

교육학 석사논문

수소 원자의 전자구름
가시화에 관한 연구

2007년 8월

부경대학교 교육대학원

물리교육전공

박 지 은

교육학 석사 학위 논문

수소원자의 전자구름 가시화에 관한 연구

지도 교수 김 성 부

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2007년 8월

부경대학교 교육대학원

물 리 교 육 전 공

박 지 은

박지은의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2007 년 8 월 30 일

주심 이학박사 이 종 규 (인)

위원 이학박사 김 성 부 (인)

위원 이학박사 홍 지 상 (인)

〈목 차〉

목차	i
표목차.....	ii
그림 목차.....	ii
Abstract.....	iii
I 서론.....	1
II 이론적 배경.....	3
1. 원자의 전자구조.....	3
가. 양자론	
나. 보어의 수소원자 모델	
다. 물질파	
라. 원자의 양자역학적 묘사	
2. 양자역학.....	8
가. 수소원자의 Schrödinger 방정식	
나. 양자수	
다. 전자의 확률밀도	
3. 원형막의 진동.....	21
III 실험도구 및 장치.....	24
IV 실험방법.....	27
1. 북의 중앙 지점을 진동 시켜 진동모드 만들기.....	27
2. Normal point 지점을 진동 시켜 진동 모드 만들기.....	29
V 실험 결과 및 분석.....	31
VI 결론 및 토의.....	41
참고문헌.....	43

〈표 목차〉

표 2-1. 수소원자 상태들의 기호.....	13
표 2-2. 수소 원자의 규격화 된 함수.....	16
표 2-3. 베셀 함수에서 0이 나타나는 값들.....	22

〈그림 목차〉

그림 2-1. 궤도 각운동량의 양자화.....	14
그림 2-2. 수소원자의 지름 확률밀도의 핵으로 부터의 거리에 따른 변화..	17
그림 2-3. 핵으로부터 r 과 $r+dr$ 의 거리에서 전자를 발견할 확률.....	18
그림 2-4. 수소 원자에 대한 지름 함수와 지름확률밀도.....	19
그림 2-5. 수소원자의 전자 확률 밀도 분포 사진.....	20
그림 2-6. 베셀 함수.....	22
그림 2-7. 원형 복의 진동 모드.....	23
그림 3-1~6. 실험장치	24
그림 4-1,2. 중앙지점 진동 시켜 진동모드 만들기.....	27
그림 4-3,4. Normal point지점을 진동 시켜 진동 모드 만들기.....	29
그림 5-1. 1s모드와 (0 1)모드 비교.....	31
그림 5-2. 2s모드와 (0 2) 모드 비교.....	33
그림 5-3. 2p모드와 (1 1) 모드 비교.....	35
그림 5-4. 3p모드와 (1 2)모드 비교.....	37
그림 5-5. 3d모드와 (2 1)모드 비교.....	39

Study on the visualization of the electron cloud of hydrogen atom

Ji-Eun Park

Graduate school of education
Pukyong National University

abstract

It is quantum mechanics that do to microscopic phenomenon about that body of theory that do to macroscopic phenomenon is classical dynamics. Students touch first time in physicsⅡ and chemistryⅡ that is third-year student process in high school about the basic item of quantum dynamics belonging to quantity theory of modern physics. The role of Science teacher is to help all students approach to the science more easily.

Scientific research ability is reared best though do to do activity that analyze science activity that scientist behaves and draw research urea and make students experience directly and think this routinely. That is, it can be very difficult work that teach the microscopic world to the students, who is familiar with observing and objectificate with their eyes.

PhysicsⅡ's atom model unit and ChemistryⅡ's atom models and

electronic configuration unit are depended on cramming method studying. Introduction to the quantum theory like Plank constant, wave theory, particle theory, and so on, are taught, but other nature's changes are not determined. Therefore, the students remember the modern physics as a difficult chapter. However, it is a difficulty for the college students as they learn the quantum mechanics right after the classical mechanics in their freshmen. It's something like wandering in an unfamiliar area.

Bohr's atom model can explain well about the regularity of spectrum or absorption and release of photon that was not able to do with Rutherford's atom model. However, there's following problems with Bohr's atom model. It works well with the hydrogen atom with only one electron orbit, but other atom with many electrons, their orbits and energy level cannot be explained.

Therefore, it is to be explained that there can be electrons with a possibility, rather than there's a certain orbit of electrons around the atomic nucleus. New atom model is presented with the quantum mechanics, which says that there is electron cloud around the atomic nucleus with the probability distribution of electrons rather than the orbit of electrons.

We will compare the vibration mode of a percussion instrument and the probability distribution of quantum mechanism in the purpose of easier explanation to the students about the electron cloud, the probability distribution of electrons

Students do not think about the quantum mechanics when learning the physics and natural science, and it doesn't matter if they don't know.

However, I hope that it can be helpful for the desire of knowing the true state of the nature.

I. 서론

거시적 현상을 대상으로 하는 이론 체계가 고전 역학인 것에 대하여 미시적 현상을 대상으로 하는 것은 양자역학이다. 현대 물리학의 양대 이론에 속하는 양자역학의 기초적 사항에 대하여 고등학교 3학년 과정인 물리Ⅱ와 화학Ⅱ에서 학생들이 처음 접하게 된다. 과학 교사의 임무는 모든 학생들이 과학에 더 쉽게 접근하도록 도와주는 것이다. 과학적 탐구능력은 과학자가 행하는 과학 활동을 분석하고 탐구 요소를 추출하여 학생들이 일상적으로 이를 직접 체험하고 생각하도록 하는 활동을 하게 해야 가장 잘 길러진다. 즉 눈으로 확인 되는 것을 관찰하고 객관화하는데 익숙해져 있는 학생들에게 미시적 세계를 가르친다는 것은 아주 어려운 일이 아닐 수 없다. 물리Ⅱ의 원자 모형단원과 화학Ⅱ의 원자 모형과 전자 배치 단원은 주입식 학습에 의존 된다. 고등학교 물리에서 배우는 플랑크 상수와 파동성 및 입자성 등의 양자론의 소개정도의 깊이로 배우고, 어딘가 색다른 자연의 변화를 설명하지 못하고 있다. 따라서 이러한 현대 물리 단원은 아주 어렵고 난해한 단원으로 만 기억하고 있다. 학부시절의 양자 역학은 고전 물리학을 배운 후에 새로이 배우기 시작하는 것으로 그만큼 어려운 것이 아닐 수 없다. 양자역학을 배우고 나서의 느낌은 어딘가 낯선 지역을 헤메이는 것과 마찬가지로였다.

보어(bohr)의 원자 모형은 러드퍼드(rutherford) 원자 모형으로 설명할 수 없었던 스펙트럼의 규칙성이나 광양자의 흡수 방출에 대한 설명을 잘 할 수 있었다. 그러나 보어의 원자 모형은 다음과 같은 문제점이 있다.

궤도 전자가 한 개 뿐인 수소 원자의 경우에는 훌륭히 설명 할 수 있으나 전자가 많은 원자의 경우에는 전자 하나하나의 궤도 및 에너지 준위를 정할 수 없다. 또한 전자의 위치나 운동을 물질과의 입장에서 설명하면 전자

는 어느 순간에 물질과의 표면에서 어느 지점에 있을 수 있다는 것인지 보어의 모형에서와 같이 원자 핵 주위를 회전하면서 어느 시각에 어떤 위치를 갖게 된다는 고전 역학적 사고에 문제점이 있다.

따라서, 전자가 원자핵 주위를 돌고 있는 특정한 궤도가 있기 보다는 그 궤도에 해당하는 부분에 전자가 존재하는 확률이 크다고 설명해야 한다.

전자의 특정한 궤도라는 개념 보다 전자의 확률적 분포를 나타내는 것으로 그 궤도에 해당하는 부분에 전자가 원자핵 주위에 전자구름을 만들고 있다는 양자 역학을 도입한 새로운 원자 모형이 제시되고 있다.

원형 복의 진동 모드를 통해서 일선 학교에서 이러한 전자구름 모형 즉 전자가 있을 확률에 대해서 학생들이 보다 쉽게 시각적으로 보고 이해할 수 있을까 하는 의도에서 타악기의 진동 모드와 양자 역학적 확률분포를 비교해 보기로 했다. 수소원자의 전자구름을 가시화하기 위하여 원형 복의 진동 모드를 이용하였더니 유사한 점이 많았다. 실제로 전자구름의 가시화를 위해서는 computer simulation을 통하여 할 수 있지만, 실제생활에서 가시화 장치를 제작하여 전자구름을 형태를 확인할 수 있었다. 자연계의 참 모습을 알고 싶어하는 욕구에 다가서는데 조금의 보탬이 되었으면 하는 바람을 가져본다.

