교육학석사 학위논문

피타고라스정리 와 일반화

지도교수 백 영 길

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2003년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 병 조

김병조의 교육학석사 학위논문을 인준함

2003년 6월 21일

주 심 이학박사 송 현 종

위 원 이학박사 백 영 길

위 원 이학박사 심 효 섭

제목 차례

Pythagorean theorem and its Generalization

Byung Joe Kim

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

Pythagorean theorem is one of the most important theorems used in mathematics. No other theorem in all areas of mathematics has been proved more often than Pythagorean theorem. From ancient times, various researches have been done by people from many sorts of occupations including mathematics experts, artists and politicians, so it is said that approximately 400 kinds of independent proofs have been done.

Pythagorean theorem has two kinds of viewpoints at the same time; that is, the algebraic aspect in the viewpoint of quadratic Diophantine equation and geometric meanings in the viewpoint of that it is one of right-angled triangle's properties. And the concept of the distance between the points on the rectangular coordinates system can be induced by it.

In this thesis, focusing on the secondary education of mathematics and etails about Pythagorean theorem and its generalization in both aspects of geometry and algebra are discribed.

I 서문

초중등기하학에서 가장 많이 사용되고 있는 정리중 하나가 '피타고라스정리(Pythagorean theorem)'이다.

수학의 모든 분야에서 피타고라스정리보다 많은 다양한 증명이 주어졌던 정리는 없을 것이다. 고대부터 오늘날에 이르기까지 전 세계적으로 전문수학자 뿐 만 아니라 예술가, 정치가를 비롯한 여러 부류의 사람들에 의해 그 연구가 이루어져 약 400가지의 독립적인 증명이 이루어진 것으로도 유명하다.

피타고라스정리(Pythagorean theorem)는 2차의 디오판토스 방정식으로 보았을 때 대수적인 면과 직각삼각형의 한 성질이라는 관점으로 보았을때 기하적인 의미를 동시에 가진다. 이로부터 직각 좌표계에서 두 점 사이의 거리의 개념이 유도되는 중요한 정리이다.

이와같이 중요한 피타고라스정리가 초중등교육과정 중에 어떻게 나타나는지 살펴보면, 초등학교 1~3단계에서는 주로 수로 피타고라스정리가 성립함을 보여주고 있고, 4~6단계에서는 그림으로 간단한 설명이 있는 피타고라스정리가 나오며, 중학교(7~9단계)과정에 와서 피타고라스정리가 도형의 기본적인 닮음과 합동 그리고 넓이에 대한 이론으로 그 기하학적인 증명이 제시된다. 고등학교의 수학과정중에는 피타고라스정리의 직접적인 언급은 없으나 그래도 가장 유용한 기하학적인 정리이다.

따라서 본 논문에서는 중등수학교육에 초점을 두고 피타고라스정리와 그 일반화를 기하적, 대수적 양면성을 중심으로 기술한다.

Ⅱ 피타고라스정리의 증명들

피타고라스정리의 기하학적인 증명들의 주류를 보면 “한 도형에서 합동인 도형을 더하여 만들어진 두 도형의 넓이는 같다”는 “더하기증명법”과 “같은 두 도형에서 합동인 도형을 빼서 만들어진 두 도형의 넓이는 같다.”는 “빼기 증명법”, “닮음을 이용한 증명법” 및 “도형의 넓이가 같음”을 이용한 증명법등이 있다.

1. Pythagoras의 증명. [1, pp33-34] (빼기 증명법)

그림 1-1, 1-2에서 직각삼각형(D)의 세변의 길이를 a, b, c 라 하자. 그림 1-1에서 합동인 도형D를 없앤 그림 1-2 의 두 도형의 넓이는 같다.

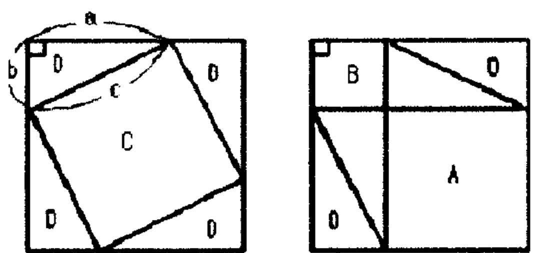


그림 1-1

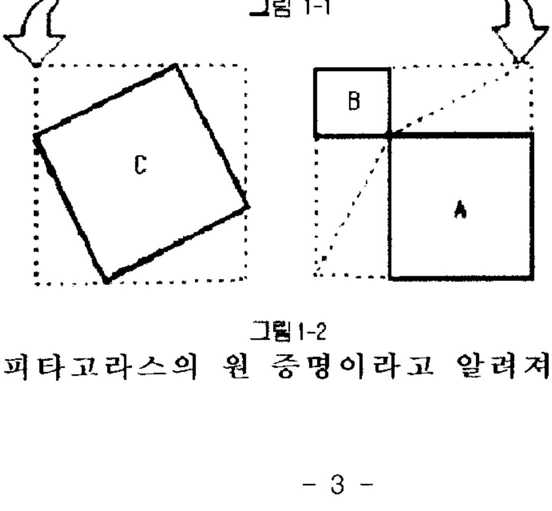


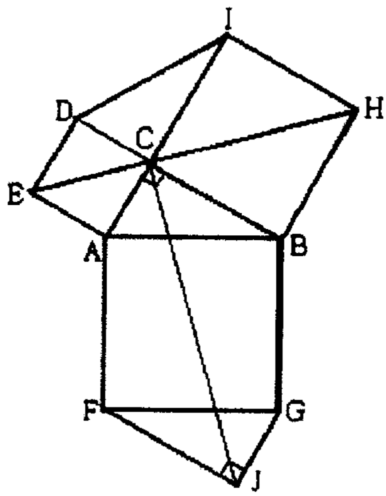
그림 1-2

이 증명은 피타고라스의 원 증명이라고 알려져 있다. [1, p33]

2. Leonardo da Vinci (1452-1519)의 증명

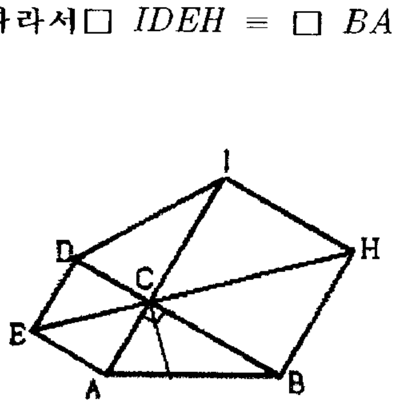
[1, pp35-36] (**빼기 증명법**)

아래 원그림은 직각삼각형ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형 $AFGB$, $BHIC$, $ACDE$ 를 그리고, $AC//JG$, $BC//JF$ 되게 하면 $\triangle ABC \equiv \triangle DIC \equiv \triangle GFJ$



원그림

따라서□ $IDEH$ ≡ □ $BAEH$ ≡ □ $FACJ$ ≡ □ $BGJC$ 이다.



