



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공 학 석 사 학 위 논 문

수학적 최적화 문제를 이용한
MGA의 성능평가



2007 년 8 월

부 경 대 학 교 대 학 원

해 양 공 학 과

이 현 진

공 학 석 사 학 위 논 문

수학적 최적화 문제를 이용한
*MGA*의 성능평가

지도교수 류 연 선

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함.

2007 년 8 월

부 경 대 학 교 대 학 원

해 양 공 학 과

이 현 진

이현진의 공학석사 학위논문을 인준함.

2007년 7월 13일



주	심	공학박사	나원배	인
위	원	공학박사	김정태	인
위	원	공학박사	류연선	인

목 차

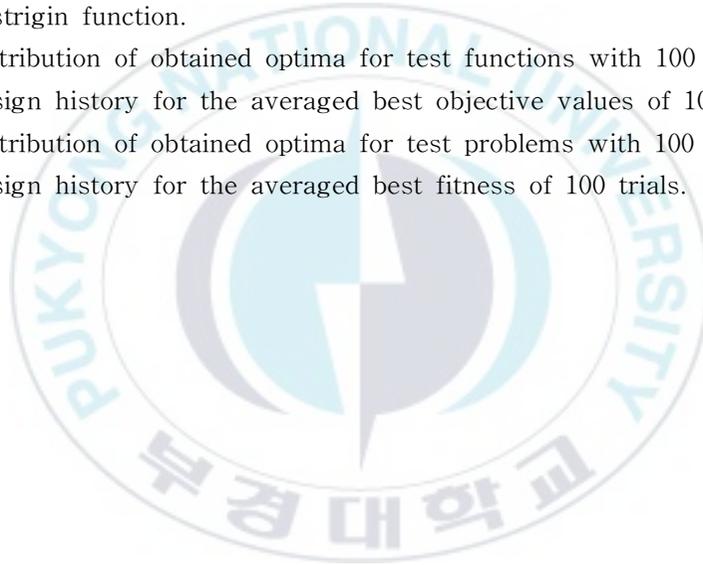
<i>List of Figures</i>	iii
<i>List of Tables</i>	iv
<i>List of Symbols</i>	v
<i>ABSTRACT</i>	vi
1. 서론	1
1.1 연구배경 및 필요성	1
1.2 연구목적 및 내용	2
2. 메트로폴리스 유전 알고리즘	3
2.1 유전알고리즘	3
2.1.1 개요	3
2.1.2 단순 유전알고리즘	4
2.1.3 마이크로 유전알고리즘	5
2.2 모사폴림	6
2.2.1 개요	6
2.2.2 Metropolis 알고리즘	8
2.3 유전알고리즘과 모사폴림의 비교	9
2.4 메트로폴리스 유전알고리즘	10
2.4.1 MGA의 구성	10
2.4.2 Metropolis 알고리즘의 역할	12
2.4.3 MGA의 수용기준	13
2.4.4 MGA의 특징	14
3. 수학적 최적화 문제를 이용한 MGA의 성능평가	15
3.1 최적화 문제의 정식화	15
3.2 수치예제	16
3.2.1 문제 정의	16
3.2.2 초기입력변수	21
3.3 결과 및 고찰	24
3.3.1 함수 최적화 문제	24
3.3.2 제약 최적화 문제	34

4. 매개변수 연구	38
4.1 연구방법	38
4.2 결과 및 고찰	40
5. 요약 및 결론	44
참고 문헌	46



List of Figures

- Fig. 2.1 Flowchart of genetic algorithm.
- Fig. 2.2 Flowchart of simulated annealing.
- Fig. 2.3 Flowchart of Metropolis algorithm.
- Fig. 2.4 Flowchart of Metropolis genetic algorithm.
- Fig. 3.1 Sphere function.
- Fig. 3.2 Rosenbrock function.
- Fig. 3.3 Easom function.
- Fig. 3.4 Ackley function.
- Fig. 3.5 Rastrigin function.
- Fig. 3.6 Distribution of obtained optima for test functions with 100 trials.
- Fig. 3.7 Design history for the averaged best objective values of 100 trials.
- Fig. 3.8 Distribution of obtained optima for test problems with 100 trials.
- Fig. 3.9 Design history for the averaged best fitness of 100 trials.



List of Tables

- Table 2.1 Physical annealing and simulated annealing
- Table 3.1 Test functions
- Table 3.2 Definition of design variables and solutions for test functions
- Table 3.3 Characteristics of test problems
- Table 3.4 Definition of variables of mathematical optimization problems
- Table 3.5 Design optimization parameters for SA
- Table 3.6 Genetic operators used for SGA, GA, and MGA
- Table 3.7 Parameters used for SGA and MGA
- Table 3.8 Design optimization parameters for MGA
- Table 3.9 Range of obtained optima for test functions with 100 trials
- Table 3.10 The average of best objective values for F1
- Table 3.11 The average of best objective values for F2
- Table 3.12 The average of best objective values for F3
- Table 3.13 The average of best objective values for F4
- Table 3.14 The average of best objective values for F5
- Table 3.15 Range of obtained optima for test problems with 100 trials
- Table 3.16 The average of best fitness for P1
- Table 3.17 The average of best fitness for P2
- Table 4.1 The cases for the parametric study of MGA
- Table 4.2 Parameters for evaluation of global convergence
- Table 4.3 Effect of acceptance level and cooling coefficient on the range of optima obtained in 100 trials

List of Symbols

F_a	acceptance level
F_i	fitness function value of the i th design variable
$F(x)$	fitness function
$f(x)$	objective function
$g(x)$	constraint function
K	arbitrary large number
k_B	Boltzmann constant
M	iteration number of inner loop
M_{\max}	maximum iteration number of inner loop
m	the algebraic mean of fitness of individuals in population
N	population size
$N_{1/4}$	the $N/4$ th large individual in fitness
$N_{1/2}$	the $N/2$ th large individual in fitness
$N_{3/4}$	the $3N/4$ th large individual in fitness
N_{opt}	number of function evaluations
P_M	Metropolis probability(acceptance probability)
R	random number
T	temperature parameter
T_0	initial temperature
t	penalty parameter
x	design variable vector
x_0	initial design variable
x^{Cur}	current design variable
x^{New}	new design variable
x_i	the i th design variable
α	cooling coefficient
$\Delta\Phi$	difference between two transformed objective function values
$\Phi(x)$	transformed objective function

Performance Evaluation of MGA in the Solution of Mathematical Optimization Problems

Lee, Hyun Jin

*Department of Ocean Engineering, The Graduate School
Pukyong National University*

ABSTRACT

A Metropolis genetic algorithm (MGA) is a newly-developed hybrid algorithm combining simple genetic algorithm (SGA) and simulated annealing (SA). In the algorithm, favorable features of Metropolis criterion of SA are incorporated in the reproduction operations of SGA. This way, MGA alleviates the disadvantages of finding imprecise solution in SGA and time-consuming computation in SA.

It has been successfully applied and the efficiency has been verified for the practical structural design optimization. However, applicability of MGA for the wider range of problems should be rigorously proved through the solution of mathematical optimization problems. Thus, performances of MGA for the typical mathematical problems are investigated and compared with those of conventional algorithms such as SGA, micro genetic algorithm (μ GA), and SA. And, for better application of MGA, the effects of acceptance level and cooling coefficient are also presented.

From numerical experience, it is again verified that MGA is more efficient and robust than SA, SGA and μ GA in the solution of mathematical optimization problems having various features. In addition, it is found that the best choices of cooling coefficient and acceptance level are 0.99 and median of fitness in population ($N_{1/2}$), respectively.

1. 서론

1.1 연구배경 및 필요성

공학설계에서 최적화의 목적은 주어진 조건을 만족하면서 최소의 비용을 요구하거나 최상의 효과를 가지는 설계를 찾고자 하는 것이다. 그러나 대부분의 공학적 최적화 문제는 비선형 계획 문제이므로 연속형 변수와 경사도 정보를 사용하는 결정론적 기법은 적용에 여러 문제점을 가진다(이, 1996). 따라서 확률론적 탐색기법의 개발과 적용에 관한 많은 연구들이 이루어져 왔다(김, 2001; 김과 권, 2007; 류 등, 2006; 박, 2003; 이 등, 1994; 이와 이, 1997).

최적화 문제에 사용되는 확률론적 탐색기법으로는 모사 풀림(Simulated Annealing; SA), 유전알고리즘(Genetic Algorithm; GA), 타부 서치(Tab Search; TS), 인공생명 알고리즘(Artificial Life algorithms; AL) 등이 있다. 그 중에서 SA와 GA는 서로 보완할 수 있는 특징들을 가진다. SA는 전역적 최적해를 찾는 능력이 뛰어나나 수렴까지 소요되는 시간이 비교적 긴 단점을 가지며(Van Laarhoven and Arts, 1987), GA는 탐색성능이 우수하고 전역적 최적해 근처까지 빠른 수렴을 하는 장점을 가지나 정밀한 최적해를 찾지 못하는 문제점을 가진다.

SA와 GA의 특징들 중 단점을 제거하고 장점들만을 적절히 조합할 수 있다면, 두 알고리즘을 단독으로 수행했을 때보다 우수한 성능을 발휘할 수 있을 것이다. 그러므로 SA와 GA를 조합한 하이브리드 알고리즘에 대한 연구들이 이루어져 왔다. 황과 한(1997)은 SA와 GA를 조합한 알고리즘의 탐색성능에 대한 연구를 하였고, 윤(1999)은 SA와 GA의 병렬탐색기법을 적용하는 이론적인 연구를 수행하였다. 김과 권(2002)은 뼈대구조물의 이산최적화에 SA와 GA를 조합한 알고리즘의 적용성에 대한 연구를 하였으며, 박(2003)과 Ryu 등(2004,2005,2006)은 구조물 설계최적화를 위한 메트로폴리스 유전알고리즘(Metropolis Genetic Algorithm; MGA)의 개발과 적용에 대한 연구를 수행하였다.

박과 류(2003)에 의해 개발된 MGA는 초기 세대에 좋은 유전정보를 소실할 수 있는 단순 유전알고리즘(Simple Genetic Algorithm; SGA)의 단점을 보완하고자 SA의 Metropolis 알고리즘을 SGA의 재생산 과정에 결합한 알고리즘이다. 이는 3부재 트러스와 혼성방파제 등의 수치예제를 통해 효율성이 입증되었다(Ryu 등, 2006; 박 등, 2003; 최 등, 2005). 그러나 MGA의 적용범위 확장을 위해, 그 성능은 다양한 수학적 최적화 문제의 해법을 통하여 엄격히 증명될 필요가 있다(Lee 등, 2007). 그리고 Metropolis 알고리즘의 사용 효과가 최대한 발휘될 때 MGA의 성능은 더 우수할 것이므로 MGA의 적용성을 높이기 위하여, Metropolis 알고리

증에서 사용되는 파라미터들에 대한 매개변수 연구는 필요하다.

1.2 연구목적 및 내용

본 연구의 목적은 다음과 같다.

- 1) MGA의 적용범위를 넓히기 위하여, 다양한 수학적 최적화 문제들을 사용하여 MGA의 성능을 평가한다.
- 2) MGA의 적용성을 높이기 위하여, 수용기준과 냉각계수에 따른 매개변수 연구를 수행한다.

성능평가를 위한 비교 알고리즘으로는 MGA의 기본이 되는 SGA와 SA 그리고 마이크로 유전알고리즘(microGA; μ GA)을 사용하였다.

연구목적을 위해 수행된 단계별 연구방법은 다음과 같다.

먼저 MGA의 기본이 되는 GA와 SA 그리고 비교 알고리즘인 SGA, μ GA에 대해 살펴보고, 본 연구의 핵심인 MGA의 구성과 특징에 대해 고찰한다. 그리고 MGA의 성능평가를 위하여 선정한 수학적 최적화 문제들을 제시하고 그 특징을 살핀 후, MGA와 비교 알고리즘들을 수치예제에 적용하여 그 결과를 비교·분석한다. 마지막으로 수용기준과 냉각계수에 따른 MGA의 영향을 평가하기 위하여, 여러 가지 수용기준과 냉각계수의 변화에 따른 전역적 및 국부적 수렴성을 평가·비교·분석한다.

2. 메트로폴리스 유전알고리즘

메트로폴리스 유전알고리즘(Metropolis Genetic Algorithm; MGA)은 모사폴림의 주 요체인 Metropolis 알고리즘과 유전알고리즘의 재생산연산자를 조합한 알고리즘으로, 이 장에서는 유전알고리즘과 모사폴림의 특징을 고찰하고, MGA의 구성과 특징에 대하여 제시한다. 그리고 본 연구에서 제안하는 MGA의 새로운 수용기준을 알아본다.

2.1 유전알고리즘(Genetic Algorithms; GA)

2.1.1 개요

유전알고리즘은 멘델의 유전법칙과 다윈의 자연선택(natural selection)을 토대로 한 확률론적 탐색기법이다. 즉, 두 부모의 유전자로부터 그들 자손의 유전자를 형성하는 유성생식과 자연환경에서 일어나는 진화원리를 모방한 것이다.

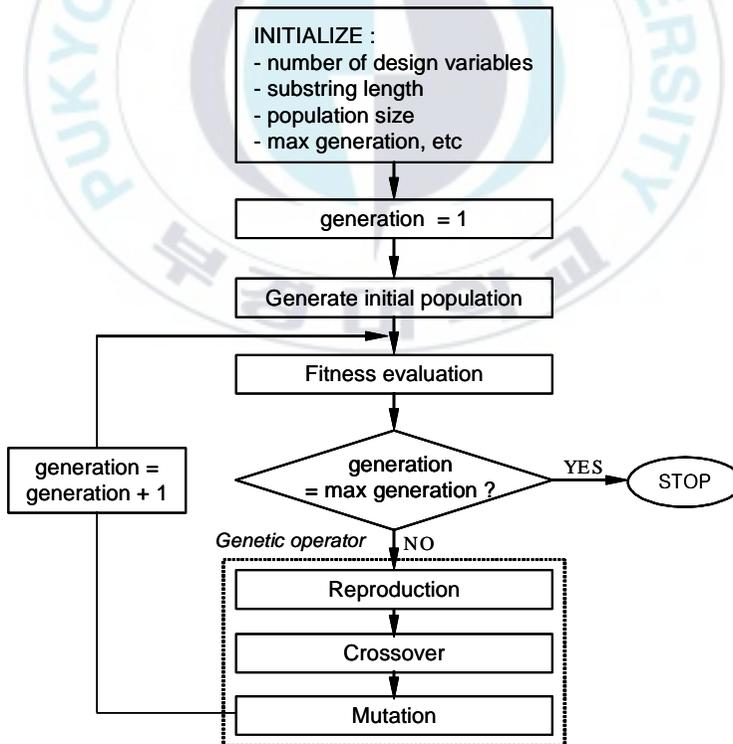


Fig. 2.1 Flowchart of genetic algorithm.

이러한 과정이 설계 최적화 문제의 해결에 이용될 때, 기본적으로 요구되는 전제는 인위적인 진화현상을 일으킬 초기 집단을 구성하는 것이다. 집단은 해공간 상에서 잠정적인 해를 뜻하는 다수의 개체로 형성되고, 이들은 유전자의 역할을 반영하도록 문자열(string)로 표현된다. 그리고 집단은 자연선택과 유전법칙의 메커니즘을 모방한 유전 연산자들에 의해 세대를 거듭할수록 개선된다.

