교 육 학 석 사 학 위 논 문

고등학교 학생들의 미적분 단원에 대한 인식과 오류분석 연구

2022년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 지 혜

교 육 학 석 사 학 위 논 문

고등학교 학생들의 미적분 단원에 대한 인식과 오류분석 연구

지도교수 서 종 진

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2022년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

김 지 혜

김지혜의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2022년 8월 26일

주 심 이학박사 이 완 석 (인)

위 원 이학박사 강 점 란 (인)

위 원 교육학박사 서 종 진 (인)

목 차

표 목차

A Study on the Perception and Error Analysis of Calculus Units of High School Students

Kim Ji Hye

Graduate School of Education
Pukyong National University

Abstract

In this study, we found out the perceptions that high school students have about the common mathematics <Mathematics II> calculus units and analyzed the types of errors in the problem solving process of calculus units. At the same time, the study was conducted to find the cause of the error and to find an efficient method of education a little further from the current education. The analysis results of the questionnaire and inspection paper are as follows.

First of all, the survey to understand the perception of calculus units showed that students who were not interested in calculus units were more likely to solve calculus concepts by relying on formulas and experience rather than understanding and solving principles. Also, The students think value of calculus is important because calculus will have a big impact on the development of modern society in the future, but students are not confident in solving the problems.

Second, many respondents said that the difficulty of students taking calculus classes was the concept of integration rather than differentiation. They also

said that they found it difficult to draw and utilize graphs.

Third, conceptual errors were the most common with 47.48 percent errors due to errors with prior knowledge or basic or lack of essential knowledge. The second common errors were abbreviated errors (19.06 percent), and third, content errors were 16.91 percent.

The reason why so many students experience difficulties in calculus and make mistakes in solving problems is that they rely more on formulas than on accurate understanding of concepts and are accustomed to solving problems mechanically through experience.

Consequently, if teachers teach students the reasons for learning calculus and the examples used in real life, students can have a clear understanding of the importance of calculus value, and the level of understanding will be further enhanced. In addition, teachers should understand and analyze the types of students' errors as shown in this study to prevent them from making errors. Therefore, if teachers communicate well with students and go through many research processes, they will be able to provide more essential math classes.

I. 서 론

1.1. 연구의 필요성 및 목적

미적분학은 ‘수학의 꽃’이라는 말이 오갈 만큼 수학 분야에서 중요성이 강조되고 있다. 수학 이외의 분야인 사회과학이나 자연과학, 물리학 및 생물학, 공학, 정치학 등 다양한 분야에서 활용되는 도구가 바로 미적분이다. 이처럼 미적분의 중요성은 더욱 강조되고 앞으로의 현대 사회 발전에 큰 영향을 끼칠 것으로 전망되고 있다. 하지만 다수 학생들이 ‘미분’, ‘적분’ 개념에 대한 부정적인 인식을 갖고 있는 건 아닌지 고찰이 필요하다. 이와 같이 우리나라 고등학교 학생들은 미분, 적분을 왜 배워야 하며 실제로 생활에서 미적분이 어떻게 사용되며 사회에 어떤 영향을 끼치고 있는지 인지하지 못하고 있는 것이 현실이다. 아울러 우리나라는 입시 위주의 교육으로 공식에 의존하여 문제를 풀게 하거나 지식만 강조하는 문제풀이식 교육으로 학생들이 창의적인 생각을 할 틈을 주지 못하고 있다. 학교에서는 미분, 적분에 대한 역사적 배경, 현대 사회에 어떻게 기여되고 있는지, 가까운 실생활의 예로는 무엇이 있는지 관심을 유발하여 조금 더 흥미롭게 미적분에 다가갈 수 있도록 유도한다면 학생들이 자발적으로 미적분을 학습할 수 있을 것이다.

2015 개정 고등학교 수학은 선택 중심의 교육과정으로 공통 과목인 <수학>, 일반 선택 과목으로는 <수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>, <미적분>, <확률과 통계>가 있다. 본 연구에서는 여러 가지 변화의 현상을 설명하고 해석할 수 있는 기본 개념인 함수의 미분과 적분을 다루는 교과목인 <수학Ⅱ>를

중점으로 두고 고등학생들의 미적분 단원에 대한 인식을 파악하고, 이를 바탕으로 학생들이 문제 풀이에서 일으키는 오류의 원인을 찾고, 분석하여 더욱 효율적인 교육 방법을 연구하고, 개선할 수 있도록 지원하는 방안을 마련하는 것이 목적이다.

1.2. 연구 문제

본 연구에서는 고등학교 3학년 학생들의 <수학Ⅱ>의 미적분 단원에 대한 인식을 조사하고, 학생들이 문제 풀이에서 일으키는 오류의 원인을 찾고, 분석하여 더욱 효율적인 교육 방법을 모색하고자 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

(1) 고등학교 학생들의 <수학Ⅱ> 교과의 미적분 단원에 대한 인식은 어떠한가?

(2) <수학Ⅱ> 교과의 미적분 문제 해결 과정에서 학생이 범하는 오류의 유형은 어떤 것이 있는가?

1.3. 연구의 제한점

본 연구에서는 부산의 H고등학교 58명을 대상으로 하였기 때문에 다른 학교의 학생들을 연구 대상으로 하였을 때도 동일한 결과가 나올 것으로 일반화하기 어렵지만 차후 연구의 기초 자료로 활용할 수 있다.

II. 이론적 배경

2.1. 미적분의 역사

컴퓨터 그래픽, 행성의 운동, 애니메이션, 날씨 예측, 투수가 던지는 공의 속도, 과속 차량을 단속하는 무인 카메라, 주식 시장 분석 등과 같은 실생활 속에 미적분과 관련된 것은 광대하다. 미적분은 지속적, 연달아 이어지는 것이며, 변하고 있는 사물의 속도를 계측할 수 있는 방법이다. 수학의 역사에서 손꼽히는 중요한 발견인 미적분은 변화에 대해 연구하며 경제학, 공학, 과학에서 가장 중요한 도구 중 하나이다.

미적분학은 수학의 한 분야로 함수, 극한, 미분, 적분, 급수를 다루는 학문 중 하나이다. 기하학적으로는 미분은 함수 그래프의 한 점에서의 접선, 또는 접평면을 구하기 위한 연산이다. 적분의 기하학적인 의미는 곡선 또는 곡면과 좌표 축과 둘러싸인 부분의 넓이 또는 면적을 구하기 위한 연산이다. 미분과 적분은 완전한 별개의 개념이지만, 밀접한 연관성을 갖는다. 아이작 배로(Issac Barrow, 1630-1677)는 최초로 미분법과 적분법이 서로 역연산을 이루고 있다는 것을 알게 되었다. 이를 '미적분학의 기본 정리'라고 부른다.

미분(微分)의 한자 뜻은 '미세하게 나눈다.'라는 뜻으로 해석되고, 적분(積分)의 한자 뜻을 보면 '나눈 것을 쌓는다.'라는 뜻으로 해석된다. 이러한 미적분학은 중세 시대에는 인도에서 기초가 다져졌다. 그리스의 수

학자이자 물리학자였던 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287~212)는 원의 넓이를 원을 다각형으로 쪼개고 다각형을 삼각형으로 쪼개서 삼각형의 넓이의 합으로 구했다. 이탈리아의 수학자인 보나벤투라 프란체스코 카발리에리(Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598~1647)은 정적분의 개념 도입의 시초가 되는 부피를 잘게 쪼개어 적분하는 구분구적법의 개념에 기여했다. 독일의 고트프리트 라이프니츠(G.W.Leibniz, 1646-1716)와 아이작 뉴턴(Isaac Newton, 1643-1727)이 처음 미적분을 발견했다고 하기에는 어렵다. 하지만 당시 알려져 있던 미적분학을 조금 더 발전시키고 체계화시킨 사람들이라고 말할 수 있다.

라이프니츠와 뉴턴은 미적분의 접근법과 표기법 모두 다르다. 뉴턴은 천체 운동의 물리적 문제를 해결하기 위한 필요 도구로 미적분을 개발하였다. 반면, 라이프니츠는 접선과 면적에 관심을 두고 미적분을 개발했다. 뉴턴은 유율의 개념을 도입하였는데, 유율법이란 연속적으로 변화하는 흐름의 속도를 나타낸 것으로 만유인력과 물체의 속도와 움직임 등에 대한 관심으로 만든 것이다. 라이프니츠는 파리에서 외교관으로 활동하면서 당시 최고의 과학자였던 크리스티안 호이겐스(Christianus Hugenius, 1626-1695)로부터 수학을 배웠다. 이후에 미적분에 대한 개념을 정립했고, 1675년에 사물의 핵심을 표현하기 위하여 고안한 기호가 오늘날 수학책에 등장하는 $\frac{dy}{dx}, \int$ 이다.

2.2. 2015 개정 <수학Ⅱ> 교육과정 및 성취기준

2015 개정 수학과 교육과정 중 일반 선택 과목 중 <수학Ⅱ>의 내용은 ‘함수의 극한과 연속’, ‘미분’, ‘적분’의 3개 핵심 개념 영역으로 구성된다. ‘함수의 극한과 연속’ 영역에서는 함수의 극한, 함수의 연속을, ‘미분’ 영역에서는 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, ‘적분’ 영역에서는 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다. (국가교육과정정보센터, 2020)

<표 Ⅱ-1> 2015개정 수학Ⅱ 교육과정 내용 체계 (한국교육과정평가원, 2020)

영역	핵심 개념	일반화된 지식	내용 요소	기능
해석	함수의 극한과 연속	함수의 극한과 연속은 함수의 성질을 이해하는 데 활용되고, 미적분 개념의 기초가 된다.	• 함수의 극한 • 함수의 연속	표현하기 그래프 그리기 이해하기 계산하기 설명하기 판별하기 활용하기 문제 해결하기
	미분	미분은 함수의 순간적인 변화를 설명하는 도구로서 여러 가지 미분법과 함수의 적분에 대한 기초가 되고 최대, 최소 문제를 포함하여 변화 현상을 다루는 데 활용된다.	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용	
	적분	미분과 역관계에 있는 적분은 도형의 넓이와 부피를 구하는 데 필요한 개념으로, 미분과 함께 변화 현상을 다루는 데 활용된다.	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용	

함수의 극한은 현대 수학의 핵심적인 개념으로 한없이 가까워지는 현상을 수학적으로 표현하는 도구이다. 함수의 극한과 연속을 통해 함수와 그 그래프의 성질을 심도 있게 분석할 수 있고, 이는 미분과 적분의 원리를 이해하는 기초가 된다. 미분은 함수의 순간적인 변화를 설명하는 도구로, 자연과학이나 공학뿐 아니라 경제학, 사회학 등 다양한 분야에서 활용된다. 순간변화율이나 접선의 기울기를 나타내는 미분계수와 도함수는 최댓값, 최솟값을 구하거나 증가, 감소 등의 변화 현

상을 해석하고 설명하는 데 이용된다. 미분의 학습을 통해 수학의 유용성과 가치를 경험할 수 있고 창의·융합적 사고를 기를 수 있다. 적분은 미분과 역관계에 있으며 도형의 넓이와 부피를 구하는 데 필요한 개념이다. 적분은 여러 가지 도형의 넓이와 부피를 구하는 것 뿐 아니라 움직이는 물체의 속도와 이동 거리 계산을 포함한 변화 현상과 관련된 다양한 문제 해결에 활용된다. 적분의 학습을 통해 수학적 문제 해결 능력과 창의·융합적 사고를 기를 수 있다. (한국교육과정평가원, 2020)

2.3. 선행연구 고찰

가. 수학교육에서의 오류 선행 연구

수학적인 문제 해결에서 가장 핵심적인 것은 과정에 있고, 이것은 문제 풀이의 결과보다는 그 과정에 의미가 있음을 뜻한다(김천일, 2011). 특히 우리나라 학생들은 문제 푸는 과정보다 정답만 맞히려는 경향이 크다. 문제 유형에 따른 공식을 단순 암기하거나 문제의 실질적인 의미는 이해 못한 채 잘못된 개념으로 학습하고 있는 경우가 많다. 이로 인해 많은 오류를 범하고 있다. 따라서 수학교육에서의 풀이 과정과 개념에 대한 이해에서 나타나는 오류를 찾고, 분석하는 연구는 꾸준히 이루어지고 있다.

독일의 수학자 Hendrik Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주는 5가지로 나누고 있다. 첫째, 언어의 난이성으로 언어의 어려움 때문에 생기는 오류이다. 둘째, 공간적인 정보 획득의 어려움으로 특별한 정보를 획득하는 어려움에서 생기는 오류이다. 셋째, 필수적인 기술, 사실, 개념의 부

족한 숙련이다. 넷째, 사고의 경직 혹은 부정확한 연합으로 잘못된 연합 혹은 사고의 경직에서 생기는 오류를 말한다. 다섯째, 부적절한 규칙이나 전략의 적용으로 관련 없는 규칙 혹은 전략의 응용에서 생기는 오류를 말한다.

Movshovitz-Hadar, Oritz & Shlomo(1987)는 고등학교 수학에서 나타나는 오류의 유형으로 여섯 가지 모형을 제시하였다. 첫 번째, 잘못 사용된 자료의 오류는 문제에 주어진 조건과 학생이 풀이하는 내용 사이의 불일치에 의한 오류를 말한다. 두 번째, 잘못 사용된 언어의 오류는 문제풀이에서 나타나는 수학적 언어 간의 이동에서 일어나는 오류를 말한다. 세 번째, 논리적으로 잘못된 추론의 오류는 주어진 조건으로부터 옳지 않게 유도된 추론에 의한 오류를 말한다. 네 번째, 왜곡된 정의와 정리의 오류는 특별한 정의 또는 정리에 대한 왜곡에 의한 오류를 말한다. 다섯 번째, 증명되지 않은 오류는 풀이 과정은 옳지만 제시한 결과가 풀이 과정과 맞지 않는 오류를 말한다. 여섯 번째, 기술적 오류는 계산 오류, 대수 부호 조작의 오류, 미숙한 알고리즘의 시행에서 나타나는 오류 등을 말한다(조은나, 2018, 재인용).

나. 미적분 단원에 대한 학생들의 인식 선행 연구

이태순(2014)은 학생들의 미적분 단원에 대한 인식을 알아보기 위해서 수학을 크게 7가지 단원으로 나누어 순위를 매기도록 하였다. 그 결과 미분과 적분 다음으로 기하, 확률과 통계도 어렵다고 인식되고 있다. 학생들이 중학교에 진학하면서 가장 먼저 접하였던 단원을 가장 쉽다고 인식하고 늦게 배울수록 다양한 문제를 자주 접해보지 못한 미적분 단원에 대한 인

식이 가장 어려운 단원으로 생각하는 것 같다.

김대환(2018)은 고등학교 2학년 인문계열, 자연계열 학생들을 대상으로 미적분에 대한 태도를 조사한 결과, 미적분은 고등학교 수학에서 대체로 학생들이 어려워하는 단원임을 알 수 있었고, 그 이유는 '개념의 어려움, 계산의 복잡함, 알아야 하는 공식이 많음.' 임을 알 수 있었다. 수학을 단순 공식으로만 암기하여 풀어내려고 하는 학생들이 많기에 이와 같은 결과가 나온 것으로 사료된다. 실제로 학교에서 교사가 학생들에게 미적분 단원을 수업하면 대체로 미분과 적분의 정확한 정의를 알지 못 한 채 단순히 공식만 암기하여 문제를 해결하려는 경향이 크다. 따라서 미적분은 학생들에게 매우 재미없는 단원, 졸업 후에는 깊게 공부하고 싶지 않은 분야임을 알 수 있다.