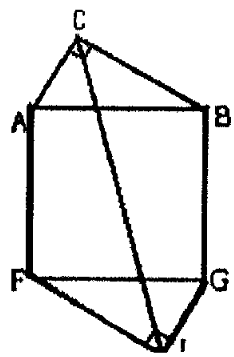


그림2-1

그림 2-1에서 두 직각삼각형을 뺀 그림2-2의 넓이는 같다.

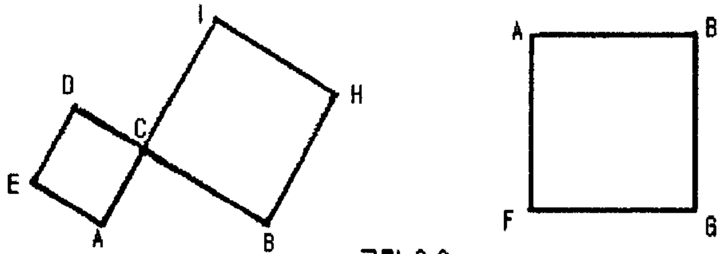


그림 2-2

3. Henry Perigal 의 증명(1873년경의 증명, 영국인) [1, pp34-35] (더하기 증명법)

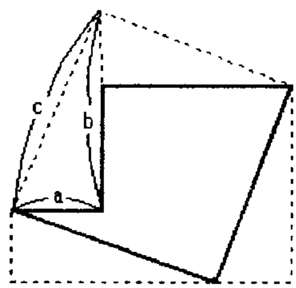


그림 3-1

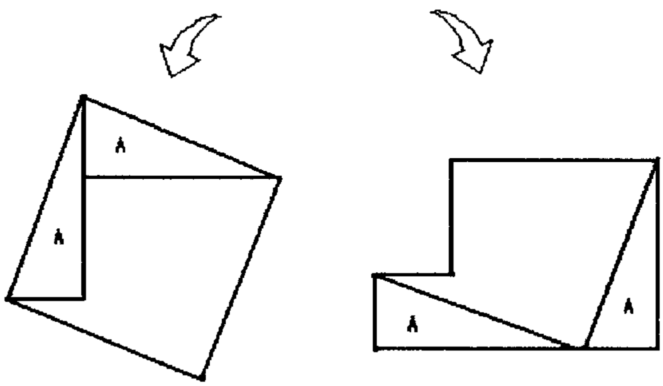


그림 3-2

그림 3-1에서 세변의 길이가 a, b, c 인 직각삼각형(A)부분을

그림 3-2에 더하여 생긴 두 도형의 넓이는 같다.

※ 헨리 페리갈의 증명은 다케베, 매문정 및 코라가 같은 증명
법을 발견하였다고 문헌들에 있음.

코라(Tabit ibn Qorra, 826-901) [1, p34]

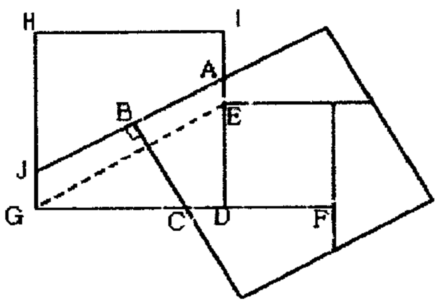
다케베 (建部賢弘 :1664~1739, 일본)[3, p35]

매문정(.梅文鼎:1633~1721,중국 청나라)[3, p35]

4. Dudeney(1917)의 증명 [1, p35] (더하기 증명)

다음 원그림의 $AB = BC = BJ = \frac{c}{2}$, $CD = EA = AI = \frac{b-a}{2}$,

$DF = a$,$CG = \frac{a+b}{2}$인 그림이다.



원 그림

다음 그림 4-1에서 합동인 도형 (A)을 세 개씩 더하여 만들어진 그림 4-2의 두 도형의 넓이는 같다.

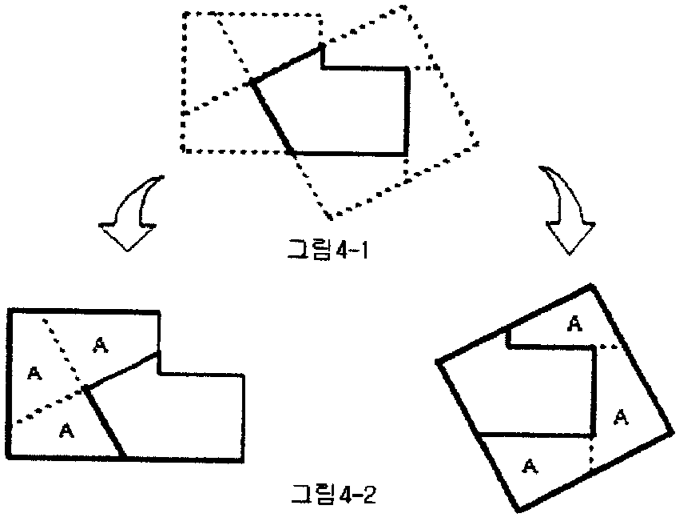


그림4-1

그림4-2

5. Bhaskara (인도, 1114~1185)의 증명

[1, pp36-37] (더하기증명법)

아래에 있는 그림 5의 첫 번째 그림은 한 변의 길이가 $a-b$ 인 사각형이다.

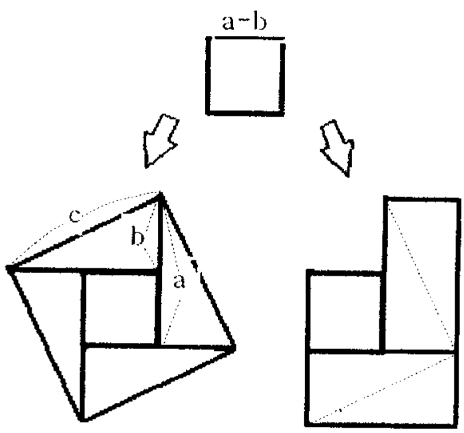
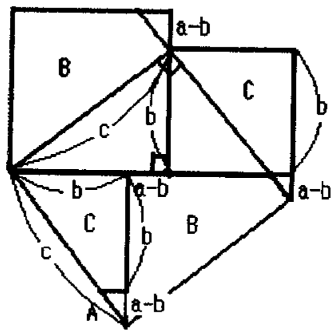


그림 5

여기에 세변의 길이가a, b, c인 직각삼각형을 네 개 씩 더하여 만들어진 그림 5의 마지막 두 도형의 넓이는 같다. 이 증명은 중국의 주비산경의 구고현의 정리의 증명과 매우 비슷하다.

