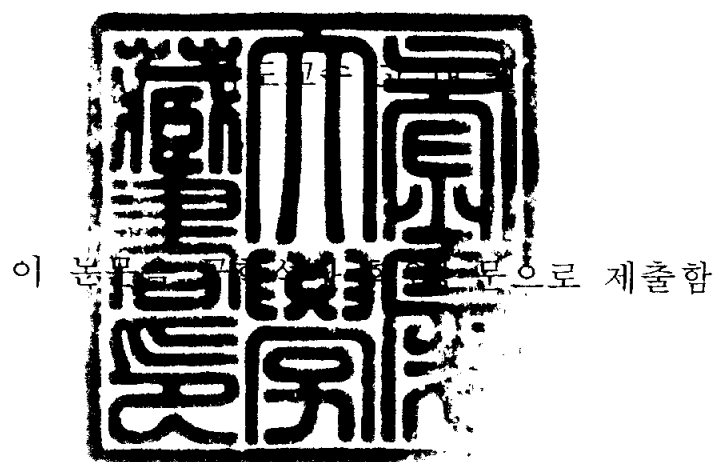


777
612.0
34
52

공학석사 학위논문

파이프-오리피스계의 가스유동계산을 위한 TVD법과
MacCormack법 및 특성곡선법의 비교



2003년 2월

부경대학교 대학원

제어기계공학과

문 석 철

문석철의 공학석사 학위논문을 인준함

2002년 12월 26일

주 심 공학박사 안 수 길



위 원 공학박사 한 규 일



위 원 공학박사 고 대 권



목차

Abstract	1
기호 설명	3
1. 서론	4
2. 이론 해석	6
2.1 보존형 지배방정식과 비보존형 지배방정식	6
2.2 파이프내의 가스유동 지배방정식	8
2.3 경계에서의 가스유동	10
2.3.1 오리피스에서의 가스유동	10
2.3.2 폐쇄단에서의 가스유동	14
3. 수치 해석	15
3.1 특성곡선법	15
3.2 MCK법	16
3.3 TVD법	19
3.3.1 TVD법의 기본 개념	20
3.3.2 TVD조건	21
3.3.3 Davis의 대칭 TVD법	21
4. 실험 장치 및 방법	26
5. 결과 및 고찰	28
5.1 실험결과와 계산결과의 비교	28
5.2 충격파의 계산결과	35
5.3 마찰인자와 계산 격자수의 영향	38
6. 결 론	43
참고 문헌	44
부 록	46

A Comparison of the TVD Scheme, the MacCormack Scheme and the MOC for the Calculation of Gas Flow in a Pipe-Orifice System

Suk-Chul Moon

Department of Control Mechanical Engineering

Graduate School

Pukyong National University

Abstract

The design of manifold for internal combustion is important for the improvement of charging efficiency. And modern engines achieve their characteristics through the careful design of both the intake and exhaust manifolds. So an interest in methods for designing engine manifolds has continued in automotive industry and a lot of simulation methods have been developed on the intake and exhaust system of engines. In this study, a comparison of numerical algorithms used for calculation of the unsteady gas flow in the pipe of the inlet and exhaust systems is presented. The comparison is made between the Method Of

Characteristics (MOC), MacCormack scheme and TVD scheme. These are representative numerical algorithms which have been widely used. The test was performed in the pipe-orifice system and the calculated and measured results for three numerical algorithms were compared to verify the accuracy respectively.

기호 설명

A : 무차원 음속(= a/a_{ref})

A_t : 밸브목에서의 무차원 음속

a_{ref} : 기준 음속 (m/s)

D : 파이프의 직경 (m)

f : 파이프 내벽의 마찰계수

k : 비열비

p : 파이프내의 압력(bar)

S : 파이프의 단면적 (m^2)

T : 온도 (K)

U : 가스의 무차원 유동 속도(= u/a_{ref})

u : 가스의 유동 속도(m/s)

X : 무차원 길이(= x/x_{ref})

Z : 무차원 시간(= $a_{ref}t/L_{ref}$)

β : β 리만 변수

λ : λ 리만 변수

ρ : 밀도 (kg/m^3)

τ_w : 파이프 벽에서의 전단 응력 (kgf/m^2)

Φ : 오리피스 면적비 (= F_t/F_p)

1. 서 론

내연 기관의 효율을 향상시키기 위한 연구들은 배기 배출물 저감 연구와 같이 내연기관 연구자들의 주요 관심사이다. 열효율을 향상시키기 위한 여러 방법 중 충전효율(체적효율)을 향상시키는 방법이 있는데 충전효율은 기관 속도, 압축비, 흡배기 포트의 형상, 흡배기 밸브의 직경 및 양정, 밸브 개폐시기 등에 의해 영향을 받는다. 충전효율을 향상시키는 방법으로는 흡기를 냉각시키는 방법(열적 효과)과 흡배기의 통기저항을 줄이는 방법(정적 효과), 흡배기의 압력맥동을 이용하는 방법(동적 효과), 과급에 의한 방법 등이 있다. 특히 동적 효과는 파이프내의 흡배기의 유동이 비정상이고 진폭이 비교적 큰 압력파에 의해 발생하며, 동적 효과를 잘 이용하기 위해서는 흡배기관내의 가스유동 예측은 필수적이므로 많은 연구들이 이루어져 왔다^{1)~6)}.

1858년 Riemann에 의해 고안된 특성곡선법을 통하여 비선형파의 이해에 빠른 진보가 이루어졌고, Benson이 내연기관에 사용되는 경계조건들을 개발하여 지금도 여전히 널리 쓰이고 있다. 하지만 특성곡선법은 비선형파의 해석에는 상당히 양호하지만 비보존형 지배 방정식을 사용하므로 질량, 에너지, 운동량의 보존이 잘 되지 않을 뿐 아니라 큰 진폭의 압력파를 극복하지 못하는 단점 때문에 충격파의 해석에는 적용이 어려웠다.

그러나 1950년대부터 특성곡선법의 단점을 극복할 수 있는 유한 차분(체적)법이 개발되기 시작하여 최근 20년 동안에는 보존형 지배 방정식을 사용하는 유한 차분법들이 널리 쓰이고 있다^{7)~10)}. 유한차분법은 Taylor 전개식을 이용하고 있으므로 연속적이고 매끄러운 영역에서는 매우 흡족한 해를 제공해 준다. 그러나 충격파와 같은 불연속(discontinuity)이 있을 경우에는 진동(oscillation)을 야기하는 문제점과 개방단이나 폐쇄단 같은 간단한 경계를 사용하는 것은 가능하나 파(wave)가 경계를 통과하고 반사하는 복잡한 유동에서는 경계조건을 정식화하는 것이 쉽지 않은 단점이 있다. 진동을 없애기 위

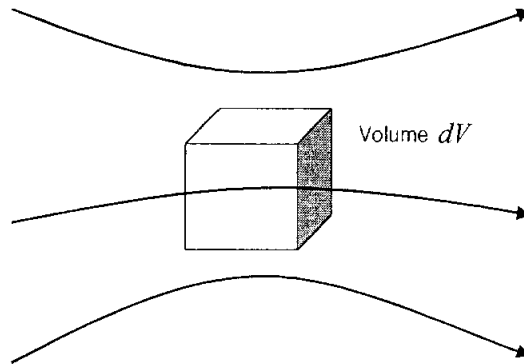
해 Godunov법을 시작으로 하여, Engquist와 Osher법, Roe법 등이 개발되었고 TVD(total variation diminishing scheme)법^{11)~16)}이 개발된 80년 중반부터 충격파 포획 유한 차분법은 급속한 발전을 이루었다¹⁷⁾. TVD법은 상류 TVD법과 대칭 TVD법이 있고 플럭스 리미터(flux limiter)를 사용하는 것과 슬로프 리미터(slope limiter)를 사용하는 것이 있다.

본 연구에서는 내연기관의 흡배기관 가스유동 수치해석에 주로 사용되는 대칭 TVD법, MCK(MacCormack)법 및 특성곡선법을 파이프-오리피스계에 적용하여 계산 알고리즘의 특성을 비교 분석하고자 한다.

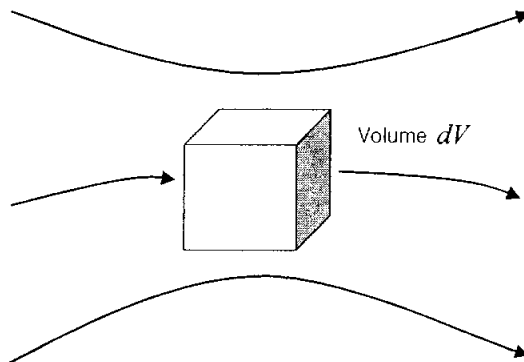
2. 이론 해석

2.1 보존형 지배방정식과 비보존형 지배방정식

Fig. 2-1의 두 유동 모델의 미소한 차이에 의해 유도되는 지배 방정식은 약간의 차이가 있다. Fig. 2-1(a)를 유동 모델로 유도한 지배 방정식을 보존형 지배방정식이라 하고 Fig. 2-1(b)를 유동 모델로 유도한 지배 방정식을 비보존형 지배 방정식이라 한다. 연속 방정식을 보존형으로 표현하고 이를 유한 차분화할 경우에는 보존 특성(conservative property)을 만족하나 비보존형으로 표현하고 이를 유한 차분화할 경우에는 보존 특성을 만족하지 않으므로 해서 오차가 생기게 된다. 즉 연속방정식이 만족되지 않고 질량이 계속 축적되거나 고갈되는 현상을 초래하게 되고 이러한 연속방정식을 만족하지 못하는 속도장은 다시 운동량 방정식에 영향을 미쳐 뉴턴 2법칙과 에너지 방정식마저 만족하지 못하는 결과를 초래하여 결과적으로 지배방정식 모두를 만족하지 못하게 된다. 그러나 이러한 문제는 어떤 유동현상에서는 그 오차의 정도가 절단 오차(truncation error)나 반올림 오차(round-off error)등에 비슷한 정도의 오차에 해당하거나 공학적으로 허용이 되는 오차의 한계 내에 들어가는 경우도 있지만, 특히 충격파와 같은 불연속을 지나거나 유동변수의 구배가 매우 큰 경우에는 매우 심한 오차를 유발하게 되므로 보통 전산유체 역학에서는 대부분의 경우 보존형 지배 방정식을 사용하고 있다.(수식적 증명은 부록A 참고) 그러나 3차정확도 이상의 고정도의 차분식은 얻어지기 어려우며, 풍상차분법에는 부적합하다.



