



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권으로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교 육 학 석 사 학 위 논 문

원형복의 타격점 변화에 따른 진동 모드에 관한 연구



2007년 8월

부경대학교 교육대학원

물 리 교 육 전 공

정 금 화

교 육 학 석 사 학 위 논 문

원형복의 타격점 변화에 따른 진동 모드에 관한 연구

지도교수 김 성 부

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함



2007년 8월

부경대학교 교육대학원

물 리 교 육 전 공

정 금 화

정금화의 교육학석사 학위논문을 인준함

2007년 8월 30일



주 심 이학박사 이 종 규 (인)

위 원 이학박사 김 성 부 (인)

위 원 이학박사 홍 지 상 (인)

<목 차>

목차.....	i
표 목차.....	ii
그림목차.....	ii
Abstract.....	iv
I. 서론.....	1
II. 이론.....	3
1. 원형 막의 진동 형태	3
2. 수소 원자에 대한 이론.....	9
III. 실험 도구 및 장치.....	17
IV. 실험 방법.....	19
1. 각(θ)를 다르게 했을 때의 실험.....	19
2. 반지름(R)을 다르게 했을 때의 실험.....	22
V. 실험 결과 및 분석.....	28
1. 각(θ)를 다르게 했을 때의 실험.....	28
2. 반지름(R)을 다르게 했을 때의 실험.....	32
VI. 결론.....	45
참고 문헌.....	47

<표 목 차>

표 1. 제 1종 Bessel 함수의 0이 되는 값들.....	6
표 2. (0 1)모드에서 북 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들.....	28
표 3. (0 2)모드에서 북의 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들.....	31
표 4. (1 1)모드에서 북의 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들.....	34
표 5. (2 1)모드에서 북의 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들.....	37

<그 림 목 차>

그림 1. 제 1종 Bessel 함수의 그래프.....	7
그림 2. 원형 막의 여러 진동 모드.....	8
그림 3. 수소 원자에 대한 지름 함수 $R_{n\ell}(r)$ 과 지름 확률밀도 $P_{n\ell}(r)$	15
그림 4. 진동발생기와 역학적진동기.....	13
그림 5. 역학적진동기를 북에 올려놓고 본 모습.....	13
그림 6. (1 1)모드.....	14
그림 7. (2 1)모드.....	14
그림 8. (0 1)모드.....	16
그림 9. 중앙을 진동시킬 때 위에서 본 모습.....	16
그림 10. (0 2)모드.....	18
그림 11. 중앙을 진동시킬 때 옆에서 본 모습.....	18
그림 12. (1 1)모드의 반시계방향으로의 이동 모습.....	22
그림 13. (1 1)모드에서 θ 에 따른 파동 함수.....	23
그림 14. (2 1)모드의 시계방향으로의 이동 모습.....	25
그림 15. (2 1)모드일 때 θ 에 따른 파동 함수.....	26
그림 16. (0 1)모드에서 북 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간과 Bessel 함수 $J_0(x)$	29

그림 17. (0 2)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간과 Bessel 함수 $J_0(x)$	32
그림 18. (1 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간과 Bessel 함수 $J_1(x)$	35
그림 19. (2 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간과 Bessel 함수 $J_2(x)$	38



STUDY ON THE VIBRATION MODES DEPENDING ON THE PERCUSSION POINT IN A CIRCULAR DRUM

Kum-Hwa Jung

*Graduate School of Education
Pukyong national University*

Abstract

Of the Korean percussion instruments, drum might be the most common thing to find easily around us. drum plays an important role to make a mood of Samulnori(the Korean traditional percussion quartet) or some events exciting with its simple tone.

This instrument vibrates using a stationary wave. So we can see the vibrations through proper vibration mode in person.

They are very similar to stationary waves which are made over a fixed string.

Middle or high school students can visually confirm both the wave motion and the stationary waves through this instrument.

The 7th education curriculum requires teachers charging a course of Physics to give more weight on Modern Physics as well as Classical Physics. According to the education curriculum of Physics, teachers should educate students how to understand complicate natural phenomena or how to solve problems using Physics and provide appropriate teaching guidelines for students to bring up abilities to study scientifically. In addition, it says the curriculum deals with microscopic world systematically and makes students observe the natural phenomena in a totally new way. However, students seem like Physics is one of the most difficult subject and get to lose their interest in it, especially Modern Physics.

Therefore, we have to select various subjects or substances and study them scientifically to cause their interest and curiosity in the curriculum. Also it is important for educators to help students understand the general idea of Physics easily and set up the well-organized conceptual system of

the subject.

Accordingly, I've tried to deal with the vibration mode of drum using quantum mechanics to make a relation with Modern Physics. Molecular Orbital theory in quantum mechanics - educated in a Chemistry curriculum at high school- is a model of electron's probability distribution. It is quite difficult for students to understand its concept as especially material wave is neither visible nor touchable. Therefore, I think that if students see such waves through vibration mode of drum it would bring about much bigger visible effect.