II. 이론적 배경

1. 원자의 전자 구조

가. 양자론

양자론에서는 물체가 에너지를 얻거나 잃는 방식에 많은 관심을 보인다. 프랑크는 원자와 같이 아주 작은 물체가 에너지를 얻거나 잃는 방식은 보통 크기의 물체들이 에너지를 얻거나 잃는 방식과는 다르다고 하였다. 프랑크 양자이론의 골자는 에너지는 모래알과 같은 최소의 에너지 덩어리로서 얻거나 잃는다는 것이다. 프랑크는 에너지를 얻거나 잃음에서 가장 작은 기본 단위를 양자라고 명명하였다.

우리가 살고 체험하는 세계이든지 혹은 미시적 세계이든지 에너지를 얻거나 잃는 방식에는 차이가 없으나, 원자 크기와 같은 물체에서는 양자제한이 존재함을 알 수 있다. 거시적 세계에 살고 있는 인간들은, 물체의 성질을 원자 크기의 수준에서 관찰할 수 있게 될 때까지 양자 제한이 존재함을 알지 못하였다. 프랑크는 물질에 의해서 방출 또는 흡수되는 복사에너지를 관찰하여 양자제한이 존재함을 밝혔으며, 원자 수준에서 흡수 또는 방출되는 에너지의 양은 복사에너지 진동수(ν)의 정수배가 되어야 함을 밝혔다. 방출 또는 흡수되는 에너지의 양을 ΔE 라고 하면 프랑크의 이론은 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta E = h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots \quad (1-1)$$

여기서 h 는 프랑크 상수이며 6.63×10^{-34} Joule second이다.

나. 보어의 수소원자 모델

수소원자에 관한 보어 모델은 그 당시에 비교적 새로운 두 가지의 중요한 실험에 바탕을 두고 있다. 하나는 원자핵의 성질을 규명한 러드포드의 실험이며 또 하나는 복사에너지는 광양자라고 불리는 불연속적인 에너지 다발의 흐름이라고 규명한 아인슈타인의 작업이다. 원자내의 전자들의 에너지는 양자화 되어있다고 하는 개념에 대해서 논의해보자.

보어모델은 일련의 가설들로 이루어져 있으며 다음과 같다.

첫째 수소원자 내의 전자는 원 궤도를 그리며 중심에 위치한 양성자 주위를 돈다. 그러나 전자는 어떤 허용된 에너지만 가질 수 있으며, 그 에너지 값에 상응하는 반경의 궤도에만 머물 수 있다. 허용된 궤도 내의 전자는 허용된 에너지 상태에 있다고 말한다.

둘째 복사에너지가 가해지지 않았을 경우 원자내의 전자는 허용된 에너지 상태에 머문다. 그러나 복사에너지가 가해지면 원자들은 에너지를 흡수하며, 이 때 전자들은 어떤 허용된 에너지 상태에서 다른 허용된 에너지 상태로 이동한다. 흡수된 복사 에너지의 진동수는 두 허용된 에너지 상태 사이의 차이와 정확히 같다.

전자 에너지의 계산에 보어가 양자이론을 어떻게 적용하였는지 관심을 가지기 보다는 허용된 에너지를 어떻게 계산하였는지를 아는 것이 중요하다. 보어모델에서는 허용된 궤도를 1에서 무한 수까지의 정수로서 표시하며 주양자수 n 이라고 부른다. 어떤 주어진 에너지 상태에 있는 전자의 궤도 반경은 n^2 에 비례하며

$$R = n^2 (5.30 \times 10^{-11} m) \quad (1-2)$$

n 이 크면 클수록 전자는 핵에서 부터 더욱 멀어짐을 알 수 있다. 또한 전자의 에너지는 전자가 점유하고 있는 궤도에 의존한다.

$$E_n = -R_H \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (1-3)$$

R_H 는 Rydberg상수라고 하며 그 값은 $2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$ 이다.

어떤 궤도 내에 존재하는 전자의 에너지는 기준 상태에 비해 항상 음이다. 가장 낮은 에너지 혹은 가장 안정된 상태, $n=1$ 는 바닥상태라 하며 원자 내의 전자가 $n=2$ 혹은 그 이상의 높은 에너지 궤도에 있으면 들뜬 상태에 있다고 한다.

수소 원자의 보어 모델을 이용하면 물질에서 관찰되는 선 스펙트럼을 정량적으로 설명할 수 있다. 선 스펙트럼들에서 흡수와 방출은 한 궤도에서 다른 궤도로의 전자 전이이다.

보어 모델에서 가장 중요한 개념은 원자 내의 전자들의 에너지는 양자화되어 있다는 것이다. 이러한 기본적인 개념은 오늘날의 원자모델에서도 잘 나타나 있다. 보어 모델은 한 개의 전자를 지닌 원자나 이온의 설명에는 적당하나 한개 이상의 전자를 지닌 원자나 이온의 스펙트럼을 정확히 설명하는 데에는 부적당 한 것으로 밝혀졌다. 그리하여 보어모델은 원자를 해석하는 새로운 시각인 양자역학 혹은 파동 역학이라고 불리는 새로운 이론으로 대체되었다.

다. 물질파

프랑스 과학자 루이스 드 브로이(Louis De broglie)는 수소원자 핵 주위의 궤도에 있는 전자는 특정한 파장을 지닌 파동으로 행동 할 수 있다고 추측하였다. 핵 주위에 원을 그리며 도는 전자는 어떤 특정한 파장을 지니며, 이 때 전자 혹은 어떤 다른 입자가 지니는 특정한 파장은 그것의 질량 m 그리고 속도 v 에 의존한다고 제안 하였다.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (1-4)$$

여기서 mv 는 물체에 대한 운동량이다. 드브로이는 물질의 파동성을 설명하기 위하여 처음으로 물질파란 개념을 이용하였다.

드브로이 가설에 의하면 질량 m 과 속도 v 를 지닌 물체는 물질파를 보일 것이다. 식 (1-4)에 의하면 보통 크기의 물체는 파장을 관찰 할 수 없을 정도로 작으나, 전자와 같이 질량이 아주 작은 물체의 경우에는 파장을 관찰할 수 있음을 알 수 있다.

입자가 파의 성질을 지닌다면 입자의 위치를 결정하는 것은 가능한가? 어떤 점에서든지 파의 진폭과 세기를 정의하는 것은 가능하다. 그러나 파는 공간의 모든 영역에 걸쳐 존재하기 때문에 어느 누구도 파의 위치를 정확히 말할 수 없으며, 입자와 달리 파의 위치를 정확히 결정 할 수 없다.

독일의 물리학자 베르너 하이젠베르크(Werner Heisenberg)는 입자의 위치와 운동량을 정확히 결정하는데 기본적인 제한이 있음을 발표하였으며, 이러한 제한 요소는 전자와 비슷한 크기의 물질을 취급하는 경우에만 중요하다고 하였다. 그리고 그는 이 원리를 불확정성의 원리라고 불렀다. 원자 내의 전자에 대해 이 원리를 적용하면 전자의 정확한 운동량과 공간 속의 위치 둘 다를 아는 것은 불가능하며, 전자가 핵 주위의 궤도를 돈다는 생

각이 옳지 못함을 알 수 있다.

드 브로이의 가정과 하이젠베르크의 불확정성 원리는 원자구조에 대해 좀 더 새로운 이론을 제공하였다. 이 새로운 접근에 의하면 전자의 위치와 운동량을 결정하려는 시도는 더 이상 무의미하며, 전자는 파로서 묘사되어야 함을 알 수 있다.

라. 원자의 양자역학적 묘사

양자역학을 이용하면 전자의 파동성을 수학적으로 나타낼 수 있으며, 핵에 대한 전자의 인력 그리고 전자의 운동에너지 또한 설명할 수 있다. 전자의 파동성을 의미하는 수학식을 풀이하면 가능한 많은 해를 얻게 되며 이 식에 어떤 경계조건들을 주고 풀이 하면 물리적으로 의미 있는 해를 얻을 수 있다. 여기서 얻어진 결과들은 전자의 허용된 에너지 상태를 묘사하는 일련의 해들로서 항상 기호 ψ 로 나타내며 파동함수라고 부른다.

파동함수는 어떤 허용된 에너지 상태 속에 있는 전자의 공간내의 위치에 관한 정보를 제공한다. 여기서 허용된 에너지 상태란 보어모델이 의미하는 것과 같다. 보어모델에 의하면 전자는 핵 주위의 어떤 특별한 원 궤도 반경 내에 있다. 그러나 수소에 대한 양자역학적 모델로서 전자의 위치를 묘사하는 것은 그렇게 간단하지 않다. 불확정성 원리에 의하면 전자의 운동량을 아주 정확하게 안다면, 전자의 위치는 불확실해 진다. 그래서 개개의 전자들에 대한 핵 주위에서 전자의 위치를 결정하는 것은 불가능하며 오히려 통계적인 지식으로 만족해야만 한다. 양자역학적 모델에서는 전자의 위치는 어떤 주어진 순간에 어떤 공간의 영역에서 전자를 발견할 확률로써 표현한다. 공간 내에 어떤 주어진 점에서 파동함수의 제곱(ψ^2)은 전자가

그 위치에서 발견될 확률을 의미한다.