(a) Finite control volume fixed in space with the fluid moving through it



(b) Finite control volume moving with the fluid such that the same fluid particles are always in the same control volume

Fig. 2-1 Flow models

2.2 파이프내 가스유동 지배 방정식

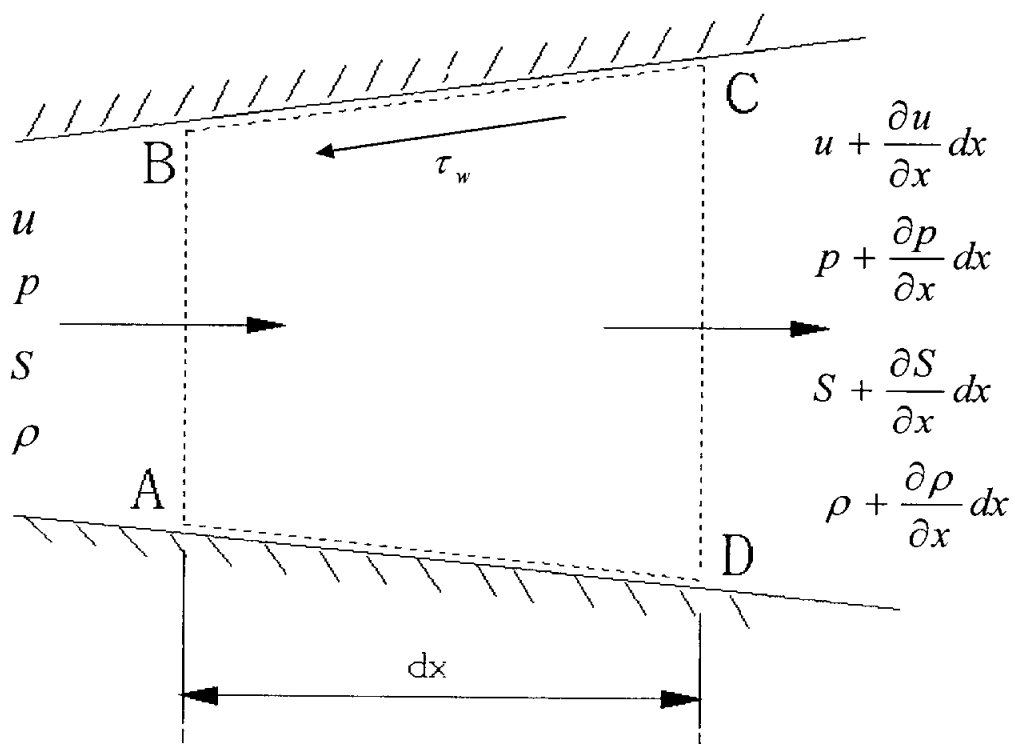


Fig. 2-2 Control volume for variable area non-homentropic flow

파이프내의 유동을 비등엔트로피, 1차원 비정상 유동이라 가정하고, 열 전달, 파이프 벽면과 유체의 마찰, 파이프의 단면적 변화 등을 고려한 지배 방정식은 다음과 같다.

연속 방정식

$$\text{비보존형} : \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho u}{S} \cdot \frac{dS}{dx} = 0 \quad (2-1)$$

$$\text{보존형} : \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0 \quad (2-2)$$

여기서

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

비보존 지배방정식의 유동모델은 검사체적이 유동장과 함께 유동하므로 검사체적의 위치가 변화하므로 $\frac{D}{Dt}$ 항으로 표현된다.

운동량 방정식

$$\text{비보존형} : \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + G = 0 \quad (2-3)$$

$$\text{보존형} : \quad \frac{\partial \rho u S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 S}{\partial x} + \frac{\partial p S}{\partial x} + \rho G S = 0 \quad (2-4)$$

$$\text{여기서, } G = \frac{1}{2} u |u| f \frac{4}{D}$$

에너지 방정식 :

$$\text{비보존형} : \quad \frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} - (q + uG) = 0 \quad (2-5)$$

$$\text{보존형} : \quad \frac{\partial \rho e_0 S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h_0 S}{\partial x} - q \rho S = 0 \quad (2-6)$$

보존형 지배방정식을 벡터형식으로 나타내면,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + C(W) = 0 \quad (2-7)$$

여가서

$$W = \begin{bmatrix} \rho S \\ \rho u S \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, \quad F(W) = \begin{bmatrix} \rho u S \\ (\rho u^2 + p) S \\ \rho u h_0 S \end{bmatrix}, \quad C(W) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{dS}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G S \\ -\rho q S \end{bmatrix}$$

2.3. 경계에서의 가스유동

2.3.1 오리피스에서의 가스유동

오리피스를 지나는 가스유동을 등엔트로피 유동으로 가정한다. p_t 는 파이프 밖의 정적압력과 같다. Fig. 2-3(노즐이 설치된 파이프 끝단)에서의 경계 조건 방정식은 다음과 같다.

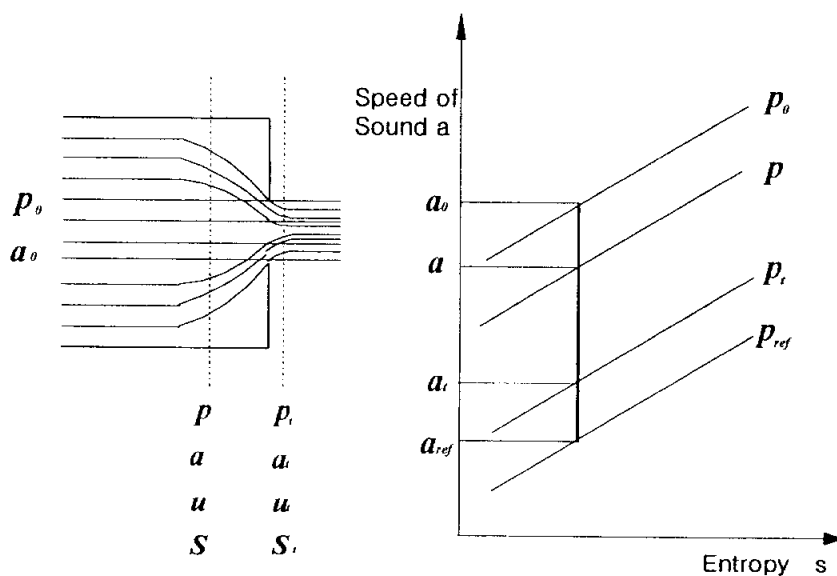


Fig. 2-3 Flow through a partially open end

(1) 아음속 유동

에너지 방정식

$$a_0^2 = a^2 + \frac{k-1}{2} u^2 = a_t^2 + \frac{k-1}{2} u_t^2 \quad (2-8)$$

연속방정식

$$\rho u S = \rho_t u_t S_t \quad (2-9)$$

음속

$$a^2 = \frac{k p}{\rho} \quad (2-10)$$

식 (2-8)을 a_{ref}^2 로 나누면

$$A_0^2 = A^2 + \frac{k-1}{2} U^2 = A_t^2 + \frac{k-1}{2} U_t^2 \quad (2-11)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{ref}} = \left(\frac{a}{a_{ref}} \right)^{2/(k-1)} = A^{2/(k-1)} \quad (2-12)$$

식 (2-9)의 ρ_{ref} 와 a_{ref} 로 나누고 식 (2-12)의 ρ/ρ_{ref} 로 대체하면

$$U A^{2/(k-1)} = \phi A_t^{2/(k-1)} U_t \quad (2-13)$$

$$\text{여기에서 } \phi = \frac{S_t}{S}, A = \frac{a}{a_{ref}}, U = \frac{u}{a_{ref}}$$

식 (2-11)과 식 (2-12)에서

$$U^2 = \frac{\frac{2}{k-1} (A^2 - A_t^2)}{\left\{ \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{A}{A_t} \right)^{4/(k-1)} - 1 \right\}} \quad (2-14)$$

아음속 유동에서

$$p_t = p_{ref} \text{ 이므로}$$

$$A_t = \frac{a_t}{a_{ref}} = \left(\frac{p_t}{p_{ref}} \right)^{(k-1)/2k} = 1.0 \quad (2-15)$$

따라서

$$U^2 = \frac{\frac{2}{k-1}(A^2-1)}{\left(\frac{A^{4/(k-1)}}{\phi^2} - 1\right)} \quad (2-16)$$

(2) 음속 유동

음속유동인 경우 밸브목에서는

$$U_t = A_t$$

임계압력비는

$$\left(\frac{p}{p_t}\right)_{cr} = \left(\frac{a}{a_t}\right)_{cr}^{2k/(k-1)} = \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}^{2k/(k-1)} \quad (2-17)$$

그리고

$$\left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr} = \left(\frac{p}{p_t}\right)_{cr}^{(k-1)/2k} \quad (2-18)$$

연속방정식 식 (2-13)은

$$\frac{U}{A_t} = \phi \left(\frac{A_t}{A}\right)_{cr}^{2/(k-1)} \quad (2-19)$$

또는

$$\frac{U}{A} = \phi \left(\frac{A_t}{A}\right)_{cr}^{2/(k-1)} \left(\frac{A_t}{A}\right)_{cr} = \phi \left(\frac{A_t}{A}\right)_{cr}^{(k+1)/(k-1)} \quad (2-20)$$

$(A/A_t)_{cr}$ 은 특정한 ϕ 에 대하여 일정하다.

에너지방정식 (2-11) 으로부터

$$A^2 + \frac{k-1}{2} U^2 = A_t^2 + \frac{k-1}{2} A_t^2$$

$$\frac{2}{k-1} \left(\frac{A}{A_t}\right)^2 + \left(\frac{U}{A_t}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1} \quad (2-21)$$

$$\left(\frac{A}{A_t}\right) = \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}$$

따라서

$$\Phi^2 = \left[\frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}^2 \right] \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}^{4/(k-1)} \quad (2-22)$$

$$\frac{U}{A} = \Phi \left(\frac{A}{A_t}\right)_{cr}^{(k+1)/(k-1)} \quad (2-23)$$

위의 식을 비열비 $k(=k)=1.4$ 에서 개구면적비가 0에서 1까지의 결과를 A-U 선도로 나타내면 Fig. 2-4와 같다. 그림에서 음속인 경우에는 음속 A와 입자 속도 U에 대해서 선형적인 것을 볼 수 있다.

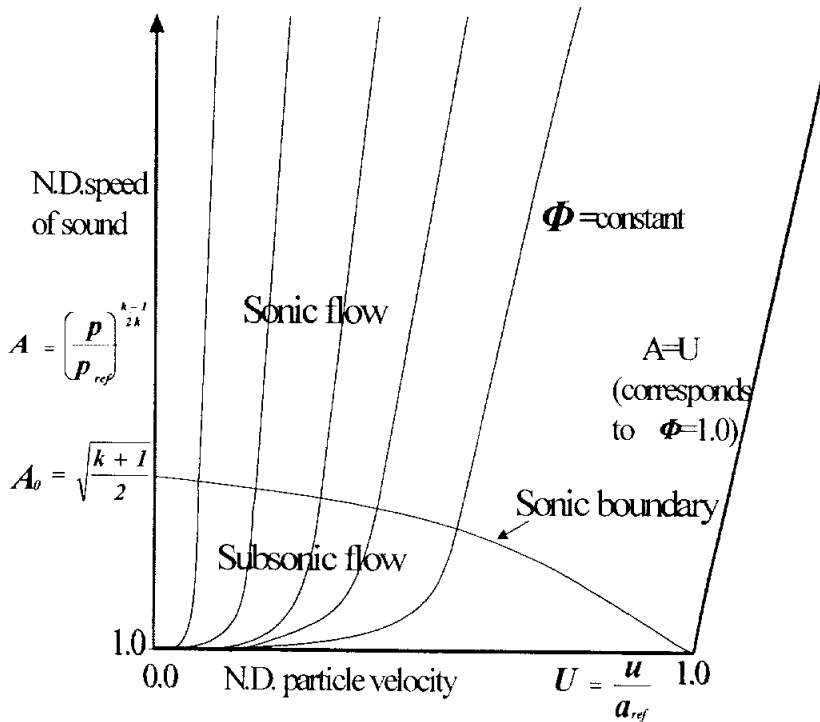


Fig. 2-4 Boundary chart outflow through a partially open end

2.3.2 폐쇄단에서의 가스유동

폐쇄단에서는 가스의 속도 u 가 0이다. 따라서 u 를 무차원화한 U 또한 0이 된다. 따라서 다음 식과 같이 나타난다.

$$U = \frac{\lambda_{in} - \lambda_{out}}{k-1} = 0 \quad (2-24)$$

여기서

$$\lambda = \lambda_{in} = A + \frac{k-1}{2} U \quad (2-25)$$

$$\beta = \lambda_{out} = A - \frac{k-1}{2} U \quad (2-26)$$

따라서, $U=0$ 이 되기 위해서는 식 (2-27)과 같이 표현된다.

$$\lambda_{out} = \lambda_{in} \quad (2-27)$$

3. 수치해석

3.1 특성곡선법

편미분 방정식을 상미분 방정식으로 변환하여 계산하는 특성곡선법은 1차 정확도를 가지고 있으며, 비보존 지배 방정식을 사용하였다. 이 특성곡선법으로 인하여 19세기에 비선형과 해석에 큰 진보가 이루어 졌고 지금도 널리 쓰이고 있지만 비보존 지배방정식을 사용하기 때문에 질량등의 보존이 차분법에 비하여 떨어지고 충격파 포획에는 적당하지 못하다.