Fig. 2.1은 유전알고리즘의 기본 과정을 나타낸다.

유전알고리즘의 탐색과정은 크게 초기화(initialization), 재생산(reproduction), 교배(crossover), 돌연변이(mutation)의 4단계로 구분된다. 초기화 단계에서는 초기 개체(individual)들을 해공간 내에서 무작위로 선택하거나 경험적인 방법으로 선택한다. 다음 단계에서는 초기 개체가 복호화(decoding)되어 이들의 적합도(fitness)를 평가하고 적합도에 따라 재생산을 수행한다. 그리고 집단내의 정보만으로 변화를 시도하는 교배 과정을 거친 후, 유전정보의 다양성을 유지하기 위해 적절히 돌연변이를 시도하게 된다. 이렇게 해서 새롭게 형성된 집단은 다시 평가되고, 최적해를 구할 때까지 수행한 일련의 과정을 반복하게 된다.

유전알고리즘은 Holland(1975)에 의해 개발된 단순 유전알고리즘에서부터 시작하여 개선되고 변형된 여러 버전들이 있다. 이들이 채용하고 있는 기본적인 메커니즘은 유사하며 다음 요소들을 포함하고 있다.

- ▶ 파라미터를 부호화
- ▶ 초기 개체집단의 생성
- ▶ 집단 내 개체들의 적합도 평가
- ▶ 유전 연산자들의 사용

이러한 요소들은 다양한 방법으로 구현될 수 있고 유전알고리즘의 성능에 미치는 영향은 크다.

2.1.2 단순 유전알고리즘

단순 유전알고리즘(Simple Genetic Algorithm; SGA)은 초기의 알고리즘임에도 불구하고 해를 찾는 능력이 강인하여 아직도 많은 최적화 문제에 적용되고 있다. 하지만 SGA는 초기 세대에 상대적으로 적합도가 큰 개체가 출현하면 국부적 최적해로 수렴하는 단점을 지니고 있다. 이러한 현상은 집단크기가 작을수록 다양한 유전정보를 유지하지 못하므로 더욱 뚜렷하게 나타난다(진, 2000).

SGA는 GA의 기본이 되고, 이진 코딩을 사용하며, 초기 집단은 해공간에서 무작위로 선택한다. 그리고 재생산 연산자로 룰렛휠 선택(roulette wheel selection), 교배 연산자로 일점교배(one-point crossover), 돌연변이 연산자로 단순 돌연변이

(simple mutation)를 사용한다.

2.1.3 마이크로 유전알고리즘

유전알고리즘의 다양한 버전들은 룰렛휠 선택을 사용하는 경우가 많다. 집단의 크기가 작을 경우 초기 세대에 초우량 개체가 출현하면, 룰렛휠 선택은 이 개체를 여러 번 복제하게 되고, 이들이 집단을 지배함으로 유전정보의 다양성을 잃게 된다. 이러한 문제를 보완하기 위해 집단의 크기는 30~200사이에 고정하기를 권장하고 있다. 그러나 집단크기가 클수록 알고리즘은 계산의 부담을 가지게 된다.

Krishnakumar(1989)은 알고리즘의 계산 횟수를 효율적으로 줄이기 위하여 마이크로 유전알고리즘(Micro Genetic Algorithm; μ GA)을 제안하였다.

μ GA는 SGA와 거의 유사하지만, 유전정보의 다양성을 충분히 유지하기 위하여 집단이 어느 한 점 가까이로 수렴하게 되면 집단을 재구성해서 다시 시동하게 된다. 즉, 최적 개체와 나머지 개체들의 염색체 비트(bit)끼리 비교하여 서로 다른 비트 수가 5%미만이면 수렴조건에 만족된 것으로 판정한다. 해가 어떤 값에 수렴하게 되면 수렴된 집단 내에서 최적의 개체를 제외한 나머지 개체를 무작위로 초기화하여 구성된 새로운 집단을 가지고 재시동하게 된다. 이러한 ‘시동과 재시동’의 과정은 만족스러운 해가 얻어질 때까지 반복된다.

μ GA에서 집단은 5개의 염색체로 구성되고 이와 함께 사용되는 유전 연산자는 다음과 같다.

μ GA는 매우 작은 집단을 취급함으로 인해 유전정보의 결핍이 불가피하다. 그러므로 선택확률에 의존하는 재생산 연산자를 사용하면 더욱 빨리 초우량 개체로 고정될 가능성을 가지기 때문에 결정적 토너먼트 선택(tournament selection)을 이용하고 있다. 그리고 교배 연산자로는 SGA와 같이 일점교배를 채용하고 있으나, 개체간의 정보 교환이 절실히 요구되므로 선택된 어버이 쌍에는 반드시 교배가 일어나도록 교배확률은 1을 사용하고 있다. μ GA는 개체들이 어느 한 점 가까이로 수렴하게 되면 수렴된 집단내의 최적 개체와 임의로 발생된 나머지 4개체로 재구성되는 새로운 집단을 가지고 재시동하기 때문에 이때마다 충분한 정도의 다양성이 도입된다. 그러므로 별도의 돌연변이 연산이 필요치 않다. 즉, 돌연변이 확률은 0으로 고정된다. 그리고 좋은 유전자의 확률적 손실을 방지하기 위해 엘리트 전략(elite strategy)을 사용한다.

2.2 모사 풀림(Simulated Annealing; SA)

2.2.1 개요

모사 풀림은 반복적 개선법을 기본으로, 통계학의 확률적 기준을 이용하여 고체 열역학에서 가장 낮은 에너지 상태의 결정을 얻기 위한 풀림 과정을 모사한 것이다(Kirkpatrick, 1983).

고체 열역학에서 풀림은 고체를 열탕에 넣어 액체상태가 될 때까지 가열한 후, 열탕의 온도를 서서히 낮추어 가장 안정된 결정상태의 고체를 얻는 과정을 일컫는다. 액체 상태에서 분자들은 자유롭게 움직이다가 온도를 내림에 따라 점점 일정한 구조로 배열하게 되며, 온도를 급격히 내리면 가변적 안정상태의 비정질의 구조(amorphous structure)가 얻어지게 된다. 이때 물질의 각 상태마다 에너지 수준이 다른 값을 갖게 되는데 물리적인 구조를 조합적 문제에서 하나의 가능해의 구조로 대응시키면, 가장 낮은 에너지 수준을 주는 상태에 대응하는 것이 바로 최적해가 된다. 그리고 온도를 급격히 내려 에너지 수준을 급히 내리는 담금(quenching)에 해당하는 것이 바로 국부 탐색법이고 온도를 목표온도까지 서서히 내려 분자들이 배열을 바꾸면서 에너지 수준을 오르내리도록 허용하는 풀림에 대응하는 것이 바로 전역적 탐색법인 SA이다. 즉 물리적 상태 변화 과정을 SA와 연계시키면 Table 2.1과 같이 요약할 수 있다(김 등, 2000).

Table 2.1 Physical annealing and simulated annealing

Physical annealing	Simulated annealing
matter	optimization problem
feasible condition	feasible solution
energy	cost function
basic condition (crystallization)	optimum solution
quenching	local search

SA는 내부루프(inner loop)와 외부루프(outer loop)의 2개의 반복루프를 가진다. 내부루프에서는 다음 장에서 설명할 Metropolis 알고리즘이 수행되며, 이를 기본으로 하여 외부루프에서는 온도(T)를 낮추는 과정이 수행된다.

SA의 기본과정은 Fig. 2.2와 같다.

즉, 초기 값들이 설정된 후, SA의 내부루프에서는 현재의 해(x^{Cur})와 무작위 탐색으로 새로운 해(x^{New})를 생성하고 Metropolis 알고리즘에 의해 x^{New} 를 개선된 해로 받아들일지 그 수락여부가 결정된다. 이 과정은 초기에 설정된 최대 내부루프 반복수(M_{max})만큼 반복되며, 외부루프의 T 가 고정된 상태에서 수행된다.

그리고 외부루프에서는 T 를 낮추는 과정이 수행되며, $T \approx 0$ 이면 SA는 종료된다. 이와 같이 SA는 Metropolis 알고리즘을 기본으로 하여 어닐링에서 온도를 낮추는 과정을 덧붙인 방법으로 볼 수 있다.

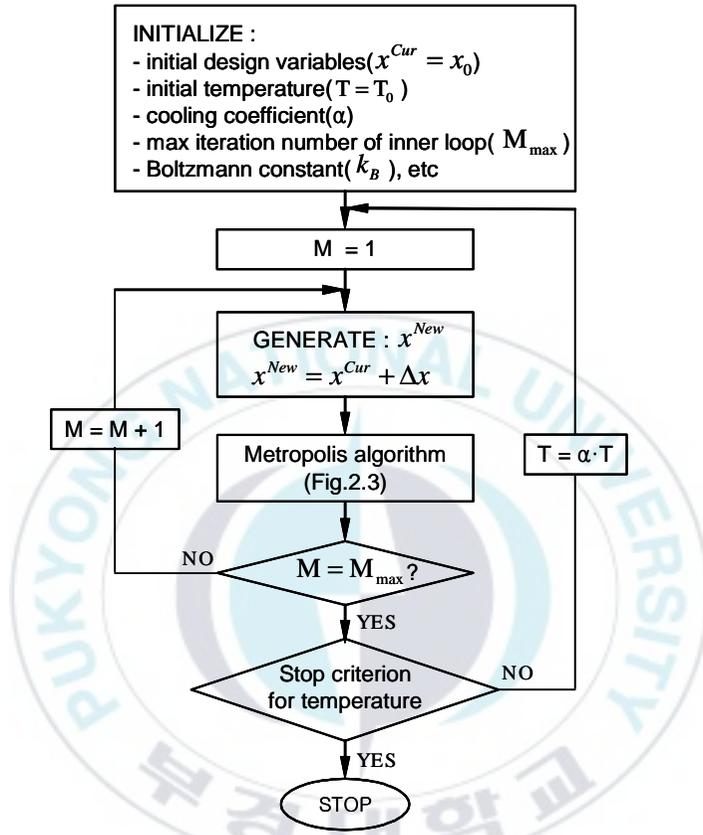


Fig. 2.2 Flowchart of simulated annealing.

T 는 SA에서 가장 중요한 파라미터로, Metropolis 알고리즘의 수용 확률 (acceptance probability)에 사용되어 x^{Cur} 보다 목적함수값이 큰 x^{New} 를 개선된 해로 받아들이는 수용 횟수를 제어한다. 즉, T 는 높은 온도에서 서서히 낮아짐에 따라, 목적함수값이 큰 x^{New} 를 수용할 확률이 작아져 수용 횟수를 감소시킨다. 이때 T 는 서서히 낮추어야 한다. 이는 해를 찾는데 있어서 초기에는 광범위한 해공간을 탐색하다가 점차적으로 특정영역에 대해서 집중적으로 해를 탐색하도록 제어하기 위함이다. 만일 온도를 급격하게 감소시키면 목적함수값이 큰 x^{New} 에 대한 탐색가능성이 감소되어 국부적 최적해를 가져올 수 있다. T 를 낮추는 것은 냉각스케줄(cooling schedule)에 의해 이루어진다. 일반적으로 많이 사용되

는 냉각 스케줄방식은 기하 스케줄(geometric schedule)로 식(2.1)과 같다.

$$T = \alpha \cdot T_0 \quad (2.1)$$

여기서, α 는 T 를 낮추는 냉각 계수(cooling coefficient)이며, T_0 는 초기 온도이다. 이때 α 는 대개 0.5~0.99사이에서 결정된다(김 등,2000).

SA는 현재까지의 수많은 연구에도 불구하고 파라미터들에 대한 적절한 규칙이 확립되어 있지 못해 충분히 성숙된 알고리즘이라 할 수 없다. 그리고 전역적 최적해를 찾기 위한 계산시간이 오래 걸린다는 것이 SA에서 가장 큰 단점으로 지적되고 있다. SA의 계산시간을 줄이기 위한 많은 연구가 진행되고 있지만, 만족할 만한 성과를 이루지 못하고 있다. 많은 연구에서 거의 일치된 결론은, 충분한 시간이 주어진다면 SA가 다른 최적화 기법보다 더 좋은 최적해를 찾을 수 있다는 것이다(김 등, 2000).

2.2.2 Metropolis 알고리즘

Metropolis 알고리즘은 열탕에서 고체가 열평형상태에 도달하는 과정을 확률적으로 모사한 방법이다(Metropolis et al, 1953). Fig. 2.3은 Metropolis 알고리즘의 기본과정을 나타내고, 이 과정은 외부루프의 T 가 고정된 상태에서 M_{max} 가 될 때까지 반복된다.

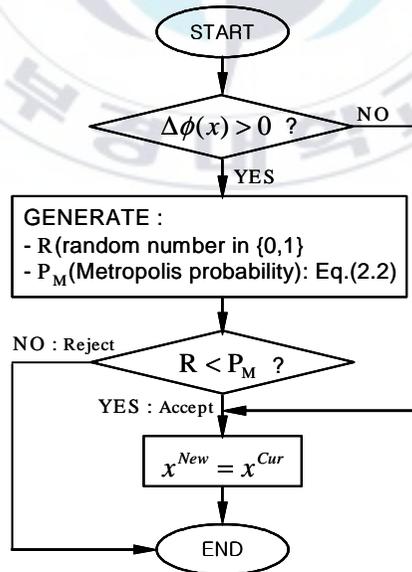


Fig. 2.3 Flowchart of Metropolis algorithm.

목적함수 $\Phi(x)$ 를 최소화하는 문제에서 Metropolis 알고리즘은 Fig. 2.2에서 생성된 x^{Cur} 와 x^{New} 에 대한 $\Phi(x)$ 의 차이($\Delta\Phi = \Phi(x^{New}) - \Phi(x^{Cur})$)를 구한다. 여기서 $\Phi(x)$ 는 제약 최소화문제의 목적함수를 비제약 최소화문제로 변환한 목적함수이다. x^{New} 가 x^{Cur} 보다 작은 목적함수값을 갖는 경우, 즉 $\Delta\Phi \leq 0$ 인 경우에는 x^{New} 를 무조건 개선된 해로 수용(accept)한다. 그리고 $\Delta\Phi > 0$ 인 경우에는 무조건 x^{New} 를 제거(reject)하는 것이 아니라, $\{0, 1\}$ 에서 생성한 난수(R)와 식(2.2)의 수용확률(P_M)을 비교하여 x^{New} 의 수용여부를 결정한다. $R < P_M$ 인 경우 x^{New} 는 수용되고 $R \geq P_M$ 인 경우 x^{New} 는 제거된다. 이를 Metropolis 기준(Metropolis criterion)이라 한다.

$$P_M = \exp\left(\frac{-\Delta\Phi}{k_B T}\right) \quad (2.2)$$

여기서 k_B 는 볼츠만 상수, T 는 냉각 계수에 의해 변하는 온도이다.

이와 같이 SA는 내부루프의 Metropolis 알고리즘에 의해 x^{Cur} 의 목적함수값보다 큰 값을 가지는 x^{New} 를 어느 정도의 확률로 수용함으로써 국부적 최적해를 벗어날 수 있다. 그러므로 기존의 최적화 기법보다 전역적 최적해를 찾는 확률이 높은 것이다.