전자밀도는 확률을 나타내는 다른 방법으로 전자밀도가 큰 영역은 전자를 발견할 확률이 큰 영역이라고 할 수 있다.

2. 양자역학

가. 수소 원자의 *Schrödinger* 파동방정식

전자와 양성자가 각각 한 개씩 들어 있는 가장 간단한 원자인 수소 원자를 양자역학적으로 다루어 보자. 이것은 삼차원계이며 전자의 파동함수 ψ 는 x, y, z 좌표에 의존하므로 슈뢰딩거 파동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (2-1)$$

여기서 퍼텐셜 에너지(V)는 전자와 핵사이의 쿨롱인력으로 나타나며 다음과 같다.

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (2-2)$$

인력은 구형 대칭성을 가지며 식 1을 구형 극좌표를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (2-3)$$

식 2-2를 이용하여 퍼텐셜 에너지 V 를 치환하고 전체의 방정식에 $r^2 \sin^2 \theta$ 를 곱하면 수소원자에 있는 전자의 파동함수에 대한 편미분 방정식이 된다.

$$\sin^2\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{2mr^2 \sin^2\theta}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) \Psi = 0$$

(2-4)

정확한 전자의 행동을 알기 위해서는 식 2-4을 풀어서 Ψ 를 구해야 한다.
이 식을 풀어보면 수소원자내의 전자를 기술하기 위해서는 세 개의 양자수가 필요함을 알게 된다.

주양자수(quantum number) n 은 파동함수의 크기와 전자의 에너지를 결정한다. 궤도양자수(orbital quantum number) l 은 핵 주위를 도는 전자의 각운동량의 크기를 결정한다. 그리고, 자기양자수(magnetic quantum number) m_l 은 각운동량의 방향을 결정한다. 수소원자에 있는 전자를 기술하는데 이 양자수가 어떻게 사용되는지를 살펴보자.

수소원자의 파동함수 $\Psi(r, \theta, \phi)$ 가 세 개의 서로 다른 곱의 형태를 갖는다고 하고 다음과 같이 가정하고 파동함수 문제를 계속 풀어보자.

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (2-5)$$

R, Θ, Φ 는 각각 r, θ, ϕ 만의 함수이므로 편미분 함수에서 전미분 함수로 바꾸면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \Theta\Phi \frac{\partial R}{\partial r} = \Theta\Phi \frac{dR}{dr} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= R\Phi \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = R\Phi \frac{d\Theta}{d\theta} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} &= R\Theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = R\Theta \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \end{aligned}$$

수소원자에 대한 schrödinger 방정식에서 Ψ 를 $R\Theta\Phi$ 로 치환하고, 전체 식을 $R\Theta\Phi$ 로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\sin^2\theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) = 0 \quad (2-6)$$

2-6식의 세 번째 항은 방위각 ϕ 만의 함수이며, 반면에 나머지 항들은 r, θ 만의 함수이다. 따라서 2-6식을 다음과 같이 바꾸어 쓰자.

$$\frac{\sin^2\theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{2mr^2\sin^2\theta}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \quad (2-7)$$

등호 양변의 함수들은 각각 서로 다른 변수에 대한 함수들이므로 이 방정식은 양변이 모두 같은 상수 값을 가질 때만 성립한다.

이 상수를 m_l^2 이라고 놓으면 ϕ 에 대한 미분 방정식은 다음과 같다.

$$- \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m_l^2 \quad (2-8)$$

다음 m_l^2 을 식 2-7의 오른쪽에 대입하고 전체를 $\sin^2\theta$ 로 나누고 다시 고쳐 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) = \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \quad (2-9)$$

2-9식에서 양변은 각각 서로 다른 변수에 대한 함수이므로, 양변은 같은 상수 값을 가져야 한다. 다시 이 상수를 $l(l+1)$ 이라 둔다.

$$\frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (2-10)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) = l(l+1) \quad (2-11)$$

Φ, Θ, R 에 대한 식을 정리하여 수소원자에 대한 schrödinger 방정식을 단순

화 시키면 다음과 같다.

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m_l^2\Phi = 0 \quad (2-12)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0 \quad (2-13)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (2-14)$$

나. 양자수

2-12식의 방정식의 결과는 다음과 같다

$$\Phi(\phi) = Ae^{im_l\phi} \quad (2-15)$$

A 는 적분상수이고 파동 함수는 주어진 공간의 한 점에서는 하나의 값을 가져야 하므로 $\Phi(\phi) = \Phi(\phi+2\pi)$ 이어야 한다.

$Ae^{im_l\phi} = Ae^{im_l(\phi+2\pi)}$ 이다. m_l 은 정수일 때만 가능하다.

$\Theta(\theta)$ 에 관한 미분 방정식 식 (2-13)은 상수 l 이 m_l 의 절대값 $|m_l|$ 보다 크거나 같은 정수인 경우에만 풀 수 있다.

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

수소 원자의 파동함수 Ψ 의 반지름 부분인 $R(r)$ 에 대한 방정식 2-14의 해는 어떤 조건아래에서만 구할 수 있다. 이 조건은 E 가 양수이거나 음의 값들 중에 하나를 가져야 한다는 것이다.

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2-16)$$

2-14식을 풀기 위해 만족시켜야 하는 또 하나의 조건은 주양자수로 알려진

n 이 $l+1$ 보다 크거나 같아야 한다는 것이다.

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

따라서 세 개의 양자수 n, l, m 의 가능한 값들은 다음과 같다.

$$\text{주 양자수} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{궤도 양자수} \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{자기 양자수} \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

(1)주양자수

수소원자에 대한 양자역학적 이론에서도 전자의 에너지는 일정하다. 전자 에너지는 임의의 양의 값도 가질 수 있다. 그러나 음의 값인 경우는 $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ 에 의해 결정되는 값들만을 가질 수 있다. 그러므로 수소 원자의 전자 에너지의 양자화는 주양자수 n 에 의해 기술 된다.

(2)궤도 양자수

전자의 운동에너지는 핵에서 멀어지고 핵에 가까워지는 운동에 의한 K_{radial} 과 핵 주위를 도는 운동에 의한 $K_{orbital}$ 의 두 부분을 갖는다. 전자의 퍼텐셜 에너지는 V 는 전기적 에너지이다.

따라서 전자의 전체 에너지는

$$\begin{aligned} E &= K_{radial} + K_{orbital} + V \\ &= K_{radial} + K_{orbital} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

이다. 이 식을 2-14식의 E 대신에 대입하고 고쳐 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[K_{radial} + K_{orbital} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R = 0 \quad (2-17)$$

2-17식에서 괄호 안에 있는 마지막 두 항이 서로 상쇄된다면 우리가 필요한 지름 벡터 r 만의 함수로 표시된 $R(r)$ 에 대한 미분 방정식을 얻게 된다.

$$K_{\text{orbital}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (2-18)$$

또한 $K_{\text{orbital}} = \frac{L^2}{2mr^2}$ 이므로 식 2-18은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{L^2}{2mr^2} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

이다. 즉, 전자의 각 운동량은 아래와 같이 표시된다.

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (2-19)$$

궤도 양자수 $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 만을 가지므로 특정한 각운동량만을 가질 수 있다. 전체에너지처럼 각운동량도 보존되고 양자화 되어 있다. 또한 $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 가 각운동량의 기본 단위가 됨을 알 수 있다.

전자의 각운동량 상태는 관습적으로 다음과 같이 문자로 나타낼 수 있다.

$$l = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ s & p & d & f & g & h & i & \dots \end{matrix}$$

	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$n=1$	1s					
$n=2$	2s	2p				
$n=3$	3s	3p	3d			
$n=4$	4s	4p	4d	4f		
$n=5$	5s	5p	5d	5f	5g	
$n=6$	6s	6p	6d	6f	6g	6h

(표 2-1) 수소원자 상태들의 기호

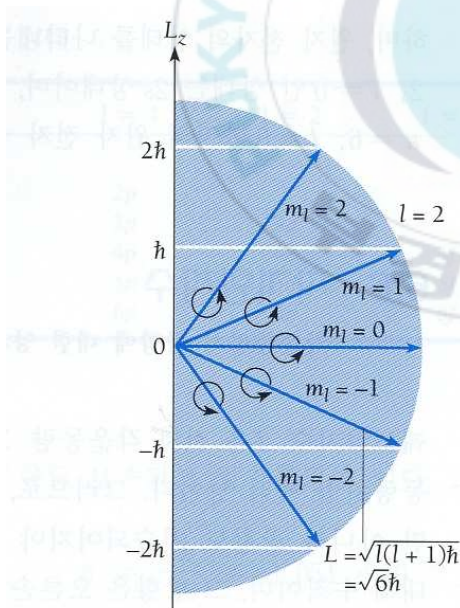
(3) 자기 양자수

궤도 양자수 l 은 전자의 각운동량 L 의 크기를 결정한다. 각 운동량을 완전하게 기술하려면 벡터로 표시해야한다.