연속 방정식과 운동량 방정식으로 식을 유도하여 리만 변수에 의해 수치해가 얻어진다. 식 (2-1)과 식(2-3)으로부터 다음 식이 유도된다.

$$\frac{2}{k-1} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2}{k-1} u \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-1)$$

$$\frac{2}{k-1} a \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-2)$$

$A = \frac{a}{a_{ref}}, U = \frac{u}{a_{ref}}, X = \frac{x}{L_{ref}}, Z = \frac{a_{ref} t}{L_{ref}}$ 와 같은 무차원 변수를 도입하면 특성이론으로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$A + \frac{k-1}{2} U = \lambda = \text{constant} \quad (3-3)$$

$$A - \frac{k-1}{2} U = \beta = \text{constant} \quad (3-4)$$

$\frac{p}{p_{ref}} = \left(\frac{a}{a_A} \right)^{2k/(k-1)}$ 의 관계가 있으므로 식 (3-3)과 식(3-4)의 리만 변수 λ 와 β 를 이용하여 A와 U를 구하여 압력과 속도를 구할 수 있다.

3.2 MCK법

MCK법은 예측 단계(predict step)와 수정 단계(corrector step)로 나뉘어 지고, 각각의 단계에서 전진 차분과 후진 차분을 사용하여 평균값으로 다음 시간의 계산값을 구한다. MCK법은 불연속선을 포함하고 있는 유동에도 탁월한 결과를 가져다 주는 것으로 알려져 있는데, 예측 단계와 수정 단계에서 전진 차분과 후진 차분을 서로 바꿀 경우에는 다른 결과를 가져 올 수도 있다. 보통은 수정 단계에서 상류(upwind)가 되도록 차분하는 것이 가장 좋은 방법이라고 알려져 오고 있다. 즉, 불연속선이 +x방향으로 전파되고 있는 경우에는 후진 차분을 수정 단계에서 사용하면 좋다. 반대로 불연속선이 -x방향으로 이동할 경우에는 예측 단계에서는 후진 차분을, 수정 단계에서는 전진 차분을 사용하고 반대로 -x방향으로 이동할 경우에는 예측 단계에서는 후진 차분을, 수정 단계에서는 전진 차분을 사용하는 것이 좋다.

본 논문에서도 이를 감안하여 예측 단계에서 전진 차분을 사용하였고 수정 단계에서 후진 차분을 사용하였다.

예측 단계 :

$$\frac{\overline{W_i^{n+1}} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} + C_i^n = 0 \quad (3-5)$$

수정 단계 :

$$\frac{W_i^{*n+1} - \overline{W_i^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{F_i^{n+1} - \overline{F_{i-1}^{n+1}}}{\Delta x} + \overline{C_i^n} = 0 \quad (3-6)$$

여기서 $\overline{F_i^{n+1}}$ 은 'n+1' 시간레벨에서의 임시 값을 의미하고 $n + \frac{1}{2}$ 는 n과

$\overline{n+1}$ 시간 시간레벨의 평균을 취한다.

$$W_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (W_i^n + \overline{W_i^{n+1}}) \quad (3-7)$$

보존형 지배 방정식으로 프로그램 상에 표현하기 위해서는 미분계수에 대한 독립변수들이 2개 이상이므로 치환하여 나타내어야 한다.

지배 방정식을 생성항(source term)을 생략하여 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_2}{\partial t} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial W_3}{\partial t} = -\frac{\partial F_3}{\partial x} \quad (3-8)$$

여기서, 해 벡터(solutions vector) W

$$W_1 = \rho S \quad W_2 = \rho u S \quad W_3 = \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) S \quad (3-9)$$

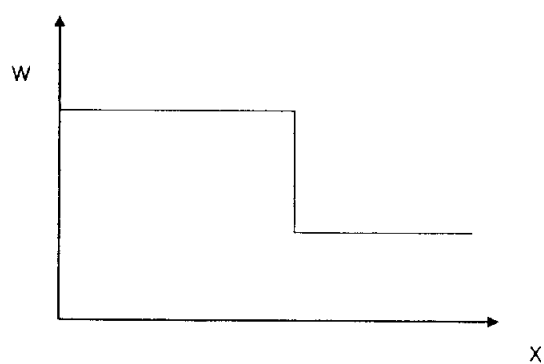
플럭스 벡터(flux vector) F

$$\begin{aligned} F_1 &= \rho S u = W_2, \\ F_2 &= \rho S u^2 + \frac{1}{\gamma} p S = \frac{W_2^2}{W_1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(W_3 - \frac{\kappa}{2} \frac{W_2^2}{W_1} \right) \\ F_3 &= \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) u S + u p S = \kappa \frac{W_2 W_3}{W_1} - \frac{\kappa(\kappa - 1)}{2} \frac{W_2^3}{W_1^2} \end{aligned} \quad (3-10)$$

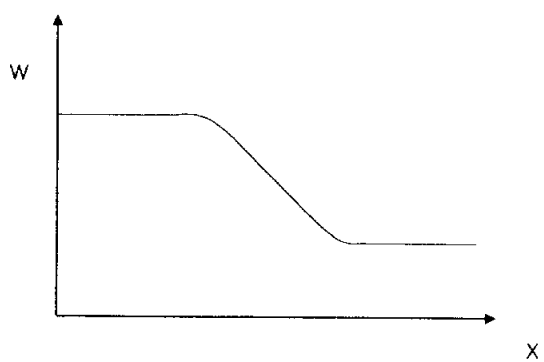
식 (3-10)과 같이 플럭스 항을 W 에 관하여 간단히 나타낼 수 있고 지배 방정식이 W 에 관하여 간단히 나타나게 된다. 식 (3-8)에서 W_1 , W_2 , W_3 를 구한 후 다시 ρ , p , u , T 를 구할 수 있다.

풍상 차분법(upwind scheme)과 같은 1차 정확도의 계산 알고리즘들은 진동이 생기지 않는 해를 보장해 주고 있는데, 이러한 진동이 생기지 않는 계산 알고리즘들을 통칭하여 단조 차분법(monotone scheme)이라고 일컫는다. 그러나 단조 차분법들이 진동이 생기지 않는 해를 보장해 주고 있지만, 고유 점성이 너무 커서 불연속선이 여러 격자선에 걸쳐 나타나는 웨손 현상을 초

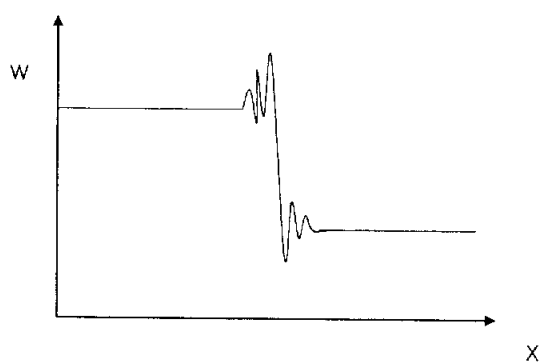
래하여 Fig. 3-1 (b)와 같이 나타난다. 반면에 2차 정확도의 차분법들은 Fig. 3-1 (c)와 같이 불연속선 주위에서 진동이 발생한다. 하지만 불연속선이 비교적 정확하게 나타난다. MCK법 역시 2차 정확도를 가지고 있고 불연속에서 진동이 발생하는 단점이 있다.



(a) Exact solution



(b) dissipation error



(c) dispersion error

Fig. 3-1 Effect of numerical dissipation and dispersion

3.3 TVD법

3.3.1 TVD법의 기본 개념

Fig. 3-1 (c)와 같이 2차 정확도를 가지는 계산 알고리즘들은 불연속선 주위에서 진동이 발생하게 되는데, 이 진동은 일시적으로 생기는 것이 아니고 계산 결과에서 일정 시간이 지난 후에도 계속적으로 나타나는데 이를 비물리적인 진동이라 한다.

먼저 어떤 변수 $w(t, x)$ 에 대한 x -방향으로의 전 변화량(total variation)을 다음과 같이 정의한다.

$$TV(w) = \int \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dx \quad (3-11)$$

이 정의를 이산 형태로 나타내면

$$TV(w) = \sum_i |w_{i+1}^n - w_i^n| \quad (3-12)$$

이 된다. 이때 어떤 계산알고리즘이 전 변화량 감소(total variation diminishing)라는 말은 다음을 의미한다.

$$TV(w^{n+1}) \leq TV(w^n) \quad (3-13)$$

위 식은 일반적인 자연 현상으로 쉽게 설명되어질 수 있다. 예를 들어 잔잔한 호수에 돌을 던지면 물결이 일렁일 것이다. 그러나 시간이 지날수록 그 물결은 잔잔해 진다. 즉 호수 수면의 높이 변화량은 외란이 없으면 시간이 지날수록 적어진다. 즉 엔트로피 증가의 법칙과 유사하다. 폐쇄된 공간에 고열원과 저열원이 있다면 이 역시 시간이 지날수록 온도의 전 변화량은 적어진다.

3.3.2 TVD 조건

2차 정확성 이하의 정확성을 가지는 계산 알고리즘들은 다음과 같은 형식으로 나타낼 수 있고

$$w_i^{n+1} = w_i^n - C_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n + D_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (3-14)$$

여기서

$$\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n = w_{i+1}^n - w_i^n$$

$$\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n = w_i^n - w_{i-1}^n$$

이 식이 TVD 조건을 만족하기 위해서는 다음과 같다.

$$0 \leq C_{i-\frac{1}{2}}^n, \quad 0 \leq D_{i+\frac{1}{2}}^n, \quad 0 \leq C_{i-\frac{1}{2}}^n + D_{i+\frac{1}{2}}^n \leq 1 \quad (3-15)$$

(수식 증명은 부록B 참고)

3.3.3 Davis의 대칭 TVD법

플럭스 리미터를 이용한 일반적인 TVD법의 원리는 불연속면 주위에서의 진동을 막기 위해 비확산 플럭스(anti-diffusive flux)를 선택적으로 제한하는 것이다. 플럭스 리미터의 사용으로 2차 정확도의 TVD법이 개발되었는데, 이 TVD법은 매끄러운 영역에서는 2차 정확성이지만 큰 구배가 있는 지역에서는 1차 정확성으로 전환된다. 1차 정확성을 가지면 큰 구배가 존재하는 영역에서도 진동이 발생하지 않으므로 엄밀해에 가까운 해를 구할 수 있다. 하지만 경계조건 적용이 힘들고 경계를 포함하고 있는 식의 TVD 특성의 증명은 매우 힘들다.

쌍곡선형 편미분 방정식에서는 특성곡선을 따라 파가 전파되어 가므로 어

떤 특정한 방향에 대해서 영향을 받게 되지만 양쪽 정보를 모두 이용하는 중앙 차분법(central scheme)들은 상류(upstream)와 하류(downstream)의 영향을 구분하지 않는다. Davis는 특성 방향을 고려해야 하는 복잡함이 없는 Lax-Wendroff법을 이용하여 대칭 TVD법을 개발하였다.

Davis는 Lax-Wendroff 법을 식 (3-14)와 같이 변형하면 식 (3-15)의 조건을 만족하지 못하므로 불연속면에서 비물리적인 진동이 발생하게 되므로 비확산 플럭스를 이용하여 선택적으로 국부적인 인공 소산항(local artificial dissipation)을 첨가하여 진동을 없앴다.