Using proper vibration modes of drum which has been proven theoretically, first, on the assumption that a radius is fixed, observe the change of boundary lines when an angle of vibrator is moved to make vibrations. Second, fix the angle now and observe which point will make its vibration mode, first and check the time when the radius is changed.

Through these two experiments, we compare the point of vibrator which is named as a radius R and an angle of direction θ with the probability density to find electrons in hydrogen's atomic model. Plus, we try to explain the point that shows the highest probability density of electrons in atomic structure.

The goal of this study is to explain quantum mechanics to students more easily as they can observe the point that has high probability to find electrons in person.

I. 서론

우리나라의 타악기 중 가장 흔히 볼 수 있는 것은 아마도 북일 것이다. 북은 사물놀이나 행사 등에 쓰일 때 단순한 음으로 사물놀이나 행사의 흥을 돋우어 주는 역할을 한다.

북은 우리가 물리 교과서에서 배우고 있는 정상파를 이용해 진동하는 악기이다. 따라서 고유 진동 수들에 의해 각각이 진동되어 지는 모드들을 확인할 수 있다.

그 모습들은 고정된 줄에서 만들어 지는 정상파의 모습들과 거의 비슷하다. 학생들이 중, 고등학교에서 쉽게 접하고 배우는 정상파의 모습을 북을 통해서도 시각적으로 분명하게 확인할 수 있다.

제 7차 교육과정의 물리 교과는 역학을 비롯한 고전물리뿐 아니라 현대물리의 비중이 좀 더 커지고 있다. 물리 교과 교육 과정에 따르면, 복잡한 자연 현상을 물리적으로 이해하거나 문제 해결에 이를 활용하고, 과학적으로 탐구하려는 태도를 기르게 하는 데 필요한 학습 내용이 제시되어야 함을 밝히고 있다. 또한, 미시 세계의 현상 등을 체계적으로 다루어 자연 현상을 새로운 시각으로 볼 수 있도록 한다고 적혀 있다. 그러나 학생들은 물리 교과를 너무 어려운 과목으로만 인식하고, 학습에 흥미를 잃고 있으며, 특히 현대물리와 관련된 부분들은 크게 학습의 효과가 없다.

따라서 다양한 방법으로 물리 교과 학습에 흥미와 호기심을 유발 할 수 있는 소재를 선택하여 이를 과학적으로 탐구함으로써 물리의 기본 개념을 쉽게 이해하도록 하며 잘 조직된 물리 개념 체계를 가지도록 도와 주는 것

이 중요하다.

이에 따라, 현대물리와 관련 하여 북의 진동 모드를 양자역학적으로 접근해 보고자 한다. 양자역학에서 다루어지는 오비탈 모형-고등학교 화학에서도 배우고 있다-은 전자의 확률 분포 모형으로서 학생들이 이해하기 어려운 개념이며, 특히 물질과는 현실적으로 눈에 보이지도 않고 만질 수도 없으므로, 북의 진동 모드를 통해 직접 눈으로 확인한다면 가시적인 효과가 클 것으로 생각된다.

이미 실험을 통해 이론적으로 밝혀진 북의 고유 진동 모드들을 이용해, 첫째로 반지름은 일정하게 유지하고 진동시키는 진동자(vibrator)의 각을 변화시켜 진동시킬 때 마디선(경계선)의 변화를 관찰한다. 두 번째는 북의 진동 모드에서 각을 일정하게 유지하고, 위치(반지름)을 변화시킬 때 어느 위치가 가장 먼저 북의 진동 모드를 형성하는지 시간을 관측한다. 즉, 이 두 실험을 통해 북의 진동 모드에서 반지름 r 과 방위각 θ 의 함수로 나타내어지는 진동자(vibrator)의 위치를 수소 원자 모델의 전자 발견 확률 밀도와 비교해 보고, 원자 구조에서 전자의 발견 확률이 가장 높은 곳을 설명하려 한다. 이는 앞에서도 말한바와 같이 눈에 보이지 않는 미시적인 세계에 대해, 학생들에게 전자의 발견 확률이 높은 곳을 실제로 눈으로 확인하여 보여줌으로써 양자역학을 쉽게 접근하도록 유도하는데 그 목적이 있다.