수소 원자가 공간에서 방향성을 가진다는 것은 핵 주위를 도는 전자는 미세한 전류 고리이며, 이와 같은 미세한 전류 고리는 자기 쌍극자가 만드는 것과 같은 자기장을 만든다. 그러므로 원자 내의 각운동량을 갖는 전자는 외부 자기장과 상호 작용 할 수 있다. 자기 양자수 m_l 은 이 외부 자기장 방향에 대한 L 의 성분을 결정함으로써 L 의 방향을 나타낸다. 이 현상을 공간의 양자화라고 하기도 한다.

$$L_z = m_l \hbar \quad (2-20)$$

수소 원자의 궤도 각운동량에 대한 공간 양자화는 그림에 나타나 있다.



(그림 2-1) 궤도 각운동량의 양자화

다. 전자의 확률 밀도

보어 모델에서의 수소원자는 전자가 핵 주위의 원 궤도를 도는 것으로 묘사된다. 전자는 항상 핵으로부터 거리 $r = n^2 a_0$ 이고 방위각은 시간에 따라 변하고 적도면에서 발견된다는 것을 알 수 있다. 양자 이론은 수소원자에 관한 보어 모델의 단순한 예측을 두 가지 면에서 수정시켜 준다.

첫째 전자의 파동적 성질에 의해서 나타나는 부정확성에 의해 여러 위치에서 전자를 찾을 수 있는 상대적인 확률만이 주어진다.

둘째, 확률밀도는 시간에 부관하고 위치에 따라서 상당히 변할 수 있으므로 전자가 핵 주위를 돈다는 고전적인 생각은 버려야한다.

확률밀도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|\Psi|^2 = |R|^2 |\Theta|^2 |\Phi|^2 \quad (2-23)$$

(1) 방위 확률 밀도

$\Phi(\phi) = A e^{im_l \phi}$ 이므로 방위 확률 밀도 $|\Phi|^2$ 은 다음과 같다.

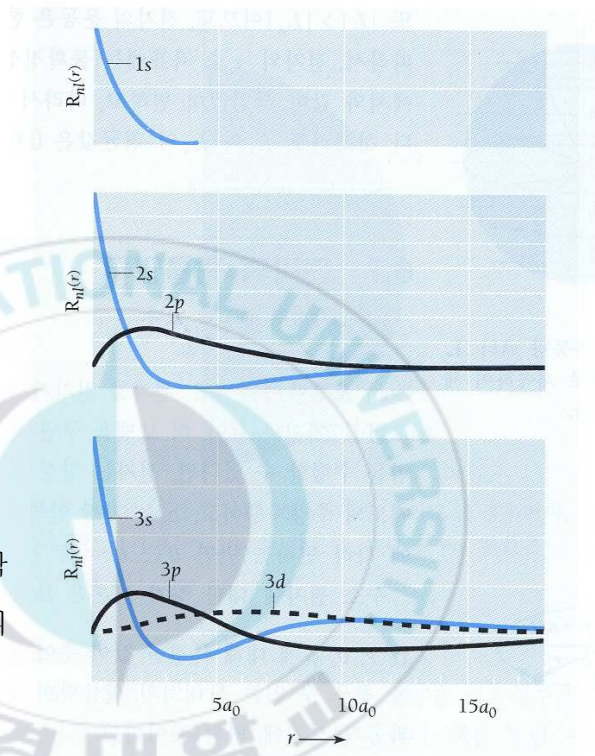
$|\Phi|^2 = \Phi^* \Phi = A^2 e^{-im_l \phi} e^{im_l \phi} = A^2 e^0 = A^2$ 이다. 따라서 어떤 특정한 방위각 ϕ 에서 전자를 찾을 확률은 상수로서 ϕ 와는 무관하다. 전자가 어떤 양자 상태에 있더라도 전자의 확률 밀도는 Z축에 대칭이며, 전자는 어떤 각에서나 똑같은 확률로 발견된다.

n	ℓ	m_ℓ	$R(r)$	$\Theta(\theta)$	$\Phi(\phi)$
1	0	0	$\frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}} (2 - \frac{r}{a_0}) e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	± 1	$\frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$
3	0	0	$\frac{2}{81\sqrt{3}a_0^{3/2}} (27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}) e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	1	0	$\frac{4}{81\sqrt{6}a_0^{3/2}} (6 - \frac{r}{a_0}) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{6}}{2} \cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	1	± 1	$\frac{4}{81\sqrt{6}a_0^{3/2}} (6 - \frac{r}{a_0}) \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$
3	2	0	$\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{10}}{4} (3\cos^2\theta - 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	2	± 1	$\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{15}}{2} \sin\theta \cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$
3	2	± 2	$\frac{4}{81\sqrt{30}a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{15}}{4} \sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\phi}$

(표 2-2) 수소 원자의 규격화 된 함수 ($a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^4 = 5.3 \times 10^{-11}\text{m}$)

(2) 지름 확률 밀도

파동함수의 지름함수 R 은 r 에 따라 변화할 뿐만 아니라, 양자수 n 과 l 의 조합에 따라서도 달라진다. 모든 s 상태에 대해 R 은 분명히 $r=0$ (핵)에서 최대이다.



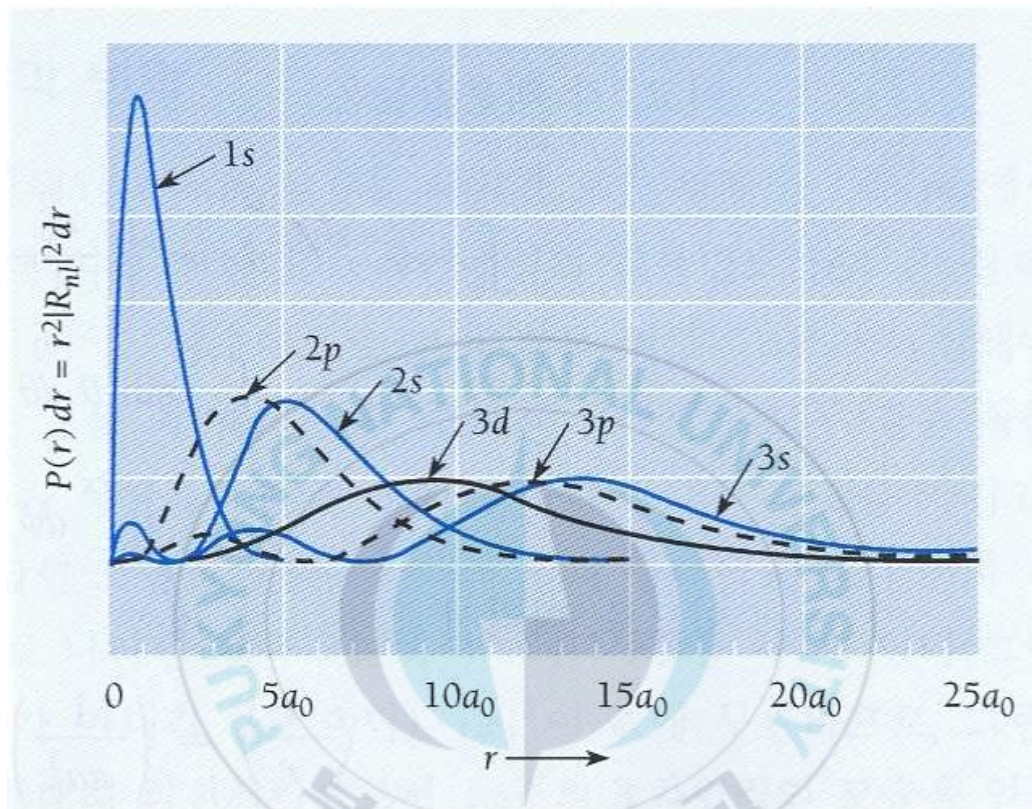
(그림2-2) 수소원자의 지름 확률밀도의 핵으로 부터의 거리에 따른 변화