Lax-Wendroff 법에

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{1}{2} \nu (\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2} \nu^2 (\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (3-16)$$

소산항을

$$G_{i+\frac{1}{2}}^+ (r_i^+) \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n - G_{i-\frac{1}{2}}^+ (r_{i-1}^+) \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (3-17)$$

여기서

$$G_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{1}{2} \nu (1 - \nu) [1 - \phi(r_i^+)] \quad (3-18)$$

첨가하여 재정리하면

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \left\{ \nu \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \left(\frac{1}{r_i^+} - 1 \right) \right] - \left[\frac{G_{i+\frac{1}{2}}^+}{r_i^+} - G_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \right\} \quad (3-19)$$

으로 나타낼 수 있고 여기서

$$r_i^+ = \frac{\Delta w_{upw}}{\Delta w_{dow}} = \frac{\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n} \quad (3-20)$$

이고 + 첨자는 $a > 0$ 일 때 부가되는 항을 나타낸다.

식 (3-19)을 식 (3-14)과 비교하면

$$C_{i-\frac{1}{2}}^n = \nu \left[1 + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{1}{r_i^+} - 1 \right) \right] - \left[\frac{G_{i+\frac{1}{2}}^+}{r_i^+} - G_{i-\frac{1}{2}}^+ \right], \quad D_{i+\frac{1}{2}}^n = 0 \quad (3-21)$$

으로 나타낸다.

마찬가지로 $a < 0$ 일 때는 다음과 같다

$$G_{i+\frac{1}{2}}^-(r_{i+1}^-) \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n - G_{i-\frac{1}{2}}^-(r_i^-) \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (3-22)$$

여기서

$$G_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{2} \nu (1-\nu) [\phi(r_i^-) - 1] \quad (3-23)$$

위와 마찬가지로 소산항을 Lax-Wendroff법에 첨가하게 되고 여기서

$$r_i^- = \frac{\Delta w_{dow}^n}{\Delta w_{upw}^n} = \frac{\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n} \quad (3-24)$$

이다. 첨자 -는 $a < 0$ 일 때 부가되는 항을 나타낸다.

두 경우를, $a > 0$, $a < 0$ 일 때, 결합하면 상류 가중 인공 소산항(weighted artificial dissipation)을 가지는 Lax-Wendroff법을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} = & w_i^n - \frac{1}{2} \nu (\Delta w_{i+1}^n - \Delta w_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \nu^2 (\Delta w_{i+1}^n - 2\Delta w_i^n + \Delta w_{i-1}^n) \\ & + [G_{i+\frac{1}{2}}^+(r_i^+) + G_{i+\frac{1}{2}}^-(r_{i+1}^-)] \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n \\ & - [G_{i-\frac{1}{2}}^+(r_{i-1}^+) + G_{i-\frac{1}{2}}^-(r_i^-)] \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \quad (3-25)$$

여기서

$$G_{i+\frac{1}{2}}^+(r_i^+) = \begin{cases} \frac{1}{2} \nu (1-\nu) [1 - \phi(r_i^+)] & a > 0 \\ 0 & a \leq 0 \end{cases} \quad (3-26)$$

$$G_{i+\frac{1}{2}}^+(r_{i+1}^-) = \begin{cases} 0 & a \geq 0 \\ \frac{1}{2} \nu(1+\nu)[\phi(r_{i+1}^-)-1] & a < 0 \end{cases} \quad (3-27)$$

식 (3-26)과 식 (3-27)은 상류 방향을 결정해야 하는 복잡함을 가지고 있으므로 Davis는 G 항을 상류의 가중이 없게 재정의하면 다음과 같다.

$$G_{i+\frac{1}{2}}^+(r_i^+) = \frac{1}{2} |\nu| (1 - |\nu|) [1 - \phi(r_i^+)] \quad (3-28)$$

$$G_{i+\frac{1}{2}}^-(r_{i+1}^-) = \frac{1}{2} |\nu| (1 - |\nu|) [1 - \phi(r_i^-)] \quad (3-29)$$

MCK법에 대칭 TVD를 적용하면,

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = & W_i^{*n+1} \\ & + [G_{i+\frac{1}{2}}^+(r_i^+) + G_{i+\frac{1}{2}}^-(r_{i+1}^-)] \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n \\ & - [G_{i-\frac{1}{2}}^+(r_{i-1}^+) + G_{i-\frac{1}{2}}^-(r_i^-)] \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \quad (3-30)$$

여기서,

W_i^{*n+1} : MCK 법으로 구한 값

$$G_{i+\frac{1}{2}}^\pm(r_i^\pm) = \frac{1}{2} C(\nu) [1 - \phi(r_i^\pm)] \quad (3-31)$$

$$C(\nu) = \begin{cases} \nu(1-\nu), & \nu \leq 0.5 \\ 0.25, & \nu > 0.5 \end{cases} \quad (3-32)$$

경계측에서의 끝점 처리는 다음 식으로 하였다

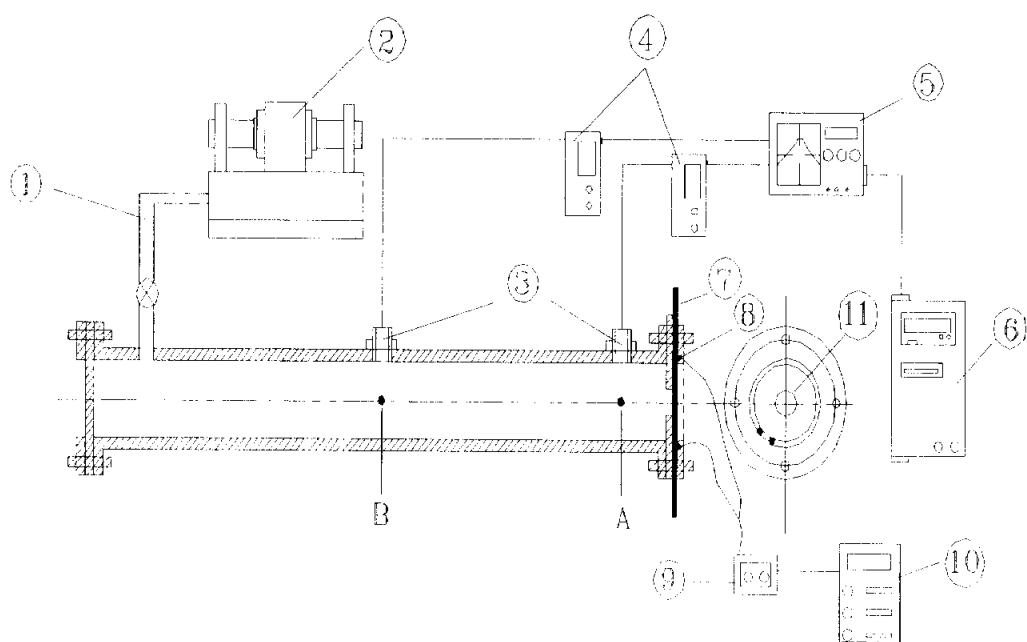
$$\Delta W_{i \min + 1 - \frac{3}{2}}^n = \Delta W_{i \min + 1 - \frac{1}{2}}^n \quad (3-33)$$

그리고 이때 사용되는 기울기비 r 의 함수인 플럭스 리미터는 다음과 같다.

$$\phi(r) = \max[o, \min(2r, 1)] \quad (3-34)$$

4. 실험장치 및 방법

Fig. 4-1은 공기를 유동가스로 하는 파이프-오리피스계의 압력거동을 실험하기 위한 장치를 나타낸 것이다. 파이프는 내경 53.5 mm, 길이 1494 mm의 원관이며, 파이프 한쪽 끝을 폐쇄단으로 하고, 반대편의 끝단에는 양쪽 플랜지 사이에 오리피스와 기밀성이 있는 박막을 설치하였다. 우측 끝단의 플랜지에는 동심원상으로 열선을 설치하고, 그 직경은 파이프의 내정보다 크게 하였다. 파이프 내에 공기를 일정 압력이 될 때까지 충전시킨 후 열선에 전류를 흐르게 하면 박막은 파열되고 파이프내의 공기를 대기 중으로 분출되어 파이프내의 압력은 변화하게 된다. 파이프내의 초기 공기압력은 임계압력 이하인 1.5 bar와 이상인 2.5 bar에서, 오리피스는 오리피스/파이프 면적비가 0.25인 것을 사용하였으며, A점(오리피스 부근)과 B점(파이프의 중앙위치)에서 피에조 저항식 저압센서를 설치하여 파이프내의 압력변화를 측정하였다.



- | | |
|--------------------|-----------------|
| ① Air filling pipe | ⑦ Thin film |
| ② Air compressor | ⑧ Nichrome wire |
| ③ Pressure sensor | ⑨ Switch |
| ④ Amplifier | ⑩ Power |
| ⑤ Oscilloscope | ⑪ Orifice |
| ⑥ Computer | |

Fig. 4-1 Schematic diagram of experimental apparatus

5. 결과 및 고찰

5.1 실험결과와 계산결과의 비교

박막이 파열되면 파의 속도는 압력의 제곱근에 비례하므로 고압측에서 저압측으로 충격파가 발생하여 저압측으로 진행하게 되고 저압측에서 고압측으로 팽창파가 발생하여 고압측으로 진행한다. 오리피스에 있는 박막이 파열하면 대기측이 저압이므로 대기 중으로 충격파가 발생하여 소멸하게 되고 대기 중으로 방출되는 압력의 양에 비례하는 크기의 팽창파가 폐쇄단을 향해 진행한다. 즉 오리피스 면적이 더 크다면 많은 압력이 방출되므로 팽창파의 크기(팽창파의 시작점의 압력과 끝점의 압력)가 커진다. Fig. 5-1은 2.5 bar에서의 실험결과를 나타낸 것이다. 박막이 파열된 후 일정 시간 후에 팽창파가 A지점을 지난 후 B지점을 통과하고 그 이후 폐쇄단에 반사되어 B지점을 지난 후 A지점을 통과하고 다시 이 팽창파의 일부는 대기 중으로 방출되고 일부는 오리피스에 반사되어 파이프 내를 왕복하고 있다. A지점과 B지점의 첫 번째 팽창파의 크기는 같지만 두 번째 팽창파부터 압력강하 높이가 다르다. 이것은 오리피스측에서 팽창파가 발생하여 폐쇄단에서 반사되어 오리피스측으로 돌아오는 팽창파와 오리피스에서 다시 반사되는 팽창파가 연속 검출되었기 때문이다. 그리고 팽창파의 시작점 압력이 끝점 압력보다 더 높으므로 시작점의 진행속도가 더 빨라서 시간이 지날수록 기울기가 완만해지는 것도 잘 재연되고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5-2는 실험결과와 비보존형 지배 방정식을 이용하여 계산한 결과를 비교한 것이다. 계산은 파이프길이와 센서 위치를 감안하여 절점(mesh point)을 167개로 하였다. Davis의 대칭 TVD는 쿠란수(Courant number)가 0.7이상이면 해가 발산하므로 쿠란수를 0.7로 하였으며 MOC(특성곡선법)와 MCK법은 1.0으로 하였다. Fig. 5-2에서 계산결과와 실험결과가 잘 일치하였