2.3 유전알고리즘과 모사 풀림의 비교

GA는 방대한 문제공간에 대한 탐색능력과 전역적 최적해 근처까지의 빠른 수렴을 하는 장점을 가지고 있다. 그리고 후보 해의 집단을 유지하면서 병렬탐색을 수행한다. 그러나 최적해 근처에서의 탐색은 일반적으로 느리며, 유전 연산자들에 의해 개체들이 확률적으로 선택되므로 최적해 근처에서의 미세 조정(fine tuning) 능력이 떨어진다. GA의 이러한 단점을 보완하기 위한 첫 번째 방법은 유전 연산자들을 개선하는 것이고, 두 번째 방법은 유전 연산자들에 의해 만들어진 해에 다른 최적화 기법을 조합하는 것으로, 이에 대한 연구가 많이 수행되고 있다(문, 2001).

SA는 Metropolis 알고리즘을 사용하기 때문에 전역적 최적해를 찾는 능력이 뛰어나다. 그러나 전역적 최적해를 찾기 위해서는 내부루프와 냉각스케줄에 의해 제어되는 외부루프의 반복계산으로 인해 계산시간이 오래 걸린다는 단점이 많은 연구에서 입증되었다(김 등, 2000). 그리고 SA는 항상 하나의 후보 해만을 유지하고, 알고리즘의 수행은 순차적인 성질을 가진다.

이렇듯 GA와 SA는 서로의 단점을 장점으로 가진다. 그러므로 이들을 결합한

하이브리드 알고리즘에 대한 연구들이 수행되어 왔다(Ryu, 2004; 문, 2001; 박, 2003; 이 등, 1994; 이와 이, 1997; 황과 한, 1997).

2.4 메트로폴리스 유전알고리즘

2.4.1 MGA의 구성

MGA는 SGA의 재생산 과정에 SA의 Metropolis 알고리즘을 조합함으로써 유전 정보의 소실방지 및 유전정보의 다양성을 유지하고자 개발된 알고리즘이다(박, 2003). Fig. 2.4는 MGA의 기본과정을 나타내며, 이를 단계별로 요약하면 다음과 같다.

- Step 1. MGA를 이용하기 위한 문자열의 길이, 집단크기(N), 최대 반복세대수, 초기 온도(T_0), 볼츠만 상수(k_B), 냉각 계수(α), 설계 데이터 등을 입력한다.
- Step 2. generation = 1로 둔다.
- Step 3. 초기 집단의 개체 N 개를 무작위 탐색하여 생성한다.
- Step 4. 집단 내 각 개체들의 적합도($F_i, i = 1, \dots, N$)를 평가한다.
- Step 5. 현 세대수가 초기에 설정된 최대 반복세대수이면 MGA를 종료하고, 그렇지 않을 경우에는 다음 단계를 수행한다.
- Step 6. generation = generation + 1로 둔다.
- Step 7. 집단 내 개체들을 사용하여 수용기준(acceptance level; F_a)을 결정한다.
- Step 8. $F_i (i = 1, \dots, N)$ 와 F_a 를 비교한다. $F_i > F_a$ 이면 교배급원에 저장하고, 그렇지 않을 경우에는 수용확률(P_M) 식(2.2)를 사용한다. 단, MGA에서는 $\Delta\Phi$ 대신에 $\Delta F (= F_a - F_i)$ 를 사용한다. 이 단계에서는 수용확률(P_M)과 $\{0, 1\}$ 에서 생성한 난수(R)를 비교하여 적합도가 작은 개체의 수용여부를 결정한다. $P < P_M$ 을 만족하면 이 개체를 수용하고 교배급원에 저장한다. 그렇지 않을 경우에는 이 개체를 제거하고, 룰렛휠 선택을 사용하여 제거된 개체를 대신할 새로운 개체를 현 세대에서 생성하여 교배급원에 저장한다.
- Step 9. 교배급원에 저장된 개체들에 대하여 일점교배를 사용하여 설계환경에 적합하게 재조합한다.
- Step 10. 단순 돌연변이를 사용하여 개체들을 변형시킨다.
- Step 11. 엘리트 전략을 사용하여 이전 세대와 현 세대 개체들의 적합도를 비교

하여 적합도가 가장 큰 개체를 다음 세대로 넘긴다.

Step 12. 냉각 계수를 사용하여 온도를 감소시킨 후 Step 4로 간다.

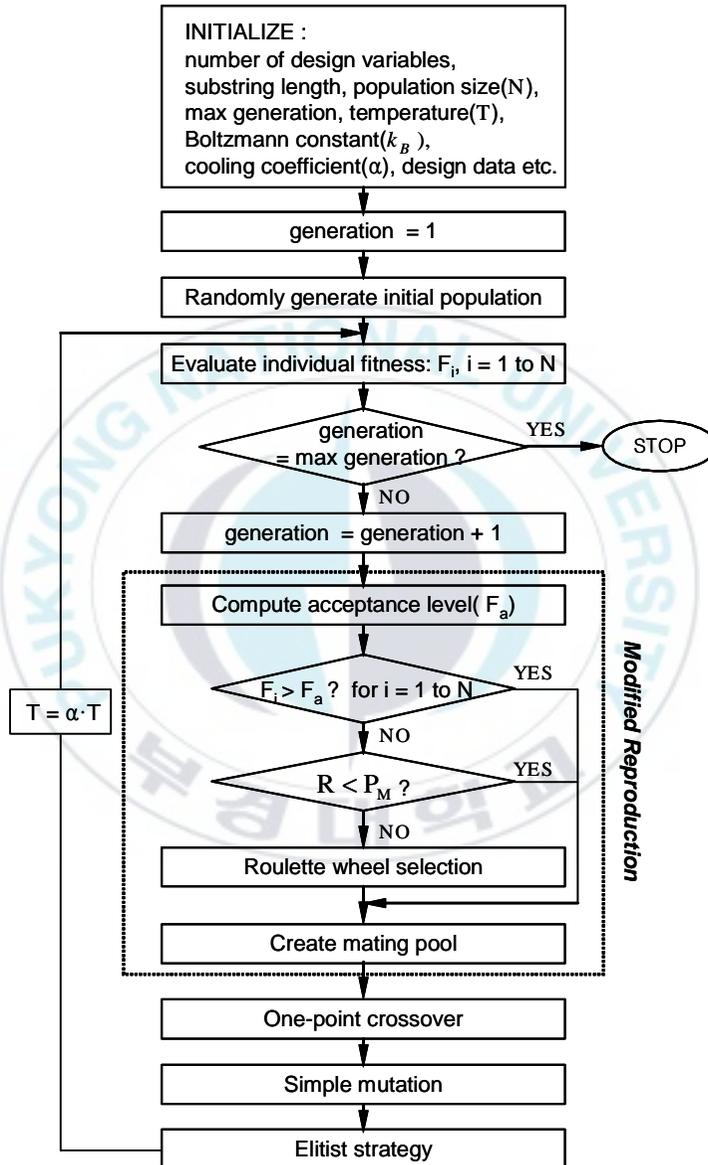


Fig. 2.4 Flowchart of Metropolis genetic algorithm.

2.4.2 Metropolis 알고리즘의 역할

GA는 재생산 연산자에 의해 다음 세대에 영향을 줄 개체가 선택되며, 이는 집단 내 개체들의 적합도를 기반으로 이루어진다. 하지만 이 과정에서 유전정보의 다양성에 대한 문제점이 발생할 수 있다. 이는 GA가 최적해 또는 최적해에 근접한 해를 찾기도 전에 상대적으로 적합도가 큰 개체가 출현할 때 나타나는 현상이다. 적합도가 큰 개체가 초기 세대에 출현하게 되면, 짧은 세대수 안에 모든 개체를 몰아내고 집단을 지배하게 된다. 이렇게 되면, 초기 세대에 해의 좋은 인자를 보유하고 있을지 모르는 적합도가 작은 개체는 제거되어 결국 국부적 최적해로 수렴하게 된다, 그리고 교배 연산자는 재생산에 의해 선택된 개체들의 정보만으로 변화를 시도한다. 따라서 GA에서 국부적 최적해를 벗어날 수 있는 요인은 돌연변이 연산자이다. 돌연변이는 초기 세대에 국부적 최적해로 수렴하는 것을 방지해주며, 해공간에 대한 탐색영역을 확대시켜 준다. 그러나 돌연변이 기회의 클수록 GA의 수렴은 느리게 되므로 일반적으로 돌연변이 확률은 0.002~0.05를 사용하고 있다. 따라서 돌연변이 연산자만으로 이 문제점은 해결되지 않는다. SA는 Metropolis 알고리즘의 사용으로 인해 국부적 최적해를 벗어난다. 그러므로 GA를 수행하는 동안 유전정보의 소실을 막고, 다양한 유전정보를 사용하기 위해서는 SA의 주요체인 Metropolis 알고리즘이 필요하다.

MGA에서 Metropolis 알고리즘의 역할은 적합도가 작은 개체에 수용될 확률을 부여하는 것이다. 즉, 초기 세대에는 Metropolis 알고리즘을 사용하여 적합도가 작은 개체들에 대해 높은 수용확률을 부여하여 넓은 해공간을 탐색할 수 있도록 한다. 반면에 설정된 최대 반복세대수에 가까워질수록 Metropolis 알고리즘은 적합도가 작은 개체에 낮은 수용확률을 부여하여 수용횟수를 줄이면서 재생산 연산자인 룰렛휠 선택을 사용한다. 이때 재생산 연산자의 수행은 개체들이 어느 특정한 한 점으로 수렴하도록 만든다. 수용확률의 높고 낮음은 온도(T) 파라미터에 의해 제어된다. 즉, 초기의 높은 온도에서는 적합도가 작은 개체의 수용확률이 높아지지만, 온도가 서서히 낮아질수록 이 수용확률도 천천히 작아진다. 그러므로 MGA는 초기 세대에 상대적으로 적합도가 큰 개체가 출현하더라도 해가 국부적 최적해에 빠지지 않고, 적합도가 작은 개체를 보유하면서 알고리즘을 수행한다.

GA는 집단 내 각 개체들의 적합도 함수를 모두 평가한 후 그 적합도를 가지고 재생산이 수행되며, GA에서 초기 세대의 유전정보의 소실은 재생산 과정에서 발생한다. 따라서 MGA에서 Metropolis 알고리즘의 적용위치는 재생산 연산의 이전으로 하였다. 즉, MGA에서는 Metropolis 알고리즘을 먼저 사용하여 어느 정도 적합도가 작은 개체를 우선 선택하여 교배급원(mating pool)에 저장한 후에

SGA의 재생산 연산자가 사용된다. 그러므로 초기 세대의 유전정보의 소실을 예방할 수 있다.

만일 교배 연산자나 돌연변이 연산자의 이전에 Metropolis 알고리즘을 사용하게 되면, 이 알고리즘은 기존의 GA보다 최적설계를 수행하는 동안 함수값의 계산횟수(N_{opt})가 2배로 증가하게 된다. 이는 GA에서 적합도 함수의 평가는 개체를 선택하기 위한 재생산 이전에서만 이루어지므로 교배 또는 돌연변이 연산을 수행하기 이전에 Metropolis 알고리즘을 사용한다면 교배급원에 저장된 개체들을 재평가하기 위하여 적합도 함수를 다시 한 번 평가해야 하기 때문이다. 따라서 이 경우 계산상으로 비효율적이다.

그리고 엘리트 전략의 이전 또는 이후에 Metropolis 알고리즘을 사용하면 일반적인 GA의 연산수행과 같게 된다. 엘리트 전략은 이전 세대와 현재대 개체들의 적합도를 비교하여 적합도가 가장 큰 개체를 다음 세대에 넘기는 메커니즘이다. 그러므로 현 세대에 적합도가 작은 개체를 부여하는 것은 불필요한 수행이 된다.

따라서, Metropolis 알고리즘은 재생산 연산자와 조합하는 것이 SGA의 단점을 잘 보완할 수 있으므로 가장 효율적일 것으로 판단된다.

2.4.3 MGA의 수용기준

SA는 하나의 해를 운용하므로 Metropolis 기준에서 수용기준으로 현재해(x^{Cur})의 적합도를 사용한다. 그러나 MGA는 SA와 달리 해의 집단을 운용하므로 Metropolis 기준을 사용함에 있어서 새로운 수용기준이 필요하다.

MGA의 개발당시 수용기준으로 집단 내 개체들의 적합도 평균이 사용되었다. 평균은 모든 개체들의 적합도를 반영한다. 그러므로 집단 내에 상대적으로 큰 적합도를 가지는 개체가 존재할 경우에, 그 값은 평균에 민감하게 반영되어 수용기준에 의해 보존되는 엘리트 개체의 비율이 작아지며, 그 값에 의해 평균은 다른 개체들의 적합도에 비해 크게 되기 때문에 수용기준과 각 개체들의 적합도의 차는 커지므로 수용확률이 작아진다. 따라서 온도가 낮은 경우 SGA와 유사해질 수 있으며 즉, MGA의 사용 목적을 만족하지 못할 수 있다. 그리고 집단 내 개체들의 적합도는 거의 정규분포를 이루지 않기 때문에 평균을 수용기준으로 사용할 경우에 수용기준에 의해 보존되는 개체의 비율을 예측하기 곤란하다.

따라서 본 연구에서는 매 세대 일정 비율의 개체가 보존되도록 하는 수용기준을 제안한다. 보존되는 엘리트 개체의 비율은 25%, 50%, 75%의 세 가지를 고려하였다. 즉, 집단 크기가 N이라면, 수용기준에 의해 각각 25%, 50%, 75%의 개체들이 보존되도록 집단 내의 개체 중 적합도가 N/4번째, N/2번째, 3N/4번째로 큰 개체를 수용기준으로 설정한다.

그리고 MGA의 수용기준에 따른 영향을 평가하기 위하여 제안한 세 가지 수용기준에 기존의 평균을 더하여 총 네 가지 수용기준을 고려하였다.

이 연구는 4장에 제시된다.

2.4.4 MGA의 특징

이론적 관점에서 MGA의 특징은 다음과 같다.

(1) MGA에서는 초기 세대에 잠재적인 유전 정보의 소실을 방지하기 위하여 SA의 Metropolis 기준을 SGA의 재생산 연산자인 롤렛휠 선택에 조합하였다. 즉, 초기 세대에는 Metropolis 알고리즘을 사용하여 적합도가 작은 개체들에 대해 높은 수용확률을 부여하여 넓은 해공간을 탐색할 수 있도록 한다. 반면에 최대 반복세대수에 가까워질수록 온도의 감소로 인해 Metropolis 알고리즘은 적합도가 작은 개체들에 낮은 수용확률을 부여하므로 롤렛휠 선택의 기회가 증가한다. 그러므로 정밀한 최적해에 수렴할 높은 확률을 기대할 수 있다.

(2) MGA는 Metropolis 알고리즘의 사용으로 인해 초기 몇 세대동안은 기존의 SGA보다 수렴이 느려질 수 있다. 하지만 집단 내에서 적합도가 가장 큰 개체는 엘리트 전략으로 보존되므로 어느 정도의 초기 세대를 지난 후에는 적합도가 좋은 개체들로 이루어져 MGA는 수행된다. 이때에는 비교적 안정적이고 빠른 수렴을 나타낼 것이다.