정재욱(2010)은 고등학생들의 미적분에 대한 인식을 남학생과 여학생으로 나누어 연구하였다. 남녀학생들 모두 전체적으로 모순적인 태도를 취하고 있었다. 미적분에 대한 개념과 중요성은 잘 알고 있다고 대답하였다. 하지만 공식에 의존하는 문제 풀이를 하고 있는 편이였다. 또, 미적분 단원에 대하여 공식의 암기에 의존하는 문제 풀이보다는 유도 과정을 이해하여 문제를 풀고 싶다고 응답하였다. 이러한 결과로 학생들의 생각에 좀 더 다가가서 그들을 위한 교수학습법이 필요함을 인식하고 학생들이 흥미와 지적 호기심을 가지고 미적분 단원의 학습에 적극적이고 성실하게 참여할 수 있도록 하기 위하여 교사들은 끊임없이 후속 연구가 필요할 것이다.

김근선(2015)은 미적분 단원을 고등학생을 대상으로 미적분개념 이해도 분석을 위한 설문조사를 시행하였다. 응답한 많은 학생들이 미적분 정의를 알고 있다. 하지만 정의를 알지만 미적분 단원을 왜 배워야 하는지 이유를 모르고 흥미를 갖게 된 이유가 부족하다. 뿐만 아니라 실생활에 어떻게 쓰이는지 모르는 학생들도 많이 있다. 이처럼 학생들이 수학이란 과

목을 단순히 문제 풀이로 정답을 찾아 좋은 대학을 진학하기 위함에서 배우고 있다고 생각하는 것으로 그치고 있는 것이 현실이다. 미적분학은 실제로 현 사회 발전에 크게 기여하고 있다. 따라서 앞으로 큰 영향을 끼칠 것으로 기대된다. 이에 따라 교사는 변화하는 시대에 맞게 미적분학이 사회에 어떻게 이바지하고 있는지 연수를 통해 배우고 연구해야 한다. 아울러, 연구단체들은 앞으로 학생들을 위해 적극적으로 학습도구를 만들어야 한다고 주장했다.

다. 미적분 단원에 대한 학생들의 오류 선행 연구

고등학교 학생들은 미적분 단원에 대한 어려움을 많이 느끼고 있는 만큼 미적분 단원에서 문제를 풀면서 생기는 오류들도 많다. 미적분학의 중요성이 강조되고 있고 널리 인식되어 있는 만큼 학생들의 미적분 풀이 과정과 개념에 대한 이해에서 나타나는 오류를 찾아내고 분석하는 연구가 꾸준히 이루어지고 있고 앞으로 더 많은 연구가 필요할 것이다.

최나영(2001)은 미적분 단원에서 함수와 도함수 사이의 그래프 표현을 중심으로 한 미분개념에 대하여 학생들은 어떠한 오류들을 나타내는지 연구하였다. 분석 결과 알 수 있었던 학생들의 미분개념에 대한 오류와 오개념은 여러 원인들이 복합적으로 작용하여 발생한다고 하였다. 특히 주목할 만한 원인은 학교 수학교육이 형식적이고 절차적인 지식만을 강조한다는 것이라고 하였다. 후속 연구로는 테크놀로지를 이용한 미분개념의 이해도를 높이기 위한 현장 연구가 요구된다.

오혜경(2008)은 학생들이 참고서나 문제지의 유형에 익숙해져 있어 미적분에 관한 정리나 정의를 활용한 새로운 문제 유형에서의 대처 방안이

부족하다고 하였다. 또한 미적분에 관한 정리나 정의를 제대로 알고 있지 못해서 공식을 적용하는 과정에서도 많은 오류를 범하고 있다고 하였다. 이는 선행지식의 부족과 학생들의 배운 정의나 정리를 부정확하게 이해하고 있거나 알고 있어도 문제에 활용하는 능력이 부족하기 때문이라 하며 미적분의 어려운 개념 설명을 실생활에서 이용되는 예를 들어줌으로써 학생들이 개념에 접근하기 쉽도록 지도해야 한다고 결론을 내렸다.

조은나(2018)은 학생들이 범하는 오류 유형과 그 내용을 재구성함으로써 오류에 대한 분석틀을 제작하였고, 오류의 유형은 편의상 알파벳 영문자로 명명하였고 각 유형과 내용은 다음과 같다(<표 Ⅱ-2>).

<표 Ⅱ-2> 조은나(2018)의 오류 유형 분석 틀

오류유형		오류내용
A형	개념 오류	기본적인 선행지식이 결여되어 있거나 잘못된 선행지식이 있는 오류
B형	내용 오류	진술되지 않은 조건을 사용하거나 주어진 조건을 잘 못 해석하여 사용하는 오류
C형	적용 오류	주어진 조건을 이용하지 못하는 오류
D형	생략 오류	정답은 제시하였으나 풀이 근거를 제시하지 못하는 오류
E형	기술 오류	계산 상의 오류나 실수에 의한 오류
F형	기타	해석 불가능하거나 애매한 오류

기본적인 선행지식이 결여되어 있거나 잘못된 선행지식이 있는 오류인 A형이 38.8%로 가장 많은 비중을 차지하였고, 진술되지 않은 조건을 사용하거나 주어진 조건을 잘못 해석하여 사용하는 오류인 B형이 근소한 차이로 그 뒤를 이었다. 주어진 조건을 이용하지 못하는 오류인 C형은 예상외로 낮은 수치를 기록하였는데 이는 검사 문항 자체가 C형의 오류가 발

생하기 어려운 예시가 아니었나 사료된다. 정답은 제시하였으나 풀이 근거를 제시하지 못하는 오류인 D형의 오류 역시 낮은 수치를 보였는데 ‘미분가능성과 연속성’ 문항에서 주로 나타났다. 계산 상의 오류나 실수에 의한 오류인 E형은 9.3%로 많은 학생들이 여전히 빈번하게 일으키는 오류이고, 해석 불가능하거나 애매한 오류인 F형을 범한 학생들 중에 상위권 성적의 학생들이 종종 나타났다는 것도 짚어볼 만한 대목이다.

III. 연구 방법 및 절차

3.1. 연구 대상

본 연구에 앞서 사전 조사를 실시하였다. 사전연구대상은 부산시에 소재한 학원에서 대학수학능력시험을 준비하고 공통수학 <수학Ⅱ>를 수강하는 학생 11명을 대상으로 하였다. 사전 조사의 결과로 문항의 출제 오류가 포함되어 있어 수정하였고, 정해진 시간 내에 풀어내지 못함을 알고 문제의 난이도와 평가목표를 수정하여 본 검사를 시행하였다. 그리고 본 연구는 부산시에 소재한 H 인문계 고등학교 3학년 학생 58명을 대상으로 설문 조사 및 검사를 실시하였다. 조사 대상 학생들은 공통 수학 <수학Ⅱ> 모두 학습한 학생들이고, 수학 성적은 고르게 분포되어 있다. 또한, 설문지 조사 결과 대학수학능력시험 수학영역에서 미적분을 선택한 학생들이 다수였다.

3.2. 검사 도구 작성

본 연구에서는 미적분 단원에 대한 고등학생들의 인식을 조사하는 설문지와 미적분 단원 문제의 오류 분석을 위한 검사지로서 연구자가 직접 작성하여 제작하였다. 먼저, 미적분 단원에 대한 고등학생들의 인식을 조사

하는 설문지는 선행연구들을 고찰하고 연구자가 학생들과의 수업시간에 소통하며 느낀 점들을 생각하여 개념이해도와 미적분의 중요성, 교과의 흥미 및 미적분의 학습 필요성과 가치에 대한 학생들의 생각을 알아보기 위한 문항들로 제작하였으며 문항은 아래와 같다(<표 Ⅲ-1 >).

<표 Ⅲ-1 > 설문지의 문항

1. 대학수학능력 시험에서 선택한 과목은 무엇인가.
2. 학교 외 학원이나 인터넷 강의를 통해 예습한 적이 있는가.
3. 하루 수학 공부하는 시간은 얼마인가.
4. 미적분 단원에 흥미가 있는가.
5. 미적분의 개념을 이해하고 있는가.
6. 미적분의 기하적 의미를 알고 있는가.
7. 미적분 문제를 풀 때 원리를 이해해서 푸는가.
8. 미적분 문제를 풀 때 원리를 이해해서 풀기보다는 공식에 의존하여 푸는가.
9. 미적분이 현대 사회 발전에서 큰 영향을 끼치는가.
10. 미적분의 실생활에서 어떻게 사용되는지 아는가.
11. 대학 진학 후에도 미적분을 공부해야 한다고 생각하는가.
12. 미적분 단원 수업을 들으며 어려웠던 점은 무엇인가.

미적분 단원의 문제 풀이 과정에서 나타나는 오류 유형을 파악하기 위해 제작한 검사지는 <수학Ⅱ> 내용으로 구성된 문제를 현행 교과서와 모의고사 기출문제를 중심으로 연구자가 학생들과 수업하고 교류하면서 난이도는 높지 않지만 오류가 잦게 발생하는 문제들로 직접 선정하였고, 검사자료의 신뢰성과 타당도를 높이기 위해 현직 교사와 함께 의논하고 검토하여 작성하였다. 또한, 사전연구 대상으로 조사함으로써 수정 · 보완이 필요한 부분은 재구성하였다. 검사지의 주요 개념은 아래와 같다(<표 Ⅲ-2>).

<표 Ⅲ-2> 검사지의 주요 개념

개념	문항수
함수의 극한과 연속	4
다항함수의 미분법	4
도함수의 활용	4
다항함수의 적분법	6

3.3. 자료 수집 및 절차

본 연구는 부산의 H 고등학교 학생 58명을 대상으로 설문지 및 검사지에 대한 조사를 아래와 같이 실시하였다.

첫째, 학생들이 공통과목인 <수학Ⅱ>에서 미적분 단원을 학습하며 미적분을 어떻게 인식하고 있는지 알아보기 위하여 설문지로 질의에 대한 응답을 조사하였다.

둘째, 미적분 단원의 문제를 해결하는 과정에서 어떤 오류를 범하는지, 어떤 이유로 오류를 범하게 되는지를 파악하기 위해 현행 교과서, 모의고사 기출 문제에서 연구자가 직접 문제를 발췌하여 검사지 작성 및 조사를 실시하였다.

셋째, 설문지 응답을 토대로 문항별로 백분율(%)로 나타내어 분석하였고, 검사지는 문제 풀이 과정의 오류를 세분화된 내용으로 분석하였다.

Ⅳ. 자료 분석

4.1. 미적분 단원에 대한 인식

가. 연구대상 개인별 성향 조사

학생들이 설문조사 대상으로 연구 목적을 달성하기 위해 조사할 의미가 있는지 알아보기 위하여 우선 아래 표와 같이 질의하였고, 그 결과는 다음과 같다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> 수학 영역에서 선택할 과목

설문	확률과통계	미적분	기하	미정
대학 수학능력 시험 수학 영역에서 공통과목인 <수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>를 제외한 자신이 선택할 선택과목은?	6(10.35%)	42(72.41%)	8(13.79%)	2(3.45%)

우선, 위 표와 같이 조사 대상인 학생들은 대부분 대학수학능력시험에서 수학영역 선택과목은 미적분을 선택한 학생들 72.41%로 이루어져 있다. 그러므로 조사 대상인 학생들이 대부분 미적분 단원에 관심과 흥미가 있을 것으로 예측된다.

<표 Ⅳ-2> 미적분 단원의 예습 여부

설문	예	아니오
학교 외 학원이나 인터넷 강의를 통해 미적분 단원을 예습한 적이 있습니까?	46(79.31%)	12(20.69%)

두 번째 설문에서는 위 표와 같이 조사 대상인 학생들은 대부분 학교 외 학원이나 인터넷 강의를 통해 미적분 단원을 예습한적이 있다고 대답하였다. 결론적으로 학교 외 사교육으로 미적분 단원을 처음 접하게 된 경우가 대다수이다.

<표 Ⅳ-3> 하루에 수학 공부하는 시간

① 1시간 미만	4(6.90%)
② 1시간~2시간 미만	20(34.48%)
③ 2시간~3시간 미만	32(55.17%)
④ 3시간 이상	2(3.45%)
⑤ 전혀 하지 않는다	0

세 번째 설문으로는 학생들의 '하루에 수학 공부하는 시간'을 조사하였다. 그 결과 수학 공부를 전혀 하지 않는다고 답한 학생은 없었으며, 다수의 학생들이 비교적 수학 공부에 많은 시간을 할애하고 있었다.

나. 미적분 단원에 대한 개인별 인식 설문 조사

58명의 미적분 단원에 대한 개인별 인식에 대한 반응은 다음과 같다(<표 Ⅳ-4>).

<표 Ⅳ-4> 미적분 단원 개인별 인식(%)

문항	질문	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 <수학Ⅱ>의 미적분 단원에 흥미가 있다.	10.34	37.93	44.83	6.9	0
2	나는 극한의 수렴과 발산 개념을 이해하고 있다.	17.24	58.62	24.14	0	0
3	나는 미분계수 개념을 이해하고 있다.	17.24	55.17	24.14	3.45	0
4	나는 부정적분과 정적분의 개념을 이해하고 있다.	20.69	41.38	27.59	10.34	0
5	나는 평균 변화율과 미분계수의 기하학적인 의미와 차이를 알고 있다.	17.24	44.83	27.59	10.34	0
6	나는 <수학Ⅱ> 미적분 단원의 문제를 풀 때 원리를 이해해서 푼다.	17.24	31.04	51.72	0	0
7	나는 <수학Ⅱ> 미적분 단원의 문제를 풀 때 원리를 이해해서 풀기보다는 공식에 의존하여 푸는 편이다.	3.45	20.69	62.07	10.34	3.45
8	미적분이 실생활 속에서 어떻게 사용되고 있는지 알고 있다.	17.24	27.59	44.83	10.34	0
9	미적분은 앞으로 현대 사회 발전에 큰 영향을 끼칠 것이다.	37.93	27.59	34.48	0	0
10	대학 진학 후에도 미적분을 더 깊게 공부하고 싶다.	10.34	20.69	51.73	10.34	6.9
11	미적분 단원은 어렵다고 생각이 든다.	10.34	37.93	51.73	0	0

위의 표에서 보는 바와 같이 미적분 단원에 대체로 매우 흥미가 있는 학생 10.34%, 흥미가 있는 학생 37.93%이고 보통인 학생은 44.83%이다. 흥미가 전혀 없다고 답한 학생은 0명이었다. 응답자 대부분의 학생들은 <수학Ⅱ> 교과의 개념들을 이해하고 있다고 답하였다. 하지만 미적분 단원의 문제를 풀 때, 원리를 이해해서 풀기보다는 공식에 의존하는 경우

가 더 많은 것으로 나타났다. 미적분이 실생활 속에서 어떻게 사용되며 앞으로 현대 사회 발전에 큰 영향을 끼칠 것으로 전망되나 가치는 중요하게 생각하지만 아직 학생들은 미적분을 다가가기 어려운 학문이라고 생각한다.

4.2. <수학Ⅱ> 미적분 단원의 수업에 대한 의견

학생들이 <수학Ⅱ> 미적분 단원의 수업을 들을 때, 실제로 어떠한 부분에서 어려움을 느끼고 있는지에 대해 알아보기 위해 학생들에게 주관식 응답을 얻었다. 응답으로는 다음과 같다.

– 연속, 미분가능성 판단이 어렵다.
– 여러 가지 개념들을 한 문제에 복합적으로 적용하여 풀어야 하는게 어렵다.
– 미분보다 역과정인 적분 개념이 더 어렵게 느껴진다.
– 도함수 활용 부분에서 삼 · 사차 함수 그래프의 풀이과정이 어렵다.
– 공식과 계산의 양이 비교적 많아 힘들다.
– 적분 계산이 힘들다.
– 극한의 개념을 이해하기 힘들다.
– 구분구적법 개념이 이해하기 힘들다.
– 그래프 활용과 관련된 문제풀이가 어렵다.
– 삼각함수와 융합한 미분의 개념 이해가 어렵다.
– 정적분 계산이 힘들다.
– 미분, 적분 활용 문제에서 그래프를 그리는게 어렵다.