6. Annarizi 의 증명(Arabia, AD 900)

[2, p3] (더하기 증명법)



원그림

그림 6-1에서 합동인 도형 A, B, C 를 더하여 만든 그림 6-2의 두 도형의 넓이는 같다.

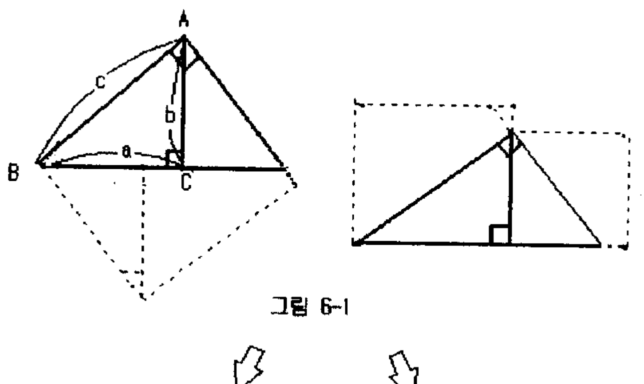


그림 6-1

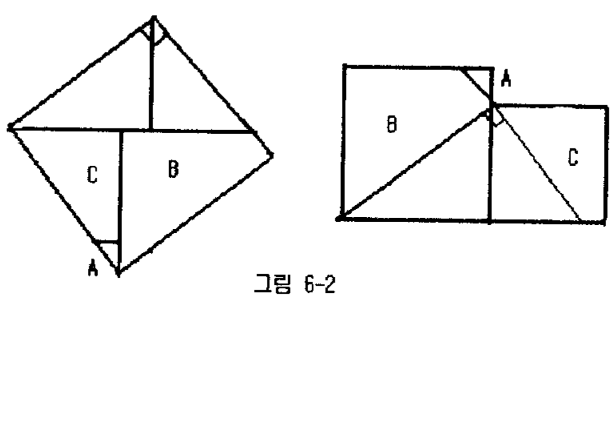
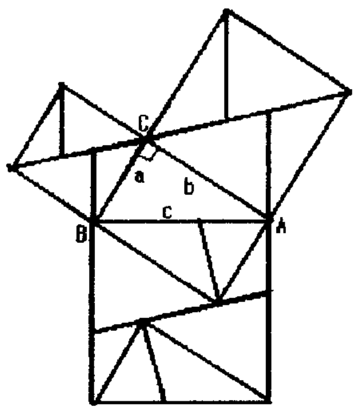


그림 6-2

7. J.E. Böttcher의 증명 [2, p6] (더하기증명법)

평행선을 고려하면 원그림의 같은 모양의 삼각형들은 서로 합동이다.



원그림

그림 7-1에 같은 부호의 합동인 삼각형들을 더하면 그림7-2가 되어 두 도형의 넓이가 같다.

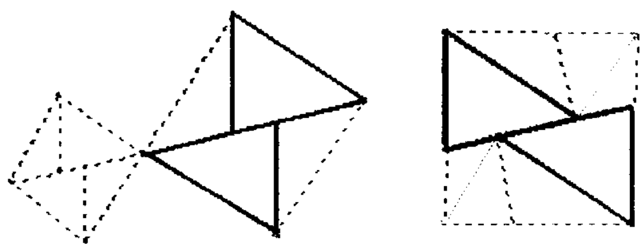


그림 7-1

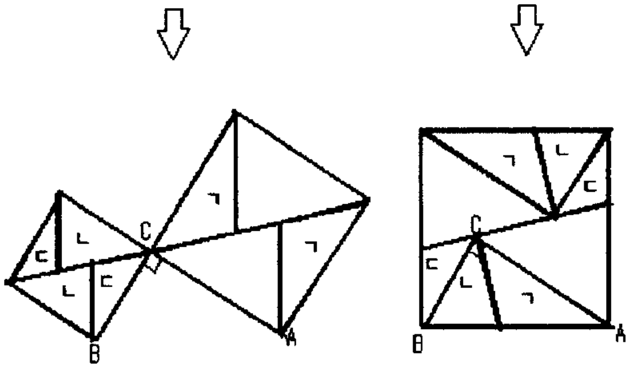
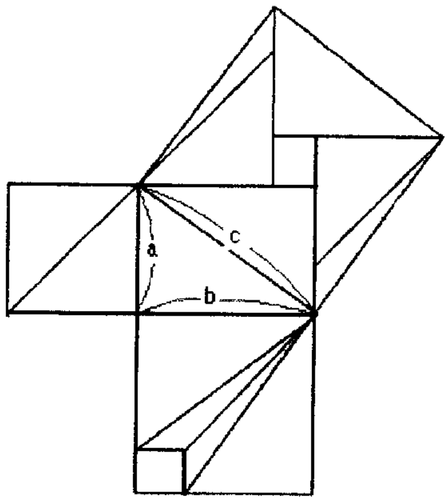


그림 7-2

8. Lui Hui의 증명법 (AD 3세기 경)

[2, p4] (더하기 증명법)



원그림

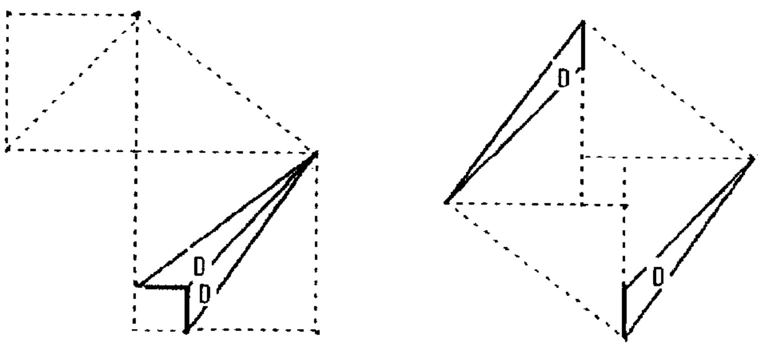


그림8-1

그림 8-1의 삼각형D (밑변의 길이가 $b-a$이고 높이가 a)에서 합동인 도형 A, B, C 를 더해 만들어진 그림 8-2의 두 도형의 넓이는 같다.