(3) MGA와 SGA는 집단 내 개체들의 적합도를 모두 평가하기 때문에 MGA가 한 세대에서 계산하는 함수의 수는 SGA와 동일하다. 즉, 설정된 최대 반복세대수 안에서 최적설계를 수행하는 동안 함수값의 계산횟수는 두 알고리즘이 같다.

(4) SA는 하나의 후보해를 가지고 순차적인 탐색을 수행하는 반면에, MGA는 SGA와 같이 여러 후보해들을 가지고 집단탐색을 수행한다. 그러므로 목적함수와 제약함수가 복잡하고, 설계변수가 많은 최적화 문제에서는 MGA의 성능이 우수할 것으로 기대된다.

3. 수학적 최적화 문제를 이용한 MGA의 성능평가

본 연구에서는 MGA의 성능평가를 위한 비교알고리즘으로 MGA의 기본이 되는 SA와 SGA 그리고 GA 중 널리 쓰이고 있는 μ GA를 사용한다.

3.1 최적화 문제의 정식화

일반적인 최적화 문제는 제약조건을 만족하면서 목적함수를 최소로 하는 변수 벡터를 구하는 것으로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \\ \text{to minimize} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & g_j(\mathbf{x}), j = 1 \text{ to } p \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서, n 은 변수의 차원이고 \mathbf{x} 는 변수벡터, $f(\mathbf{x})$ 는 목적함수, $g_j(\mathbf{x})$ 는 제약함수, p 는 등호 및 부등호 제약조건의 총수이다.

MGA, SGA, μ GA는 비제약 최대화 문제에 적합한 알고리즘이며, SA는 비제약 최소화 문제에 적합한 알고리즘이므로 식(3.1)과 같이 제약함수를 포함하는 일반적인 최적화 문제의 정식화는 직접적으로 사용될 수 없다. 따라서 사용가능한 형식으로 변환할 필요가 있다.

SA를 사용하기 위해 일반적인 최적화 문제는 비제약 최소화 문제로 변환해야 한다. 본 연구에서는 제약조건 핸드링 기법으로 일반적으로 사용되는 순차비제약 최소화기법(Sequential Unconstrained Minimization Techniques; SUMT)의 외부 벌칙함수법(exterior penalty function method)을 채택하였다. 이는 제약조건의 위배가 있으면 위배 정도에 따른 벌칙을 목적함수에 더하도록 하여 해를 유용영역 경계로 유도하는 방법으로 식(3.2)로 정의한다.

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^p [g_i(\mathbf{x}) + |g_i(\mathbf{x})|]^2 \quad (3.2)$$

여기서 $f(\mathbf{x})$ 는 목적함수, t 는 벌칙 매개변수, $\Phi(\mathbf{x})$ 는 변환된 목적함수이다.

MGA, SGA, μ GA는 비제약 최대화 문제에 적합하므로 먼저 식(3.2)를 이용하여 비제약 최소화 문제로 변환한 후, 식(3.3)의 적합도 함수를 정의함으로 비제약

최대화 문제로 변환하였다.

$$F(x) = K - \ln[\Phi(x)] \quad (3.3)$$

여기서 $F(x)$ 는 적합도 함수(fitness function), K 는 제약 최소화 문제를 비제약 최대화 문제로 변환하기에 충분히 큰 수이다. 그리고 벌칙 매개변수를 사용함으로써 인해 선택압이 증가하여 조기 수렴현상이 발생하는 것을 막기 위해 로그 스케일링(log scaling)을 사용하였다(Mitsuo and Cheng, 1997; 진, 2000).

본 연구에서는 모든 수치예제에 $K=15$, $t=100000$ 을 사용하였다.

3.2 수치예제

3.2.1 문제 정의

최적화 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 엄밀해(exact solution)가 제시되어 있는 수학적 최적화 문제는 유용하게 사용될 수 있으며, 현재 많은 연구에서 다양한 특징을 가지는 수학적 최적화 문제들이 고안되었다(Adem Kalinli and Nurhan Karaboga, 2005; Easom, 1990; Michaelwicz and Schoenauer, 1996). 그 범위는 함수 최적화 문제부터 제약조건을 가지는 시험 문제까지 다양하다.

따라서 본 연구에서는 서로 다른 특징을 가지는 수학적 최적화 문제들을 선정하여 MGA의 성능을 평가한다.

1) 함수 최적화 문제

함수 최적화(function optimization)는 유전 알고리즘의 연구 분야에서 가장 오랜 역사를 가진 주제 중 하나로 GA연구의 초기에는 새로운 아이디어들이 나오면 주로 함수 최적화 문제에 적용하여 그 효용성을 가늠하는 것이 일반적이었다(문, 2001). 이는 Hollstien(1971)에 의해 처음 다루어졌으며 지금까지 많은 연구를 통해 다양한 특성을 갖는 벤치마크 함수들이 제시되어 왔다(Ackley, 1987; Adem Kalinli and Nurhan Karaboga, 2005; Easom, 1990).

본 연구에서는 그 중 서로 다른 특징을 가지는 5개의 함수 최적화 문제를 사용하였으며, 채택된 문제들은 Table 3.1에 나타내었다. 그리고 각 함수들의 그래프는 Fig. 3.1~3.5에 나타내었다.

이 문제들은 함수를 최소화하는 변수들을 찾는 비제약 최소화 문제이다.

Table 3.1 Test functions

Notation	Name	Function
F1	Sphere	$f = 1 + \sum_{i=1}^4 x_i^2$
F2	Rosenbrock	$f = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 1$
F3	Easom	$f = 2 - \cos x_1 \cos x_2 \exp(-(x_1 - \pi)^2(x_2 - \pi)^2)$
F4	Ackley	$f = 21 + e - 20e^{-0.2\sqrt{0.5(x_1^2 + x_2^2)}} - e^{0.5(\cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2)}$
F5	Rastrigin	$f = 21 + x_1^2 + x_2^2 - 10 \cos(2\pi x_1) - 10 \cos(2\pi x_2)$

각 함수들의 특징은 다음과 같다.

① **F1** - Sphere 함수는 대칭성, 볼록성(convexity)을 만족하므로, 전역적 최소로의 수렴이 용이한 함수이다. 따라서 이의 결과를 통해 최적화 알고리즘의 수렴 속도, 탐색효율 등의 일반적인 성능을 평가할 수 있다.

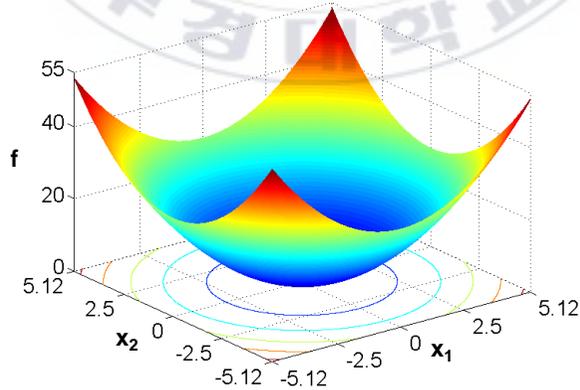


Fig. 3.1 Sphere function.

② **F2** - Rosenbrock 함수는 가장 널리 알려진 시험 함수로 이의 전역적 최소는 바나나 모양의 길고 좁으며 편평한 골 안에 위치한다. 최적화 알고리즘의 적용 시 바나나 모양의 골로의 수렴은 용이하나, 이 골에서 탐색이 멈출 위험을 가진다. 따라서 전역적 최소로의 수렴이 어려울 것으로 예상된다.

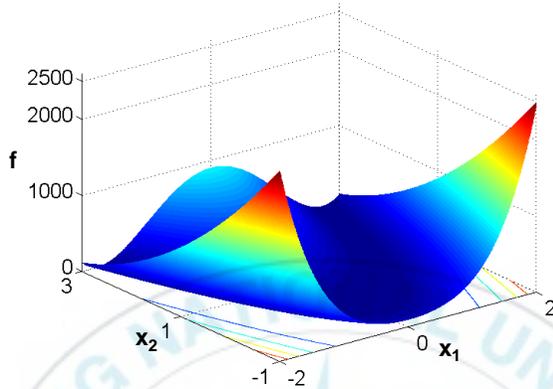


Fig. 3.2 Rosenbrock function.

③ **F3** - Easom 함수는 국부적 최소는 가지지 않으나, 탐색 공간에 비해 전역적 최소 부근의 영역이 작고 그 부근을 제외한 모든 영역의 함수값이 동일하다. 따라서 대부분의 탐색 알고리즘이 전역적 최소를 찾는데 어려움을 가질 것으로 예상된다.

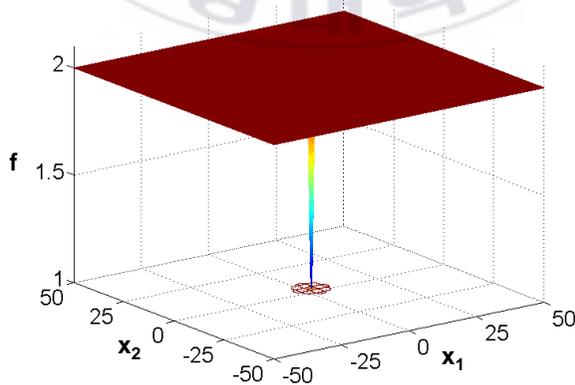


Fig. 3.3 Easom function.

④ **F4** - Ackley 함수는 Fig. 3.4의 형태를 가지는 다극 시험 함수(multi-modal test function)이다.

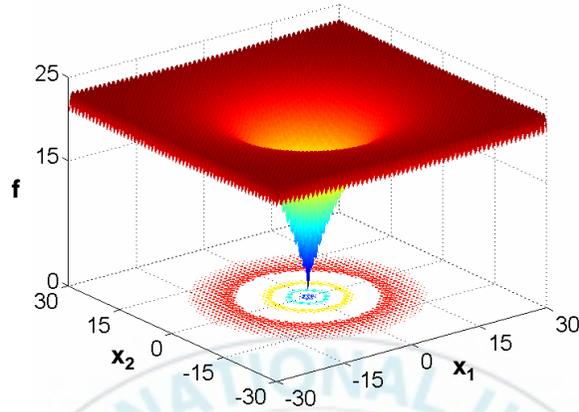


Fig. 3.4 Ackley function.

⑤ **F5** - Rastrigin 함수는 Sphere 함수에 주기 함수인 \cos 함수가 부가됨으로 많은 국부적 최소를 가진다. 위의 Ackley 함수와 비교했을 때, 국부적 최소들의 봉우리가 높고 전역적 최소와 그 부근 국부적 최소와의 목적함수값 차이가 크지 않다. 따라서 국부적 최소로 빠질 위험이 클 것으로 예상된다.

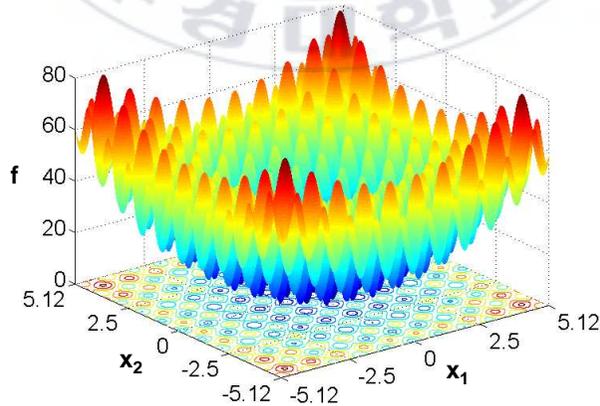


Fig. 3.5 Rastrigin function.

각 시험 함수의 설계 변수 범위와 전역적 최적해는 Table 3.2에 제시하였다.

Table 3.2 Definition of design variables and solutions for test functions

Function	Solution		Design variables bound	
	x_{opt}	f_{opt}	Lower	Upper
F1	(0, 0, 0, 0)	1	-5.12	5.12
F2	(1, 1)	1	-2	2
F3	(π , π)	1	-50	50
F4	(0, 0)	1	-30	30
F5	(0, 0)	1	-5.12	5.12

2) 제약 최적화 문제

실제 공학설계문제들은 제약조건을 동반한다. 따라서 본 연구에서는 앞의 5가지 함수 최적화 문제에 더하여 Michaelwics와 Schoenauer에 의해 연구된 제약 최적화의 벤치마크 문제를 사용하여 MGA의 성능을 평가한다(Michaelwicz and Schoenauer, 1996). 채택된 문제는 다음과 같다.

① Problem 1 (P1) :

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\
 \text{S.t.} \quad & g = x_2 - x_1^2 = 0 \\
 & -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2 \\
 \text{Solution} \rightarrow & x_{opt} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \quad f_{opt} = 0.75
 \end{aligned}$$

② Problem 2 (P2) :

$$\text{Min} \quad f = 1.095825 - \frac{\sin^3(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)}{x_1^3(x_1 + x_2)}$$

$$\begin{aligned} \text{S.t. } \quad & g_1 = x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0 \\ & g_2 = 1 - x_1 + (x_2 - 4)^2 \leq 0 \\ & 0 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\text{Solution} \rightarrow x_{opt} = (1.2279713, 4.2453733), \quad f_{opt} = 1$$

이 두 시험 문제의 특징은 Table 3.3에 제시하였다. P1은 하나의 등호 제약조건을 가지는 문제이며, P2는 두 개의 부등호 제약조건을 가지는 문제이다.

등호 제약조건을 가지는 최적화 문제의 유용설계는 제약함수의 표면에 존재하므로 P1의 유용영역(feasible region)의 크기는 전체 해공간의 0%이다.

Table 3.3 Characteristics of test problems

Problem	Type of objective function	Size of feasible region(%)
P1	Quadratic	0.000
P2	Non-linear	0.856

3.2.2 초기 입력 변수

수치 예제에 사용하는 SA, SGA, μ GA, MGA는 비교를 위하여 가능한 한 동일 조건 하에서 실험한다. 각 시험 문제를 위한 설계 변수의 분해능(resolution)과 문자열의 길이(string length)는 Table 3.4에 나타내었다.

Table 3.4 Definition of variables of mathematical optimization problems

Problem	Resolution	String length
F1	0.0001	20
F2	0.0001	18
F3	0.0001	22
F4	0.0001	22
F5	0.0001	20
P1	0.0001	18
P2	0.0001	20

1) 모사 풀림(SA)

SA를 이용하기 위한 각 시험 문제에 대한 초기 파라미터는 Table 3.5에 나타내었다. 그리고 모든 문제에 대하여 냉각스케줄로 기하 스케줄을 사용하였고, 냉각계수와 볼츠만상수는 각각 0.99, 1.0을 사용하였다.

SA는 GA들과 조건을 동일하게 지정할 수 없으므로 시행 착오법을 사용하여 가장 빠른 수렴을 하는 변수값들로 설정하였다. 그리고 SA의 초기 설계점은 각 문제의 전역적 최소해 부근 점을 사용하였다. 이는 SA가 초기 설계점을 최적해 근처의 값을 사용함에도 불구하고, 최적점에 수렴하기 위해 많은 계산시간이 소요된다는 것을 보이기 위함이다. 설정된 조건에 의해 함수는 F1, F2, F4, F5, P2의 경우 41,250번, F3, P1의 경우 103,100번 계산된다.