(3) 전자를 발견할 확률

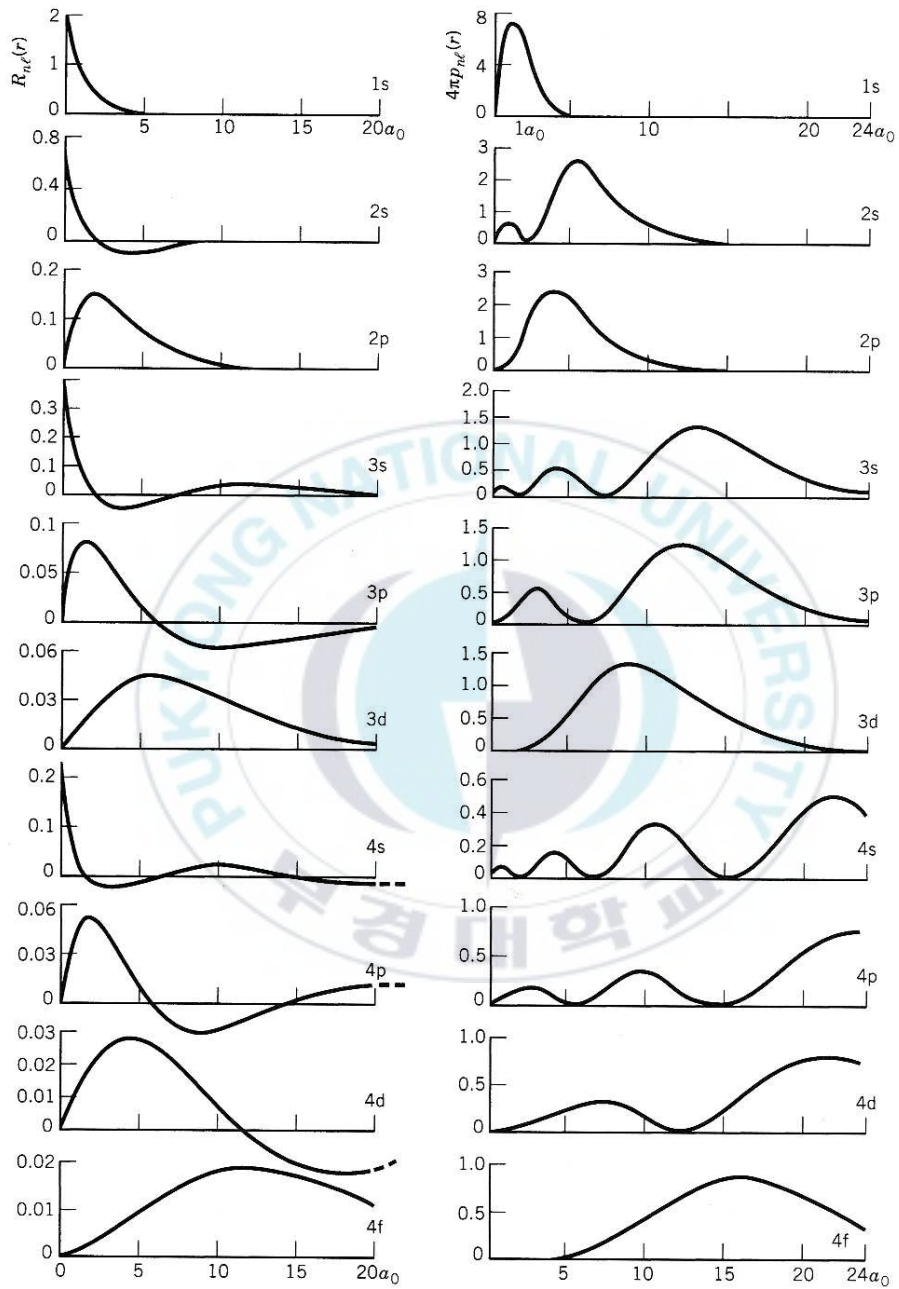
한 점 r, θ, ϕ 에서 전자의 확률 밀도는 그 점에서의 $|\Psi|^2$ 에 비례하며, 미소 체적 요소 dV 에서 전자를 찾을 확률은 $|\Psi|^2 dV$ 이다.

구면 극 좌표계에서 $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ 이므로 반지름 r 과 $r+dr$ 사이의 구각 내에서 전자를 발견할 확률은

$$\begin{aligned} P_{nl}(r)dr &= r^2 |R_{nl}|^2 dr \int_0^\pi |\Theta|^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\phi \\ &= r^2 |R_{nl}|^2 dr \end{aligned} \quad (2-24)$$

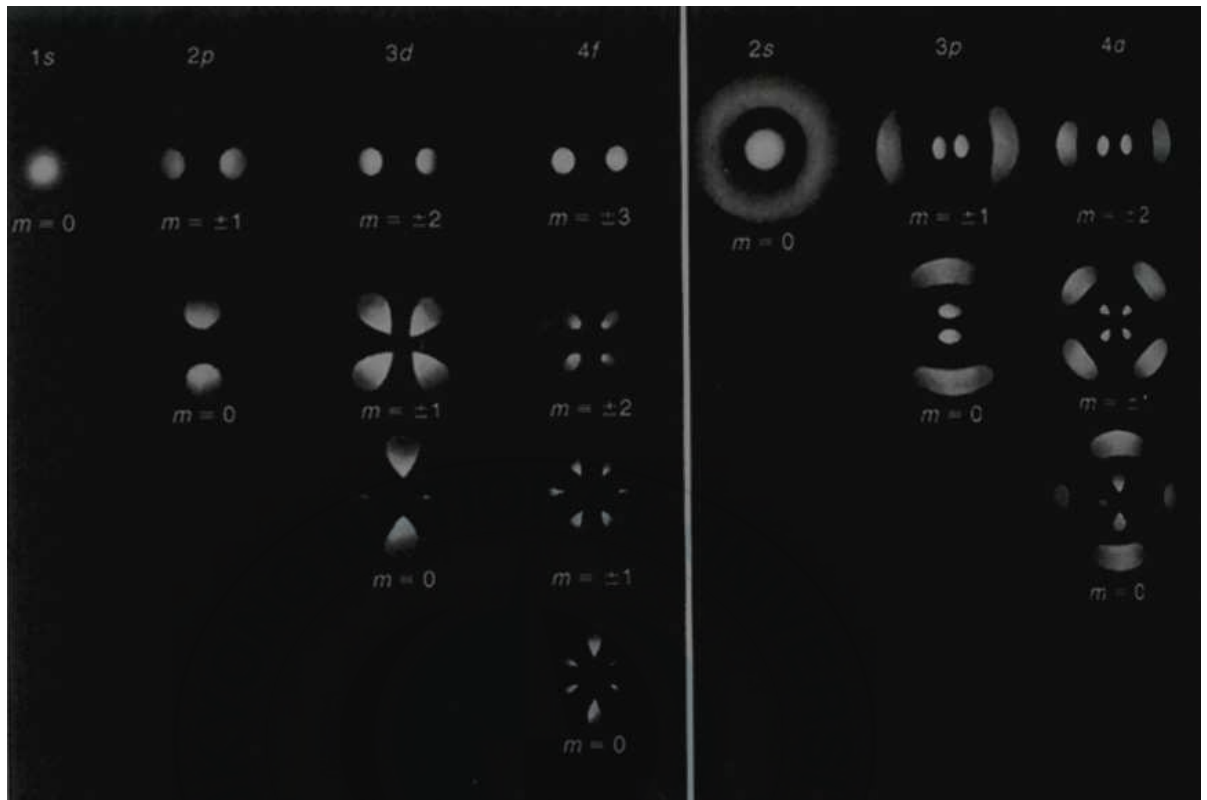


(그림 2-3) 핵으로부터 r 과 $r+dr$ 의 거리에서 전자를 발견할 확률



(그림 2-4) 수소 원자에 대한 지름 함수 $R_{n\ell}(r)$ 과 지름 확률밀도 $P_{n\ell}(r)$

$$(a_0 = 0.053\text{nm})$$



(그림2-5) 수소원자의 전자 확률 밀도 분포 사진

3. 원형 막의 진동

반지름 $r=a$ 로 고정된 원통 좌표계를 이용하여 헬름홀츠 방정식으로 나타내보면,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k^2 \psi = 0 \quad (3-1)$$

여기서 진동 막의 중심이 원점이 되도록 극좌표를 설정하여 이 때의 변수 r, θ 로 변수 분리하면

$\psi = R(r)\Theta(\theta)$ 와같이 나타낼 수 있다. 경계조건에서 $R(a)=0$ 이고 Φ 는 θ 의 부드러운 면서도 연속된 함수임에 틀림없다.

$$\Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Theta}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 R\Theta = 0 \quad (3-2)$$

방정식에 $\frac{r^2}{R\Theta}$ 을 곱하고 정리하면

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (3-3)$$

왼쪽 항을 상수 m^2 로 놓으면

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -m^2 \Theta \quad (3-4)$$

위의 식은 조화 해를 가지므로

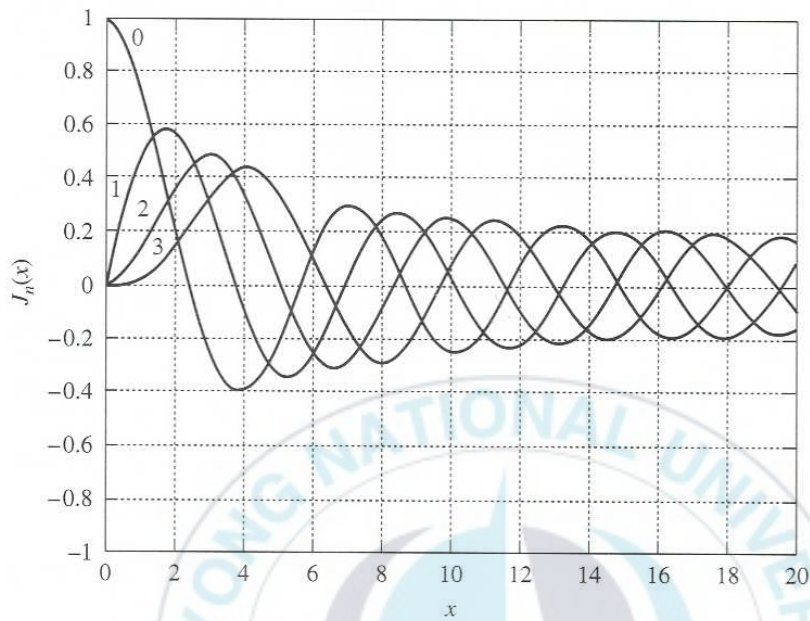
$$\Theta(\theta) = \cos(m\theta + \gamma_m) \quad (3-5)$$