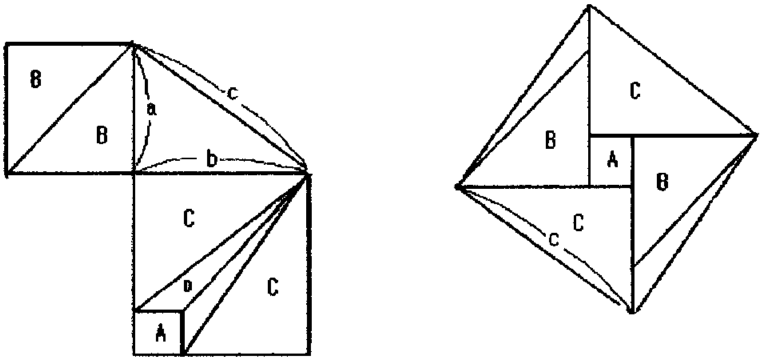


그림 8-2

9. Campa 의 증명 (1902년 발표) (더하기 증명법)

그림 9-1에서 직각삼각형 ABC의 세변의 길이를 각각 a, b, c 라 하면 평행선의 성질에 의해 같은 모양의 도형은 서로 합동이고 이 합동인 도형을 더해 만들어진 그림 9-2의 두 도형의 넓이는 같다.

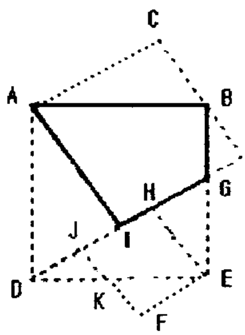


그림9-1

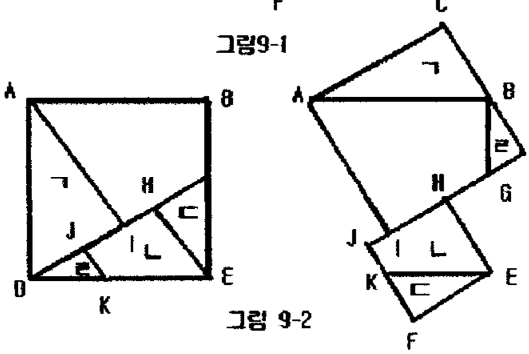


그림 9-2

10. 박부성의 증명 [2, p8]

1999년 한국의 박부성씨가 다음과 같은 증명을 하였다.

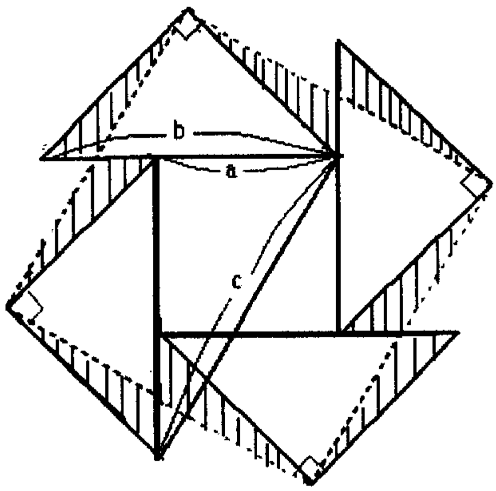
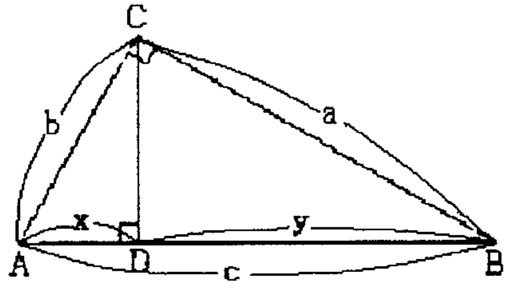


그림10

그림 10에서 직각이등변삼각형의 높이는 $\frac{b}{2}$이고 그 넓이는 $\frac{b^2}{4}$ 이다. 그리고 빗금 친 작은 부분의 삼각형들은 합동되게 그린 그림이다. 그러면 피타고라스정리인 $c^2 = a^2 + b^2$이 성립한다.

11. Bhaskara의 삼각형의 닮음을 이용한 증명법

[1, p39]



$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \qquad b : x = c : b \qquad \therefore b^2 = cx$

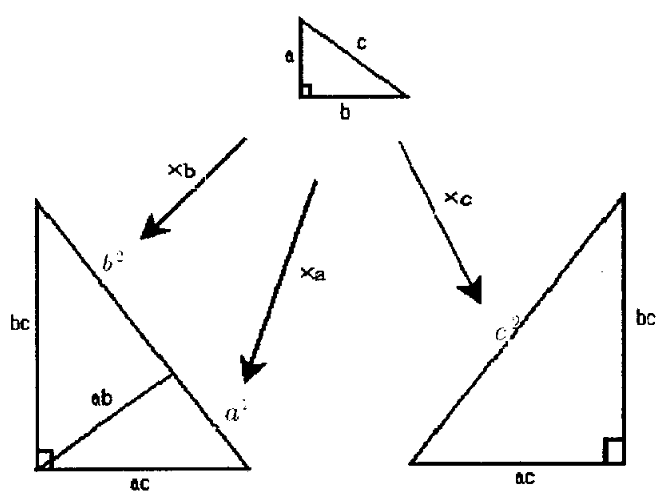
마찬가지로 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ 에서 $\therefore a^2 = cy$

$\therefore a^2 + b^2 = cx + cy = c(x+y) = c^2$

이 증명은 17세기에 영국의 수학자 월리스(JohnWallis ,1616 -1703)에 의해서 재발견되었다.

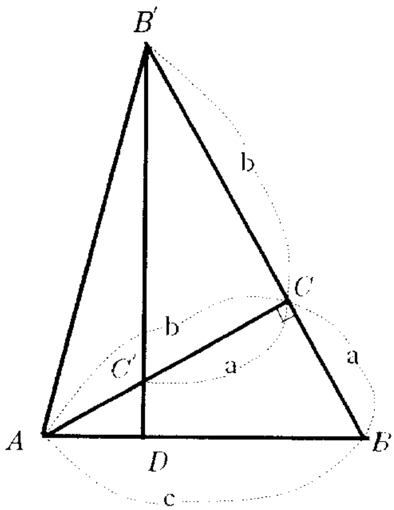
12. Frank Burk의 증명 (19C말 미국인) [2, p7]

그림에서 직각삼각형 ABC의 각 변을 각각 a, b, c 배하여 a, b 배한 두 도형을 붙인 도형은 c 배한 도형과 합동이 된다.