위와 같이 학생들이 미적분 단원의 수업을 들을 때, 개념을 이해하고 그 개념을 이용하여 문제 풀이에 적용하는 과정에서 많은 어려움을 느끼고 있는 것으로 나타났으며 그래프를 이용하여 문제를 해결하는 과정도 어렵게 느끼고 있다고 응답했다. 또한, 원리를 이해해서 풀기보다는 공식을 외우고 문제 유형을 전체를 암기하여 풀려고 하는 학생들이 다수이다. 이처럼 우리나라 학생들은 단지 대입 시험을 위해 문제 풀이 식 공부를 하고 있는 것은 아닌가 하는 의문이 든다. 교사들은 학생들이 학습의 흥미를 유발할 수 있도록 지도 방법에 대하여 한발 더 나아가 연구하고 적절한 교수법을 찾아야 할 것이다.

4.3. 미적분 단원의 문제 풀이 오류 분석

본 연구는 2015개정 공통 수학 <수학Ⅱ>의 미적분 단원에 대해 학생들의 문제 풀이 과정 상의 오류 유형을 분석하고 조사하였다. 우선, 선행연구를 고찰하여 오류 유형을 제시하였다. 제시한 오류 유형은 Hendrik Radatz(1979), Movshovitz-Hadar, Oritz & Shlomo(1987)이 제시한 오류 유형과 조은나(2018)가 미적분에 대한 학생들의 문제 풀이 과정 상의 오류를 분석하는데 사용한 오류유형의 분류 기준에 따랐으며, 한 문제에 대한 풀이 과정 상에서 여러 가지 오류 유형이 발생한 경우에는 연구자의 주관적인 판단에 의하여 가장 큰 오류를 범하는 유형으로 분류하였다.

가. 오류 유형 분류 기준

⑴ 개념의 오류 (A형) : 잘못된 선행지식이 있는 오류 또는 기본적, 필수적 지식이 결여되어 있는 오류를 말한다. 함수의 극한 개념과 함수의 연속이 성립할 조건, 미분계수의 정의 등 문제에서 필요한 개념들을 이해하지 못하거나 잊어서 발생한 오류들을 포함한다.

⑵ 내용의 오류 (B형) : 주어진 자료를 잘 못 해석·처리하여 사용하거나 진술되지 않은 조건을 사용하는 오류를 말한다. 개념은 알고 있으나 그래프를 그리는 과정에서 부정확하게 사고하여 오류를 범하거나, 도함수 활용 접선의 방정식을 구하는 문제에서는 주어진 점이 곡선 위의 점인지 확인하지 않고 문제를 잘 못 해석하여 오류를 범하는 경우도 포함한다.

⑶ 적용의 오류 (C형) : 개념은 알고 있으나 주어진 조건을 적용하는 과정에서 부정확하게 사고하여 생긴 오류를 말한다. 주어진 식을 변형하지 못하는 오류나 주어진 조건을 해석하지 못하여 개념을 적용하지 못한 경우도 포함한다.

⑷ 생략의 오류 (D형) : 정답은 제시하였으나 근거를 제시하지 못하는 오류

⑸ 기술의 오류 (E형) : 문제를 푸는 과정에서 계산 상의 오류를 말한다. 또한, 학생들의 부주의로 실수에 의한 오류도 포함한다.

⑹ 기타 (F형) : 해석이 불가능하거나 문제풀이를 중단한 오류 또는 해결방법이 애매한 오류를 말한다. 아울러, 위에서 언급한 오류유형에 속하지 않는 오류도 이 유형에 포함한다.

본 조사에서는 학생들의 사고과정을 정확하고 상세하게 파악하고 분석하

기 위해 문항에 대한 답변을 서술형으로 작성하게 하였으며 무응답을 배제하기 위하여 풀지 못하는 문항은 여백으로 두지 않고 그 이유를 작성하게 하였다.

나. 문제 오류 분석 결과

본 논문에서는 부산시에 소재한 H 인문계 고등학교 3학년 학생 58명을 함수의 극한과 연속, 다항함수의 미분법, 도함수의 활용, 다항함수의 적분법과 관련된 총 18문항을 검사하여 문항에 대한 반응 오류를 분석한 결과는 다음과 같다.

[문항1] 함수 $f(x) = \frac{|x|}{x}$의 그래프를 이용하여 $\lim_{x \to 0} f(x)$를 조사하시오.

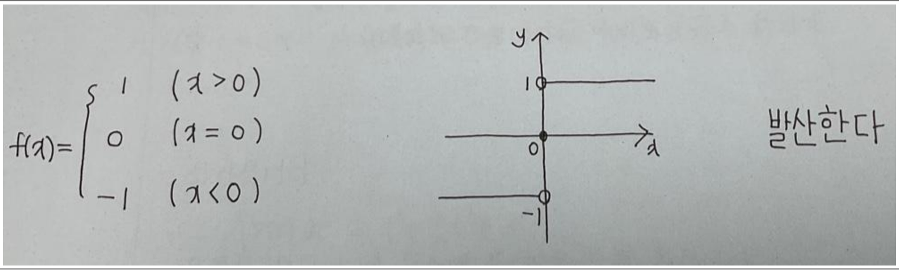
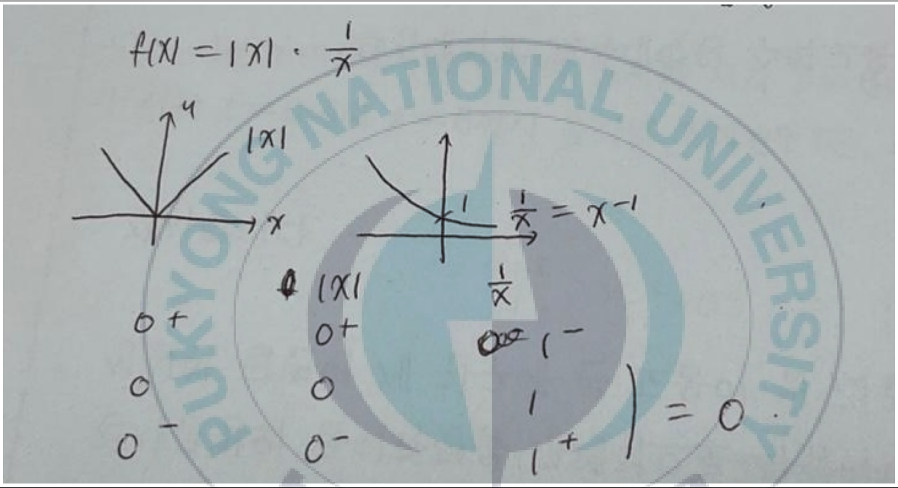
<표 Ⅳ-5> 문항1에 대한 반응

정답	오답	전체
26(44.83%)	32(55.17%)	58(100%)

<표 Ⅳ-6> 문항1에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
26(81.25%)	0	6(18.75%)	0	0	0	32(100%)

<표 Ⅳ-7> 문항1에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형
	C형

위 문항의 오답률은 약 55.17%로 나타났다. 오답은 32명중 26명의 학생이 개념오류를 범했고, 대부분 '$x=0$ 에서 함숫값이 정의되지 않음' 을 인지하지 못하여 오류가 나타났다. 또한, A형 개념오류로 '$x=0$ 에서 함숫값이 정의되지 않음' 의 오류가 나타났다. C형 오류에서는 극한의 개념은 알고 있으나 적용하는 과정에서 부정확하게 사고하여 생긴 오류가 32명 중 6명으로 나타났다.

[문항2] 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & (x\neq 1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$$

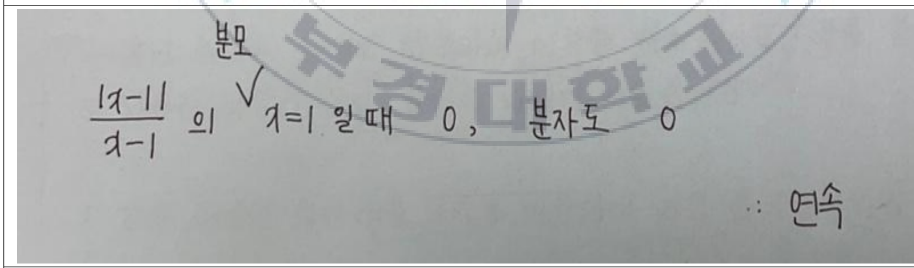
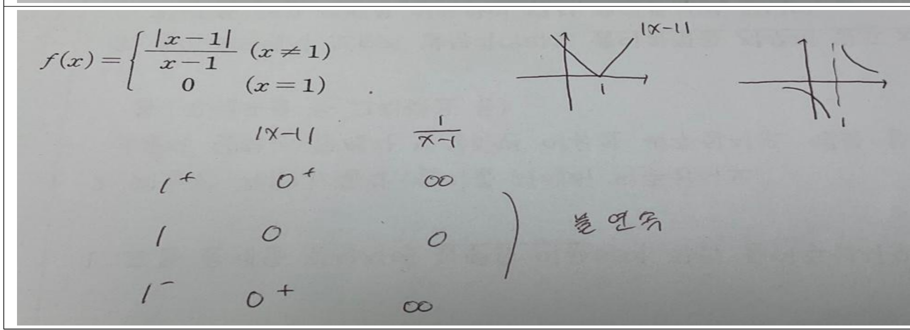
<표 Ⅳ-8> 문항2에 대한 반응

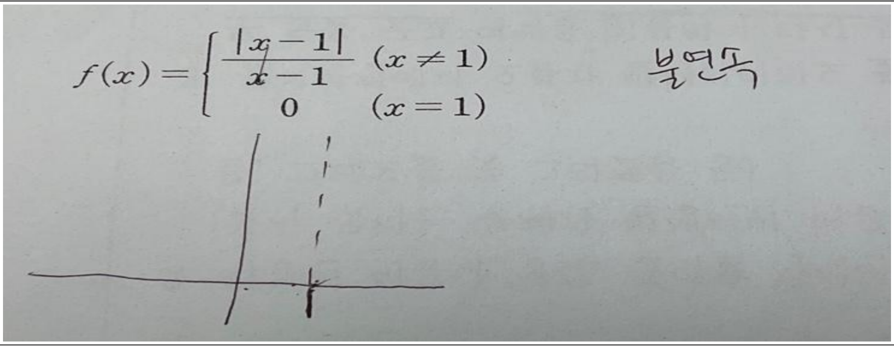
정답	오답	전체
40(68.97%)	18(31.03%)	58(100%)

<표 Ⅳ-9> 문항2에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
6(33.33%)	2(11.11%)	2(11.11%)	8(44.45%)	0	0	18(100%)

<표 Ⅳ-10> 문항2에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	B형
	C형

	D형

위 문항의 오답률은 약 31.03%로 나타났다. B형 오류로는 ‘$x=0$ 에서 함숫값이 정의되지 않음’ 을 인지하지 못하는 주어진 자료를 잘 못 해석하여 사용한 내용 오류가 나타났다. 또한, D형 오류로 ‘불연속’ 이라는 정답은 제시하였으나 상세한 근거를 제시하지 못하는 생략 오류가 가장 많은 오류로 나타났다.

[문항3-1] 다음 극한값을 구하시오. $\lim_{x\to 9}\dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x}-3}$

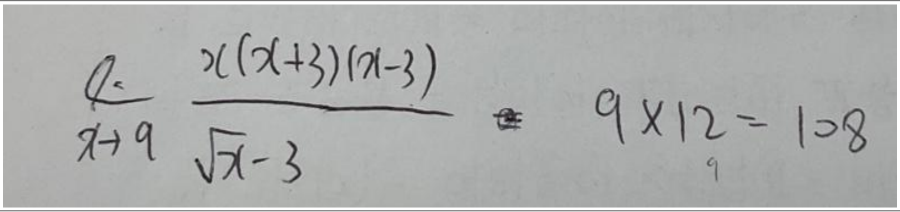
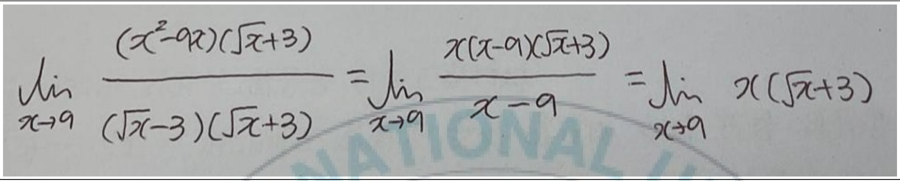
<표 Ⅳ-11> 문항3-1에 대한 반응

정답	오답	전체
48(82.76%)	10(17.24%)	58(100%)

<표 Ⅳ-12> 문항3-1에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
6(60.00%)	0	0	0	2(20.00%)	2(20.00%)	10(100%)

<표 Ⅳ-13> 문항3-1에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	E형
	F형

위 문항은 단순한 극한값 계산 문제로 오답률이 약 17.24%로 비교적 낮은 오답률로 나타났다. 문제의 풀기 위한 기본적 지식이 결여되어 나타난 개념 오류가 가장 많았으며 E형 오류로 학생들의 실수로 인한 계산 과정 상에서 나타난 기술 오류도 나타났다. 또한, F형 오류로는 문제풀이를 중단한 기타 오류도 나타났다.

[문항3−2] 다음 극한값을 구하시오. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-4}{2x^2-1}$

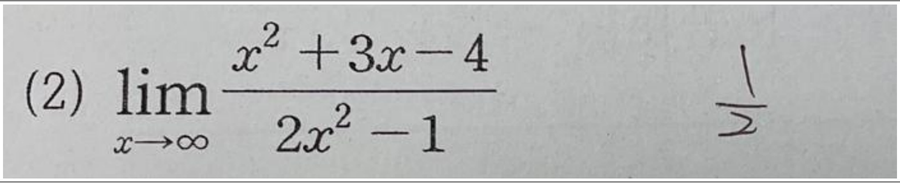
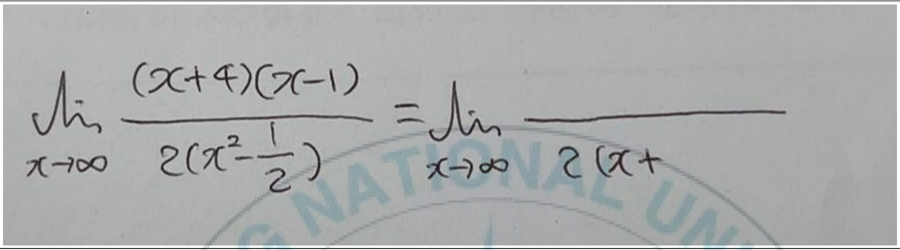
<표 Ⅳ-14> 문항3-2에 대한 반응

정답	오답	전체
20(34.48%)	38(65.52%)	58(100%)

<표 Ⅳ-15> 문항3-2에 대한 반응

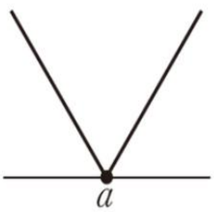
오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
6(15.79%)	8(21.06%)	0	20(52.63%)	3(7.89%)	1(2.63%)	38(100%)

<표 Ⅳ-16> 문항3-2에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
 (2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-1}$ $\frac{1}{2}$	D형
 $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)(x-1)}{2(x^2-\frac{1}{2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{}{2(x+}$	F형

위 문항은 단순히 정답만 적은 학생들은 모두 생략 오류로 구분하였다. 오답률은 약 65.52%로 나타났으며 오답 38명 중 20명이 D형 생략 오류로 구분되었다. 학생들은 이 문항을 풀 때 대부분 원리를 이해해서 풀기보다는 공식에 의존하여 푸는 편인 것으로 추정된다.

[문항4-1] 다음 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 이유를 설명하여라.