5식은 베셀 (bessel) 방정식이 되고

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (3-6)$$

그해는 아래와 같이 제1종 베셀 함수와 제 2종 베셀 함수의 합으로 표현이 가능하다.

$$R(r) = A J_m(kr) + B Y_m(kr) \quad (3-7)$$



(그림 2-6) 베셀 함수

0 이 되는 수	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178
	$J_0'(x)$	$J_1'(x)$	$J_2'(x)$	$J_3'(x)$		
1	3.8318	1.8412	3.0542	4.2012		
2	7.0516	5.3314	6.7061	8.0152		
3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459		

주의 : $J_0'(x) = -J_1(x)$ (표 2-3) 베셀 함수에서 0이 나타나는 값들

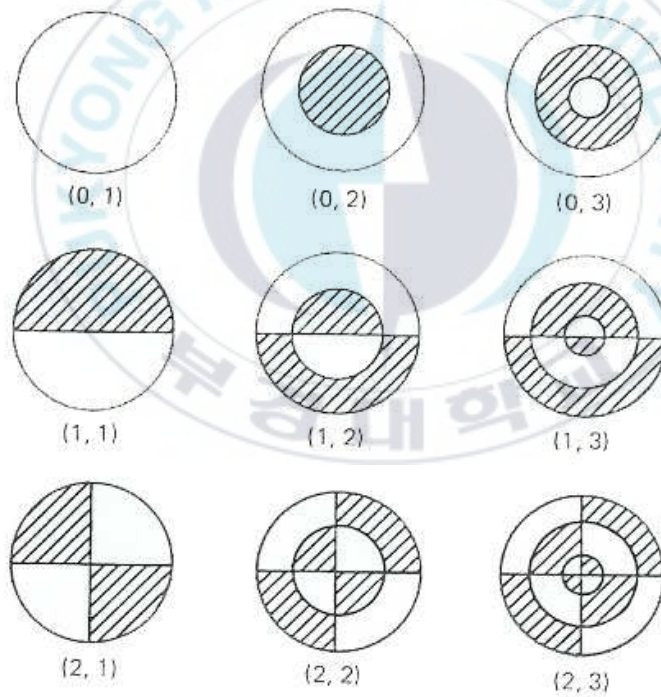
그러나 북의 중앙에서는 유한 변위를 가져야 하고, $r=0$ 에서 무한대로 가는 2종 베셀 함수를 0으로 하기 위해 계수 B 는 0이어야 한다. 따라서 파동 함수는 다음과 같이 표시 가능하다. 따라서

$$R(r) = A J_m(kr) \quad (3-8)$$

따라서 파동 함수는 다음과 같이 표시가 가능하다.

$$Y_{mn}(r, \theta, t) = A_{mn} J_m(k_{mn}r) \cos(m\theta + \gamma_{mn}) e^{i\omega_{mn}t}, k_{mn}a = j_{mn} \quad (3-9)$$

$$f_{mn} = j_{mn} \frac{c}{2\pi a}$$



(그림 2-7) 원형 북의 진동 모드

Ⅲ. 실험도구 및 장치

1. 진동 모드 만들기 실험

가. 원형 북



(그림 3-1)

나. 원형 북 받침대



(그림 3-2)

다. 진동발생기(*Digital Function Generator - Amplifier*)



(그림 3-3)

라. 역학적 진동기(*Mechanical Vibrator*)

Digital generator 에 의해 나온 진동수 및 진폭에 맞게 진동함



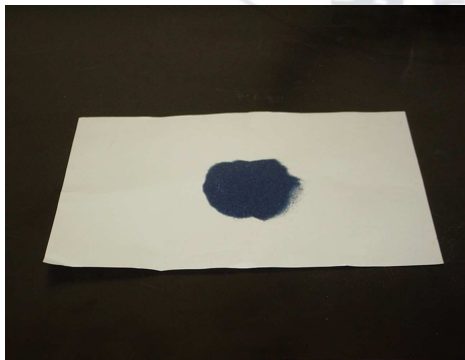
(그림 3-4)

마. 수평계



(그림 3-5)

바. 모래가루

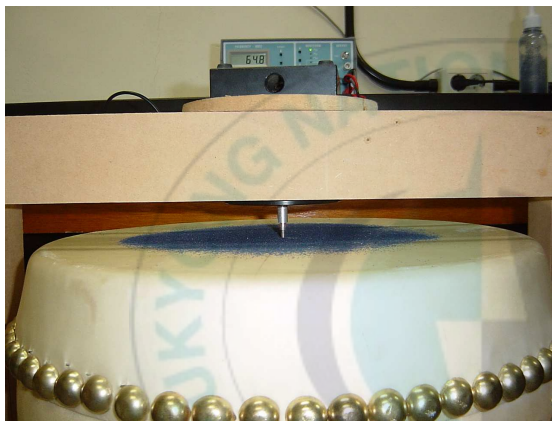


(그림 3-6)

IV. 실험 방법

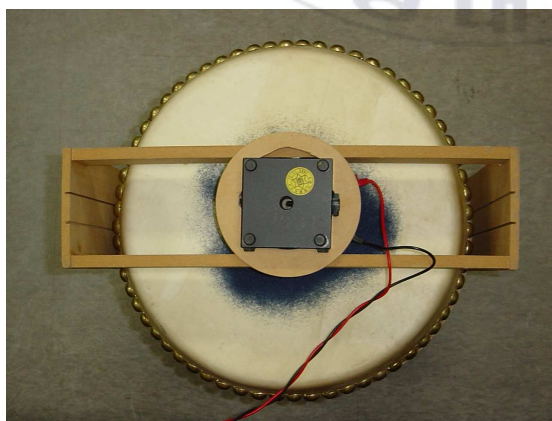
1. 북의 중앙 지점을 진동 시켜 진동모드 만들기

가. 옆에서 본 모습 사진



(그림 4-1)

나. 위에서 본 모습 사진



(그림 4-2)

북에 모래가루를 적당히 뿌리고 원형 북 받침대에 고정 시킨다. 역학적 진동기를 뒤집어 진동지점을 표시해 둔 북의 중앙에 지점에 오도록 위치시키고 진동 발생기와 역학적 진동기를 연결시킨다. 역학적 진동기가 진동지점에 너무 맞닿거나 떨어지지 않도록 주의하여 높이를 조절한다. 역학적 진동 발생기의 진동수 조절기와 진폭 조절기를 조금씩 움직인다. 모래가루의 움직임이 관찰 될 때 알맞은 진동수 이므로 진동수를 고정시키고 진동 모드 (0 1)이 형성되어 더 이상 모래가 움직이지 않을 때 진폭 조절기를 0 으로 하여 진동을 멈춘다. 같은 방법으로 (0 2) (0 3) 진동모드를 만들어보았다.



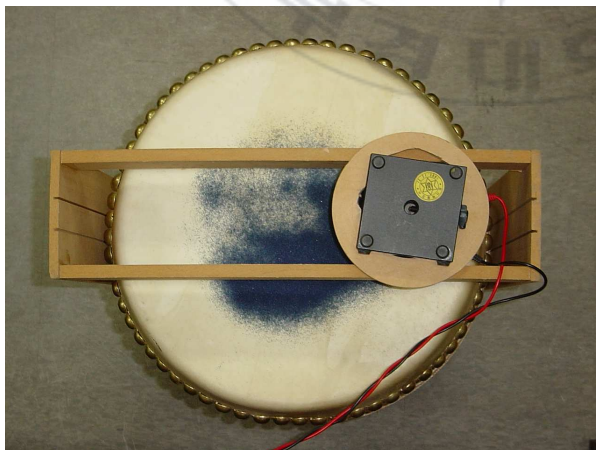
2. *Normal point* 지점을 진동 시켜 진동 모드 만들기

가. 옆에서 본 모습



(그림 4-3)

나. 위에서 본 모습



(그림 4-4)

Normal point (가장자리에서 중심까지의 1/4 지점)을 원형 북의 표면에 표시를 해둔다. 그림과 같이 역학적 진동기를 뒤집어 진동지점을 북의 normal point 지점에 오도록 위치시킨다. 진동발생기와 역학적 진동기를 연결시키고 진동발생기의 진동수 값을 변화시키면서 모래의 움직임을 관찰한다. 모래가 이동하여 (1 1)모드가 형성되면 진폭조절기를 조절하여 모드를 만들어 보았다. 계속하여 (1 2), (1 3), (2 1) 모드를 만들어 보았다.