Table 3.5 Design optimization parameters for SA

Problem	Initial temperature	Final temperature	Max. iteration number of inner loop	Starting points
F1	100	0.0001	30	(0.1, 0.1, 0, 0)
F2	100	0.0001	30	(1.0, 1.1)
F3	1000	0.000001	50	(3.0, 3.0)
F4	100	0.0001	30	(0.1, 0.1)
F5	100	0.0001	30	(1.1, 1.0)
P1	1000	0.000001	50	(0.7, 0.5)
P2	100	0.0001	30	(1.2, 4.0)

2) 유전알고리즘(GA)

수치예제에 사용하는 SGA, μ GA, MGA의 유전연산자는 Table 3.6에 제시하였다. SGA와 μ GA는 기존의 유전연산자를 사용한다. 그리고 MGA는 Metropolis 알고리즘과 룰렛휠 선택을 조합하여 개체를 선택한다는 것을 제외하고는 SGA의 기본 틀을 따른다.

Table 3.6 Genetic operators used for SGA, GA, and MGA

Genetic operator	SGA	μ GA	MGA
Reproduction	Roulette wheel	Tournament	Metropolis algorithm + Roulette wheel
Crossover (Probability)	One-point (0.85)	One-point (1)	One-point (0.85)
Mutation (Probability)	Simple mutation (0.01)	-	Simple mutation (0.01)
Elitism	Yes	Yes	Yes

Table 3.7 Parameters used for SGA and MGA

Parameter	F1	F2	F3	F4	F5	P1	P2
Population size	20	20	20	20	20	60	20
Max. generation	200	200	500	200	500	1000	200

Table 3.8 Design optimization parameters for MGA

Input parameter	F1	F2	F3	F4	F5	P1	P2
Initial temperature	100	100	100	100	100	1000	100
Cooling coefficient	0.95	0.99	0.95	0.95	0.99	0.99	0.99

각 시험문제에 대한 SGA와 MGA의 집단 크기, 최대 세대수는 Table 3.7에 나타내었다. μ GA의 경우 집단 크기가 5로 고정되므로, SGA, MGA와 조건을 동일하게 하기 위하여 SGA, MGA와 함수평가수가 동일하게 되도록 최대 세대수를 설정하였다. 그리고 각 문제에 대한 MGA의 초기 온도와 냉각 계수는 Table 3.8에 나타내었다. MGA에서 수용기준은 기존의 집단 내 개체들의 적합도 평균을 사용한다.

3.3 결과 및 고찰

SGA, μ GA, MGA는 난수(random number)를 사용하는 확률론적 탐색 기법이므로, 문제를 풀 때마다 다른 해에 수렴할 수 있는 해의 임의성을 가진다. 그러므로 GA들의 성능은 수렴 신뢰성과 탐색 효율을 비교함으로써 평가한다. 수렴 신뢰성은 각 알고리즘을 반복 수행하여 목적함수값의 간격에 대한 빈도(frequency)를 계산함으로써 평가하며, 탐색 효율은 반복 수행하여 얻은 세대별 목적함수값 또는 적합도의 평균을 구하여 그 이력상태를 분석함으로써 평가한다(Fan et al., 2000).

SA의 경우 GA들보다 많은 함수 평가수를 사용하고, 초기점으로 최적해 부근점을 사용하였음에도 불구하고, 모든 시험 문제에서 최적해로 수렴하지 못했다. 이는 더 많은 함수평가수를 가지고 수행할 경우 최소해로 수렴할 수 있으나 GA들에 비해 많은 시간이 소요되므로 비교에서는 우수성이 떨어진다고 판단된다.

본 연구에서는 모든 수치 예제에 대하여 MGA, SGA, μ GA를 100회 반복 수행하였다.

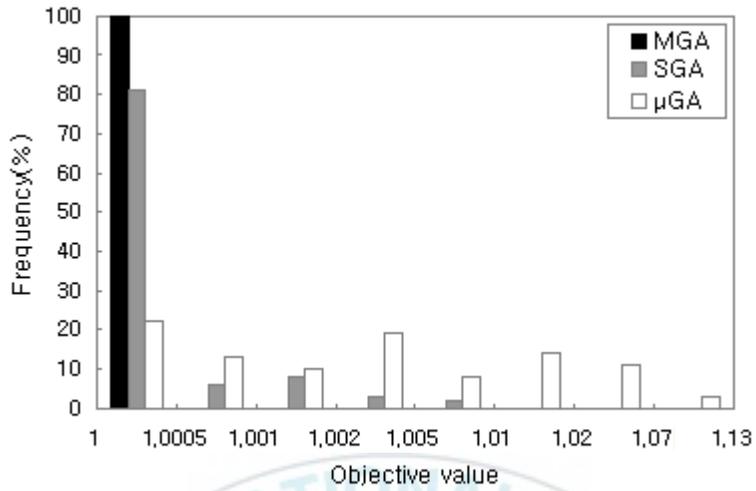
3.3.1 함수 최적화 문제

1) 수렴 신뢰성

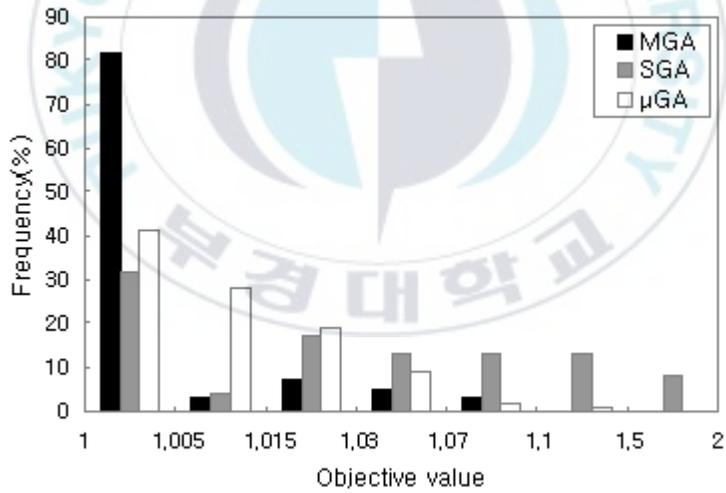
MGA, SGA, μ GA의 수렴 신뢰성을 비교하기 위하여, 각 시험 함수에 대하여 GA들을 100회 반복 수행하여 목적함수값의 간격에 대한 빈도를 Fig. 3.6에 막대 그래프로 나타내었다. 그리고 반복 수행하여 얻은 목적함수값들의 폭은 Table 3.9에 나타내었다.

① F1 (Sphere function)

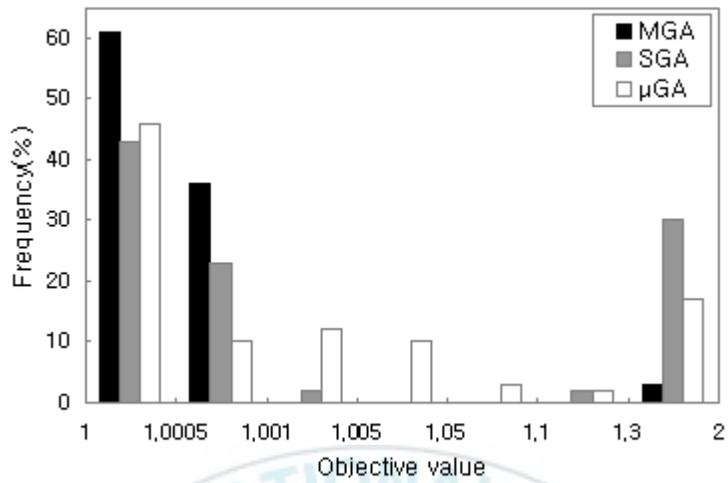
F1의 경우 Table 3.9에 제시하였듯 MGA가 반복 수행하여 얻은 목적함수값의 폭이 가장 작다. 그리고 Fig 3.6(a)에서 MGA는 전역적 최소해로의 수렴 비율이 가장 높다. 특히, 목적함수값의 [1, 1.0005]구간에서 MGA는 100%의 빈도를 보인 반면에 SGA는 81%, μ GA는 22%의 빈도를 보였다.



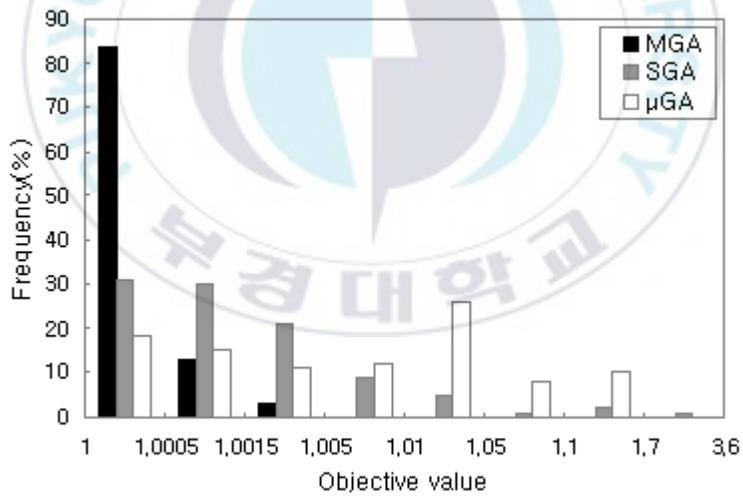
(a) F1



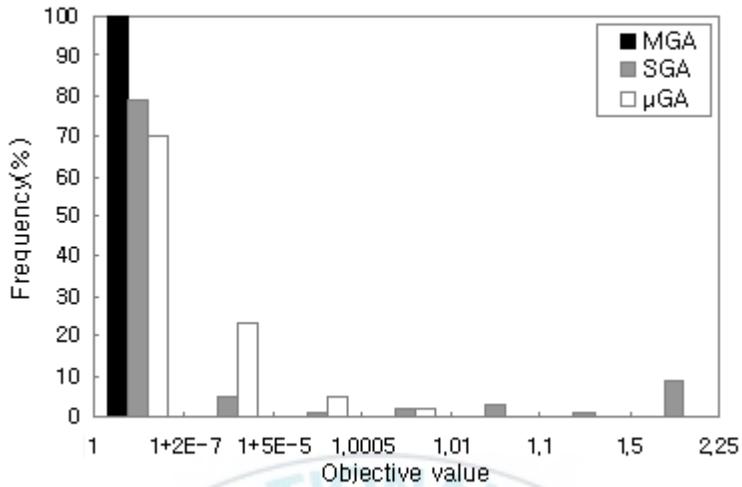
(b) F2



(c) F3



(d) F4



(e) F5

Fig. 3.6 Distribution of obtained optima for test functions with 100 trials.

Table 3.9 Range of obtained optima for test functions with 100 trials

Function	Range of optima		
	MGA	SGA	μGA
F1	[1, 1.0005]	[1, 1.0064]	[1, 1.1278]
F2	[1, 1.0840]	[1, 2.0000]	[1, 1.1103]
F3	[1, 2.0000]	[1, 2.0000]	[1, 2.0000]
F4	[1, 1.0030]	[1, 3.5869]	[1, 1.6637]
F5	[1, 1.0000]	[1, 2.2358]	[1, 1.0050]

② F2 (Rosenbrock function)

F2 역시 MGA에 의해 얻어진 목적함수값의 폭이 가장 작으며, Fig. 3.6(b)에서 MGA가 전역적 최소해로의 수렴비율이 가장 높다. [1, 1.005]의 목적치 범위에서 SGA와 μGA는 각각 32%, 41%의 빈도를 보인 반면, MGA는 훨씬 많은 82%의 빈도를 보였다.

③ F3 (Easom function)

Easom 함수는 Fig. 3.3에서 볼 수 있듯이 전역적 최소 부근을 제외한 모든 영역의 목적함수값이 2로 동일하며, 전역적 최소 부근은 전체 해공간에 비해 아주 작은 면적을 가진다. 따라서 GA들의 집단 내에 전역적 최소 부근의 점이 포함되지 않을 확률이 높으며, 그런 경우 집단 내 모든 개체들의 적합도가 동일하기 때문에 전역적 최소로의 탐색에 어려움을 갖게 된다.

F3의 결과 Table 3.9에서 MGA, SGA, μ GA에 의한 목적함수값의 범위는 [1, 2]로 모두 동일하다. 그러나 MGA는 SGA의 29%, μ GA의 15%에 비해 작은 단 2%만이 2의 값에 수렴하였다. MGA가 다른 GA들보다 이 비율이 작은 이유는 Metropolis 기준의 사용 때문인 것으로 판단된다. 집단 내에 목적함수값이 2일 때의 적합도와 조금의 차이가 나는 전역적 최소 부근해들이 포함될 경우, SGA에서는 룰렛휠 선택을 위해 각 개체에 영역을 할당하게 되는데 그때 개체들의 영역은 큰 차이를 가지지 않기 때문에 전역적 최소 부근해들은 선택되지 않을 수 있다. 그러나 MGA에서 그 해들은 Metropolis 기준의 수용기준에 의해 무조건 교배급원에 저장되게 된다. 따라서 MGA는 상대적으로 목적함수값이 2인 점에서 벗어날 확률이 높다고 할 수 있다.

그리고, Fig. 3.6(c)에서 [1, 1.001]의 목적치 구간에서 MGA는 97%의 빈도를 보인 반면 SGA는 66%, μ GA는 56%의 빈도를 보였다. 즉, MGA가 전역적 최소로의 수렴 비율이 가장 높음을 알 수 있다.

④ F4 (Ackley function)

F4는 많은 국부적 최소를 가지는 다극 시험 함수로서 SGA의 경우 얻어진 목적함수 폭 [1, 3.5869]에서 국부적 최소로 빠질 위험을 가짐을 알 수 있다. 그러나 MGA는 얻어진 목적함수 폭이 [1, 1.0030]으로 가장 작으며 특히, [1, 1.0005]의 목적함수 범위에서 SGA의 31%, μ GA의 18%에 비해 훨씬 많은 84%의 빈도를 보였다. 즉 MGA는 대부분 전역적 최소에 수렴함을 알 수 있고, 여기서 국부적 최소로 빠질 수 있는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음을 알 수 있다.

⑤ F5 (Rastrigin function)

F5는 F4와 마찬가지로 SGA의 경우 반복 수행에 의해 [1, 2.2358]범위의 목적함수값에 수렴하였다. 즉, 국부적 최소로 빠질 위험을 가짐을 알 수 있다. 그러나 MGA의 경우 100% 전역적 최소로 수렴하였다. 특히, [1, $1+2E-7$]의 목적함수 범위에서 MGA는 100%의 빈도를 보인 반면에 SGA는 79%, μ GA는 70%의 빈도를 보였다. F5의 결과에서 역시 MGA는 국부적 최소로 수렴할 수 있는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음을 확인할 수 있다.