13. Hawkins의 증명 (1909년)

직각삼각형 ABC 에서 세변의 길이는 그림과 같다.



변CA위에 되게 C'를 잡고, 변BC 연장선 위에 $AC = CB'$ 가

되게 B' 을 잡으면, $\triangle ABC \equiv \triangle B'C'C$, $AB = B'C' = c$ 이고

또 점B' 에서 점C'를 지나 AB 와 만나는 점을 D라 하면,

$\angle CC'B' = \angle DC'A$, $\angle CB'C' = \angle CAB$이므로

$\triangle B'C'C \backsim \triangle AC'D \quad \therefore B'D \perp AB$

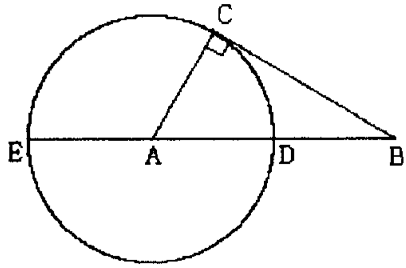
$\therefore \ \square B'AC'B = \triangle AC'B' + \triangle BB'C' =$

$\dfrac{c \cdot AD}{2} + \dfrac{c \cdot DB}{2} = \dfrac{c}{2}(AD + DB) = \dfrac{c^2}{2}$,

$\triangle ACB' = \dfrac{b^2}{2}$, $\triangle BCC' = \dfrac{a^2}{2}$ 이므로

$c^2 = a^2 + b^2$이 성립한다.

14. 원을 이용하는 증명법



A를 중심으로 반지름 AC인 원을 그린다.

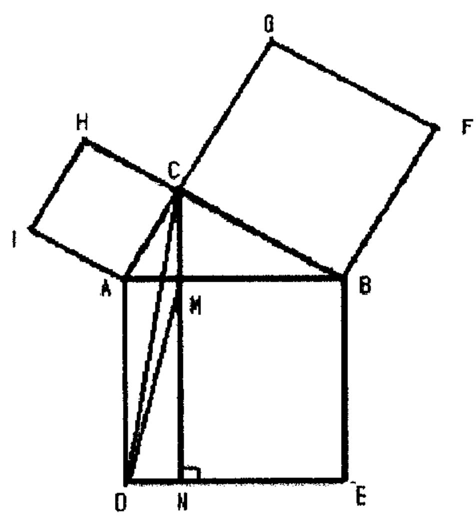
∠C=∠R이므로 BC는 접선이다.

$$\therefore BC^2 = BD \cdot BE = (AB - AD)(AB + AE)$$

$$= (AB - AC)(AB + AC) = AB^2 - AC^2$$

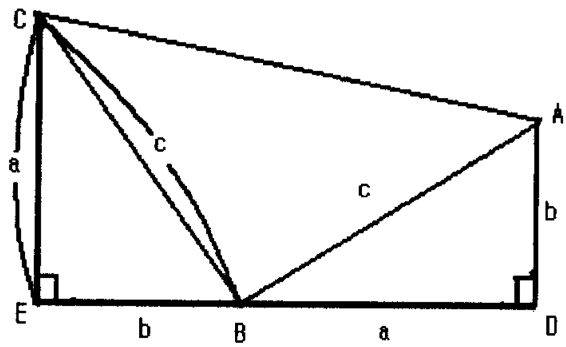
15. Euclud의 증명 (? BC330~275)

유크리드의 원론 1권의 정리47
에 소개된 증명으로
우리나라의 중학교의 교과서에
나오는 증명방법이다.



16. James Abram Garfield 의 증명

(1876년 미국 20대 대통령, (1831-1881))   [1, pp39-40]



이 증명은 사다리꼴의 넓이에 대한 공식을 이용한 증명방법이다.

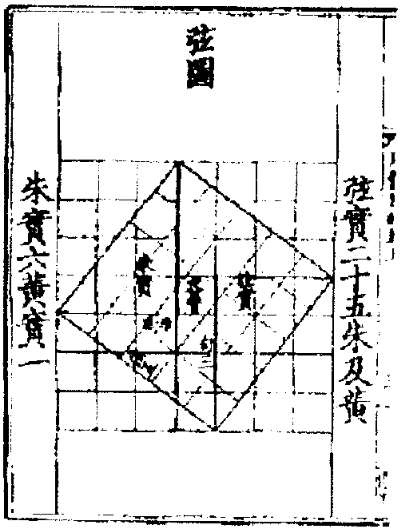
$(\square DECA) = (\triangle CEB) + (\triangle ABC) + (\triangle DBA)$에서

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = 2 \times \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

17. 중국의 구(句),고(股),현(弦)의 정리

고대 중국 수학의 실용적 또는 기술적인 면을 잘 보여 주는 것으로 "주비산경"에 아래 그림이 소개되어 있고 "구장산술" 제 9권 구고편에 많은 연습문제가 소개되어 있다.

구고현은 길이의 비가 3 : 4 : 5를 말하는데, 아래 그림에서 직각삼각형의 세변의 길이를 3,4,5 라 두지 않고 a, b, c 라 두면 $a^2 + b^2 = c^2$이 되어 일반적인 증명이 되고 ,이는 Bhaskara가 제시한 증명과 비슷하다.



여기서 구고란 사람이 무릎을 직각으로 굽혔을 때 허벅지(고)와 장딴지(구)의 길이의 비가 3 : 4 인 것으로부터 유래하였으며 구고현의 정리는 옛날 토지를 측량하거나 건축물의 공사에 이용되었는데 대표적으로 우리나라 불국사의 청운교와 같은 계단의 기울기이다. [6,pp77-78]

Ⅲ.피타고라스수(Pythagorean triple)

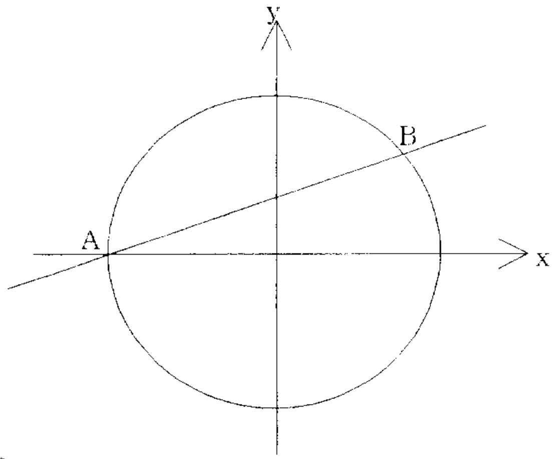
피타고라스정리의 대수적인 고찰은 $3^2+4^2=5^2$ 처럼 2차의 디오판토스방정식 $x^2+y^2=z^2$의 자연수 해를 구하는 것이다. 이 해들을 피타고라스수(Pythagorean triple)라 한다. 한 개의 피타고라스수가 주어지면 비례하는 것들은 모두 다시 해가 되므로 서로소인 해가 중요한데 이를 원시적 피타고라스수(Primitive Pythagorean triple)라 한다. 이에 대한 연구는 고대 바빌로니아, 중국, 인도에서도 연구된 아주 오래된 것이다. 이중 고대 바빌로니아의 점토판에 쓰여진 피타고라스수가 15개 전해지는데 그 중에서 가장 큰 수가 $12709^2+13500^2=18541^2$으로 알려져 있다.