V. 실험결과 및 분석

1. 수소원자의 전자구름과 원형 북의 진동모드 비교

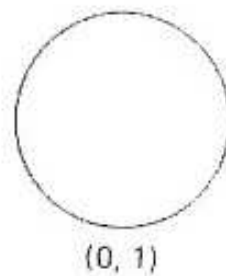
가. $1S - (0\ 1)$



(그림 5-1.1)



(그림5-1.2)



(그림 5-1.3)

원형 북(0 1)모드 진동 시 북의 가운데 부분은 진동함으로 모래가루가 모이지 않고 원형 북의 가장자리 부분은 진동하지 않는 부분이므로 모래가루가 모였다. 이것은 수소원자의 전자구름 1s 모드에서 가운데 부분에 전자가 존재할 확률이 큰 것과 유사하게 비교 될 수 있다.

원형 북 진동은 베셀 함수 그래프에서 진동하지 않는 점, 즉 마디부분과 진동하는 부분을 확인할 수 있다. 그림 3-1의 베셀 함수 그래프에서 1종 0차 베셀 함수 그래프인 J_0 에서 첫 번째 0이 되는 지점이 원형 북 진동에서 마디 부분에 해당한다. 표 3-1에 0이 되는 지점을 표로 나타내었다.

수소원자의 전자구름 사진은 표 2-3의 수소원자 대한 지름 함수 그래프에서 1s 그래프를 통해 확인 할 수 있다. 이 때 베셀 함수 그래프와 수소원자에 대한 지름 함수 그래프에서 그래프 모양의 유사성을 발견 할 수 있으며 수소원자에서 전자의 확률밀도가 큰 곳이 원형 북 진동에서 진동이 크게 일어나는 곳과 유사성을 보인다.

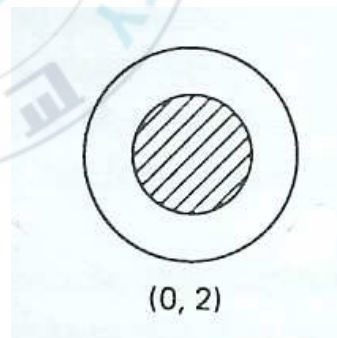
나. $2S - (0\ 2)$



(그림 5-2.1)



(그림 5-2.2)



(그림 5-2.3)

원형 북 (0 2) 모드 진동 시 진동 부분, 마디 부분, 진동 부분, 마디부분으로 진동 하는 부분이 마디를 경계로 나타났다. 진동하지 않는 마디 부분에 모래가루가 모였다. 이것은 수소 원자의 전자구름 2s모드와 유사하게 나타났다.

그림 3-1의 베셀 함수 그래프에서 1종 0차 베셀 함수 그래프인 J_0 에서 첫 번째 0이 되는 지점이 원형 북 진동에서 첫 번째 마디 부분에 해당하며 두 번째 0이 되는 지점이 두 번째 마디에 해당 한다. 표 3-1에 0이 되는 지점을 표로 나타내었다.

수소원자의 전자구름 사진은 그림 2-9의 수소원자 대한 지름 함수 그래프에서 2s 그래프를 통해 확인 할 수 있다. 이 때 베셀 함수 그래프와 수소 원자에 대한 지름 함수 그래프에서 그래프 모양의 유사성을 발견 할 수 있었다.

그림 5-2.1의 수소원자의 전자구름 사진과 그림5-2.2 북 진동 모드를 비교를 하면 수소원자의 가운데 전자구름은 북의 중심부분, 즉 진동하여 모래가루가 없는 부분이다. 또한 수소원자의 두 번째 전자구름은 북 진동에서 두 번째 진동하여 모래 가루가 모여 있지 않는 넓은 부분에 해당한다.

수소원자에서 전자의 확률 밀도가 큰 곳이 원형 북 진동에서 진동이 크게 일어나는 곳과 일치하고 있다.

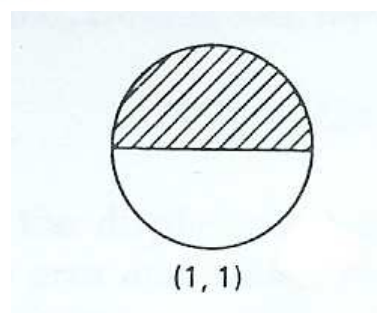
다. $2P - (1\ 1)$



(그림 5-3.1)



(그림 5-3.2)



(그림 5-3.3)

원형 북 (1 1) 모드 진동 시 진동 부분과 마디 부분이 지름 선을 중심으로 대칭으로 나타났다. (0 1) 모드에 중앙에 진동하지 않는 부분이 생겨서 마디 부분이 생긴 것이 특징이다. 이것은 수소 원자의 전자구름 2p모드와 유사하게 나타났다.

그림 3-1의 베셀 함수 그래프에서 1종 1차 베셀 함수 그래프인 J_1 에서 원점의 0이 되는 지점은 원형 북 진동에서 중앙의 지름 마디 부분에 해당한다. 그래프에서 원점에서 첫 번째 0이 되는 지점은 가장자리 원형의 마디에 해당한다. 표 3-1에 0이 되는 지점을 표로 나타내었다.

수소원자의 전자구름 사진은 그림 2-9의 수소원자 대한 지름 함수 그래프에서 2p 그래프를 통해 확인 할 수 있다. 이 때 베셀 함수 그래프와 수소 원자에 대한 지름 함수 그래프에서 그래프 모양의 유사성을 발견 할 수 있었다.

그림 5-3.1의 수소원자의 전자구름 사진과 그림5-3.2 북 진동 모드를 비교를 하면 $m=\pm 1$ 인 경우와 $m=0$ 인 경우 둘 다 원형 북 진동의 (1 1)모드와 유사성이 나타난다.

수소원자에서 전자의 확률 밀도가 큰 곳이 원형 북 진동에서 진동이 크게 일어나는 곳과 일치하고 있다.

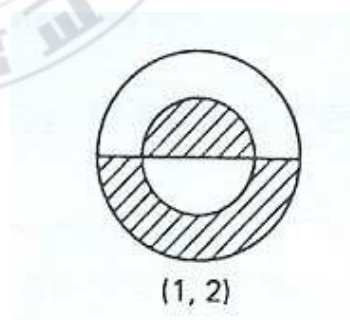
라. $3P - (1\ 2)$



(그림 5-4.1)



(그림 5-4.2)



(그림 5-4.3)

원형 북 (1 2) 모드 진동 시 진동 부분과 마디 부분이 지름 선을 중심으로 대칭으로 나타났다. (0 2) 모드에 중앙에 진동하지 않는 부분이 생겨서 마디 부분이 생긴 것이 특징이다. 이것은 수소 원자의 전자구름 3p모드와 유사하게 나타났다.

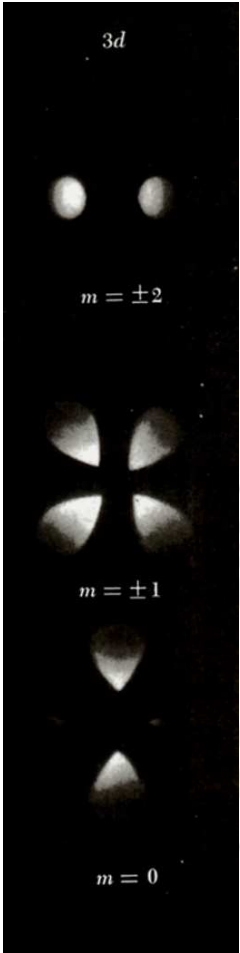
그림 3-1의 베셀 함수 그래프에서 1종 1차 베셀 함수 그래프인 J_1 에서 원점의 0이 되는 지점은 원형 북 진동에서 중앙의 지름 마디 부분에 해당한다. 그래프에서 첫 번째 0이 되는 지점은 북 안쪽 원형의 마디에 해당하며 두 번째 0이 되는 지점은 북의 가장자리 원형의 마디 선에 해당한다. 표 3-1에 0이 되는 지점을 표로 나타내었다.

수소원자의 전자구름 사진은 그림 2-9의 수소원자 대한 지름 함수 그래프에서 3p 그래프를 통해 확인 할 수 있다. 이 때 베셀 함수 그래프와 수소 원자에 대한 지름 함수 그래프에서 그래프 모양의 유사성을 발견 할 수 있었다.

그림 5-4.1의 수소원자의 전자구름 사진과 그림5-4.2 북 진동 모드를 비교를 하면 $m=\pm 1$ 인 경우와 $m=0$ 인 경우 둘 다 원형 북 진동의 (1 2)모드와 유사성이 나타난다.

수소원자에서 전자의 확률 밀도가 큰 곳이 원형 북 진동에서 진동이 크게 일어나는 곳과 일치하고 있다.

마. $3d - (2\ 1)$



(그림5-5.1)



(그림5-5.2)



(2, 1)

(그림5-5.3)

원형 북 (2 1) 모드 진동 시 진동 부분과 마디 부분이 지름 선을 중심으로 대칭으로 나타났다. (0 1) 모드에 중앙에 진동하지 않는 부분이 생겨서 마디 부분이 생긴 것이 특징이다. 이것은 수소 원자의 전자구름 3d모드와 유사하게 나타났다.