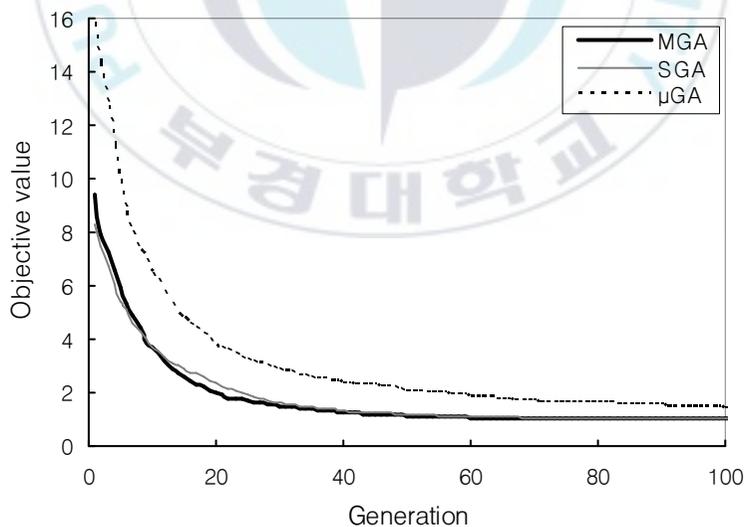
2) 탐색 효율

MGA, SGA, μ GA의 경우 적합도가 큰 개체가 얼마나 빨리 탐색되느냐에 따라 목적함수값의 이력상태가 달라질 수 있다. 따라서 GA들의 탐색 효율을 비교하기 위하여, 반복 수행하여 얻은 세대별 최소의 목적함수값의 평균을 계산하여 그 이력상태를 Fig. 3.7에 나타내었다. 그리고 세대별 목적함수값의 평균을 Table 3.10~3.14에 나타내었다.

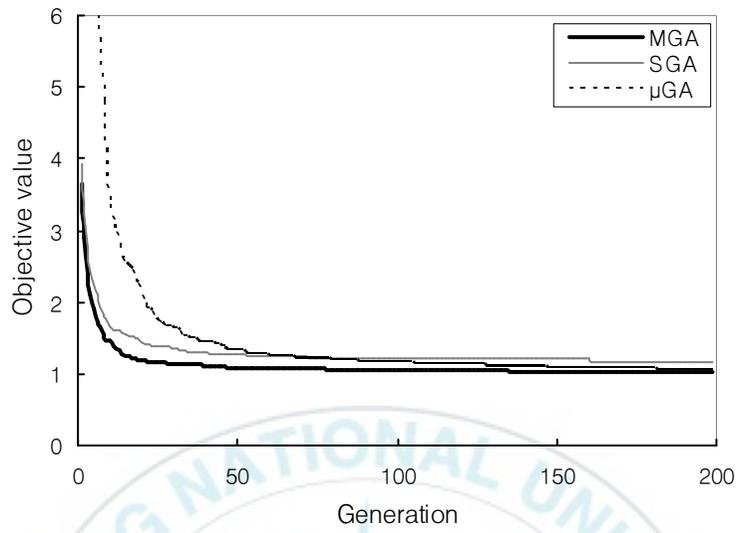
μ GA의 경우 작은 집단에 의해 진행되기 때문에 세대별로 SGA, MGA보다 좋은 성능을 보여주지 못한다. 그러나 SGA, MGA와 함수평가수가 동일해지는 세대수까지 계산하여 나타낸 Fig. 3.6에서 모든 경우 MGA보다는 떨어지지만 SGA와는 비슷한 결과를 보였다.

① F1 (Sphere function)

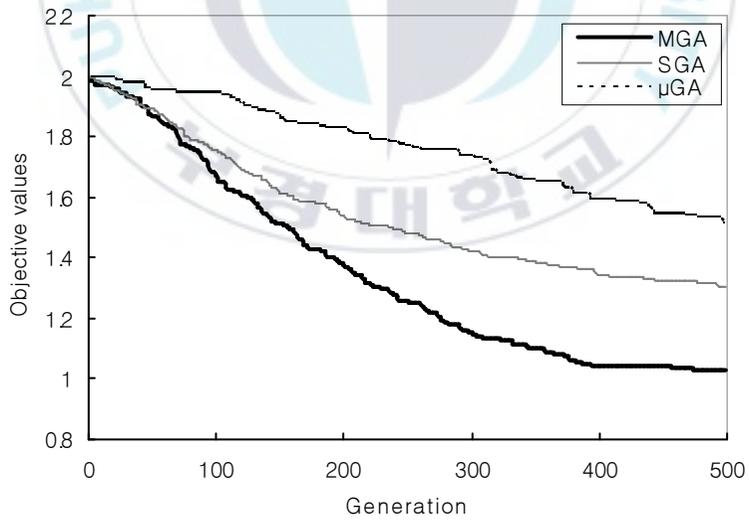
F1의 경우 Fig. 3.7(a)에서 MGA는 초기 10세대 동안 SGA보다 느린 수렴을 하였으나 그 이후의 세대에서는 Table 3.10에서 확인할 수 있듯이 더 빠른 수렴을 하였다. 이는 Metropolis 알고리즘의 사용에 의해 초기 몇 세대에서 SGA보다 수렴이 느릴 수 있는 MGA의 특징을 반영한다.



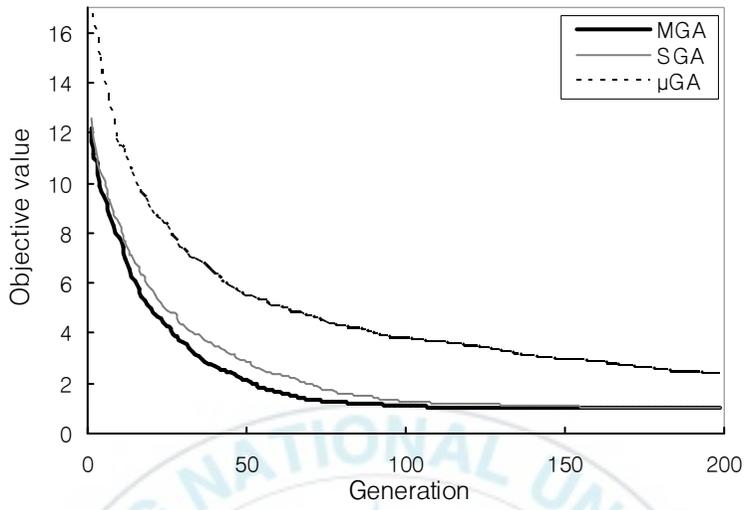
(a) F1



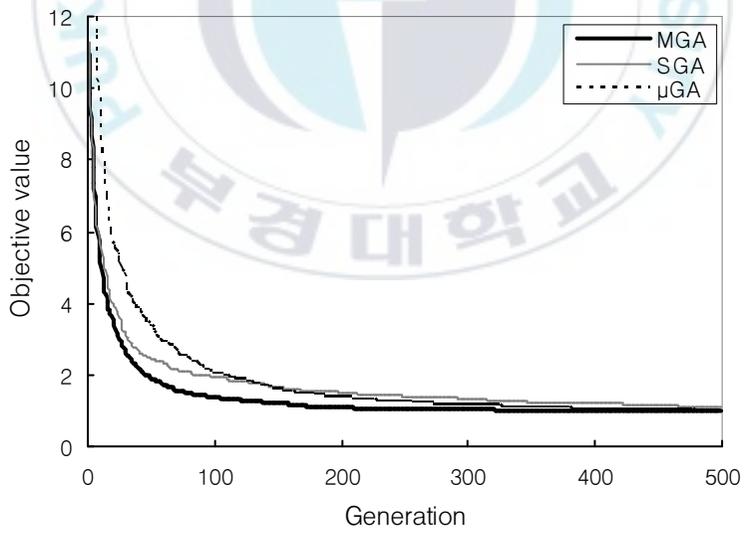
(b) F2



(c) F3



(d) F4



(e) F5

Fig. 3.7 Design history for the averaged best objective values of 100 trials.

Table 3.10 The average of best objective values for F1

Generation	The average of objective values		
	MGA	SGA	μ GA
50	1.1432	1.1930	2.0992
100	1.0060	1.0182	1.4399
150	1.0004	1.0026	1.2077
200	1.0000	1.0005	1.1069

Table 3.11 The average of best objective values for F2

Generation	The average of objective values		
	MGA	SGA	μ GA
50	1.0902	1.2687	1.3247
100	1.0443	1.2168	1.1500
150	1.0328	1.2074	1.0909
200	1.0273	1.1530	1.0455

Table 3.12 The average of best objective values for F3

Generation	The average of objective values		
	MGA	SGA	μ GA
100	1.6711	1.7541	1.9427
200	1.3732	1.5414	1.8284
300	1.1510	1.4232	1.7348
400	1.0434	1.3420	1.5918
500	1.0305	1.3028	1.5135

② F2 (Rosenbrock function)

Fig. 3.7(b)에서 MGA는 가장 빠른 수렴을 보였으며, Table 3.11에서 최대 세대 수에 도달하였을 때 MGA의 목적함수 평균값은 1.0273으로 1.1530인 SGA에 비해 정밀한 최적해에 수렴함을 알 수 있다.

③ F3 (Easom function)

F3의 경우 Fig. 3.6(c)에서 SGA, μ GA는 목적함수값이 2인 점으로의 수렴 비율이 높기 때문에, Fig. 3.7(c)와 Table 3.12에서 세대별 목적함수값의 평균은 전역적 최소의 목적함수값과 큰 차이를 보인다. 즉, MGA의 탐색 효율이 월등히 우수함을 알 수 있다.

④ F4 (Ackley function)

F4 또한 MGA는 Fig. 3.7(d)에서 수렴 속도가 가장 빠르며, Table 3.13에서 SGA보다 정밀한 최적해에 수렴함을 알 수 있다.

⑤ F5 (Rastrigin function)

F5에서 SGA는 9%가 국부적 최소로 수렴하였으며, 따라서 최대 세대수에서 목적함수 평균값은 1.1103이다. 그러나 MGA는 Table 3.14의 최대세대수인 500세대에서 목적함수 평균값이 1.0000이며 100% 전역적 최소해로 수렴함을 알 수 있다.

F4와 F5의 결과로부터 MGA는 초기 세대에 좋은 유전정보의 소실로 국부적 최적해로 수렴할 수 있는 SGA의 단점을 잘 보완함을 알 수 있다.

Table 3.13 The average of best objective values for F4

Generation	The average of objective values		
	MGA	SGA	μ GA
50	2.1515	2.8490	5.4794
100	1.0862	1.2812	3.7621
150	1.0015	1.0768	2.9214
200	1.0004	1.0233	2.3528

Table 3.14 The average of best objective values for F5

Generation	The average of objective values		
	MGA	SGA	μ GA
100	1.3705	1.9556	2.0568
200	1.0872	1.5115	1.3661
300	1.0343	1.3326	1.1529
400	1.0017	1.2077	1.0718
500	1.0000	1.1103	1.0135

3.3.2 제약 최적화 문제

1) 수렴 신뢰성

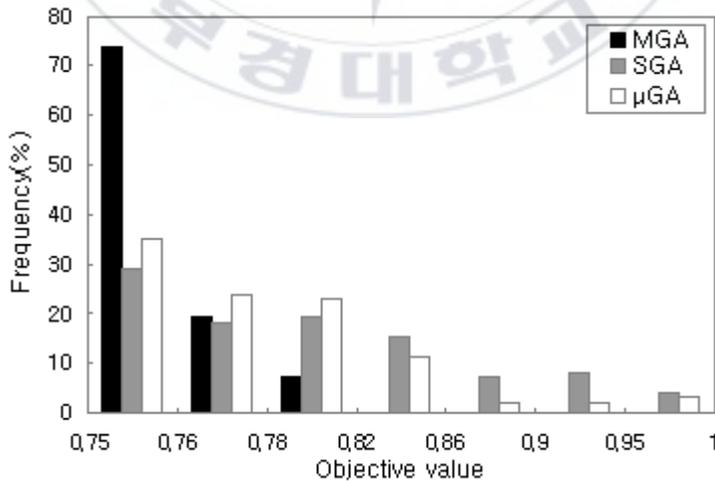
제약 최소화의 두 시험 문제에서도 MGA, SGA, μ GA의 수렴 신뢰성을 비교하기 위하여, GA들을 100회 반복 수행하여 목적함수값의 간격에 대한 빈도를 Fig. 3.8에 막대그래프로 나타내었다. 그리고 GA들을 반복 수행하여 얻은 목적함수값들의 폭은 Table 3.15에 나타내었다.

① P1

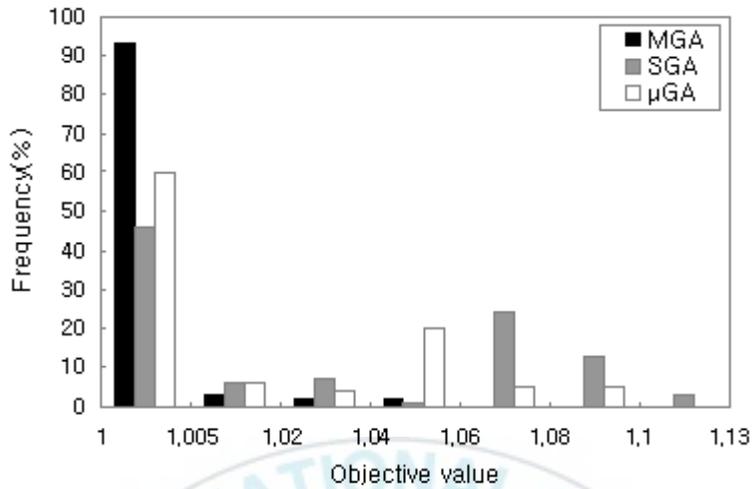
P1의 결과 Table 3.15에서 MGA는 반복 수행하여 얻은 목적함수값의 폭이 가장 작으며, Fig. 3.8(a)에서 전역적 최소로의 수렴빈도가 가장 높다. 특히, [0.75, 0.76]의 목적치 범위에서 MGA는 74%의 빈도를 보인 반면에 SGA는 29%, μ GA는 35%의 빈도를 보였다.

② P2

P2 역시 Table 3.15에서 MGA가 얻어진 목적함수값의 폭이 가장 작았고, [1, 1.005]의 목적치 범위에서 MGA는 SGA의 46%, μ GA의 60%보다 많은 93%의 빈도를 보였다. 즉, 제약 최소화 문제들에서 또한 MGA는 수렴 신뢰성이 가장 우수함을 보였다.



(a) P1



(b) P2

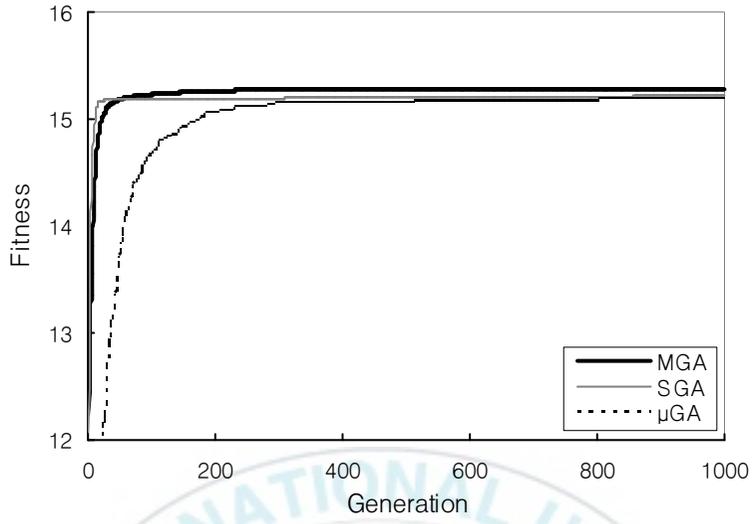
Fig. 3.8 Distribution of obtained optima for test problems with 100 trials.