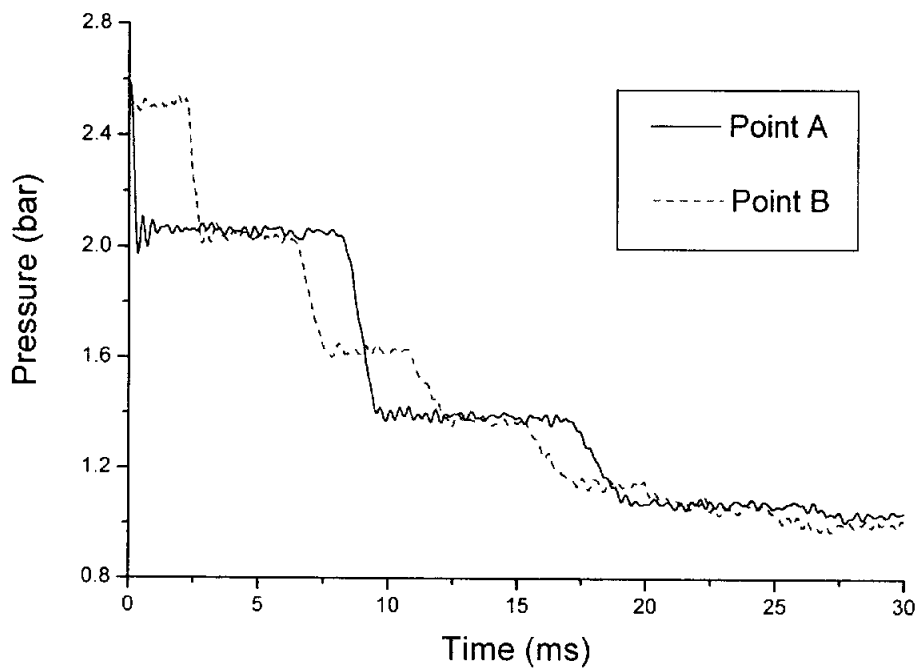


Fig. 5-1 Measured pressure-time history of pipe at point A and point B

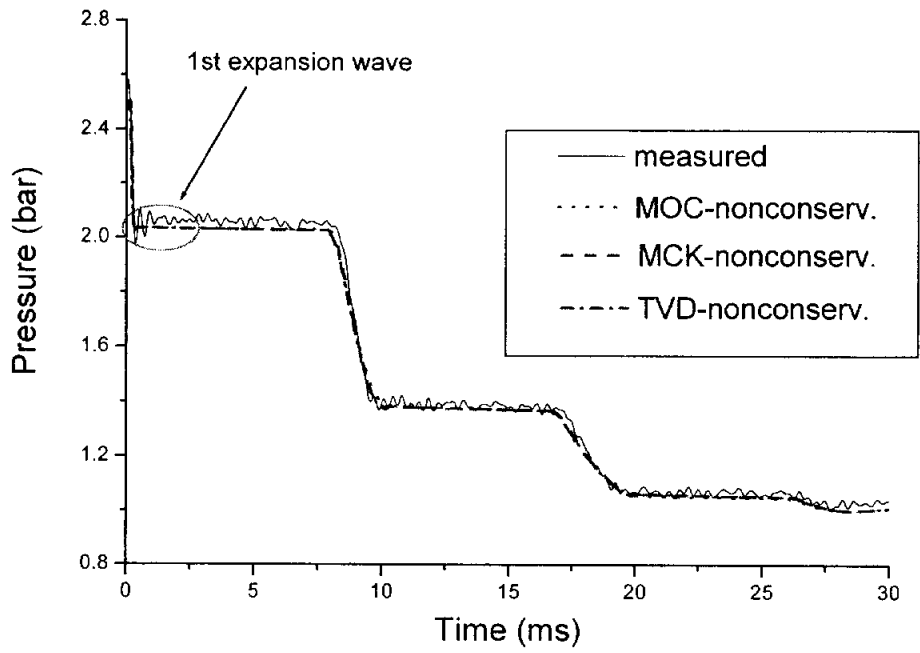


Fig. 5-2 Comparison of calculated and measured pressure-time histories using nonconservation equations at 2.5 bar, point A

고, 세 계산 알고리즘의 결과들은 거의 차이가 없었다.

Fig. 5-3은 세 계산 알고리즘의 특성을 살펴보기 위하여 Fig. 5-2의 첫 팽창과 끝단(타원 부근)을 확대하여 나타내었다. MOC는 1차 정확성에 불과하지만 계산결과와 실험결과와 매우 잘 일치하였다. 하지만 팽창과 끝단에서의 급격한 압력구배를 극복하지 못하고 기울기가 완만해지는 것을 확인할 수 있었다. MCK법 역시 계산결과가 잘 일치하였고 팽창과 끝단에서의 급격한 압력 구배도 잘 나타내었지만 팽창과 주위에서 작은 진동이 발생하였으며, TVD법은 이 진동이 소멸됨을 알 수 있다. Fig. 5-4는 보존형 지배 방정식을 사용하여 계산한 결과와 실험결과를 비교한 것이다. 보존형 역시 계산결과와 실험결과가 잘 일치하였고, MCK법은 진동이 발생하였고 TVD법은 이를 소멸시켰다.

Fig. 5-5는 세 알고리즘을 이용한 파이프내 가스의 속도 변화 계산 결과들을 비교한 것이다. 압력의 경우는 세 계산 결과들이 거의 일치하였지만 속도는 약간의 차이를 보이고 있다. 실험을 수행하여 세개의 시뮬레이션 프로그램의 정확성은 분석하지 못하였지만, 선행 연구 결과에 의하면 MOC의 경우는 1차 정확도에 불과하고 비보존형 지배 방정식을 사용하므로 가장 오차가 크게 발생하고 비보존형 지배 방정식을 사용하여 계산한 결과보다는 보존형 지배 방정식을 사용하여 계산한 결과가 더 정확하다고 추측된다.

속도에서도 역시 MCK법은 팽창과 주위에서 진동이 발생하였고 TVD는 진동이 발생하지 않았음을 알 수 있다.

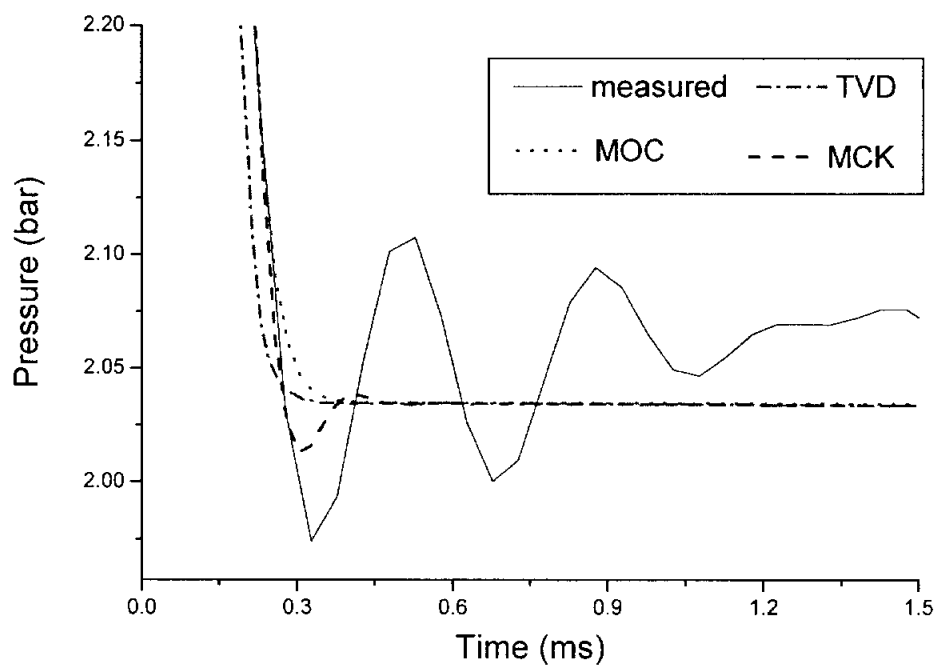


Fig. 5-3 Comparison of configuration for 1st expansion wave in Fig. 5-2

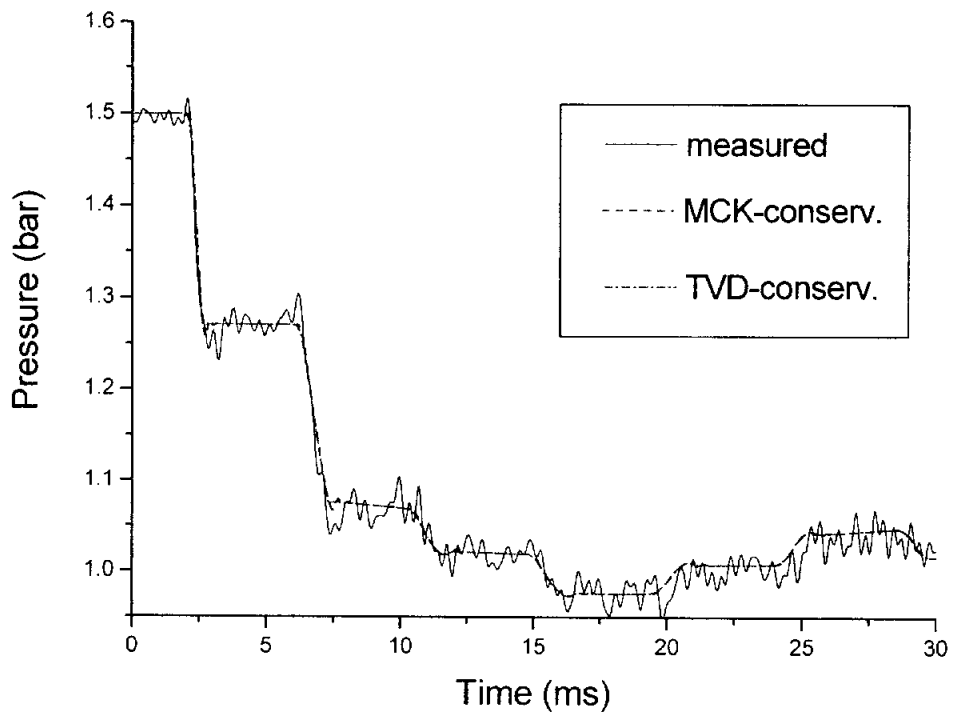


Fig. 5-4 Comparison of calculated and measured pressure-time histories using conservation equations at 1.5 bar, point B

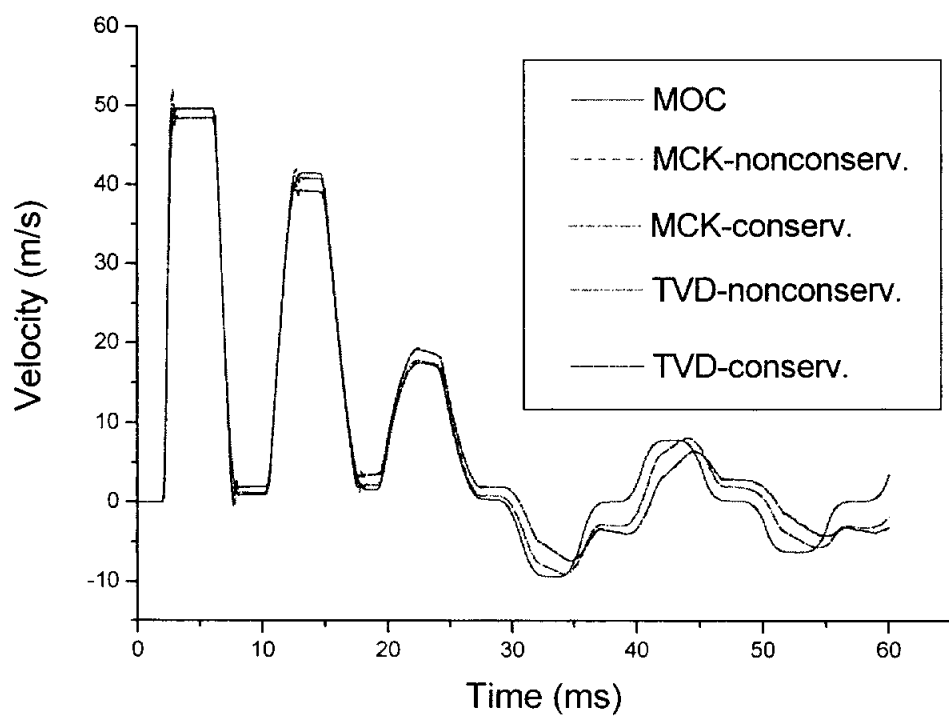


Fig. 5-5 Comparison of calculated velocity-time histories
at 2.5 bar, point B

5.2 충격파의 계산결과

Fig. 5-6은 실험을 수행하지는 못하였지만 불연속 주위의 진동을 보다 확실하게 보기 위하여 파이프내 초기 압력을 0.5bar로 계산하여 충격파가 나타나게 한 것이다. 박막이 파열된 후 첫 번째 충격파가 지나가면 파이프내의 압력은 대기압으로 급상승한다. MCK법으로 계산한 첫 번째 충격파를 보면 팽창파에서의 진동보다 확실히 더 진폭이 큰 진동이 발생함을 알 수 있고 TVD 법은 비물리적인 진동을 없애주었다. Fig. 5-7은 같은 조건에서의 속도를 계산한 결과이고 계산 결과는 압력의 경우와 같은 현상을 보였다. 폐쇄단에서 오리피스방향이 +방향이므로 박막이 파열된 후 대기측의 공기가 파이프내로 흡입되어 첫 충격파가 지나가면 파이프내의 속도는 -가 된다.