그림 3-1의 베셀 함수 그래프에서 1종 2차 베셀 함수 그래프인 J_2 에서 원점의 0이 되는 지점은 원형 북 진동에서 중앙의 가운데 점에 해당한다. 그래프에서 첫 번째 0이 되는 지점은 북의 가장자리 원형의 마디 선에 해당한다. 표 3-1에 0이 되는 지점을 표로 나타내었다.

수소원자의 전자구름 사진은 그림 2-9의 수소원자 대한 지름 함수 그래프에서 3d 그래프를 통해 확인 할 수 있다. 이 때 베셀 함수 그래프와 수소 원자에 대한 지름 함수 그래프에서 그래프 모양의 유사성을 발견 할 수 있었다.

그림 5-5.1의 수소원자의 전자구름 사진과 그림5-5.2 북 진동 모드를 비교를 하면 $m=\pm 1$ 인 경우에만 (2 1)모드와 유사성이 나타난다.

수소원자에서 전자의 확률 밀도가 큰 곳이 원형 북 진동에서 진동이 크게 일어나는 곳과 일치하고 있다.

VI. 결론 및 토의

이 실험을 통하여 북을 진동 시킬 때 진동수의 변화에 따라서 원형 북의 진동 모드가 매우 다양하게 관찰됨을 볼 수 가 있었다. 북을 역학적 진동기로 진동시킴에 따라서 진동을 계속하는 부분이 있었고 진동을 하지 않는 부분이 있었다. 북이 진동하여 모래가 진동을 하고 이 모래 가루는 북이 진동하지 않는 곳으로 이동하여 일정한 모양을 만들었다.

양자역학적 진동 모드와 비교를 한다면 모래가 모이지 않는 부분이 전자의 확률 밀도가 큰 곳이고 전자구름 모양과 유사한 모습을 나타냈다. 북을 진동 시킬 때 진동을 하는 배면에서도 특히 진동을 심하게 하는 표면이 있고 진동을 약하게 하는 표면이 있었다. 이때 진동을 심하게 하는 곳이 양자 역학적으로 전자를 발견할 확률이 가장 큰 곳일 것이다.

원형 북의 중앙을 진동 시켰을 때에는 (0 1)모드, (0 2)모드, (0 3)모드, 와 같이 원형 모양의 마디 선을 가진 모드가 나타났다. 이것은 Bessel 함수 중에서 θ 에 의존하지 않고 r 에만 의존하는 함수로 해석되었다. 원자 궤도 모형에서 θ 와 ϕ 에 무관한 r 만의 함수인 구형대칭 함수로써 1s, 2s, 3s, 4s 와 유사했다.

북의 중앙 진동으로 s궤도와 유사한 네 가지의 진동 모드를 볼 수 있었는데, 실험실에 구비된 큰 북과 작은 북으로 실험을 해보니 큰 북에서는 (0 4)모드까지 진동 모드가 나타났으며 작은 북에서는 (0 2) 모드까지 나타났다. 또한 비교적 많이 사용하지 않은 작은 북의 경우 모드가 구형 대칭으로 선명한 모양을 나타내었고, 사용을 많이 한 큰 북의 경우에는 완전한 대칭의 모드 모양이 잘 만들어 지지 않았다.

북의 원형 진동에서 진동 표면에서 한 평면 임에도 불구하고 에너지를 가지고 진동하는 표면도 있고, 진동하지 않고 계속 마디 표면인 곳도 있었다. 이것은 원자 모형에서 전자궤도가 특정 반지름을 가지고 도는 것과 마찬가지로 파동함수에서 그 에너지가 연속이 아니라 불연속임을 설명하는 좋은 예가 될 것이다.

원형 북의 Normal point 지점의 타격에서는 여러 가지의 다양한 모드를 볼 수 있었다. (1 1) (1 2) (1 3) (2 1)의 모드는 비교적 선명하게 볼 수 있었으나 (2 2) (2 3) 모드는 북이 크고 북의 표면이 매우 고르다면 나타날 수 있으리라고 생각이 되었다.

이와 같이 원자의 전자가 위치 할 양자 상태나 전자의 확률 밀도를 설명함에 있어서 원형 북의 진동 모드를 통해 설명한다면 에너지가 양자화 되며 여기에 따른 파동 함수와 전자의 발견 확률 등을 보다 쉽게 설명 할 수 있을 것으로 생각 되어 진다.

하지만 이번 실험을 함에 있어서 진동수에 따른 북의 진동 모드가 실험하는 날에 따라서 조금씩 다르게 나타났다. 또한 북 진동 시 역학적 진동에 닿는 북의 표면의 마모가 심하게 일어나서 진동 모드의 모양을 정확하게 찾아내기가 어려웠었다. 진동시킴에 따라서 북이 마모되지 않는다면 훨씬 좋은 실험 조건이 되겠지만 일선 학교에서는 북의 상태가 좋은 상태에서 동영상을 찍어서 활용하는 편이 좋으리라고 생각 되었다.

간단한 북의 진동 실험으로 학생들에게 에너지의 양자화 및 전자의 발견확률에 대해서도 잘 설명 할 수 있는 실험으로 활용 가능성이 큰 것으로 여겨진다.

참고 문헌

- 1) Arthur Beiser 원저 장준성 이재형 공역, 현대 물리학, Mc Graw Hill
- 2) Pau A.Tipler, Ralph A.Llewellyn 저, Modern Physics, Freeman
- 3) Frank J. Blatt 저, 현대물리학 ,Mc Graw Hill
- 4) Halliday, Resnick, Walker 저, Fundamentals of Physics, Wiley
- 5) Thomas D.Rossing 저, The Science of sound, (3rd Edition)
- 6) Lawrence E. Kinsler & Austin R, Fundamentals of Acoustics, Wiley
- 7) 쓰즈키 타쿠지 저, 그림으로 배우는 양자 역학 , 한승
- 8) 송희성 저, 양자 역학
- 9) 요네나마 마사노부 저 성지영 역, 원자의 세계 , 이지북
- 10) Ramond Chang 저, 물리화학 ,자유아카데미
- 11) Robert J .Silbey ,물리화학 ,사이텍 미디어
- 12) 일본 음향학회편, 전영석 역, 톡톡 튀는 소리의 세계, 아카데미 서적

감사의 글

95년도에 학부를 졸업하고 2005년도에 대학원에 진학하여 처음 수업을 듣던 때가 바로 어제만 같다. 10년의 공백 기간 만큼 모르는 것도 많고 낯설기만 했었던 석사 과정이 이제 거의 막바지에 이르렀다. 짧다면 짧고 길다면 긴 2년 6개월 동안 나는 학생이라는 이름을 다시 내걸고 교수님들의 수업을 들을 수 있는 호사스러운 생활을 마음껏 할 수 있었다. 몇몇의 시험 때문에 밤잠을 이루지 못하고 꼬박 생각하여 해결 해냈을 때의 짜릿한 희열도 맛보았고, 해서 되지 않을 때의 좌절과 부족함도 맛보았다. 세미나 발표 시의 긴장감도 느꼈고, 나보다 나이는 어리지만 성숙하고 진지한 동기들과 동생들로부터 자극도 많이 받았었다.

무엇보다도 대학원 과정 동안 늦은 야간 수업도 마다않으시고 열정적으로 가르쳐 주신 김 성부 교수님께 감사의 말씀을 전하고 싶다. 교수님의 노력과 열정 때문에 석사 과정을 무사히 마무리 할 수 있었다. 역정 한 번 안내시고 모를 때마다 다시 반복하여 가르쳐 주신 점 매우 감사드리며, 앞으로 교육자의 길을 가면서 교수님의 교육 철학을 가슴깊이 새기고 실천할 수 있도록 노력 하고 싶다.

결혼하자마자 학생의 길로 들어서시는 며느리에게 언제나 늦지 않았다고 격려해주신 아버님 어머님, 늦게 공부하는 딸을 늘 안쓰러워 하시면서도 자랑스러워 하셨던 친정 아빠 엄마, 언제나 힘든 일이 있으면 날 제외시켜 버리던 나의 착한 동생들, 아플 때마다 약 준비해주시던 한의사 도련님..... 가족들의 힘으로 편하게 학교만 다닌 것 같아 나이 값 못한 며느리 딸 언니로서 미안한 마음만 앞선다.

특히 바쁠 때마다 청소며 설거지며 즐거운 마음으로 해준 남편, 힘든 일이 있어도 내색하지 않고 날 늘 웃겨주던 남편, 묵묵히 나의 든든한 지원자가 되어준 남편에게 사랑의 마음을 전하고 싶다.

끝으로 논문 심사에 수고 하여 주신 이 종규 교수님과 홍 지상 교수님, 그리고 우리 실험실 똑 소리 나는 지향씨, 성실한 지용씨, 금연 중인 재운씨, 대학 후배이자 대학원 동기인 금화, 모두에게 감사드리고 싶다.