Table 3.15 Range of obtained optima for test problems with 100 trials

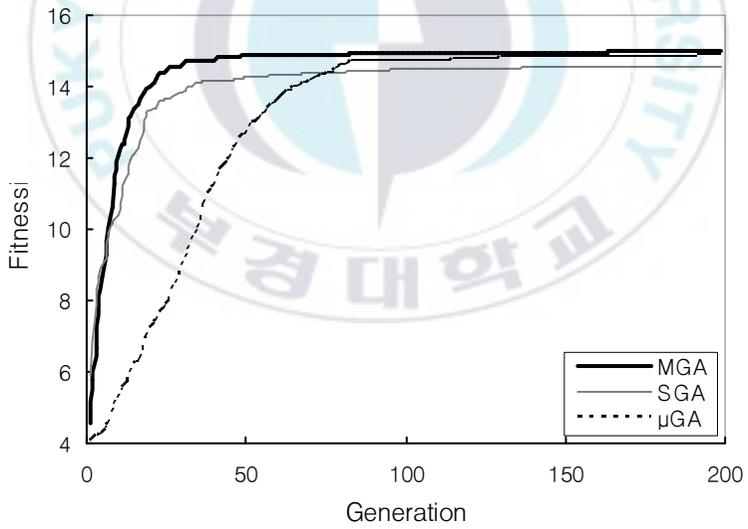
Function	Range of optima		
	MGA	SGA	μGA
P1	[0.7500, 0.8125]	[0.7500, 1.0000]	[0.7500, 0.9904]
P2	[1, 1.0590]	[1, 1.1215]	[1, 1.0958]

2) 탐색 효율

제약 최적화 문제에서는 GA들의 탐색 효율을 비교하기 위하여 각 알고리즘을 100회 반복 수행하여 얻은 세대별 적합도 평균을 계산하여 그 이력상태를 Fig. 3.9에 나타내었다. 그리고 세대별 적합도의 평균을 Table 3.15, 3.16에 나타내었다. P1과 P2에서 전역적 최소의 적합도는 각각 15.288, 15이다.



(a) P1



(b) P2

Fig. 3.9 Design history for the averaged best fitness of 100 trials.

Table 3.16 The average of best fitness for P1

Generation	The average of fitness		
	MGA	SGA	μ GA
50	15.1860	15.1801	13.6385
200	15.2643	15.1888	15.0636
400	15.2767	15.1980	15.1471
600	15.2788	15.2004	15.1695
800	15.2790	15.2106	15.1738
1000	15.2790	15.2179	15.1825

Table 3.17 The average of best fitness for P2

Generation	The average of fitness		
	MGA	SGA	μ GA
50	14.9053	14.2582	12.6900
100	14.9560	14.4751	14.7320
150	14.5462	14.5462	14.8153
200	14.9932	14.5532	14.8790

① P1

Fig. 3.9(a)에서 MGA는 초기 46세대 동안 SGA보다 느린 수렴을 하였으나 그 이후 세대에서는 빠른 수렴을 하였다. 그리고 SGA는 초기에 가장 빠른 속도로 전역적 최소 부근에 다가감을 보였으나 정밀한 최적해로의 수렴에 어려움을 보였다. Table 3.16에서 MGA의 적합도 평균값이 전역적 최소의 적합도와 가장 근접함을 볼 수 있다.

② P2

P2 역시 MGA는 초기 5세대 동안은 SGA보다 느린 수렴을 보였다. 그러나 그 이후 세대에서는 더 빠르고 안정적인 수렴을 보였다. Table 3.17에서 MGA는 평균적으로 다른 GA들보다 훨씬 적은 세대수에서 전역적 최소해로 수렴함을 알 수 있다.

이상의 결과들로부터 MGA는 SA와 MGA를 단독으로 수행했을 때보다 그리고 μ GA보다 우수한 성능을 보였으며, 국부적 최소로의 수렴 가능성을 가지는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음이 확인되었다. 즉 MGA는 최적해로의 수렴이 어려운 다양한 특징의 수학적 최적화 문제에서 높은 적용성을 보였다. 그러므로 다양한 함수로 정식화되는 공학적 최적화 문제에도 우수하게 적용될 것이라 판단된다.

4. 매개변수 연구

MGA는 초기 세대에서 좋은 유전정보를 소실할 수 있는 SGA의 단점을 보완하고자 SA의 Metropolis 알고리즘을 SGA의 재생산 연산자에 결합하였다. 그러므로 Metropolis 알고리즘이 MGA에서 얼마나 그 효과를 발휘하느냐에 따라 MGA의 성능은 좌우될 수 있다. 따라서 본 연구에서는 MGA의 Metropolis 알고리즘에서 사용되는 파라미터들에 대한 매개변수 연구를 수행하였다. 고려한 파라미터는 다음과 같다.

1) 수용기준

SA에서는 수용기준으로 현재해의 적합도를 사용한다. 그러나 SGA는 집단을 운용하는 기법이므로 Metropolis 알고리즘을 SGA에 결합하여 사용하고자 할 때 새로운 수용기준이 도입되어야 한다. 그러므로 적절한 수용기준에 대한 연구는 필요하다.

2) 냉각계수

MGA에서 Metropolis 알고리즘의 주 역할은 적합도가 작은 개체에 수용될 확률을 부여하여 좋은 유전정보의 소실을 방지하는 것이다. 여기서 나쁜 개체의 수용확률은 온도 파라미터에 의해 제어된다. 즉, 초기의 높은 온도에서는 적합도가 작은 개체의 수용 확률이 높아지지만, 매 세대 냉각계수에 의해 온도는 감소됨으로 수용확률도 작아진다. 그러므로 냉각계수에 의해 나쁜 개체의 수용 비율이 좌우된다고 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 MGA의 적용성을 높이기 위하여, Metropolis 알고리즘의 성능에 큰 영향을 줄 것으로 예상되는 수용기준과 냉각계수에 따른 MGA의 영향을 평가한다.

4.1 연구방법

최적화 알고리즘은 출발점에 관계없이 최적점으로의 수렴을 보장해야 한다. 이러한 성질을 전역적 수렴성(global convergence)이라고 한다. 그리고 가능한 한 빠른 수렴률을 가지는 방법을 선택해야 하는데 이 수렴률의 척도를 국부적 수렴성(local convergence)이라고 한다(류 등, 1994). 즉, 전역적 수렴성과 국부적 수렴성이 뛰어난수록 우수한 알고리즘이라 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 전역적 수렴성과 국부적 수렴성을 비교 분석함으로써 냉각계수와 수용기준에 따른 MGA의 영향을 평가하며 이를 수행하기 위한 케이스

는 Table 4.1에 나타내었다. 수치예제로는 3.2.1절에 제시된 5개의 함수 최적화 문제를 사용한다.

전역적 수렴성은 고정된 세대수에서 만족할 만한 해(optima range)를 구한 비율(P_{opt})로, 국부적 수렴성은 만족할 만한 해를 구할 때까지의 함수의 계산 횟수(N_{opt})로 계산하였다. 전역적 수렴성의 측정을 위하여 사용한 세대수는 Table 4.2에 제시하였다. 그리고 모든 시험 함수의 전역적 최소는 1이므로 만족할 만한 해로 전역적 최소와 1%, 0.1% 차이나는 1.01, 1.001 두 가지를 고려하였다.

수용기준은 2.4.3절에서 설명한 네 가지 수용기준을 사용하였다. Table 4.1에서 수용기준으로 제시한 $N_{1/4}$, $N_{1/2}$, $N_{3/4}$ 은 수용기준에 의해 보존되는 엘리트 개체의 비율이 25%, 50%, 75%가 되도록 수용기준을 설정한 경우로, 집단크기가 N 인 집단 내 개체들 중 적합도의 크기가 $N/4$ 번째, $N/2$ 번째, $3N/4$ 번째로 큰 개체를 수용기준으로 설정한 경우를 나타낸다. 그리고 m 은 집단 내 개체들의 적합도 평균을 수용기준으로 설정한 경우이다.

F2와 F5에서 냉각계수로 0.99만을 고려한 이유는 3장에서 MGA의 성능을 평가할 때 이 두 함수의 경우 다른 함수처럼 0.95의 냉각계수를 사용하였을 때 SGA와 비슷한 결과를 보였기 때문이다. 따라서 F2와 F5는 냉각계수로 0.99가 가장 적절한 것으로 판단된다.

매개변수 연구에서 역시 모든 경우에 대하여 MGA는 100회 반복 수행하였다.

Table 4.1 The cases for the parametric study of MGA

Function	Cooling coefficient(α)	Acceptance level(F_a)
F1(Sphere)	0.95, 0.7, 0.5	$N_{1/4}$, $N_{1/2}$, $N_{3/4}$, m
F2(Rosenbrock)	0.99	
F3(Easom)	0.95, 0.7, 0.5	
F4(Ackley)	0.95, 0.7, 0.5	
F5(Rastrigin)	0.99	

Table 4.2 Parameters for evaluation of global convergence

Parameter	F1	F2	F3	F4	F5
Population size	20	20	50	20	40
Max. generation	100	200	400	100	200

4.2 결과 및 고찰

모든 케이스의 냉각계수와 수용기준에 따른 MGA의 진역적 수렴성과 국부적 수렴성에 대한 결과는 Table 4.3에 나타내었다.

① F1 (Sphere function)

MGA의 특성상, 수용기준에 의해 집단 내에서 상대적으로 우수한 개체들은 어느 정도 보존된다. 그리고 세대를 거칠수록 온도가 낮아지므로 나쁜 개체의 수용 확률이 작아져 룰렛휠 선택에 의해 집단에서 상대적으로 우수한 개체들의 선택 기회가 증가하게 된다. 따라서 MGA에서는 온도를 급속히 내릴수록 즉 냉각계수가 작을수록 집단은 빠르게 집단 내에서 상대적으로 좋은 개체들로 이루어지게 되므로 좋은 유전정보를 가지고 있을지 모르는 적합도가 작은 개체들은 소실될 수 있다.

F1의 경우 Table 4.3에서 MGA는 냉각계수와 수용기준에 의해 보존되는 개체의 비율이 작을수록 더 작은 함수평가수를 가진다. 이는 F1이 수렴하기 용이한 특징만을 가지기 때문인 것으로 보이며, 이 결과로부터 연속성, 불록성, 대칭성을 만족하는 함수의 경우 냉각계수로 0.5, 수용기준으로 $N_{1/4}$ 이 적절한 것으로 판단된다.

② F2 (Rosenbrock function)

F2는 바나나 모양의 편평하고 길며 좁은 골 안에 최적해가 존재하기 때문에 골에서 탐색이 멈출 위험을 가지므로 넓은 해공간이 보장되어야 한다. 따라서 냉각계수로 0.99가 가장 적절하다.

그리고 Table 4.3의 결과에서 MGA는 $N_{3/4}$ 의 수용기준을 사용한 경우 함수평가수가 다른 경우에 비해 훨씬 작다. $N_{3/4}$ 의 경우 집단에서 상위 75%의 개체가 보존되지만 사실상 중하위 개체들도 포함한다고 할 수 있다. 따라서 $N_{1/4}$ 보다 수용기준에 의해 적합도가 작은 개체들이 상대적으로 많이 수용되기 때문에 온도가 충분히 감소된 후에도 $N_{3/4}$ 은 넓은 해공간이 보장된다. 따라서 F2의 경우 $N_{3/4}$ 에서 수렴률이 월등히 높은 것으로 판단된다.

③ F3 (Easom function)

국부적 수렴성을 평가하기 위하여, 100회 반복의 모든 결과가 1.001미만의 값으로 수렴해야 한다. 그러므로 초기에 충분히 큰 최대 세대수를 지정하여야 하며, F3에서는 50의 집단 크기와 800의 최대 세대수를 사용하였다. 이 때 0.95의 냉각계수에서만 모두 1.001미만의 값에 수렴하였다. 0.7과 0.5의 냉각계수에서는

각각 10%, 22%가 2의 값으로 수렴하였다. 그러므로 0.95의 결과만 Table 4.3에 나타내었다.

그 결과 MGA는 수용기준으로 평균(m)을 사용하였을 때 가장 우수한 수렴성을 보였다. Easom 함수의 특성상 집단 내의 개체 중 하나가 수용 기준이 되는 $N_{1/4}$, $N_{1/2}$, $N_{3/4}$ 의 경우, 목적함수값이 2인 개체가 수용기준이 될 확률이 높다. 그런 경우 전역적 최소 부근의 개체들은 수용기준에 의해 먼저 수용되며 목적치가 2인 나머지 개체들 역시 1의 수용확률을 가지게 됨으로 무조건 수용되게 된다. 즉, 집단 내의 개체들이 그대로 교배 급원에 저장되게 된다. 따라서 재생산 연산자의 의미가 줄어들며 교배와 돌연변이만으로 알고리즘이 수행되게 되어 수렴이 느리게 된다. 그러므로 F3함수에서는 수용기준으로 평균이 우수한 결과를 보인 것으로 판단된다.

그리고 냉각계수가 0.99일 때, 평균의 수용기준을 사용하여 100회 반복 수행해 보았는데 그 결과 $[1, 1.01]$ 에서 $P_{opt} = 98\%$, $N_{opt} = 7512$ 그리고 $[1, 1.001]$ 에서 $P_{opt} = 98\%$, $N_{opt} = 9394$ 를 가졌다. 즉, 0.99의 냉각계수에서도 100회 모두 1.001미만의 값에 수렴하였다. 그러나 0.95의 냉각계수를 사용하였을 때 보다 더 많은 함수평가수가 요구되었다. 따라서 F3와 같은 특징을 가지는 함수의 경우에 냉각계수로 0.95, 수용 기준으로 평균이 적절한 것으로 판단된다.

④ F4 (Ackley function)

F4의 결과, 0.7의 냉각계수와 $N_{1/2}$ 의 수용기준에서 우수한 수렴성을 보였다. 이 함수는 많은 국부적 최소를 가지나 최소점들의 봉우리가 낮고 전역적 최소는 국부적 최소에 비해 목적함수값이 현저히 작다. 따라서 냉각 계수로 크지도 작지도 않은 0.7과 $N_{1/2}$ 의 수용기준에서 수렴률이 빠른 것으로 판단된다.

⑤ F5 (Rastrigin function)

F5 또한 많은 국부적 최소를 가지는 함수이다. 그러나 F4와 달리 최소점들의 봉우리가 높고 전역적 최소의 목적함수값과 그 부근 국부적 최소의 목적함수값이 크게 차이가 나지 않으므로 국부적 최소로의 수렴확률이 크다. 그러므로 넓은 해공간의 탐색이 보장되어야 한다. 따라서 냉각계수는 0.99가 가장 적절하다. 그리고 수용기준은 $N_{1/4}$ 과 평균의 경우에 함수평가수가 비교적 작으나, 네 가지 수용기준에 의한 함수평가수는 크게 차이가 나지 않았다.