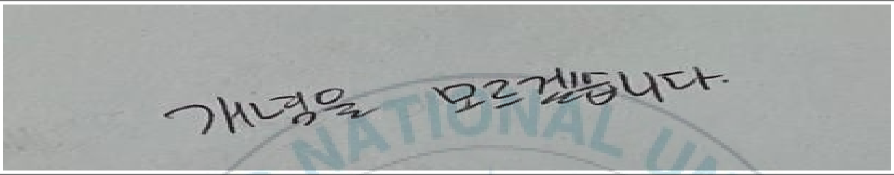
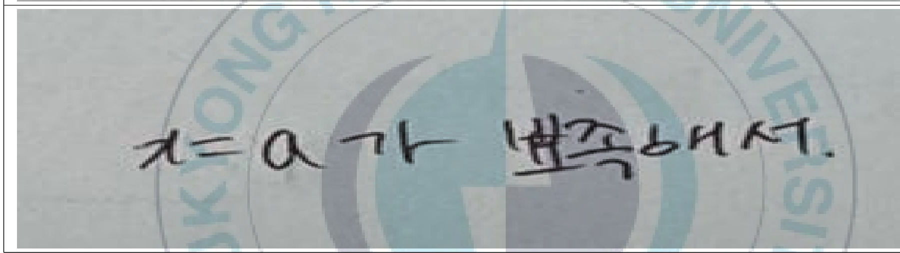
<표 Ⅳ-17> 문항4-1에 대한 반응

정답	오답	전체
38(65.52%)	20(34.48%)	58(100%)

<표 Ⅳ-18> 문항4-1에 대한 반응

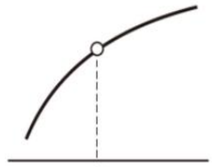
오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
8(40.00%)	0	0	12(60.00%)	0	0	20(100%)

<표 Ⅳ-19> 문항4-1에 대한 반응

<table>
<tr><th>오류의 예시</th><th>오류
유형</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A형</td></tr>
<tr><td>
</td><td>D형</td></tr>
</table>

위 문항의 오답률은 34.48%로 나타났으며 미분계수의 정의 등 문제에서 필요한 개념들을 이해하지 못하거나 잊어서 발생한 A형 개념 오류도 있었지만 D형 오류로 정답은 제시하였으나 근거를 제시하지 못하는 생략 오류가 나타남으로써 대부분의 학생들이 ‘뾰족점에서 미분 불가능하다.’ 라고 원리를 이해하기 보다는 단순히 암기를 하고 문제를 풀고 있는 것으로 추정되는 바이다.

[문항4-2] 다음 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 이유를 설명하여라.



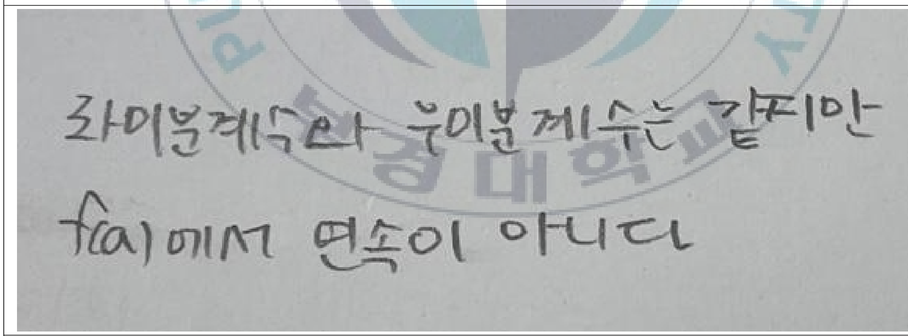
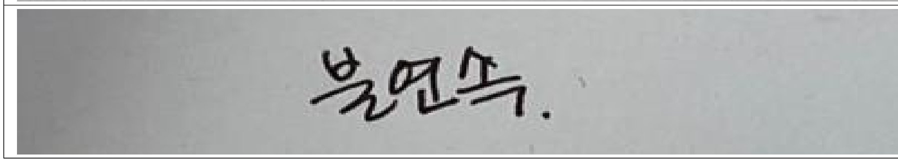
<표 Ⅳ-20> 문항4-2에 대한 반응

정답	오답	전체
26(44.83%)	32(55.17%)	58(100%)

<표 Ⅳ-21> 문항4-2에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
2(6.25%)	14(43.75%)	0	(50.00%)	0	0	32

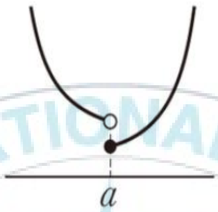
<표 Ⅵ-22> 문항4-2에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	B형
	D형

위 문항에서는 그래프만 확인하여 정답은 ‘불연속’이라 제시하였으나 ‘불연속’인 근거를 제시하지 않은 D형 생략 오류가 가장 많이 나타났고,

불연속에서는 미분계수가 정의되지 않지만 다수의 학생들이 좌미분계수와 우미분계수가 달라서 불연속이라는 B형 내용 오류를 범했다.

[문항4-3] 다음 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 이유를 설명하여라.



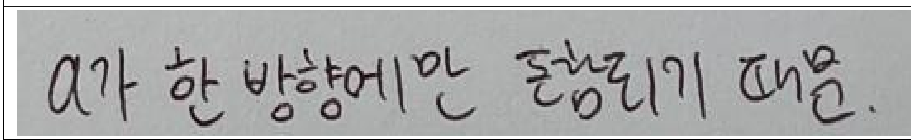
<표 Ⅳ-23> 문항4-3에 대한 반응

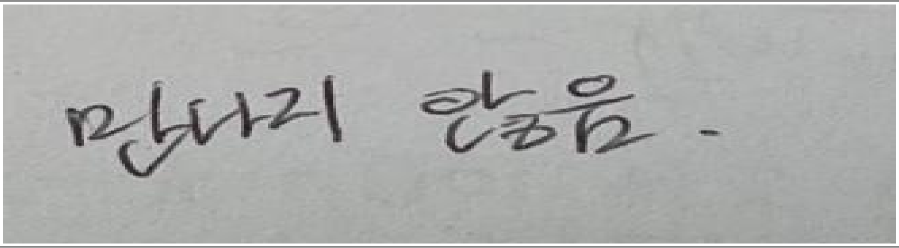
정답	오답	전체
34(58.62%)	24(41.38%)	58(100%)

<표 Ⅳ-24> 문항4-3에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
4(16.67%)	0	0	20(83.33%)	0	0	24(100%)

<표 Ⅳ-25> 문항4-3에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

	D형

위 문항도 약 41.38%의 오류가 나타났고, 그 중 정답은 제시하였으나 상세한 근거를 제시하지 못하는 D형 생략 오류가 가장 많이 나타났다. 이처럼 학생들은 불연속의 개념을 이해하기보다는 공식과 경험에 의존하여 문제 풀이가 더 익숙한 것으로 제기된다.

[문항5] 함수 $f(x)=x^2+2x+2$에 대하여 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

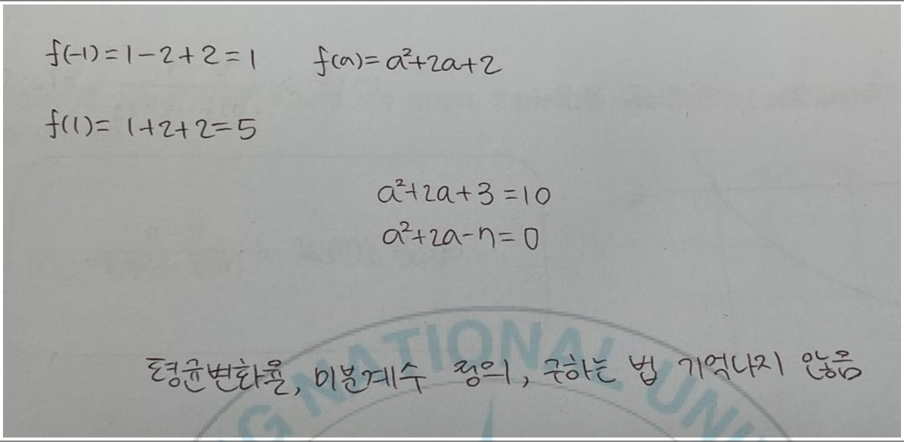
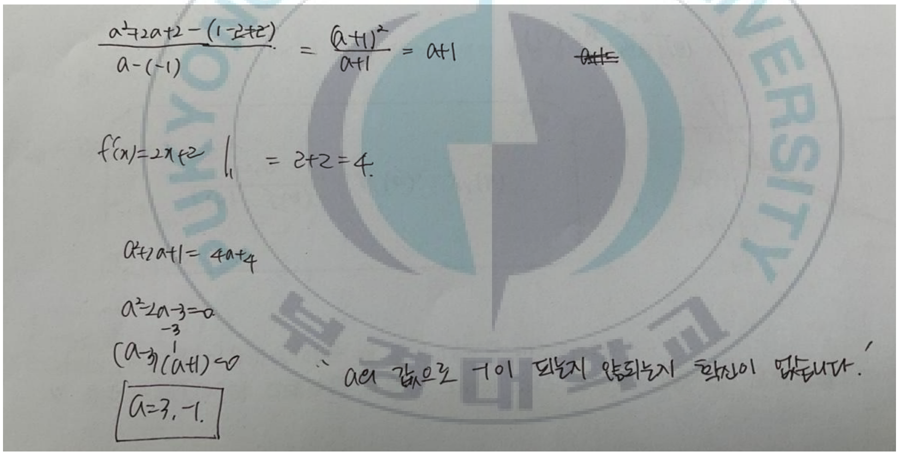
<표 Ⅳ-26> 문항5에 대한 반응

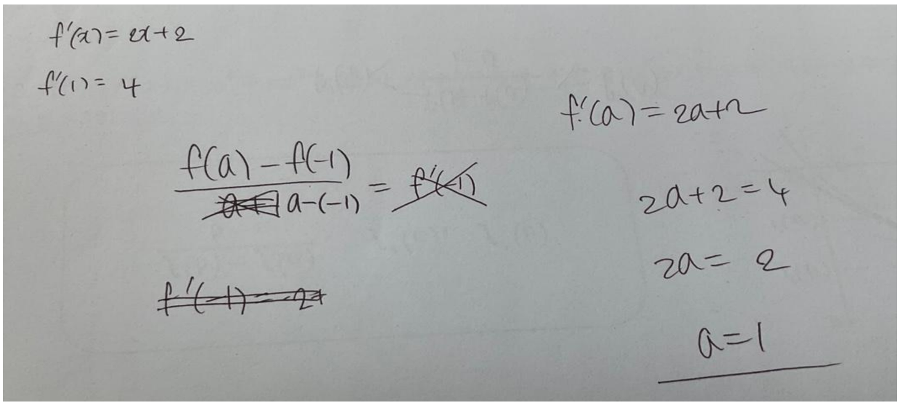
정답	오답	전체
42(72.41%)	16(27.59%)	58(100%)

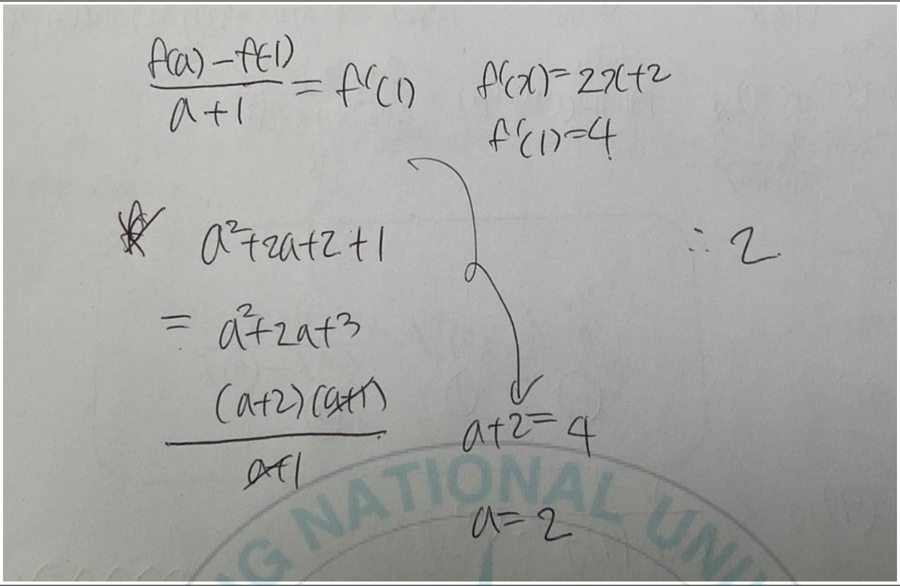
<표 Ⅳ-27> 문항5에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
6(37.50%)	0	4(25.00%)	0	6(37.50%)	0	16(100%)

<표 Ⅳ-28> 문항5에 대한 반응

<table>
<tr><th>오류의 예시</th><th>오류
유형</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A형</td></tr>
<tr><td>

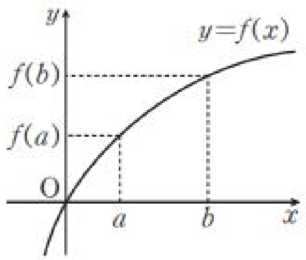

</td><td>C형</td></tr>
</table>

	E형

위 문항에서는 평균변화율의 정의를 이해하지 못하거나 개념을 잊었을 경우 해결하기 어렵지만 알고 있다면 반대로 쉬운 문제가 된다. 그래서 문제에 필요한 기본적 지식이 결여되어 있는 A형 개념 오류와 E형 계산 상의 기술적 오류가 가장 많이 나타났고, 개념은 알고 있으나 적용하는 과정에서 부정확하게 사고하여 생긴 C형 적용 오류가 다음으로 많이 나타났다.

[문항6] 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $0<a<b$일 때, 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 이용하여 다음 세 값의 대소를 비교하시오.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad f'(a),\quad f'(b)$$



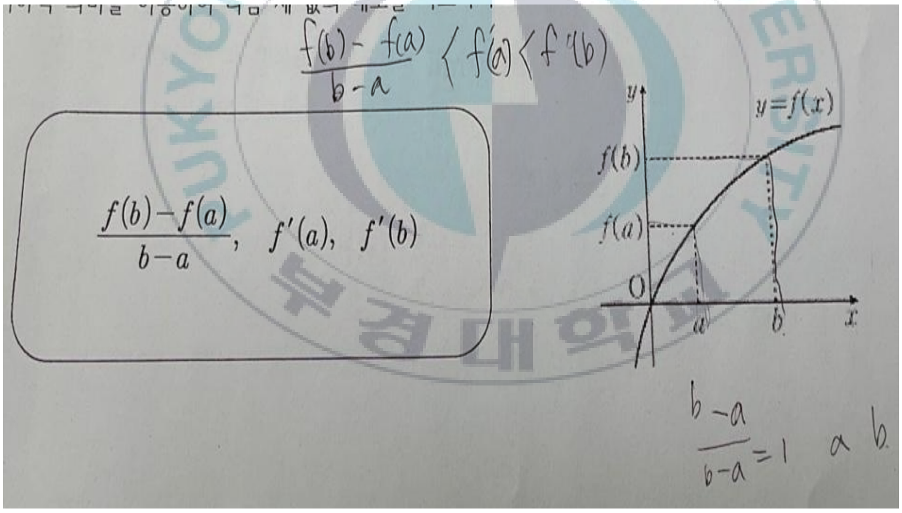
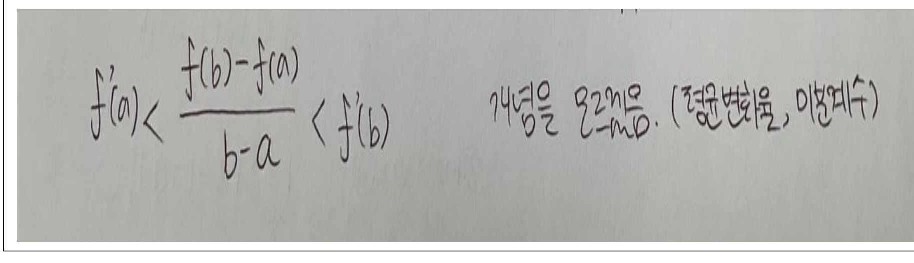
<표 Ⅳ-29> 문항6에 대한 반응

정답	오답	전체
48(82.76%)	10(17.24%)	58(100%)

<표 Ⅳ-30> 문항6에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
8(80.00%)	0	0	2(20.00%)	0	0	10(100%)

<표 Ⅳ-31> 문항6에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
 	A형

위 문항은 오답률이 17.24%로 비교적 낮은 편이였고, 오답의 가장 큰 원인은 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미와 개념을 이해하지 못하거나 잊어서 발생한 A형 개념오류를 범하였다.