원시적 피타고라스수의 일반해을 구하는 대수적인 방법은 유클리드원론 10권에 다음과 같이 소개되어 있다.

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2 \quad (m,n \in N,\ m>n)$$

이 대수적인 방법을 Diophantus는 다음과 같은 기하적인 증명을 하였다. [4, p5~6]

일반적인 피타고라스정리 $a^2+b^2=c^2$ 에서 양변을 c^2으로 나누면 $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$이 되고, 이를 $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$ 로 치환하면 피타고라스정리의 정수해를 찾는 것은 단위원 $x^2+y^2=1$을 만족하는 유리수해를 구하는 것과 같게 될 것이다. 즉 단위원 $x^2+y^2=1$위의 유리수점을 찾는 것이 될 것이다.



원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 한점 $A(-1,0)$을 잡고 이 점을 지나며 기울기가 유리수t인 직선 $y = t(x+1)$이 원과 또 다른 한점 B와 만나게 할 수 있다. 기울기가 유리수이고 점A의 좌표도 유리수이므로 당연히 점B 좌표도 유리수가 될 것이고, 역으로 유리수 좌표인 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기도 당연히 유리수가 된다. 따라서 유리수인 기울기t 를 적당히 잡으면 $A \neq B$ 인 유리수가 좌표인 점B를 단위원 위에서 무수히 많이 구할 수 있다.

실제로 직선 $y = t(x+1)$을 원 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하여 점 B를 구하면 $B(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$이다.

t가 유리수이므로 $t = \frac{n}{m}$을 대입하면

$\frac{a}{c} = x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, $\frac{b}{c} = y = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$이며 이것은 앞에서 소개한 원시적 피타고라스수의 일반해를 구하는 대수적인 방법이 된다.

Ⅳ. 대수적 일반화

피타고라스정리의 대수적 일반화는 지수의 확장과 변수의 개수의 확장으로 전개할 수 있다.

첫째, 지수의 확장으로 프랑스 수학자 페르마(Ferma,1601~1665)는 "$a^n + b^n = c^n \ (n \geqq 3)$은 양의 정수인 해를 갖지 않는다" 는 주장 (페르마의 마지막 정리)을 하였는데 수많은 실패를 딛고서 1993년 프린스턴 대학교수 앤드류 와일즈에 의해 증명이 되었다.

둘째, 변수의 확장으로 페르마의 마지막 정리를 연구하던 Euler는 "$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ 도 양의 정수인 해를 갖지 않는다"는 주장을 하였는데 200여년이 지난 후 컴퓨터의 발달로 1987년 N.Elkeis에 의해 그 반례가 다음과 같이 주어졌다.

$2,682,440^4 + 15,365,639^4 + 18,796,760^4 = 20,615,673^4$

따라서 다음과 같은 질문이 의의를 갖는다.

질문: $x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_k^n = x_{k+1}^n$ 는 자연수해를 갖는가?

(1) $k=2, n=2$ 일 때는 피타고라스정리이다.

이것을 만족하는 자연수 해는 무수히 많이 있다.

(2) $k=2, n \geqq 3$일 때는 페르마의 마지막 정리에 의해 해가 존재하지 않는다

(3) 위의 N.Elkeis 의 예와 같이 $k \geqq 3$ 인 경우에 대해 많은 연구가 행해졌는데 대표적인 결과들은 다음과 같다.

① $n=3$, $k=3$일 때

(Land이외의 수학자들에 의해) 다음과 같은 공식을 발견되었다.

$$x^3 + (3x^2 + 2x + 1)^3 + (3x^3 + 3x^2 + 2x)^3 = (3x^3 + 3x^2 + 2x + 1)^3$$

② $n = 4,\ k = 3$일 때

앞에서 언급했듯이 오일러가 제기한 문제로 현대 컴퓨터의 발달로 1988년 Roger Frye 와 1997년 Allan MacLeod에 의해서도 다음과 같은 반례가 발견되었다.

$$95,800^4 + 217,519^4 + 414,560^4 = 422,481^4$$

$$630,662,624^4 + 275,156,240^4 + 219,076,465^4 = 638,523,249^4$$

③ $n = 5$일때

$x^5 + y^5 + z^5 = w^5$의 해는 1967까지 알려진 것이 없다.

$x^5 + y^5 + z^5 + u^5 = w^5$의 해가 Land&Parkin 에 의해 1967년 발견되었는데 다음과 같다.

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

$x^5 + y^5 + z^5 + u^5 + v^5 = w^5$에 대한 일반해가 Sastry (1934)에 의해 다음과 같이 발견되었다.

$$(75v^5 - u^5)^5 + (u^5 + 25v^5)^5 + (u^5 - 25v^5)^5 + (10u^3v^2)^5 + (50uv^4)^5 = (u^5 + 75v^5)^5$$

1993년 Bhargava와 1994년 Berndt 도 다음과 같은 일반해를 구하는 공식을 발견했다.

$$(8s^2 + 40st - 24t^2)^4 + (6s^2 - 44st - 18t^2)^4 + (14s^2 - 4st - 42t^2)^4 + (9s^2 + 27t^2)^4 + (4s^2 + 12t^2)^4 = (15s^2 + 45t^2)^4$$

$$(4m^2 - 12n^2)^4 + (3m^2 + 9n^2)^4 + (2m^2 - 12mn - 6n^2)^4 + (4m^2 + 12n^2)^4 + (2m^2 + 12mn - 6n^2)^4 = (5m^2 + 15n^2)^4$$

$x^5 + y^5 + z^5 + u^5 + v^5 + w^5 = k^5$에 대한 몇 개 의 해가 Lander와 Parkin등에 의해 1967에 발견되었는데 몇 개만 소개하면 다음과 같다.

