18)이 성립되므로 위의 관계를 $k=0$,

1, ..., n 에 대해 동일하게 표현하면 식(B. 19)가 성립된다.

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ g_k & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} \quad (\text{B. 18})$$

$$\begin{bmatrix} y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & y_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y_n & \cdots & y_1 & y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ g_n & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & u_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ u_n & \cdots & u_1 & u_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B. 19})$$

이상으로부터 입 · 출력 데이터와 전달함수의 관계를 Toeplitz 행렬로 표현할 수 있다.



A Study on the Robust Identification of Time Domain Using Recursive Computation

Jung-Ik An

*Dept. of Electical Engineering,
Graduate School
Pukyong National University*

Abstract

A study on robust identification can be divided into time domain and frequency domain. Both of them have common approximation to be considered by the interpolation theory.

In this paper, we discussed the robust identification of discrete time system in the time domain. In the Zhou & Kimura method, high order impulse response series which are produced by finiteness of data number in the time domain is interpolated by using Caratheodory-Fejer theorem.

In this paper the problem of the numerical analysis in Zhou & Kimura method was indicated. And, we proposed the robust identification method using recursive computation in consideration of the existence of probable noise.

We performed the numerical simulation to verify the effectiveness of the identification method.

감사의 글

희망을 갖고 좀 더 보람있는 생활을 하겠다고 다짐하면서 이 길을 선택하였으나 학문의 길은 멀고도 험하고 힘들다는 것을 다시 한번 깨달으면서 부족하지만 이렇게 결실을 얻어 감사의 글을 올리게 되었습니다.

부족한 저에게 본 석사 논문이 완성되기까지 세심한 배려와 따뜻한 보살핌으로 지도하여 주신 이동철 교수님께 진심으로 감사 드립니다.

그리고, 석사 과정동안 열심히 지도하여 주신 전기공학과 교수님께서도 감사 드립니다. 특히 본 논문을 차근차근 살펴 보시고, 알찬 논문이 되도록 조언을 해 주신 배종일 교수님, 조봉관 교수님께 깊은 감사 드립니다.

또한 끊임없는 사랑으로 저를 격려해 주시고 아껴주시고 뒷바라지해 주신 부모님과 많은 격려를 해 주신 형님, 누님의 사랑에 또한 감사드리며, 어려운 여건 속에서도 용기와 희망을 갖고 열심히 할 수 있도록 도와준 여자 친구와 장애인 봉사 동아리 “우리들의 이야기” 동기들, 선배님, 후배들과 이 기쁨을 함께 나누고 싶습니다.

그리고, 짧고도 긴 석사 기간을 같이 했던 동기 여러분과 바쁜 와중에도 많은 격려를 해 준 고등학교 친구들에게도 고마움의 뜻을 전합니다.

이 작은 결실이 그 동안 저를 아껴주신 모든 분들의 은혜에 조금이나마 보답이 되기를 기원하며, 모든 일에 도전하면 열심히 노력하는 계기가 되도록 하겠습니다.

2003년 2월
안 정 익