[문항7] 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2}$를 $f(2)$와 $f'(2)$에 대한 식으로 나타내시오.

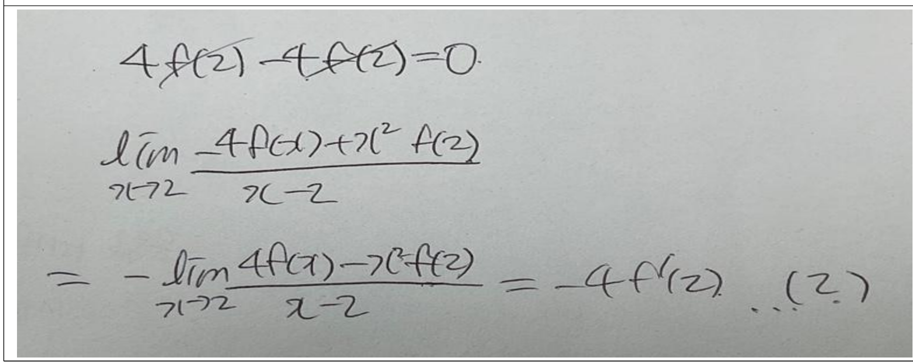
<표 Ⅳ-32> 문항7에 대한 반응

정답	오답	전체
20(34.48%)	38(65.52%)	58(100%)

<표 Ⅳ-33> 문항7에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
14(36.84%)	0	0	10(26.32%)	6(15.79%)	8(21.05%)	38(100%)

<표 Ⅳ-34> 문항7에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

<table>
<tr><td>$\lim_{x\to2} 2xf(2)-4f'(2) = 4f(2)-4f'(2)$</td><td>D형</td></tr>
<tr><td>응꼴을 먼저파악하자 분모인 $x-2$가 0으로가기 때문에
분자인 $x^2f(2)-4f(x)$ 또한 0으로 가야한다
대입해보면 $4f(2)-4f(2)=0$ 으로나온다
$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(f(x))}{x-2}$ $\lim_{x\to2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(f(x))}{\cancel{x-2}}$
$4f(2)=f'(2)$</td><td rowspan="3">F형</td></tr>
<tr><td>$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ $\lim_{x\to2}\frac{x^2\left(f(2)-\frac{4}{x^2}f(x)\right)}{x-2} = 4\cdot\lim_{x\to2}\frac{f(2)-f(x)}{x-2}$
↳ $f(2)=0$. $=-4f'(2)$.</td></tr>
<tr><td>$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(f(2)-f(x))}{\cancel{x-2}}$ $=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)^2\{f(2)-f(x)\}}{x+2}$
$=4\cdot\lim_{x\to2}\{f(2)-f(x)\}$ $=\lim_{x\to2}\frac{f(2)-f(x)}{x+2}\times16=\lim_{x\to2}\frac{-\{f(x)-f(2)\}}{(x+2)}\times16.$
$=4f(2)-4\lim_{x\to2}f(x).$ $=-f'(2)\times16$</td></tr>
</table>

위 문항은 미분계수의 정의를 이용하여 식의 변형이 필요한 문제이다. 오답률은 약 65.52%로 나타났으며 오답을 분석하여 본 결과, 많은 학생들

이 $x^2f(2)-4f(x)$를 $(x^2-4)\{f(2)-f(x)\}$로 표현하는 오개념이 형성되어 계산과정의 해결방법이 애매한 F형 기타 오류를 범하였다. 또한, ‘미분계수’의 잘못된 선행지식이 있는 A형 개념 오류도 범했으며, 정답은 제시하였으나 근거를 제시하지 못하는 D형 생략 오류도 나타났다.

[문항8] 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이시오.

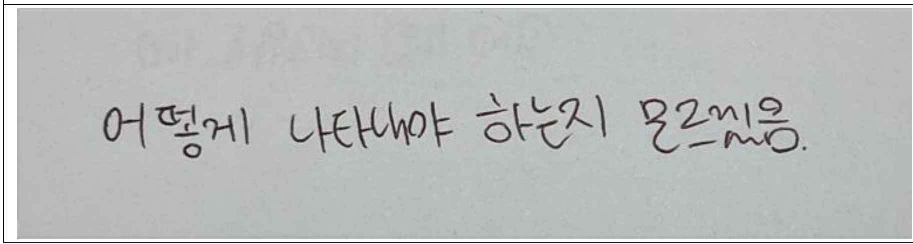
<표 Ⅳ-35> 문항8에 대한 반응

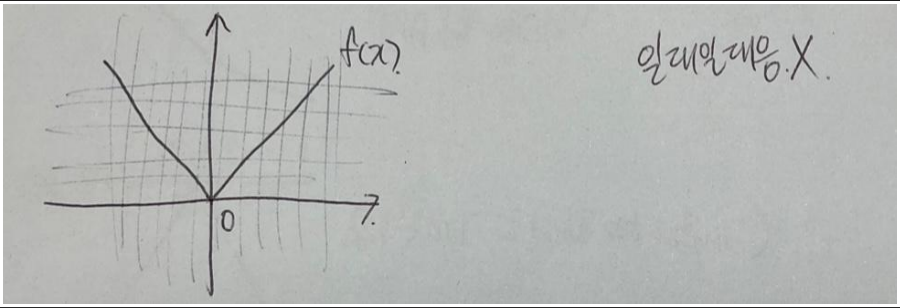
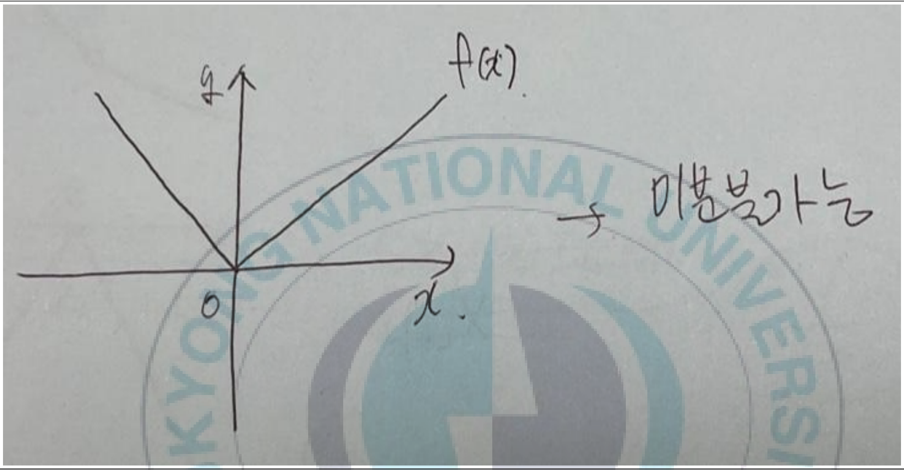
정답	오답	전체
42(72.41%)	16(27.59%)	58(100%)

<표 Ⅳ-36> 문항8에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
6(37.50%)	2(12.50%)	0	8(50.00%)	0	0	16(100%)

<표 Ⅳ-37> 문항8에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

	B형
	D형

위 문항은 미분가능성의 개념을 이용하여 해결할 수 있는 문제이다. 하지만 다수의 학생들이 미분불가능 개념을 이해하지 않고 단지 ‘뾰족점에서는 미분불가능하다.’ 를 암기하고 문제를 해결하고 있다는 사실을 알 수 있었다.

[문항9] 점 $(1,4)$에서 곡선 $y=-x^2+x+3$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

<표 Ⅳ-38> 문항9에 대한 반응

정답	오답	전체
10(17.24%)	48(82.76%)	58(100%)

<표 Ⅳ-39> 문항9에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
6(12.50%)	38(79.16%)	2(4.17%)	0	2(4.17%)	0	48(100%)

<표 Ⅳ-40> 문항9에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
$y'=-2x+1$ 접선 기울기 : -2 $\rightarrow y=-2x+a$ $(1,4)$ $4=-2+a$ $a=6$ $\boxed{\therefore y=-2x+6}$ 접선의 방정식 공식 기억나지 않음	A형
$y'=-2x+1$ $y=(-2+1)(x-1)+4$ $=-x+1+4=-x+5$	B형

위 문항은 오답률이 82.76%로 비교적 높게 나타났다.미분의 결과 값에서 기울기를 찾는 잘못된 선행지식이 있는 A형 개념오류가 나타났고, 가장 많은 오답은 문제에서 주어진 점$(1,4)$가 함수$f(x)$ 위의 점이라 잘 못 해석하여 접선의 기울기를 구하는 과정에서 B형 내용 오류가 나타났다.

[문항10] 방정식 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

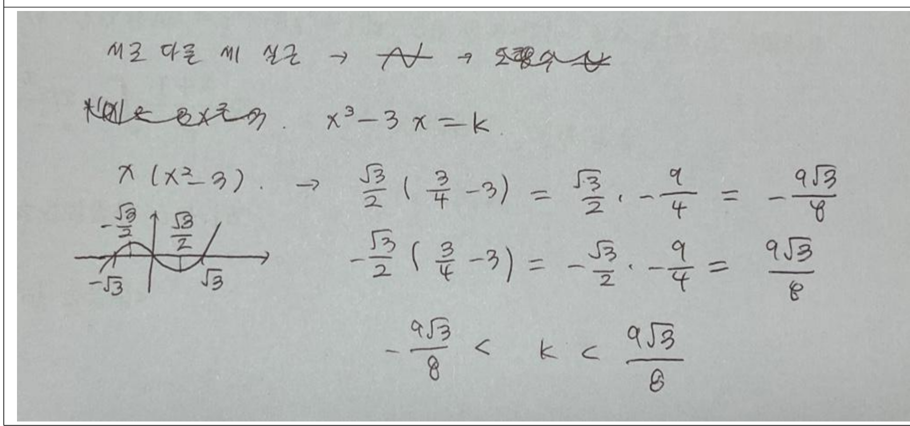
<표 Ⅳ-41> 문항10에 대한 반응

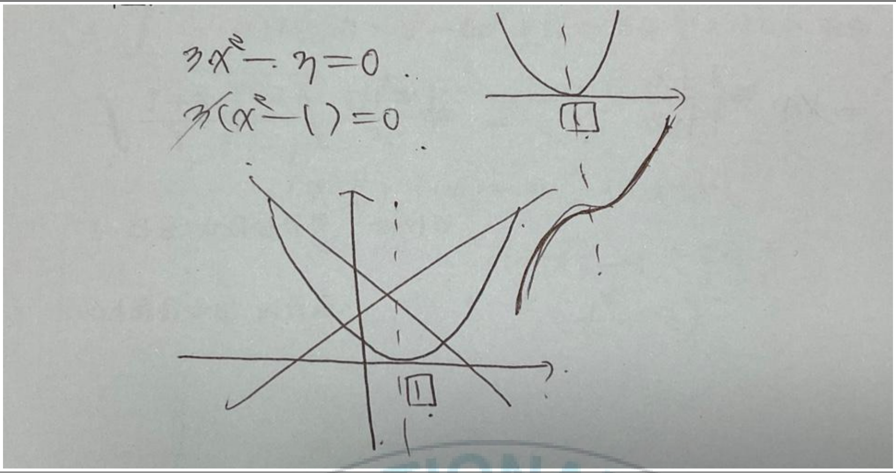
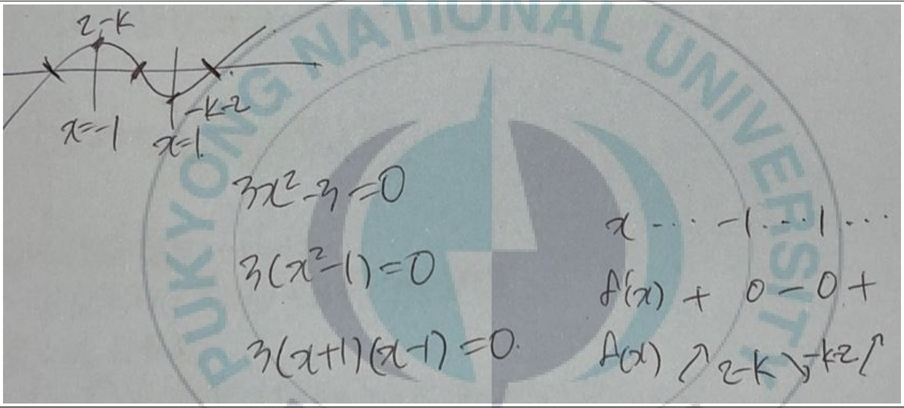
정답	오답	전체
40(68.97%)	18(31.03%)	58(100%)

<표 Ⅳ-42> 문항10에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
12(66.67%)	2(11.11%)	2(11.11%)	2(11.11%)	0	0	18(100%)

<표 Ⅳ-43> 문항10에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

	B형
	C형

위 문항은 오답률이 31.03%로 나타났으며 삼차함수 그래프에 대한 잘못된 선행지식이 있는 A형 개념 오류가 가장 많이 나타났고, 개념은 알고 있으나 그래프를 그리는 과정에서 부정확한 사고하여 범한 B형 내용 오류가 나타났다.

[문항11] 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

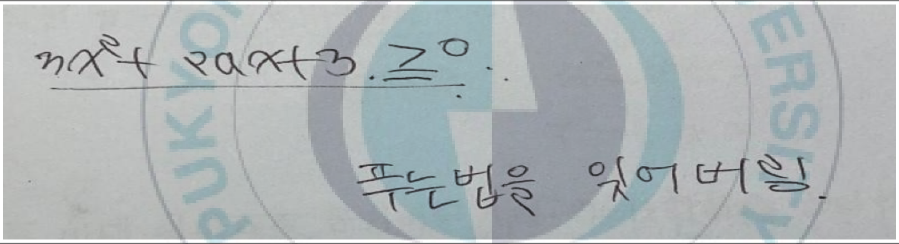
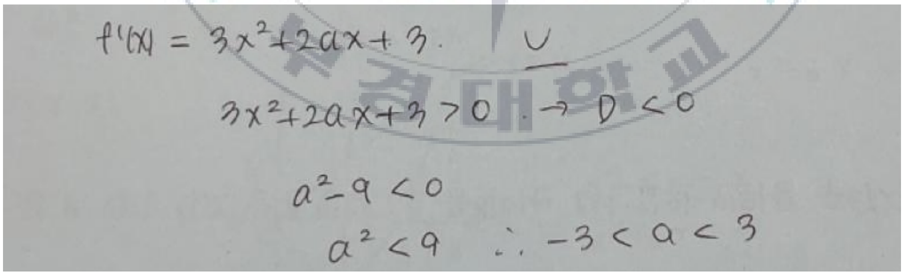
<표 Ⅳ-44> 문항11에 대한 반응

정답	오답	전체
26(44.83%)	32(55.17%)	58(100%)

<표 Ⅳ-45> 문항11에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
14(43.75%)	18(56.25%)	0	0	0	0	32(100%)

<표 Ⅳ-46> 문항11에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형
	A형

위 문항은 오답률이 55.17%로 나타났다. 삼차함수의 증가 조건은 $f'(x) \geq 0$ 이므로 판별식 $D \leq 0$ 이지만 $f'(x) > 0$으로 판별식 $D > 0$ 으로 잘못된 선행지식으로 나타난 개념 오류가 가장 많이 나타났다.

[문항12] 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각

$$x_P(t) = t^3 - 9t^2,\ x_Q(t) = t^3 - 6t^2$$

일 때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 t의 값의 범위를 구하시오.