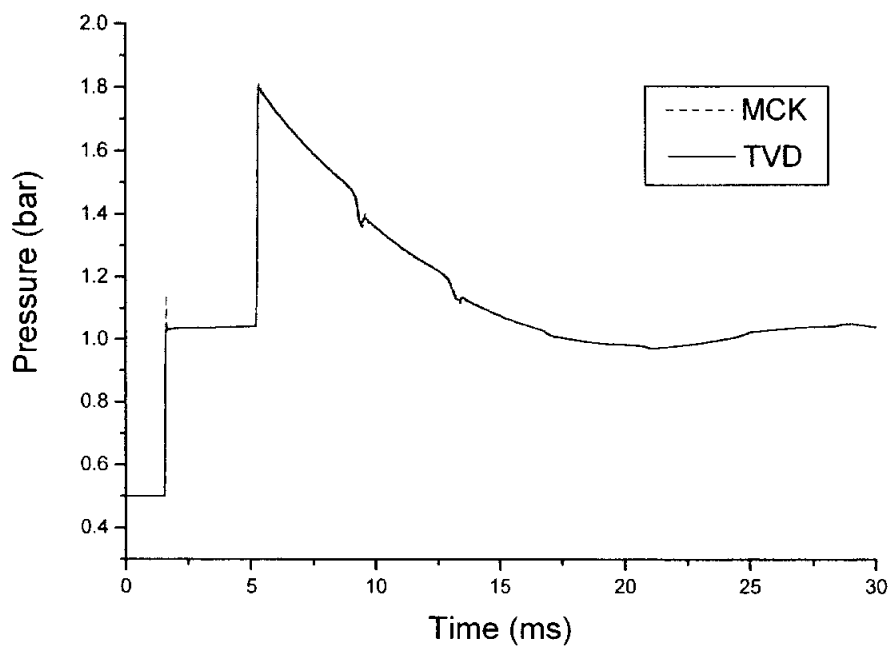


Fig. 5-6 Comparison of calculated pressure-time histories for compression wave at 0.5 bar, point B

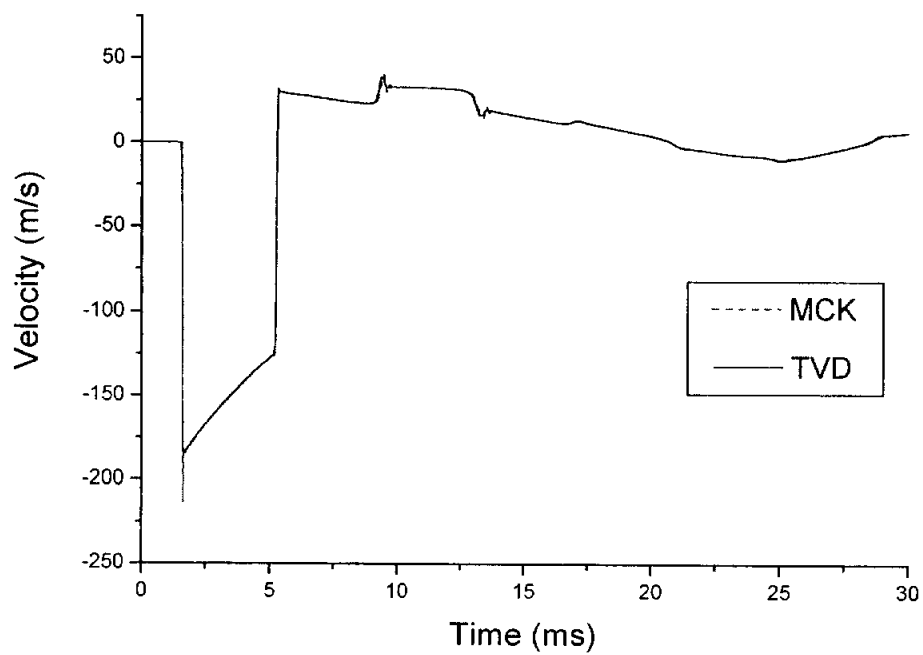


Fig. 5-7 Comparison of calculated velocity-time histories for compression wave at 0.5 bar, point B

5.3 마찰인자와 계산 격자수의 영향

Fig. 5-8과 Fig. 5-9는 마찰 인자 f 의 변화에 따른 압력과 속도를 계산 비교한 것이다. 압력의 경우 f 가 클수록 압력강하가 늦다. 하지만 팽창파가 나타나는 시간은 일치함을 알 수 있다. 따라서 f 와 파의 속도는 무관함을 알 수 있다. 속도 역시 팽창파가 나타나는 시간은 일치하였고, f 가 클수록 팽창파의 크기는 작아 졌다.

Fig. 5-10과 Fig. 5-11은 격자수에 따른 계산결과를 비교한 것이다. 구배가 급격한 첫 팽창파에서는 특히 큰 차이를 보이고, 구배가 완만한 4번째 이후 팽창파에서는 차이가 거의 없다. 격자수가 적을수록 계산시간이 줄어드는 장점은 있지만 격자 간격이 커지므로 급격한 구배가 있는 구간은 잘 포획하지 못하였다.

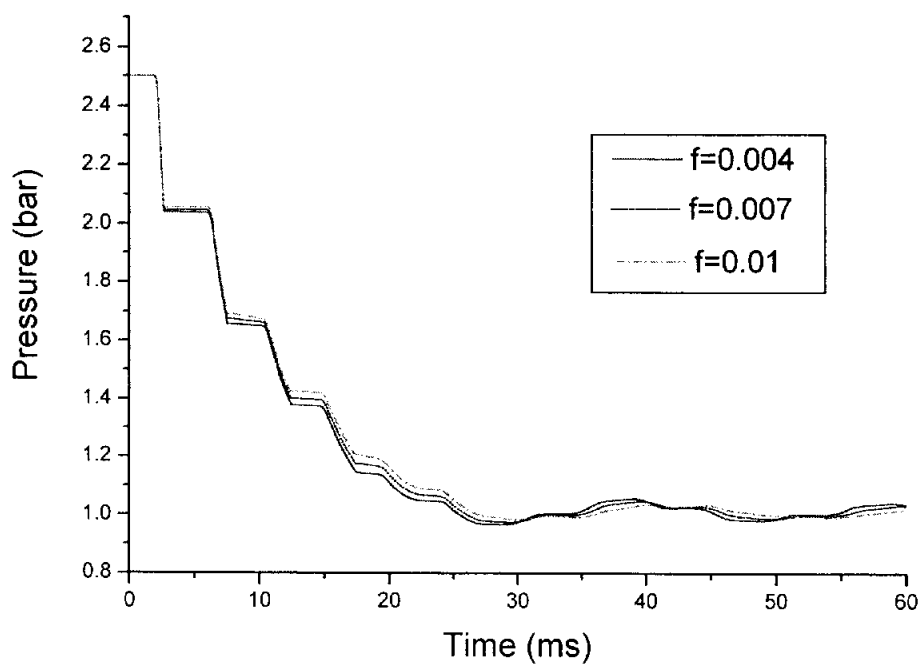


Fig. 5-8 Comparison of calculated pressure-time histories against friction factor at 2.5 bar, point B

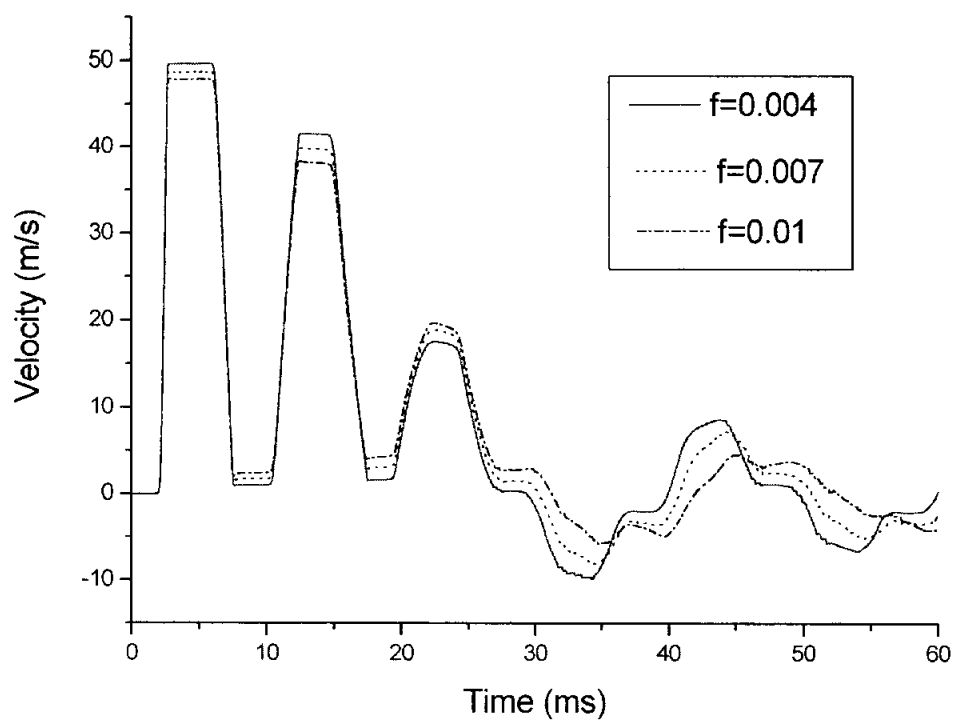


Fig. 5-9 Comparison of calculated velocity-time histories against friction factor at 2.5 bar, point B