$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$

$5^5 + 10^5 + 11^5 + 16^5 + 19^5 + 29^5 = 30^5$

$x^5 + y^5 + z^5 + u^5 + v^5 + w^5 + t^5 = k^5$을 만족하는 최소해는

$1^5 + 7^5 + 8^5 + 14^5 + 15^5 + 18^5 + 20^5 = 23^5$ 로 알려졌다.

④ $n = 6$일때

$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6 = h^6$의 최소 해는

$74^6 + 234^6 + 402^6 + 474^6 + 702^6 + 894^6 + 1077^6 = 1141^6$

⑤ $n = 7$일때

$a^7+b^7+c^7+d^7+e^7+f^7+g^7=h^7$의 해는 M. Dodrill에 의해 1999년 그 해가 다음과 같이 발견되었다.

$127^7 + 258^7 + 266^7 + 413^7 + 430^7 + 439^7 + 525^7 = 568^7$

⑥ $n = 8$일 때

$a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8 + f^8 = g^8$,

$a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8 + f^8 + g^8 = h^8$ 의 해는 아직까지 알려진 것이 없다.

$a^8 + b^8 + c^8 + d^8 + e^8 + f^8 + g^8 + h^8 = i^8$ 의 해는 Meyrignac 에 의해 다음과 같이 알려졌다.

$90^8 + 223^8 + 478^8 + 524^8 + 748^8 + 1088^8 + 1190^8 + 1324^8 = 1409^8$

⑦$n=9$일때

다음 방정식의 해는 아직까지 발견된 것이 없다.

$a^9+b^9+c^9=d^9$, $a^9+b^9+c^9+d^9=e^9$, $a^9+b^9+c^9+d^9+e^9=f^9$

그러나 방정식

$a^9+b^9+c^9+d^9+e^9+f^9+g^9+h^9+i^9+j^9=k^9$의 해는 2002년 J. Wroblewski에 의해 발견된다.

$42^9+99^9+179^9+475^9+542^9+574^9+625^9+668^9+822^9+$

$+851^9=917^9$

⑧ $n=10$일때

다음 방정식의 해는 존재하지 않은 것으로 알려져 있다.

$a^{10}+b^{10}=c^{10}$, $a^{10}+b^{10}+c^{10}=d^{10}$,

$a^{10}+b^{10}+c^{10}+d^{10}+e^{10}+f^{10}+g^{10}+h^{10}+i^{10}+j^{10}+k^{10}$

$+l^{10}=m^{10}$

그러나 방정식

$a^{10}+b^{10}+c^{10}+d^{10}+e^{10}+f^{10}+g^{10}+h^{10}+i^{10}+j^{10}+k^{10}$

$+l^{10}+m^{10}=n^{10}$ 의 해는 S.Chase에 의해 발견되었다.

$6^{10}+13^{10}+49^{10}+57^{10}+59^{10}+73^{10}+85^{10}+122^{10}+128^{10}+$

$179^{10}+187^{10}+204^{10}+210^{10}=228^{10}$

이외에도 많은 연구들이 진행되고 있다. [6]

Ⅴ.기하학적 일반화

피타고라스정리의 기하학적인 일반화는 "직각삼각형이 아닌 일반 삼각형에서 성립하는 식"과 "삼각형에 이웃하는 사각형이 직사각형이 아닌 평행사변형의 경우에 성립하는 식"이 될 것이다.

1. Cosine법칙 [1, pp41-42]

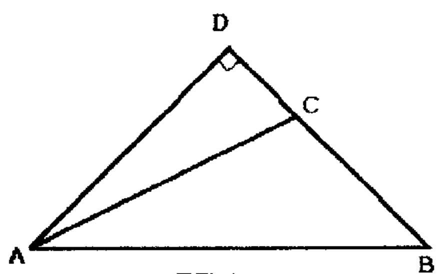


그림 1

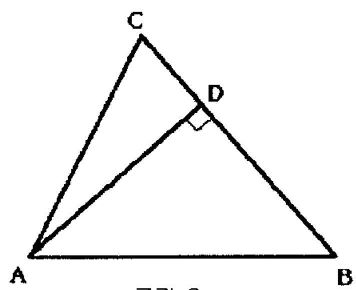


그림 2

그림 1은 $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD$가 성립하고

그림 2는 $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot CD$ 가 성립한다.

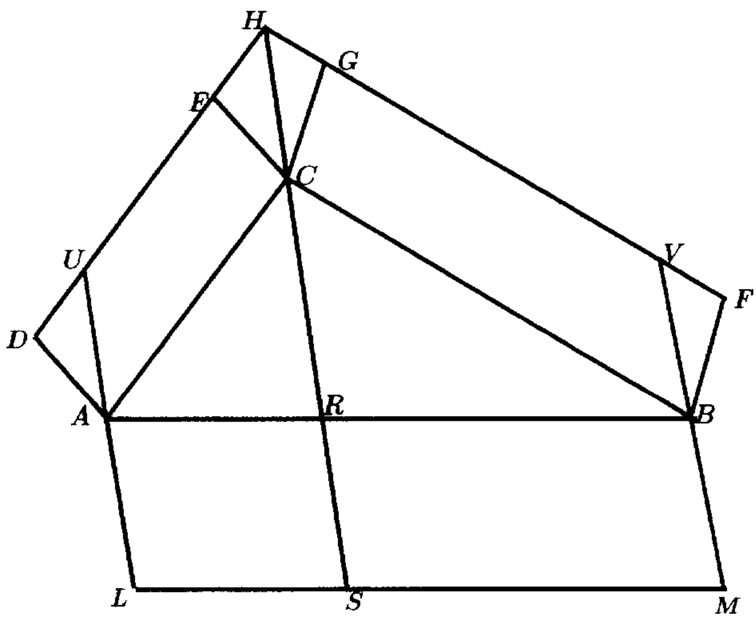
여기서 $C = D$이면 직각삼각형이 되고 $CD = 0$이 되어 피타고라스정리가 성립한다.

좀더 일반적으로 설명하자면 일반적인 $\triangle ABC$ 에서 적용이 가능한 제2 cosine법칙 $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA \cdot cosC$는

피타고라스정리의 일반화된 식으로 $\angle C = 90°$ 인 경우 직각삼각형이 되어 $cosC = 0$이므로 피타고라스의 정리가 성립한다.

2. Pappus의 증명 (AD 300년경, 그리이스)

임의의 $\triangle ABC$에 대하여 사각형$ACED, BCGF$는 임의의 평행사변형이다.