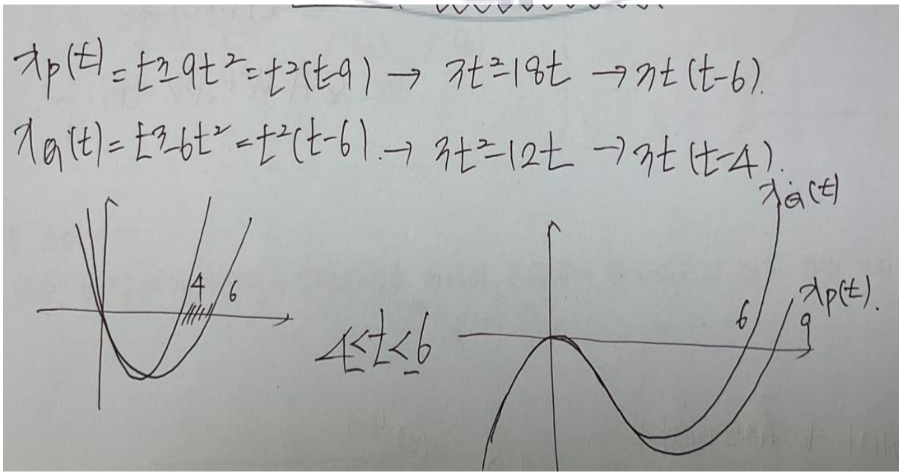
<표 Ⅳ-47> 문항12에 대한 반응

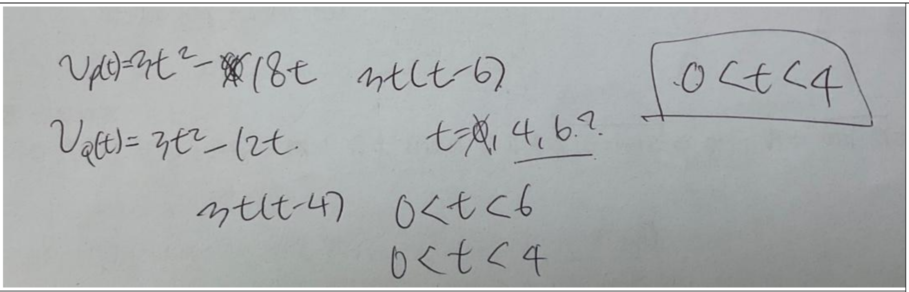
정답	오답	전체
28(48.28%)	30(51.72%)	58(100%)

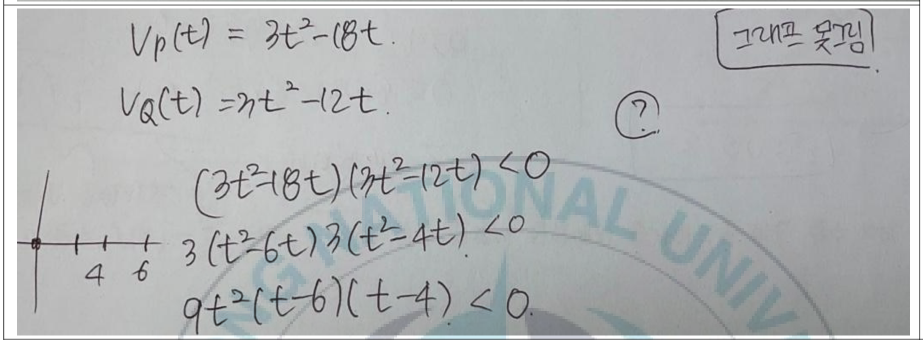
<표 Ⅳ-48> 문항12에 대한 반응

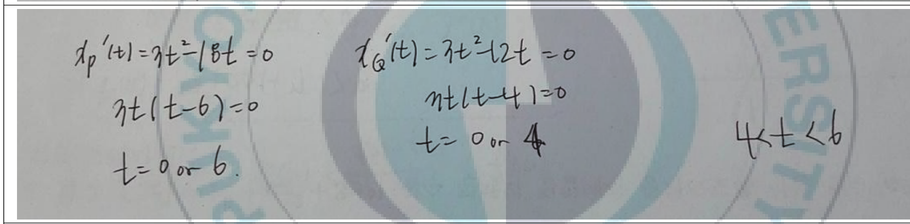
오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
18(60.00%)	2(6.67%)	3(10.00%)	4(13.33%)	2(6.67%)	1(3.33%)	30(100%)

<표 Ⅳ-49> 문항12에 대한 반응

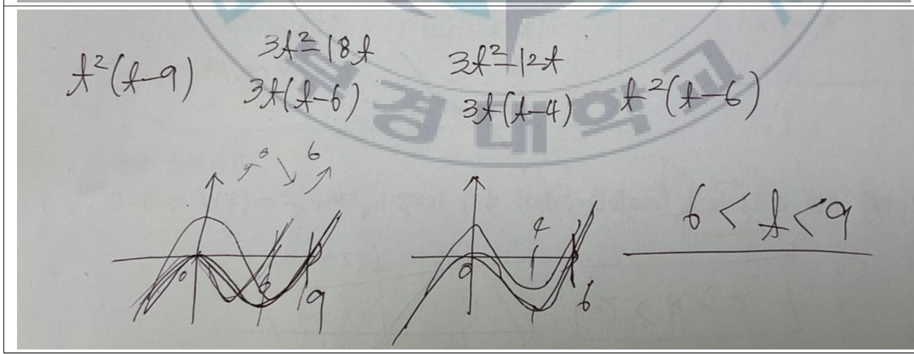
오류의 예시	오류 유형
	A형







D형



F형

위 문항은 정적분의 활용에서 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다. 오답률은 51.72%로 나타났으며 비교적 여러 가지 유형의 오류가 나타났다. 반대방향으로 움직인다’ 의 개념에서 속도가 같을 때의 시간은 배제되어야 하지만 그렇지 않은 개념 오류와 부등식 계산 과

정까지는 맞게 해결하였으나 그래프 개형에 관한 개념이 결여되어 있는 오류 등 개념 오류에서 가장 많은 오류를 범하였다.

[문항13] 다음 부정적분을 구하시오.

$$\int \frac{1}{1+x}dx + \int \frac{x^3}{1+x}dx$$

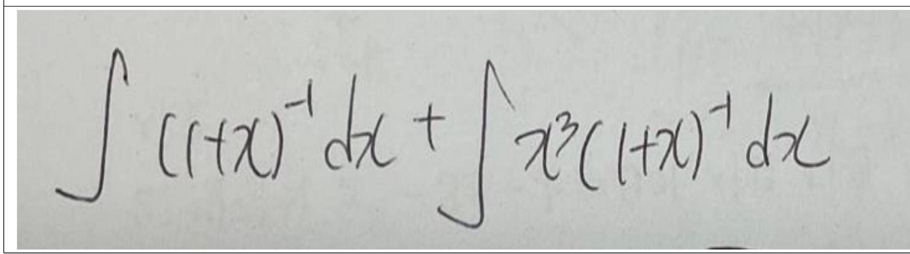
<표 Ⅳ-50> 문항13에 대한 반응

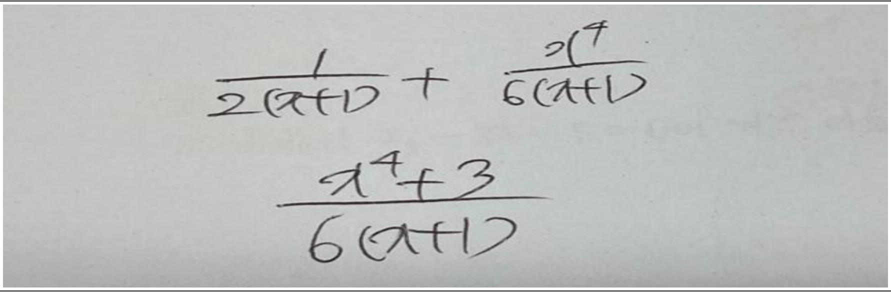
정답	오답	전체
34(58.62%)	24(41.38%)	58(100%)

<표 Ⅳ-51> 문항13에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
22(91.67%)	0	0	0	0	2(8.33%)	24(100%)

<표 Ⅳ-52> 문항13에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

	F형

위 문항은 부정적분의 성질을 이용하여 적분법을 단순히 적용하는 문제이다. 오답률은 41.38%로 나타났으며 대부분의 학생들이 부정적분의 잘못된 선행지식으로 오류를 범했거나 부정적분법의 개념을 잊어서 나타나는 개념 오류가 가장 많았다. 문제 해결방법이 애매한 F형 기타오류도 나타났다.

[문항14] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $2x-4$이다. 이 곡선이 점 $(1, -2)$를 지날 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

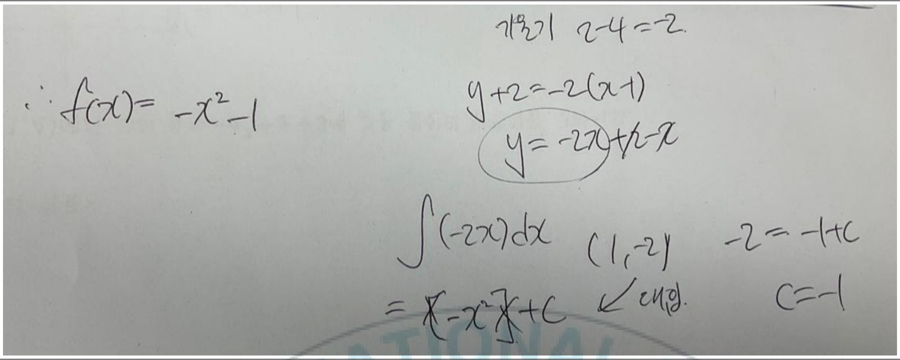
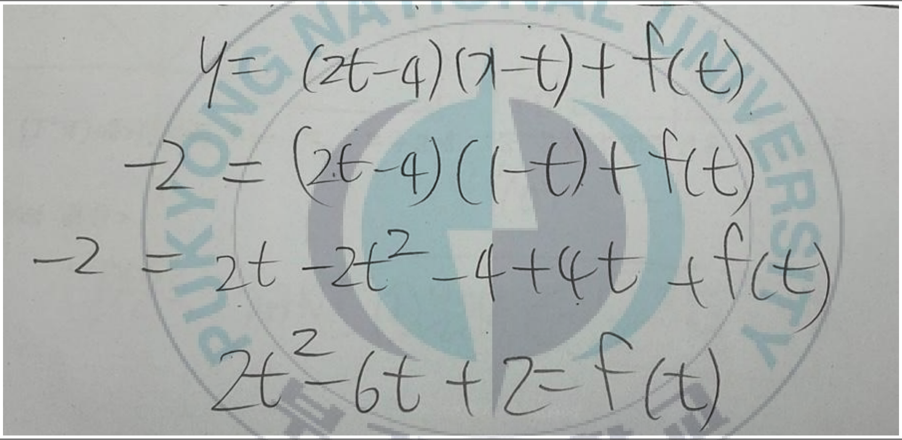
<표 Ⅳ-53> 문항14에 대한 반응

정답	오답	전체
44(75.86%)	14(24.14%)	58(100%)

<표 Ⅳ-54> 문항14에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
8(57.14%)	0	6(42.86%)	0	0	0	14(100%)

<표 Ⅳ-55> 문항14에 대한 반응

<table>
<tr><th>오류의 예시</th><th>오류 유형</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A형</td></tr>
<tr><td>
</td><td>C형</td></tr>
</table>

위 문항은 도함수의 기하적 의미를 이용하여 접근할 수 있는 문제이다. 그러나 도함수의 기하적 의미에 대한 개념이 결여되어 있는 학생들은 이 문제에서 접선의 기울기가 $f'(x)$를 나타내는 것조차 알지 못한 경우 A형 개념 오류를 범한 것이다. 또한, 위 그림에서 접선의 기울기 개념은 알고 있으나 주어진 조건의 점$(1, -2)$을 부정확하게 사고하여 곡선 밖의 점으로 두고 적용시키는 과정에서 생긴 C형 적용 오류이다.

[문항15] 자연수 n에 대하여

$$\int_0^1 (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx=2022$$

일 때, n의 값을 구하시오.

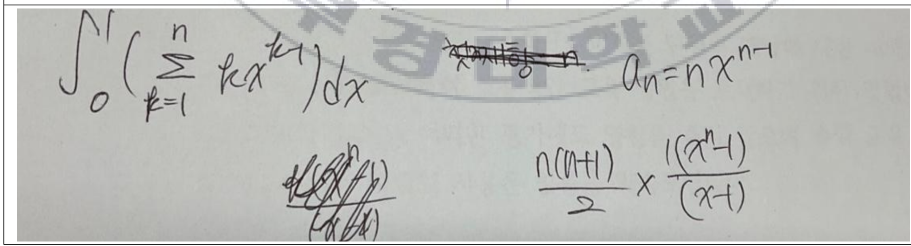
<표 Ⅳ-56> 문항15에 대한 반응

정답	오답	전체
38(65.52%)	20(34.48%)	58(100%)

<표 Ⅳ-57> 문항15에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
20(100%)	0	0	0	0	0	20(100%)

<표 Ⅳ-58> 문항15에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

위 문항은 정적분의 개념을 이용하여 단순히 계산하는 문제이다. 오답률은 34.48%로 나타났다. 이 문제에서는 정적분의 문제를 해결하기 위한 기본적 지식이 결여되어 있거나 잘못된 선행지식이 있는 A형 개념 오류만 나타났다.

[문항16] $\int_{2}^{x}(x-t)f(t)dt = x^3-6x^2+12x-8$을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