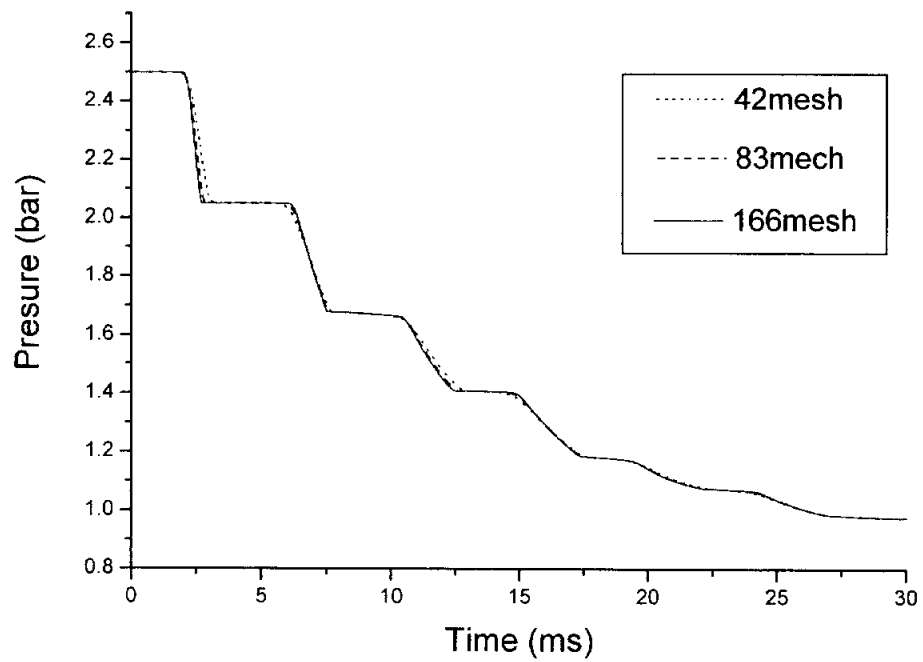


Fig. 5-10 Comparison of calculated pressure-time histories against the number of mesh at 2.5 bar, point B

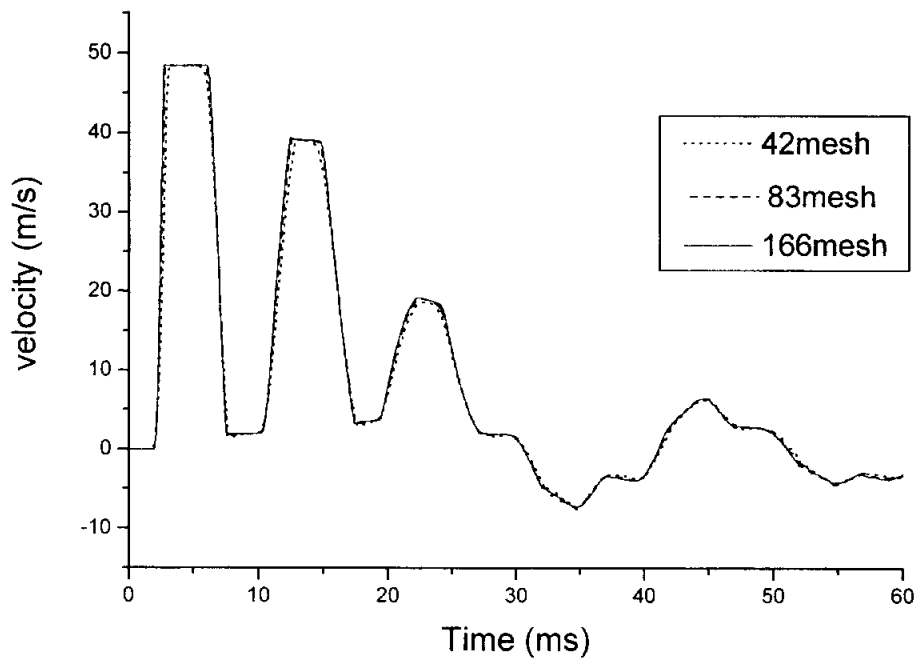


Fig. 5-11 Comparison of calculated velocity-time histories against the number of mesh at 2.5 bar, point B

6. 결 론

본 연구는 내연기관 흡배기관의 수치해석에 주로 사용되는 대표적인 세 가지 계산 알고리즘을 비교 분석하였다.

- 1) 팽창과 끝단에서 특성곡선법은 압력구배가 완만해졌고 MCK법은 비물리적인 진동이 생겼다. 그러나 TVD법은 비물리적인 진동도 생기지 않았고 압력구배도 잘 일치하였다.
- 2) 압력의 경우, 보존형 지배방정식이나 비보존형 지배방정식을 사용한 세 시뮬레이션 프로그램의 계산 결과들은 실험결과와 매우 잘 일치하였다.
- 3) 마찰 인자 f 가 클수록 팽창과의 크기는 작아 졌으나, 파의 전파 속도와는 무관하였다.
- 4) 격자수가 적을수록 계산 시간은 줄어드나, 급격한 구배가 있는 구간에는 적합하지 못하였다.
- 5) 속도의 경우, 특성곡선법의 계산결과와 유한 차분법(MCK법, TVD법)의 계산결과가 다소 상이함을 알 수 있고 또한 보존형 지배방정식을 사용한 계산 결과와 비보존형 지배방정식을 사용한 계산결과가 미소하게 차이가 났다.

추후, 가스유동 속도를 측정하여 각 시뮬레이션 프로그램의 정확성을 검증할 필요성이 있다고 생각되며, 압력거동 계산결과에서 좋은 결과를 보여준 대칭 TVD법은 흡배기관의 가스유동에 대한 예측 프로그램으로 유용하게 사용될 것으로 기대된다.

참고 문헌

- 1) Desmond E. Winterbone and Richard J. Pearson, "The simulation of gas dynamics in engine manifolds using non-linear symmetric difference schemes", Proc Instn Mech Engrs, Vol211 part C, pp. 601~616, 1997
- 2) R. J. Pearson, M. D. Bassett, P. Batten and D. E. Winterbone, "Two-Dimensional Simulation of Wave Propagation in a Three-Pipe Junction", ASME journal of Engineering for Gas Turbines and Power vol.122, pp.549~555, 2000
- 3) 최재성 외 1명, "내연기관의 흡, 배기계내 가스유동해석용 알고리즘의 고 정도화", 한국선박기관학회지, 제 25권 제 1호, pp.107~114, 2001
- 4) 박진용외 3명, "내연기관 배기계를 통한 가스유동에 관한 수치해석", 한국 자동차 공학회, pp.69~77, 1996
- 5) 성백규외 1명, "가스 교환 시뮬레이션에 의한 5 밸브 가솔린 엔진의 성능 예측 기술", 한국 자동차 공학회, 제 10권 1호, pp.51~58, 2002
- 6) 박인권 외1명, "내연기관 배기계를 통한 비정상 가스유동에 관한 수치해 석", 한국자동차공학회, 96380256, 1996
- 7) Seifert, H, "Experiences with a mathematical model for the simulation of operating progress in internal combustion engines", Motortechnische, 39(7/8), pp. 321~325, 1978
- 8) Takizawa, M., Uno, T., Oue, T. and Yura, T., "A study of gas exchange process simulation of an automotive multi-cylinder internal-combustion engine", SAE paper 820410, 1982
- 9) Meisner, S. and Sorenson, S. C., "Computer simulation of intake and exhaust manifold flow and heat transfer", SAE paper 860242, 1986

- 10) Onorati, A., Winterbone, D. E. and Pearson, R. J., "A comparison of the Lax-Wendroff technique and the method of characteristics for gas dynamic calculations using fast Fourier transform spectral analysis", SAE paper 930428, 1993
- 11) John D. Anderson, Jr, "Computational Fluid Dynamics", McGRAW-HILL pp. 216~278
- 12) Davis, S. F., "TVD finite difference schemes and artificial viscosity", NASA CR 172373, 1984
- 13) Davis, S. F. ", A simplified TVD finite difference scheme via artificial viscosity", SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8, pp. 1~18, 1984
- 14) Harten, A., "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", J. Comp. Phys., 49, pp. 357~393, 1983
- 15) Toro, E. F. and Billett, S. J., "Centred TVD schemes for hyperbolic conservation laws", IMA Journal of Numerical Analysis, 20, pp. 47~79, 2000
- 16) Patrick H. Oosthuizen and William E. Carscallen, "Compressible Fluid Flow", McGRAW-HILL, pp. 332~361, 1996
- 17) Desmond E. Winterbone and Richard J. Pearson, "Theory of Engine Manifold Design Wave action methods for IC engines", Professional Engineering Publishing., pp. 18~177, 2000

부 록

A. 보존형 방정식과 비보존형 방정식 비교

$$\text{보존형 지배 방정식 : } \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + C = 0 \quad (1)$$

$$\text{비보존형 지배 방정식 : } \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} + C = 0 \quad (2)$$

$$\text{여기서 } A = \frac{\partial F}{\partial W}$$

연속 방정식을 식 (1)로 표현하고 이를 유한 차분화할 경우에는 보존 특성을 만족하나 식 (2)처럼 비보존 형식으로 표현하고 이를 유한 차분화할 경우에는 보존 특성을 만족하지 않으므로 해서 오차가 생기게 된다. 즉 연속방정식이 만족되지 않고 질량이 계속 축적되거나 고갈되는 현상을 초래하게 되고 이러한 연속 방정식을 만족하지 못하는 속도장은 다시 운동량 방정식에 영향을 미쳐 뉴턴 2법칙과 에너지 방정식마저 만족하지 못하는 결과를 초래하여 결과적으로 지배방정식 모두를 만족하지 못하게 된다. 그래서 보통 전산유체 역학에서는 대부분의 경우 보존형을 사용하고 있다.

증명

등엔트로피, 1차원 정상상태유동의 경우 지배 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\text{보존형 지배 방정식} \quad : \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\text{비보존형 지배 방정식} \quad : \quad A \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

식(3)을 차분화하면

$$\frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \quad (5)$$

여기에 Δx 를 양변에 곱한 후 이를 전구간에 대하여 합(적분)하면

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{imax} \left(\frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \Delta x &= \sum_{i=1}^{imax} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) \\ &= [(F_{1+\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{2}}) + (F_{2+\frac{1}{2}} - F_{1+\frac{1}{2}}) + \cdots + (F_{imax+\frac{1}{2}} - F_{imax-\frac{1}{2}})] \\ &= (F_{imax+\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{2}}) = [FLUX - OUT] - [FLUX - IN] = 0 \end{aligned}$$

으로써 보존 특성을 만족하고 있음을 알 수 있다.

식 (4)를 같은 절차로 유한차분화하면

$$A_i \frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \quad (6)$$

양변에 Δx 를 곱한 후 이를 합하면

$$\sum_{i=1}^{imax} A_i \left(\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \Delta x = \sum_{i=1}^{imax} A_i (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned}
&= [A_1(W_{1+\frac{1}{2}} - W_{\frac{1}{2}}) + A_2(W_{2+\frac{1}{2}} - W_{1+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \cdots + A_{i_{\max}}(W_{i_{\max}+\frac{1}{2}} - W_{i_{\max}-\frac{1}{2}})]
\end{aligned}$$

이 되어 서로 소거되는 항이 하나도 없이 모든 항이 남아 있게 되어 보존특성을 만족하지 못함을 알 수 있다.

B. TVD 조건 수식 증명

$$w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1} = (1 - C_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i+\frac{1}{2}}^n) \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n + C_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n + D_{i+\frac{3}{2}}^n \Delta w_{i+\frac{3}{2}}^n \quad (7)$$

이다. 이식을 $-\infty < i < \infty$ 의 구간을 모두 합하면

$$\begin{aligned}
TV(w^{n+1}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}| \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} (1 - C_{i+\frac{1}{2}}^n - D_{i+\frac{1}{2}}^n) |\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n| \\
&\quad + \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_{i-\frac{1}{2}}^n |\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n| + \sum_{i=-\infty}^{\infty} D_{i+\frac{3}{2}}^n |\Delta w_{i+\frac{3}{2}}^n| \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w_{i+1}^n - w_i^n| = TV(w^n)
\end{aligned} \quad (8)$$

첫째 열에서 두 번째 열의 부등호는 $|x+y| \leq |x| + |y|$ 이므로 성립하게 되고 두 번째 열과 세 번째 열의 계수 C 와 D 가 포함된 항은 모두 상쇄되므로 4 번째 열이 성립하게 된다.