Table 4.3 Effect of acceptance level and cooling coefficient
on the range of optima obtained in 100 trials

Function	Optima range	α	F_a							
			$N_{1/4}$		$N_{1/2}$		$N_{3/4}$		m	
			P_{opt}	N_{opt}	P_{opt}	N_{opt}	P_{opt}	N_{opt}	P_{opt}	N_{opt}
F1	1% [1, 1.01]	0.95	94%	1422	93%	1407	83%	1565	86%	1583
		0.7	100%	856	100%	875	100%	1056	100%	1024
		0.5	100%	783	100%	819	100%	997	99%	961
	0.1% [1, 1.001]	0.95	39%	2058	38%	2053	29%	2320	22%	2293
		0.7	99%	1187	100%	1147	91%	1509	87%	1522
		0.5	99%	1086	100%	1088	95%	1490	86%	1514
F2	1% [1, 1.01]	0.99	78%	4020	88%	2391	98%	1609	94%	2292
	0.1% [1, 1.001]	0.99	62%	6291	70%	4092	68%	3092	78%	4404
F3	1% [1, 1.01]	0.95	99%	7286	98%	7431	98%	8143	100%	6024
	0.1% [1, 1.001]	0.95	96%	9121	95%	9475	94%	10257	99%	7209
F4	1% [1, 1.01]	0.95	68%	1830	46%	2015	35%	2218	52%	2007
		0.7	91%	1371	93%	1309	89%	1508	91%	1442
		0.5	87%	1449	90%	1442	95%	1403	85%	1484
	0.1% [1, 1.001]	0.95	18%	2476	11%	2733	8%	2984	12%	2829
		0.7	76%	1793	82%	1765	44%	2168	36%	2260
		0.5	80%	1786	79%	1863	52%	2072	40%	2272
F5	1% [1, 1.01]	0.99	98%	3593	98%	3648	94%	3755	100%	3460
	0.1% [1, 1.001]	0.99	97%	4400	96%	4694	89%	4800	99%	4568

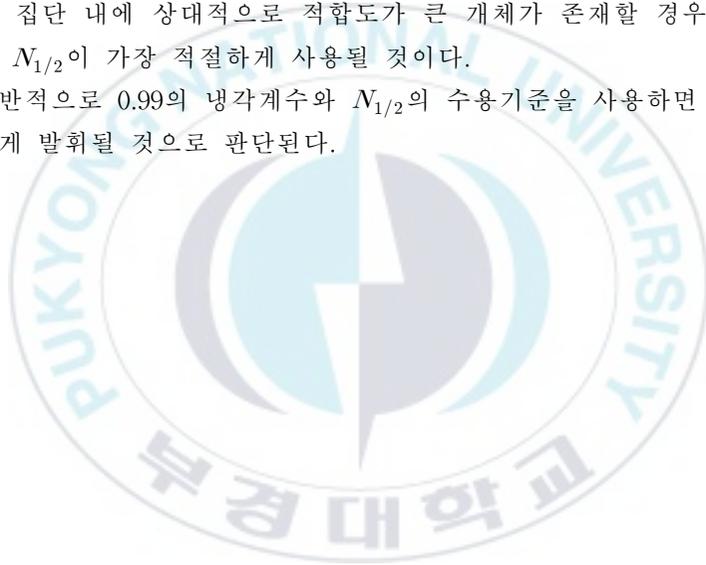
이상의 결과에서 함수의 특징에 따른 적절한 냉각계수와 수용기준이 다름을 보았다. 이는 함수 특징에 따른 MGA의 파라미터 선택기준으로 사용될 수 있다. 그러므로 공학적 최적화 문제에서 정식화된 함수의 특징을 알 수 있을 때 그 기준에 따라 적절한 냉각계수와 수용기준을 사용한다면, MGA는 그 성능이 최대한 발휘될 것으로 판단된다.

그리고 공학적 최적화 문제에서 정식화된 함수의 특징을 정확히 판별하기 난해한 경우에는 냉각계수와 수용기준으로 다음의 값이 적절할 것으로 사료된다.

1) 보통의 공학적 최적화 문제들은 많은 제약조건을 동반하며 다양한 비선형 함수들을 가진다. 따라서 넓은 해공간의 탐색이 보장되어야 SGA의 단점이 잘 보완될 수 있으므로 냉각계수는 0.99가 가장 적절할 것이다.

2) 수용기준으로 $N_{1/4}$ 이나 $N_{3/4}$ 은 함수 특징에 따라 수렴성에 큰 차이를 보였으며 평균은 집단 내에 상대적으로 적합도가 큰 개체가 존재할 경우 문제가 될 수 있으므로 $N_{1/2}$ 이 가장 적절하게 사용될 것이다.

따라서 일반적으로 0.99의 냉각계수와 $N_{1/2}$ 의 수용기준을 사용하면 MGA의 성능이 무난하게 발휘될 것으로 판단된다.



5. 요약 및 결론

메트로폴리스 유전알고리즘은 단순 유전알고리즘의 재생산 과정에 모사 폴림의 주요체인 Metropolis 알고리즘을 조합함으로써 SGA의 초기세대에 발생하는 좋은 유전정보의 소실을 방지하여 해의 정확성과 신뢰성을 향상시키고자 개발된 알고리즘이다.

MGA의 적용 범위를 넓히기 위하여, 본 연구에서는 수학적 최적화 문제를 이용하여 MGA의 성능을 평가하였다. 성능평가를 위한 수치예제로 서로 다른 특징을 가지는 5개의 함수 최적화 문제와 2개의 제약 최적화 문제를 사용하였고, 비교 알고리즘으로는 MGA의 기본이 되는 SGA와 SA 그리고 μ GA를 사용하였다. 그 수행결과로부터 GA들의 수렴 신뢰성과 탐색 효율을 비교·분석함으로써 MGA의 성능을 평가하였다.

그리고 MGA의 적용성을 높이기 위하여, Metropolis 알고리즘에 사용되는 파라미터들 중 수용기준과 냉각기준에 대한 매개변수 연구를 수행하였다. 수치예제로 5가지 함수 최적화 문제를 사용하였고, 수용기준으로 1) $N_{1/4}$, 2) $N_{1/2}$, 3) $N_{3/4}$, 4)적합도 평균, 4가지를 고려하였다. 여기서 $N_{1/4}$, $N_{1/2}$, $N_{3/4}$ 은 수용기준에 의해 보존되는 엘리트 개체의 비율이 25%, 50%, 75%가 되도록 수용기준을 설정한 경우이다. 그리고 3가지 냉각계수를 주어 모든 케이스의 전역적 수렴성과 국부적 수렴성을 비교·분석함으로써 수용기준과 냉각계수에 따른 MGA의 영향을 평가하였다.

성능 평가의 결과, MGA는 SA, SGA, μ GA보다 우수한 성능을 보였다. SA는 GA들보다 많은 함수평가수를 가지고 수행하였으나, 최적해에 수렴하지 않았다. 이는 더 많은 함수평가수를 가지고 수행할 경우 정밀한 최소해로 수렴할 가능성이 있을 것이나, GA들에 비해 많은 시간이 소요되므로 비교에서는 우수성이 떨어진다고 판단된다. 그리고 MGA, SGA, μ GA를 각각 100회 반복 수행한 결과, MGA는 모든 시험 문제에서 얻어진 목적함수값의 폭이 가장 작았으며 최적해로의 수렴 비율이 가장 높았다. 일부 수치예제에서 MGA는 초기에 SGA보다 느린 수렴을 보였으나 그 이후 세대에서는 더 안정적이고 빠른 수렴을 보였다. 이는 Metropolis 알고리즘의 사용으로 초기 세대들에서 적합도가 작은 개체가 대부분 받아들여지므로 일어나는 현상임을 확인하였다. 그리고 많은 국부적 최소를 가지는 문제와 등호제약조건을 가지는 문제 등에서 SGA는 정밀한 최적해를 찾는 데 어려움을 보였다. 그러나 MGA는 정밀한 최적해로의 수렴비율이 다른 GA들보다 훨씬 높았다. 즉, MGA는 다양한 특징을 가지는 수학적 최적화 문제에서 SA, SGA, μ GA보다 성능이 우수하며, 국부적 최소로의 수렴 가능성을 가지는 SGA의 단점을 잘 보완하고 있음이 확인되었다.

매개변수 연구의 결과, 시험 함수에 따른 냉각계수와 수용기준의 적정치가 제안되었다. 이는 함수 특징에 따른 MGA의 파라미터 선택기준으로 사용될 수 있다. 그리고 정식화된 함수의 특징을 정확히 판별하기 난해한 경우나 MGA를 처음으로 사용할 경우에는 냉각계수는 0.99, 수용기준은 $N_{1/2}$ 를 제안한다.



참고 문헌

Ackley D. H.(1987), "A connectionist machine for genetic hillclimbing, ,Kluwer Academic Publishers.

Adem Kalinli and Nurhan Karaboga(2005). "Artificial immune algorithm for IIR filter design", Engineering Applications of Artificial Intelligence, 18 : 919 - 929.

Easom, E. E.(1990), A survey of global optimization techniques. M. Eng. Thesis, University of. Louisville, Louisville, KY.

Fan, H.Y. et al(2000), "An Empirical Comparison of Three Novel Genetic Algorithms", Engineering Computations, Vol. 17, No. 8, pp. 981 - 1001.

Holland, J.h.(1975), Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor.

Kirkpatrick, S.(1983), Optimization by Simulated Annealing : Quantitative Studies, J. Stasis, Phys.

Krishnakumar, K.(1989), "Micro-genetic Algorithms for Stationary and Non-stationary Function Optimization", SPIE, Intelligent Control and Adaptive Systems, Vol. 1196, pp. 289 - 296.

Lee, H.J., Ryu, Y.S., Na, W.B.(2007),"Performance Evaluation of MGA in the Solution of Mathematical Optimization Problems", Proc. of WCSMO7, pp. 2394 - 2401.

Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller A. and Teller(1953), "Equation of State Calculations by Fast Computing Machines", J. of Chem. Physics, 21. pp. 1087 - 1092.

Michaelwicz Z, Schoenauer M(1996), "Evolutionary computation for constrained parameter optimization problems", Evolutionary Computation 4(1): 1 - 32.

Mitsuo, G. and Cheng, R.(1997), Genetic Algorithms and Engineering Design, A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY & SONS, INC.

Ryu, Y.S. et al(2004), "Application of Metropolis Genetic Algorithm for the Structural design Optimization", Proc. of CJK-OSM3.

Ryu Y.S. et al(2005), "Design Optimization of Composite Breakwater with Metropolis GA", Proc. of WCSMO6,, Rio.

Ryu Y.S. et al(2006), "An Efficient MGA for the Design Optimization of Composite breakwater", Proc. of CJK-OSM4.

Van Laarhoven, P.J.M and Aarts, E.H.L.(1987), Simulated Annealing : Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers.

김봉익, 권중현(2002), "유전자 알고리즘을 이용한 뱀대구조물의 이산최적화", 한국해양공학회지 제 16권 제 4호, pp. 25 - 31.

김봉익, 권중현(2007), "유전자 알고리즘을 이용한 2차원 강구조물의 최적설계", 한국해양공학회지 제 21권 제 2호, pp. 75 - 80.

김여근, 윤복식, 이상복(2000), 메타 휴리스틱, 영지문화사.

김제현(2001), "유전알고리즘을 이용한 강상형교의 최적설계" 부경대학교 대학원 공학석사 학위논문.

류연선, 임오강, 박경진(1994), 최적설계입문, 반도출판사.

류연선, 박균집, 김정태, 나원배(2006), "구조 최적화를 위한 Metropolis 유전자 알고리즘의 개발과 효율성 평가", 한국전산구조공학회 논문집 제 19권 제 1호, pp. 27 - 37.

문병로(2001), 유전알고리즘, 다성출판사.

박균빈(2003), “메트로폴리스 유전알고리즘을 이용한 구조물의 설계 최적화”, 부경대학교 대학원 공학석사 학위논문.

박균빈, 류연선, 김정태, 조현만(2003), “구조물의 설계 최적화를 위한 메트로폴리스 유전알고리즘의 개발 및 적용”, 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집 제 16권 제 2집.

박재형(2003), “유전알고리즘을 이용한 망간단괴 수송선의 최적화와 경제성 평가”, 부경대학교 대학원 공학석사 학위논문.

윤민영(1999), “병렬 유전 담금질 알고리즘에 대한 연구”, 성결대학교 정보산업기술논문집, 제 4집, pp. 67 - 76

이경호, 이규열(1997), “순차적 선형화 기법과 유전자 알고리즘을 접속한 하이브리드형 최적화 알고리즘”, 대한조선학회 논문집 제 34권 제 1호, pp. 93 - 101.

이동곤, 정성재, 김수영(1994), “유전적 알고리즘과 직접탐색법의 결합에 의한 효율적인 최적화방법에 관한 연구”, 대한조선학회 논문집 제 31권 제 3호, pp. 12 - 18.

이형기(1996), “개선된 유전알고리즘을 이용한 최적화 기법”, 건국대학교 대학원 공학석사 학위논문.

진강규(2000), 유전알고리즘과 그 응용, 교우사.

최민희, 류연선, 나원배, 조현만(2005), “MGA를 이용한 케이스 구조계의 설계 최적성 평가”, 한국해양과학기술협의회 공동학술대회 논문집 제 1권, pp. 1477 - 2482.

황인수, 한재민(1997), “유전해법에서 시뮬레이티드 어닐링을 이용한 개체선택의 효과에 관한 연구”, 경영과학 제 14권 제 1호

감사의 글

식사 과정을 마무리 짓는 시점에서 지난날들을 되돌아보며 도움을 주신 분들과 감사의 마음을 전하고자 합니다.

대학에 진학하여 해양 공학의 의미도 모른 채 수업을 들었던 저에게 역학의 재미를 심어주시고, 한없이 부족한 저를 지도해 주신 류연선 교수님께 진심으로 감사드립니다. 또한 조언과 격려로 관심을 베풀어 주신 김정태 교수님과 칭찬과 질책으로 제 자신을 돌아보게 해주신 사들의 자랑스러운 선배님이신 나원배 교수님께도 감사의 말씀을 전합니다. 그리고 해양 공학인으로서 많은 가르침을 주신 류청로 교수님, 윤길수 교수님, 김헌태 교수님, 이인철 교수님, 김윤태 교수님께 감사드립니다.

제가 심적인 어려움을 느낄 때 지혜로운 말씀으로 해답을 주시고 성경의 진리를 깨닫게 해주신 이득희 목사님께도 깊은 감사의 말씀을 전합니다.

짧은 기간이지만 제게 누구보다 많은 도움이 되어주신 사들의 정신적 지주 조현만 박사님께도 큰 감사를 드립니다. 같이 있는 것만으로 힘이 되는 민희언니, 현지언니, 대학원 생활동안 말동무가 되어준 현성선배, 개콘을 보는듯한 즐거움을 선사해 준 병호선배, 재현선배, 연구실 00동기 명종이, 원민이, 연호, 영후, 든든한 후배 원일이, 명진이, 남수, 경환이, 감쪽한 동생 아련이, 영선이, 귀염둥이 막내 아름이 그 외 모든 사들 식구에게 고마운 마음을 전합니다. 그리고 항상 웃음으로 대해 주는 홍주선배와 우리 뚜용 주영이, 같이 생활했던 해양공학과 모든 동기 선후배들에게 고마움을 전합니다.

꼬꼬친구들, 독도연구회 식구들, 산성교회, 향서교회 식구들, 가장 오랜 친구인 사랑스런 썸, 누구와도 바꿀 수 없는 소중한 우리 언니 너무 고맙습니다~! 철부지 현진이를 사랑해 주시고 늘 기도해 주시는 이모들, 누나말 잘 듣는 귀여운 사촌 동생들 다들 사랑합니다~!

마지막으로 한결같이 저를 믿어주시고, 사랑으로 걱정해주시는 부모님께 가장 큰 감사를 드리고 오래도록 건강하시기를 바라며 이 줄고를 바칩니다.

2007년 7월
이 현 진 드림