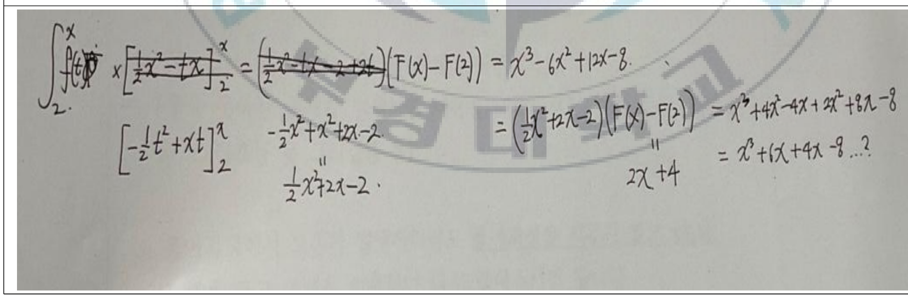
<표 Ⅳ-59> 문항16에 대한 반응

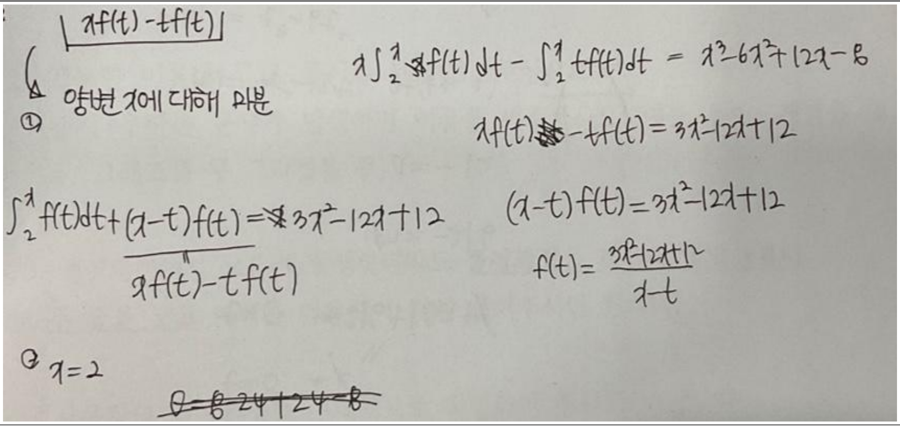
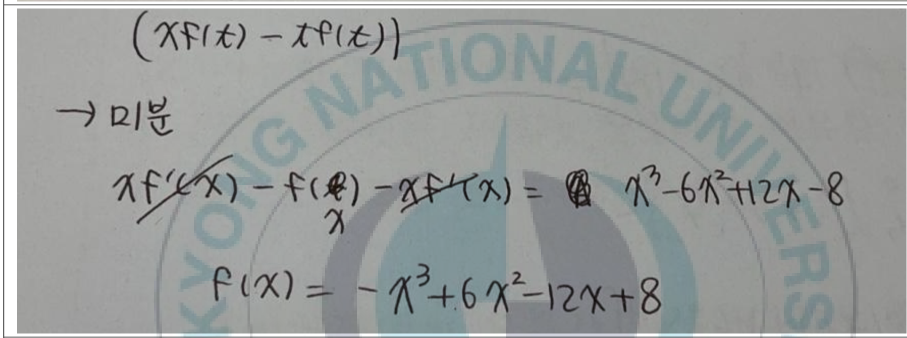
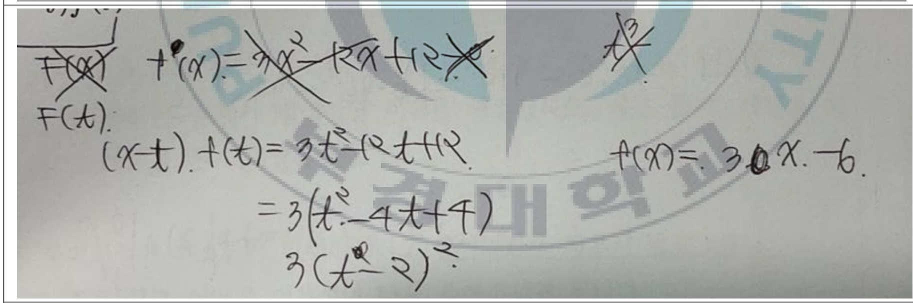
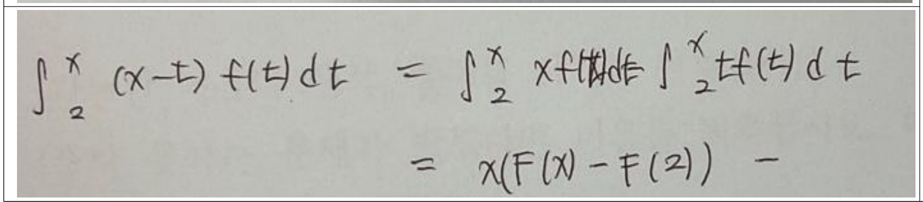
정답	오답	전체
18(31.03%)	40(68.97%)	58(100%)

<표 Ⅳ-60> 문항16에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
29(72.50%)	0	1(2.50%)	0	7(17.50%)	3(7.50%)	40(100%)

<표 Ⅳ-61> 문항16에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

	C형
	E형
 	F형

위 문항은 정적분 형태를 변수 x에 관하여 미분을 통해 해결하는 문제이고 오답률은 68.97%로 나타났다. 정적분에 관한 잘못된 선행지식으로 접근하여 나타난 A형 개념 오류의 오답이 가장 많았고, 변수 x에 관한 미

분을 간과하여 나타난 적용 오류, 계산 실수로 인한 E형 기술 오류, 문제 풀이를 중단하여 해석이 불가능한 F형 기타오류 등 여러 가지 형태로 나타났다.

[문항17] 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

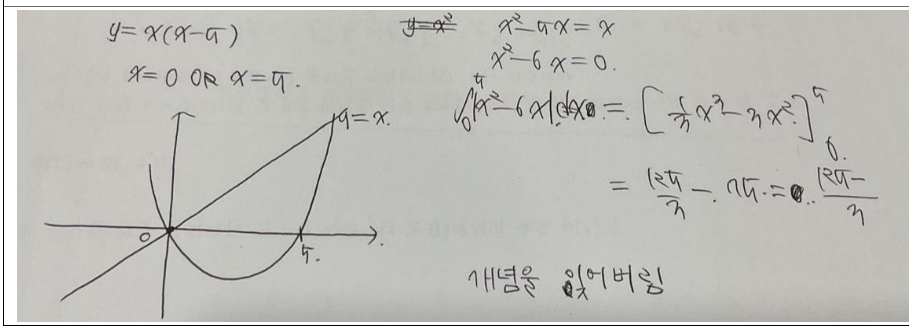
<표 Ⅳ-62> 문항17에 대한 반응

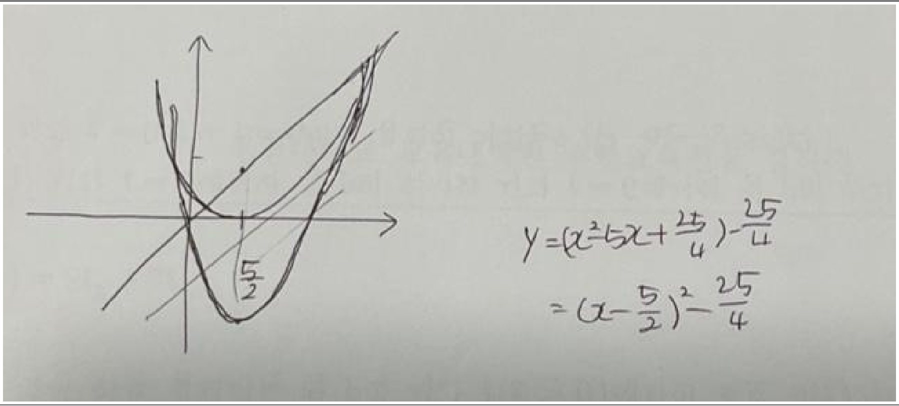
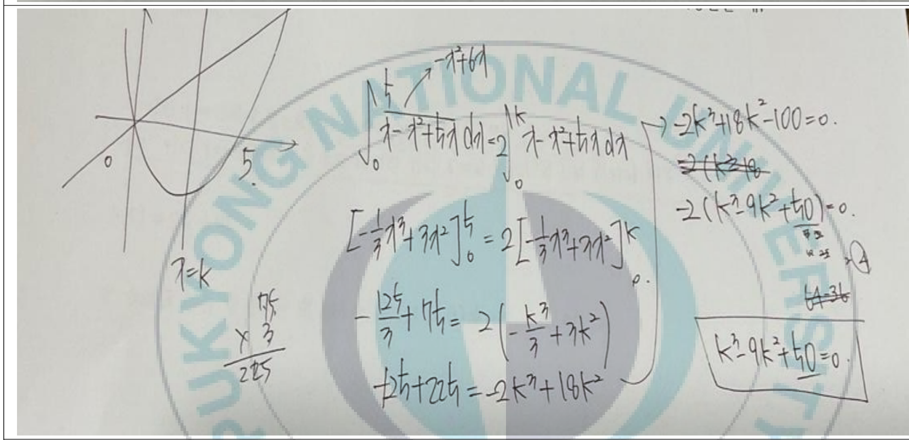
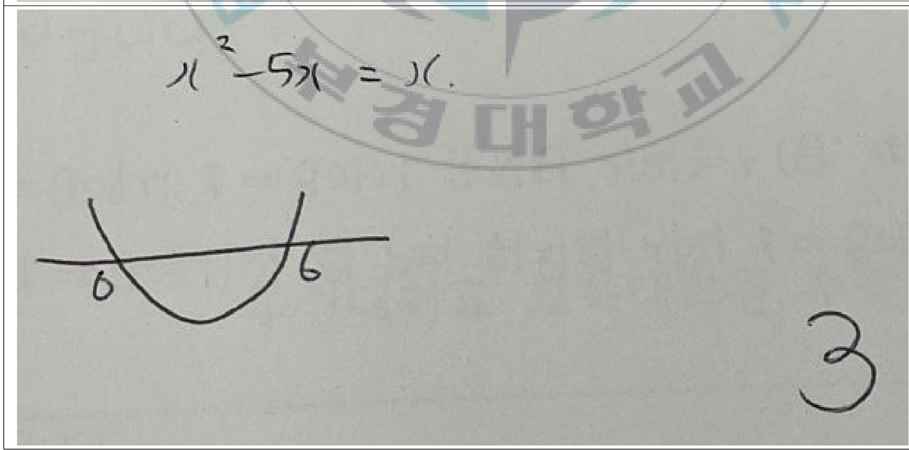
정답	오답	전체
22(37.93%)	36(62.07%)	58(100%)

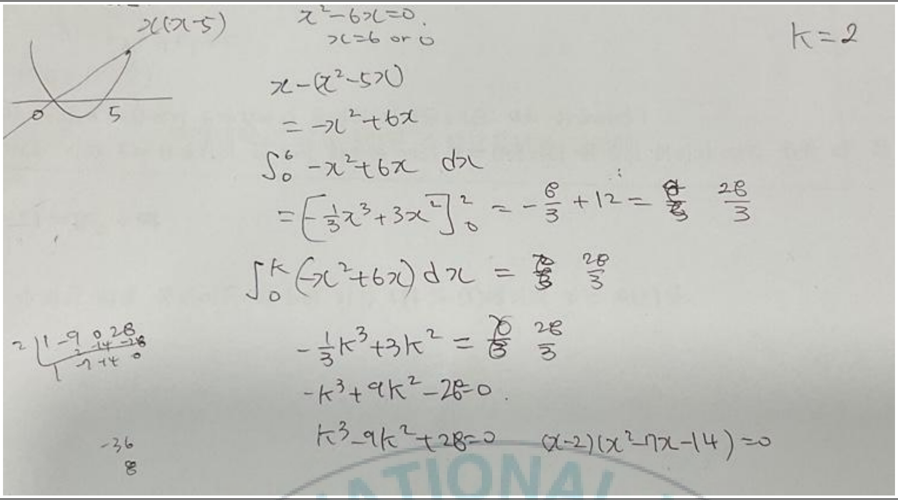
<표 Ⅳ-63> 문항17에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
19(52.78%)	8(22.22%)	3(8.33%)	4(11.11%)	2(5.56%)	0	36(100%)

<표 Ⅳ-64> 문항17에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

 $y=(x^2-5x+\frac{25}{4})-\frac{25}{4}$ $=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$	A형
 $-2k^3+18k^2-100=0.$ $-2(k^3-9k^2+50)=0.$ $k^3-9k^2+50=0.$	B형
 $x^2-5x=x.$ 0 6 3	D형

	E형

위 문항은 정적분의 활용으로 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다. 오답률은 62.07%로 나타났으며 학생들이 스스로 자료와 정보로부터 지식을 도출하여야 해결할 수 있지만 그렇지 못한 경우 오답으로 나타났다. 문제 풀이에 필요한 정적분의 개념이 결여되어 있는 경우는 물론 주어진 자료를 잘 못 해석하여 사용한 B형 내용 오류, 정적분 계산 과정 중에 범한 E형 기술 오류 등 여러 가지 오류가 나타남을 알 수 있다.

[문항18] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 + at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

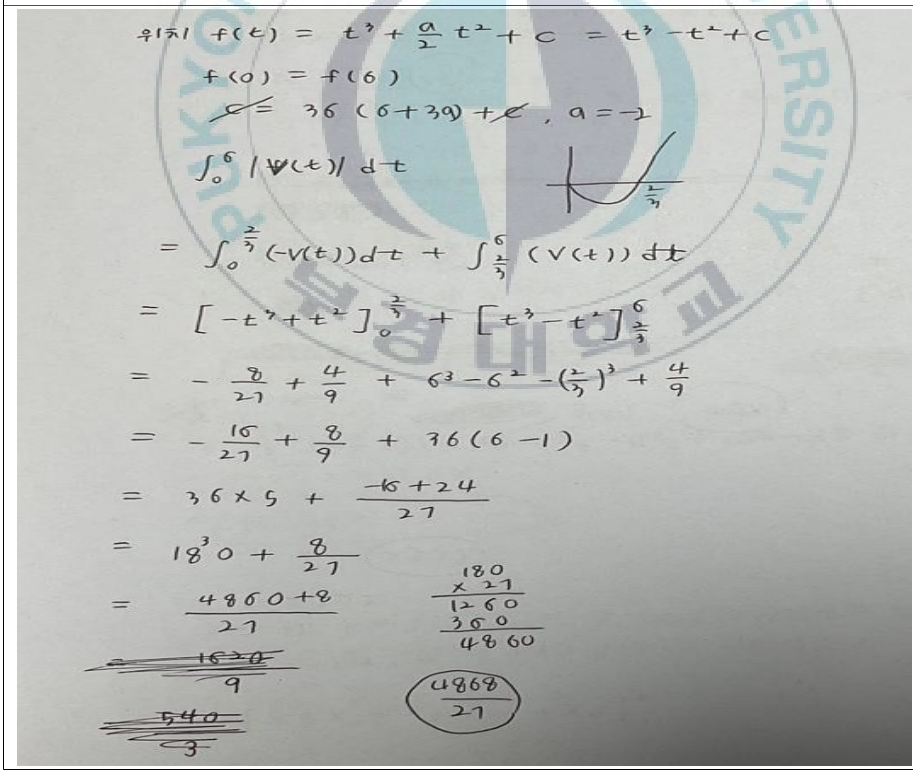
<표 Ⅳ-65> 문항18에 대한 반응

정답	오답	전체
18(31.03%)	40(68.97%)	58(100%)

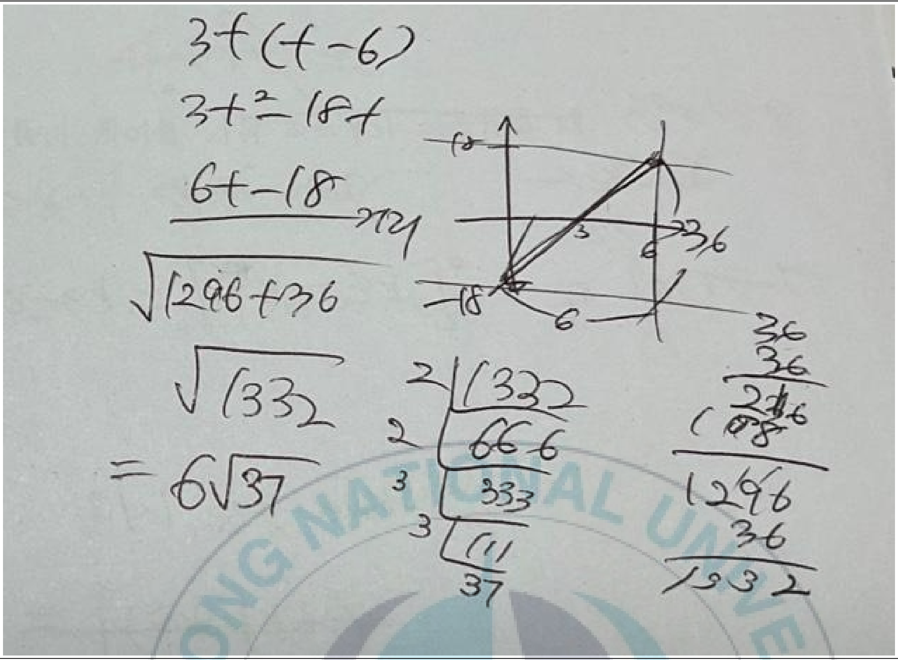
<표 Ⅳ-66> 문항18에 대한 반응

오류유형						합계
A형	B형	C형	D형	E형	F형	
24(60.00%)	0	6(15.00%)	0	2(5.00%)	8(20.00%)	40(100%)

<표 Ⅳ-67> 문항18에 대한 반응

오류의 예시	오류 유형
	A형

$V(6)=108+6a$ $V(0)=0$ $\Big\} \rightarrow a=-18$ 문제 이해 실패	A형
$t^3+\frac{1}{2}at^2$ $6^3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6a=0$ $3\cdot 6a=-6\cdot 6\cdot 6$ $a=-12$ $\int_0^6 t^3-6t^2\,dt$ $\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3\right]_0^6$ $\frac{1}{4}6666-2\cdot 666$ $9\cdot 36-12\cdot 36$ $-3\cdot 36$ -108 (108)	C형
$v(t)=3t(t+\frac{a}{3})$ $x(t)=t^3+\frac{a}{2}t^2+C$ $x(0)=C$ $x(6)=216+18a+C$ $216+18a=0$ $a=-12$ $v(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$ $\int_0^6 \lvert 3t^2-12t\rvert\,dt=\cancel{\left[t^3-6t^2\right]_0^6=0}$ $\int_0^4 12t-3t^2\,dt=\left[6t^2-t^3\right]_0^4=16\cdot 6-64$ $\int_4^6 3t^2-12t\,dt=\left[t^3-6t^2\right]_4^6=(6^3-6^3)-(4^3-6\cdot 16)$ $2\cdot 16\cdot 6+2\cdot 4^3=192+128=320.$	E형

	F형

위 문항은 속도와 위치, 움직인 거리에 관한 문제이다. 오답률은 68.97%로 비교적 높게 나타났다. 학생들이 전반적으로 정적분 활용 문제들을 어렵게 느끼고 오류도 많이 범한다. 그만큼 정적분의 개념에 대한 잘못된 선행지식과 개념, 원리, 법칙들이 결여되어 있는 경우가 많다. ‘속도, 위치’의 개념에 대한 왜곡에 의한 A형 개념 오류, 속도가 주어졌을 때 ‘위치가 서로 같다‘의 기초적인 개념의 부족으로 범한 개념오류, ‘위치가 같다‘의 개념은 알고 있으나 주어진 ’움직인 거리‘ 개념 조건을 적용하는 과정에서 부정확하게 사고하여 생긴 C형 적용 오류, 또한, 이러한 문제에서는 학생들의 실수로 인한 계산 과정 상의 기술적 오류도 범하고 있음을 알 수 있다.