C. 플럭스 리미터의 영역

Lax-Wendroff scheme에서

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(\Delta w_{i+1}^n - \Delta w_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 a^2 (\Delta w_{i+1}^n - 2\Delta w_i^n + \Delta w_{i-1}^n)$$

(9)

$\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 라 하면

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{1}{2} \nu (\Delta w_{i+1}^n - \Delta w_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \nu^2 (\Delta w_{i+1}^n - 2\Delta w_i^n + \Delta w_{i-1}^n) \quad (10)$$

이식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \nu \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \nu(1-\nu) \Delta_- (\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n) \quad (11)$$

여기서

$$\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n = w_{i+1}^n - w_i^n$$

$$\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n = w_i^n - w_{i-1}^n$$

$$\Delta_- (\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n) = (w_{i+1}^n - w_i^n) + (w_i^n - w_{i-1}^n)$$

식 (11)은 1차 정확성을 가지는

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \nu \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (12)$$

과

$$- \frac{1}{2} \nu(1-\nu) \Delta_- (\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n) \quad (13)$$

으로 구성되어 있다.

1차 정확도를 가지는 식 (12)은 양의 방향으로 전파될 때의 Godunov법과 일치한다. 따라서 식 (12)은 불연속면에서 진동이 발생하지 않는다. 그러나 식 (11)은 2차 정확성을 가지며 불연속면에서 진동이 발생한다. 식 (11)과 식 (12)의 차, 즉 식 (13)을 비확산 플럭스라 하며 이항으로 인하여 불연속면에서 진동이 발생한다. 즉 2차 정확성의 플럭스 항들은 식 (14)과 같이 나타낼 수 있고 진동 발생을 없애기 위해 불연속면에서 선택적으로 비확산 플럭스를

리미터를 사용하여 제한하여야 한다.

$$\left[\begin{array}{c} \text{2차 정확성을} \\ \text{가지는 플럭스항} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{1차 정확성을} \\ \text{가지는 플럭스항} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{비확산 플럭스} \end{array} \right] \quad (14)$$

식 (11)에 비확산 플럭스에 리미터를 추가하면 다음과 같다.

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \nu c w_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \nu (1-\nu) \Delta_- (\phi_i \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n) \quad (15)$$

여기서 ϕ 는 플럭스 리미터이고 r 은 기울기 비이다.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i = \phi(r_i) \\ \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n \\ r_i = \frac{\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n} \end{array} \right. \quad (16)$$

TVD 조건 만족 여부를 간단히 판단하기 위해 식 (15)의 우변에서 w_i^n 을 제외하여 $\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n$ 로 묶어내어 본문의 TVD 조건의 식 (3-14)과 비교하면

$$C_{i-\frac{1}{2}}^n = \nu + \frac{1}{2} \nu (1-\nu) \frac{\Delta_- [\phi(r_i) \Delta w_{i+\frac{1}{2}}^n]}{\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n} \quad (17)$$

$$D_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$$

식 (17)을 재정리하면

$$C_{i-\frac{1}{2}}^n = \nu \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1-\nu) \left[\frac{\phi(r_i)}{r_i} - \phi(r_{i-1}) \right] \right\} \quad (18)$$

이고 다음과 같이 제한된다.

$$\nu [1 - \frac{1}{2} (1-\nu) \Phi] \leq C_{i-\frac{1}{2}}^n \leq \nu [1 + \frac{1}{2} (1-\nu) \Phi] \quad (19)$$

여기서

$$\left| \frac{\phi(r_i)}{r_i} - \phi(r_{i-1}) \right| \leq \Phi \quad (20)$$

CFL 조건 $|\nu| \leq 1$ 을 만족하고 TVD 조건이

$$0 \leq C_{i-\frac{1}{2}}^n \leq 1 \quad (21)$$

이므로 이를 만족하는 ϕ 의 범위를 구하기 위해서는 식 (19)이 식 (21)을 만족하여야 하므로 식 (19)의 우변과 식 (21)의 우변을 비교하면

$$\nu[1 + \frac{1}{2}(1-\nu)\phi] \leq 1 \quad (22)$$

이를 정리하면

$$\phi \leq \frac{1-\nu}{\frac{1}{2}\nu(1-\nu)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\nu} = \frac{2}{\nu} \quad (23)$$

따라서

$\phi \leq 2$ 이다.

그리고 w_i 에서 최대, 최소점 주위의 점들의 구배가 반대의 부호를 가져서, 즉 진동이 생기면, 해의 값들이 증감하면 전 변화량(total variation)이 증가하므로 이를 방지하기 위해 $r \leq 0$ 일 때 $\phi(r) = 0$ 으로 두면 식 (15)의 비확산항은 0이 되어 식 (12)과 같은 단조성(monotonicity)을 가지는 1차 정확성의 풍상 차분법(upwind scheme)이 된다.

따라서 식 (20)이 항상 성립하기 위해 다음과 같이 된다.

$$0 \leq [\frac{\phi(r)}{r}, \phi(r)] \leq 2 \quad (24)$$

식 (24)의 영역을 나타내면 Fig. 1과 같다.

식 (15)에서 $\phi(r) = 1$ 이면 Lax-Wendroff법이 되고 $\phi(r) = r$ 이면 식 (25)과 같은 Warming 과 Beam의 풍상 차분법(upwind scheme)이 된다.

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \nu \Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \nu(1-\nu) \Delta_- (\Delta w_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (25)$$

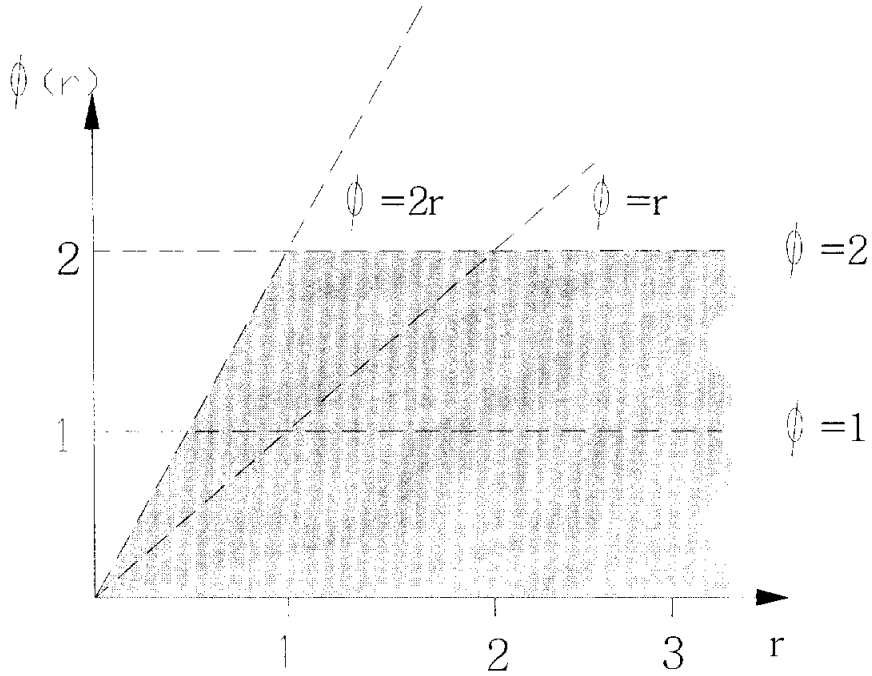


Fig. 1 Region for TVD limiter function

이들 두 2차 정확도를 가지는 방법들은, 일정한 계수를 가지는 ($\phi(r)=1$ or r), 플럭스 리미터 영역 내에 있지만 진동이 발생된다. 이를 감안하여 Sweby는 $[w_{i-2}, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}]$ (또는 $[w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, w_{i+2}]$)을 이용하는 2차정확도의 계산 알고리즘들에 Lax-Wendroff법과 Warming and Beam 법에 가중 평균을 첨가하여 플럭스 리미터를 나타내었다.

$$\phi(r)=[1-\theta(r)]\phi^{LW}(r)+\theta(r)\phi^{WB}(r) \quad (26)$$

여기서

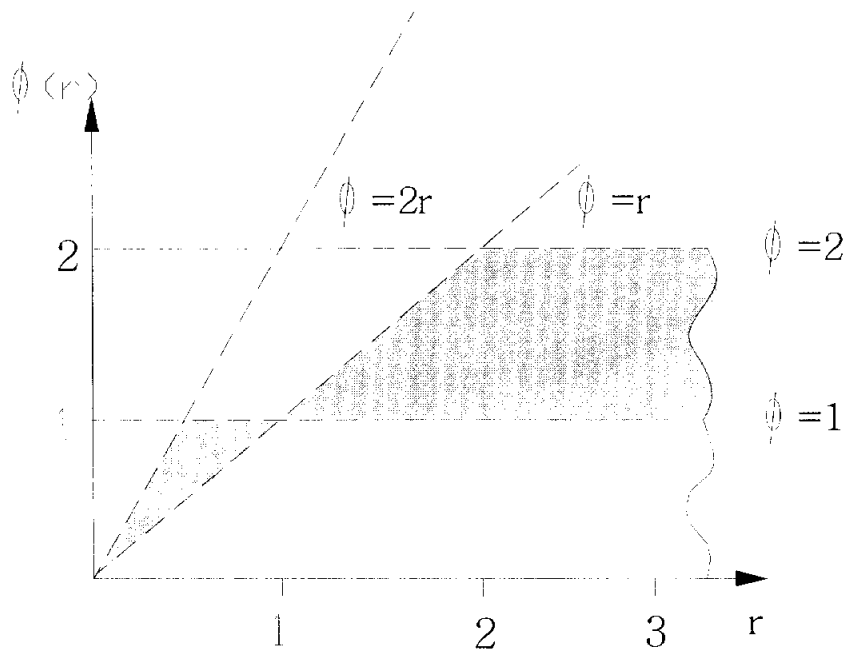
$$0 \leq \theta(r) \leq 1$$

$\phi^{LW}(r)=1$ 이고 $\phi^{WB}(r)=r$ 이므로 식 (26)은

$$\phi(r)=1+\theta(r)(r-1) \quad (27)$$

로 되고 이것이 2차 정확성의 TVD영역을 나타낸다.

식 (27)의 영역을 나타내면 Fig. 2와 같다. limiter의 종류에는 Fig. 2의 영역에서 상단 경계를 취하는 superbee, 하단경계를 취하는 minmod등이 대표적



이다.

Fig. 2 Region for second order TVD limiter function

감사의 글

벌써 2년이 지나 졸업할 때가 되었습니다. 이 시간 동안 부족한 저에게 참된 학문의 길을 깨우쳐 주신 고대권 교수님과 안수길 교수님께 진심으로 감사의 말씀을 올립니다. 그리고 바쁘신 와중에도 논문 심사 에 심혈을 기울여 주신 한규일 교수님과 과정 중에 참된 가르침으로 많은 것을 일깨워 주신 학과 여러 교수님께도 머리 숙여 감사 드립니다.

선배로서의 따뜻한 격려와 질책을 아끼지 않으셨던 내연기관 연구실 의 여러 교수님, 조규학 선배님, 김용순 선배님, 이정엽 선배님께도 감사의 뜻을 전하고 싶습니다.

그리고 항상 같이 생활한 동기, 흥섭, 석호, 종구, 민수, 재운, 종철, 석호형, 승민이 형, 동기인지 후배인지 분간이 안가는 광국, 양석사, 그리고 같은 실험실 후배들, 규봉, 지은, 영수, 기태, 현진 이에게도 고마움을 전하고 싶습니다.

항상 무엇보다도 우정을 제일 중요하게 생각하고 만나면 매일 술만 마시는 멋진 친구들, 장형, 영섭, 영운, 경석 등에게도 고마움을 전합니다.

끝으로 못난 아들 때문에 추운 날씨에도 생업에 고생하시는 아버지, 오랜 기간의 마음고생과 아들 뒷바라지로 몸이 안 좋으신 어머니, 항상 사랑하고 감사합니다.