UL, HS, VM은 평행하고 $\overline{HC} = \overline{AL} = \overline{BM}$ 되게 그리면

$\square ACED + \square BFGC = \square ACHU + \square BVHC =$

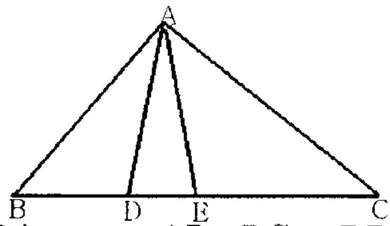
$2(\triangle ACH + \triangle BCH)$

$= 2(\triangle ACL + \triangle BMC) = 2(\triangle ALR + \triangle BMR) = \square ABML$

피타고라스정리는 $\triangle ABC$가 직각삼각형이 되고 두 평행사변형이 정사각형일 때 이다.

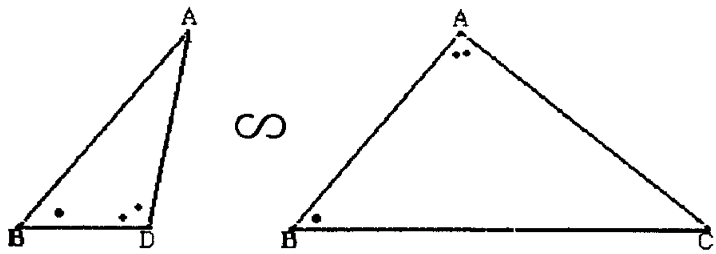
3. Tabit ibn Qorra의 삼각형의 닮음을 이용한 일반화 [1, p47]

$\angle ADB = \angle AEC = \angle BAC$이면



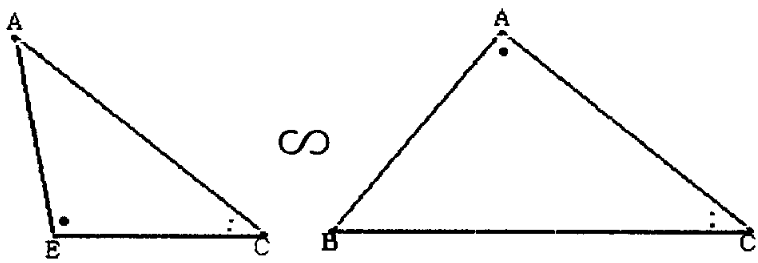
$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$이므로 $AB : BC = BD : AB$ 에서

$AB^2 = BC \cdot BD$



$\triangle ABC \backsim \triangle EAC$ 이므로 $AC : BC = CE : AC$ 에서

$AC^2 = BC \cdot CE$



따라서 $AB^2 + AC^2 = BC(BD + CE)$. 이때 $\angle A$가 직각이면 $D = E$이므로 $BD + CE = BC$가 되어 피타고라스정리가 성립.

4. 도형분할을 이용한 증명 (1998년 David.S.Wise)

그림1은 두변의 길이가 a, b이고 두 대각선의 길이가 x, y인 평행사변형이다. 그림2는 그림1의 평행사변형의 반도막에 두변의 길이가 a, x 인 평행사변형을 직각되게 붙인 그림이다.

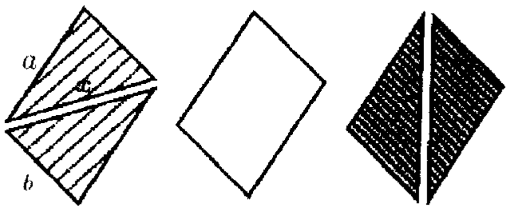


그림 1

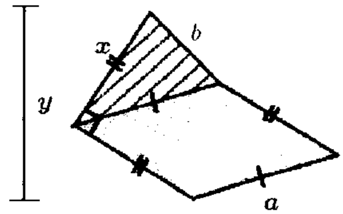
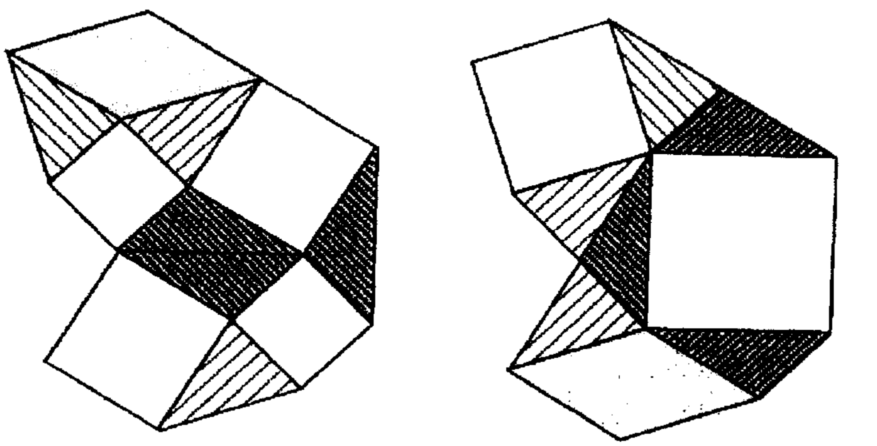


그림 2



이 도형들을 그림3 과 같이 이어 붙이면 그림3의 두 도형의 넓이는 같고 두 도형의 흰색부분도 그림2에 의해 정사각형이고 그 넓이가 같다. 따라서 $2a^2+2b^2=x^2+y^2$ 이 성립하는데 그림1의 평행사변형이 직사각형이 되면 $x=y$ 가 되어 피타고라스정리인 $a^2+b^2=x^2$가 성립한다.

참고 문헌

1. 이브스 (H. Eves), 수학의 위대한 순간들 (허민, 오혜영 옮김)
경문사 , 1994

2. R.B. Nelson, Proofs without words II
The Mathematical Association of America , 2000

3. 야노겐타로 , 위대한 수학자들 (손영수 옮김) ,전파문화사

4. J.Stillwell , Mathematic and its history, Springer- Verlag,
1989

5. A.Smith, 수학사 가볍게 읽기 (황선욱 옮김), 한승

6.신영훈, 석불사 · 불국사 (문화재전문위원의 역사기행②),
조선일보사,1998

7. 페르마의 일반화에 대한 컴퓨터 사이트 주소
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation3rdPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation4thPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation5thPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation6thPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation7thPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation8thPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation9thPowers.html
mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation10thPowers.html

아래 그림은 피타고라스정리를 이용하여 그린 나무모양의 프랙탈이다.