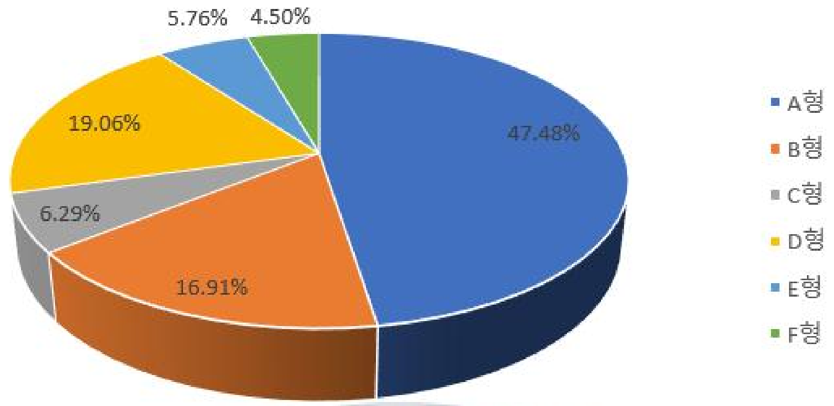
V. 요약 및 제언

5.1. 요약

본 논문에서는 고등학생들의 미적분 단원에 관한 인식과 문제 해결 과정에서 나타나는 오류 유형을 분석 · 파악하고 그 원인을 알아봄으로써 교사가 보다 효율적인 방법을 모색하고 연구하여 학생들에게 수업할 수 있도록 하기 위하여 조사 · 분석하였다.

본 조사를 시행하기 전에 예비조사를 통해 검사지 수정 · 보완 절차가 이루어졌다. 본 조사의 연구 대상은 인문계 고등학교 58명의 학생들로 선정하였고, 연구자가 제작한 미적분 단원에 대한 인식을 파악하기 위한 설문지와 오류 유형 조사를 위해 현행 교과서와 모의고사 기출 문제들을 분석하여 완성한 검사지를 사용하였다. 검사지의 문항들은 전반적으로 학생들이 주로 어려움을 느끼거나 미적분 단원의 필수 개념을 이용하는 문제들로 출제하였으며 함수의 극한과 연속, 다항함수의 미분법, 도함수의 활용, 다항함수의 적분법에서 총 18문제로 구성하였다. 설문지와 문항에 대한 오류 유형별 검사 결과는 다음과 같다.

첫째, 학생들의 설문지 응답은 개념을 이해하고 그 개념을 이용하여 문제 풀이에 적용시키는 과정에서 많은 어려움을 느끼고 있는 것으로 나타났으며, 그래프를 이용하여 문제를 해결하는 과정도 어렵게 느끼고 있다고 응답하였다.



<그림 V-1> 오류 유형별 반응 결과

<표 V-1> 오류 유형별 반응 결과

오류유형	A형 개념적오류	B형 내용적오류	C형 적용적오류	D형 생략적오류	E형 기술적오류	F형 기타 오류
합계(%)	264(47.48)	94(16.91)	35(6.29)	106(19.06)	32(5.76)	25(4.5)

둘째, 검사지의 문제 풀이 오류 분석 결과로는 A형인 잘못된 선행지식이 있거나 문제 풀이에 필요한 기본적, 필수적 지식이 결여되어 있는 개념 오류가 47.48%로 가장 많이 나타났다. 개념을 잊거나 모르는 경우도 무응답을 대신해 이 오류 유형에 포함함으로써 수치가 높게 나타났다. 학생들이 수업을 듣고 나서도 개념을 제대로 알고 있는 학생이 절반 정도로 그치는 것으로 해석할 수 있다. 이에 대한 방안으로는 수업시수의 확대 또는 교사가 수업의 도입 부분에서 전에 배운 내용을 꼼꼼히 복습해주는 방법 등이 있을 것이다.

셋째, 다수의 학생이 미적분 단원을 공부할 때 개념과 원리를 이해하기보다는 공식을 도구적으로 사용하여 문제를 해결하려고 하는 성향이 크게

나타난다. 따라서 정답은 제시하였으나 근거를 제시하지 못하는 생략 오류가 19.06%로 두 번째로 높게 나타났다. 문제 풀이 중심의 수업이 아니라 공식을 가르쳐주더라도 공식을 유도하는 과정을 정확히 보여주는 것이 중요하다. 학생들이 공식을 잊더라도 공식 유도 과정을 알고 있다면 문제를 해결할 수 있을 것이다.

넷째, 검사지의 문항 중에서 오답률이 82.76%로 가장 높은 문항 9에서 가장 많이 나타난 오류로 B형인 내용적 오류가 16.91%로 나타났다. 문항 9는 도함수 활용에서 접선의 방정식을 구하는 문제로 학생들이 주어진 점이 곡선 위의 점인지 확인하지 않고 문제를 잘 못 해석하여 오류를 범했다. 이처럼 주어진 자료를 잘 못 해석·처리하여 사용하거나 진술되지 않은 조건을 사용하는 내용 오류도 빈번히 나타났다.

다섯째, 대체로 미분법보다 적분법에서 오답률이 높게 나타났다. 학생들이 미분보다 적분을 좀 더 어려워하고 많은 오류를 범하는 것으로 제기된다.

여섯째, 일부 학생들이 특정한 함숫값이 아닌 접근을 바탕으로 한 수학적 개념인 함수의 극한을 이해하고 받아들이기 어려워하는 것으로 나타났다.

일곱째, 다수의 학생이 연속성과 미분 가능성을 조사할 때 분모가 0이 되는 값에서는 정의되지 않음의 개념을 놓치고 있었다.

여덟째, 함수의 극한, 미분법, 적분법에서 공식을 이용한 단순한 계산 문제보다는 활용 부분에서 속도와 가속도에 대한 문제인 문항 12와 문항 18의 오답률이 비교적 높게 나타났고 오류 유형도 여러 가지 형태로 나타났다. 이처럼 학생들이 활용 문제를 어렵게 느끼고 있다.

본 연구에서 파악된 문제 풀이 오류를 통해 교사가 미리 학생들이 어떠한 부분에서 어려움을 겪고 있는지 원인을 끊임없이 연구하고 충분히 파악한다면 보다 효율적인 수학교육이 이루어질 것이다.

5.2. 제언

학생들이 미적분 단원에서 어떤 어려움을 겪고 어떠한 인식을 갖고 있는지, 문제를 해결하는 과정에서 어떤 오류를 범하고 왜 범하게 되는지를 분석하고 파악하는 것은 수학을 교육하는 부분에서 정말 의미 있는 연구라고 생각한다. 본 논문의 연구 과정에서 나타난 결과로 제한적이고 부족한 점을 보완하여 후속 연구를 위해 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 H 고등학교 3학년 학생 58명을 연구 대상으로 하였는데, 연구 대상이 제한적이고 표본의 크기가 좀 더 컸더라면 결과를 더욱 일반화하기 어렵지 않았을 것 같은 아쉬움이 있다. 따라서 연구 대상으로 표본 크기를 확대해 연구를 할 필요가 있다.

둘째, 본 연구에서는 설문지와 검사지만 보고 연구자가 주관적으로 오류를 분석하고 유형을 판단했기 때문에 학생들의 오류를 범한 자세한 사고 과정은 판단할 수 없었다. 오류의 원인을 자세히 파악하기 위해서는 학생들과의 면담도 필요하다.

셋째, 본 연구의 결과로 학생들이 미적분의 개념을 어렵게 생각하고 이해하기 힘들다고 느끼고 있는 만큼 미적분 개념에 쉽게 접근할 수 있도록 교수-학습법의 끊임없는 연구와 오류를 범하는 내용들을 충분히 숙지하고 원인을 밝혀낼 필요가 있다.

참 고 문 헌

한국교원과정평가원(2020), 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8], 수학과 교육과정.

황선욱 외 8명. 2015 개정 미래엔 수학Ⅱ 교과서.

김천일(2011). 수학교육에서 오류 및 오개념의 효과적인 지도방안에 관한 연구. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

이태순(2014). 고등학교 미적분학의 효율적 지도방법에 관한 연구. 한양대학교 교육대학원 석사학위논문.

김지현(2015). 지수 · 로그방정식의 풀이과정에서 나타난 오류유형분석. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

김대환(2018). 지오지브라를 이용한 미적분Ⅰ의 효율적 지도방법에 관한 연구. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

정재욱(2010). 남녀 고등학생의 미적분 내용에 대한 인식도 조사. 영남대학교 교육대학원 석사학위논문.

김근선(2015). 고등학생의 미적분에 대한 인식 · 이해정도와 앞으로의 교육방법에 대한 연구. 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문.

최나영(2001). 미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

오혜경(2008). 고등학교 수학에서 미적분단원의 오류에 관한 연구. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

조은나(2018). 미적분에 대한 고등학생들의 인식과 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

한상일(2013). 고등학교 3학년 학생들의 극한값과 미분계수에 대한 오류 실태분석. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

홍선주(2013). 미분개념에 대한 학생들의 학습경향 및 오류분석과 지도방안 연

구. 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문.
Hendrik Radatz(1979). Error analysis in mathmatics education. Jounal for Resarch in Mathmatics Education.
Movshovitz-Hadar, Oritz & Shlomo(1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. Jounal for Research in Mathematics Education.

<부록1> 학생용 설문지

[고등학생 <수학Ⅱ>의 미적분 단원에 대한 인식 조사]

안녕하십니까? 본 조사지는 <수학Ⅱ> 미적분 단원에 대한 고등학생들의 인식을 확인하고, 파악하여 앞으로 더욱 효율적인 교육 방법을 연구하고자 하는 것으로, 조사의 결과는 공개되지 않으며 학생 여러분들의 솔직한 답변과 의견을 적어주시기 바랍니다. 감사합니다.

1. 대학수학능력 시험 수학 영역에서 공통과목인 <수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>를 제외한 자신이 선택할 선택과목은?

① <확률과 통계> ② <미적분> ③ <기하> ④ 아직 선택하지 못했다.

2. 학교 외 학원이나 인터넷 강의를 통해 미적분 단원을 예습한 적이 있습니까?

① 예 ② 아니오

3. 평상시 하루 수학을 공부하는 시간은 어느 정도 입니까?

① 1시간 미만 ② 1시간~2시간 미만 ③ 2시간~3시간 미만
④ 3시간 이상 ⑤ 전혀 하지 않는다

4. 다음 문항을 읽고 해당하는 번호에 √표 해 주십시오.

문항	질문	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
1	나는 <수학Ⅱ>의 미적분 단원에 흥미가 있다.					
2	나는 극한의 수렴과 발산 개념을 이해하고 있다.					
3	나는 미분계수 개념을 이해하고 있다.					
4	나는 부정적분과 정적분의 개념을 이해하고 있다.					
5	나는 평균 변화율과 미분계수의 기하학적인 의미와 차이를 알고 있다.					
6	나는 <수학Ⅱ> 미적분 단원의 문제를 풀 때 원리를 이해해서 푼다.					
7	나는 <수학Ⅱ> 미적분 단원의 문제를 풀 때 원리를 이해해서 풀기보다는 공식에 의존하여 푸는 편이다.					
8	미적분이 실생활 속에서 어떻게 사용되고 있는지 알고 있다.					
9	미적분은 앞으로 현대 사회 발전에 큰 영향을 끼칠 것이다.					
10	대학 진학 후에도 미적분을 더 깊게 공부하고 싶다.					
11	미적분 단원은 어렵다고 생각이 든다.					

5. <수학Ⅱ>에서 미적분 단원 수업을 들을 때, 가장 어려웠던 점은 무엇입니까?

6. 고등학교 수학 교과서 또는 수업에 대한 느낌이나 개선되어야 할 점이 있다면 무엇입니까?

<부록2> 학생용 검사지

<수학Ⅱ> 미적분 단원에 대한 고등학생 이해실태 검사지

<함수의 극한과 연속>

1. 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$의 그래프를 이용하여 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$를 조사하시오.

2. 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

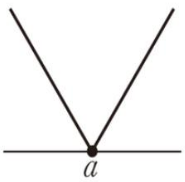
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & (x\neq 1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$$

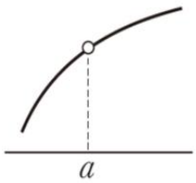
3. 다음 극한값을 구하시오.

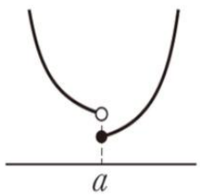
(1) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x}-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-1}$

4. 다음 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 이유를 설명하여라.

(1) 

(2) 

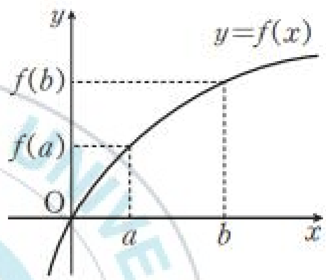
(3) 

<다항함수의 미분법>

5. 함수 $f(x)=x^2+2x+2$에 대하여 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

6. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $0<a<b$일 때, 평균변화율과 미분계수의 기하적 의미를 이용하여 다음 세 값의 대소를 비교하시오.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad f'(a),\quad f'(b)$$



7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(2)-4f(x)}{x-2}$를 $f(2)$와 $f'(2)$에 대한 식으로 나타내시오.

8. 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이시오.

<도함수의 활용>

9. 점 $(1,4)$에서 곡선 $y=-x^2+x+3$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

10. 방정식 $x^3-3x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

11. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3x$가 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

12. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각

$$x_P(t)=t^3-9t^2,\ x_Q(t)=t^3-6t^2$$

일 때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 t의 값의 범위를 구하시오.

<다항함수의 적분법>

13. 다음 부정적분을 구하시오.

$$\int \frac{1}{1+x}dx+\int \frac{x^3}{1+x}dx$$

14. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기는 $2x-4$이다. 이 곡선이 점 $(1, -2)$를 지날 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

15. 자연수 n에 대하여

$$\int_0^1 (1+2x+3x^2+\ \cdots\ +nx^{n-1})dx=2022$$

일 때, n의 값을 구하시오.

16. $\int_{2}^{x}(x-t)f(t)dt=x^3-6x^2+12x-8$을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

17. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분 할 때, 상수 k의 값은?

18. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$v(t)=3t^2+at$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)