II. 이론

1. 원형 막의 진동형태

임의의 형태의 얇은 막이 평형 상태에서부터 진동할 때 그 변위를 y 라고 하자. 이때 매질 내에서 진행되는 파동은 다음의 파동 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 Y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (1-1)$$

$$c^2 = \frac{J}{\rho_s} \quad (1-2)$$

(c :파동속도, J :단위 길이당 장력, ρ_s :표면 밀도)

여기서 정상파의 경우에는 파동의 진동 형태가 공간적으로 전파 되지 않고 제자리에서 진동하므로, 시간을 분리하여 파동함수를

$$Y(x, y, t) = \Psi(x, y) e^{-i\omega t} \quad (1-3)$$

라 둘 수 있으며, ω 는 각진동수로 $\omega = 2\pi f$ 이다.

경계 조건을 만족시키는 정상파의 경우에, 위치와 관계되는 파동함수 Ψ 는 다음 식을 만족한다.

$$\nabla^2 \Psi + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi = 0 \quad (1-4)$$

결국 이 미분 방정식을 만족하는 해를 구함으로써, 해로 존재할 수 있는 진동수 f 도 구할 수 있다.

반지름 $r=a$ 로 고정된 원형 복에 대해서, 원통형 좌표계로 식 (1-4)를 나타내면

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + k^2 \Psi = 0 \quad - (1-5)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad - (1-6)$$

이 된다.

여기서, $\Psi(r, \theta)$ 는 두 가지 변수의 파동 함수 곱으로 분리할 수 있다.

$$\Psi = R(r) \Theta(\theta) \quad - (1-7)$$

경계 조건을 적용하면

$$R(a)=0 \quad - (1-8)$$

이고, Θ 는 θ 의 부드러운면서도 연속적인 함수임에 틀림없다.

(1-5)식은

$$\Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Theta}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 R \Theta = 0 \quad - (1-9)$$

이 방정식에 $\frac{r^2}{\Theta R}$ 을 곱하고 r 과 관련된 항들과 θ 에 관련된 항들을 분리하여 적으면,

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad - (1-10)$$

이 된다.

왼쪽 항은 단지 r 에 관련된 함수이고, 오른쪽 항은 단지 θ 에 대한 함수이므로 양쪽 함수가 같기 위해서는 같은 상수이어야만 한다.

이 상수를 m^2 으로 두면, 오른쪽 항은

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -m^2 \Theta \quad - (1-11)$$

이 되며, 이 식은 다음의 조화 해를 가진다.

$$\Theta(\theta) = \cos(m\theta + \gamma_m)$$

여기서 γ_m 은 초기 조건에 의해 결정되어 지는데 즉, 초기에 막의 어느 위치를 진동시키는가에 의존한다.

θ 은 부드러우면서도 유일한 값을 가져야 하므로, m 은 정수이어야 한다.

(1-10)의 왼쪽 항을 m^2 으로 두고 정리하면

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0 \quad - (1-12)$$

의 Bessel 방정식이 된다.

이 방정식의 해는 제 1종 Bessel 함수 $J_m(kr)$ 과 제 2종 Bessel 함수 $Y_m(kr)$ 의 합으로 나타낼 수 있다.

$$R(r) = AJ_m(kr) + BY_m(kr) \quad - (1-13)$$

하지만 원형 북의 경우 $r=0$ 일 때 변위가 유한해야 하므로, 계수 B 는 0이어야만 한다.

따라서,
$$R(r) = AJ_m(kr)$$

여기에 경계 조건 $R(a) = 0$ 을 적용하면 $J_m(ka) = 0$ 이 된다.

J_m 의 값들이 0이 되면 j_{mn} 으로 나타내고, k 는 다음과 같은 불연속적인 값들을 가진다.

$$k_{mn} = \frac{j_{mn}}{a} \quad - (1-14)$$

그러므로,

$$\Psi(r, \theta) = AJ_m(kr) \cos(m\theta + \gamma_m) \quad - (1-15)$$

이다. A 도 초기 조건으로 결정된다.

이제, 식 (1-3)에 의해

$$Y_{mn}(r, \theta, t) = A_{mn} J_m(k_{mn}r) \cos m\theta e^{i\omega_{mn}t} \quad - (1-16)$$

로 표현 가능하다.

$$k_{mn}a = j_{mn} \text{ 이므로,}$$

진동수 f 는

$$f_{mn} = j_{mn} \frac{c}{2\pi a} \quad - (1-17)$$

j_{mn} 은 m 차 Bessel 함수의 n 번째 0이 되는 값을 의미하며 다음 표와 그래프로 나타내었다.

		j_{mn}					
m \ n	n	0	1	2	3	4	5
0	-	-	2.40	5.52	8.65	11.79	14.93
1	0	3.83	7.02	10.17	13.32	16.47	
2	0	5.14	8.42	11.62	14.80	17.96	
3	0	6.38	9.76	13.02	16.22	19.41	
4	0	7.59	11.06	14.37	17.62	20.83	
5	0	8.77	12.34	15.70	18.98	22.22	

표 1. 제 1종 Bessel 함수의 0이 되는 값들

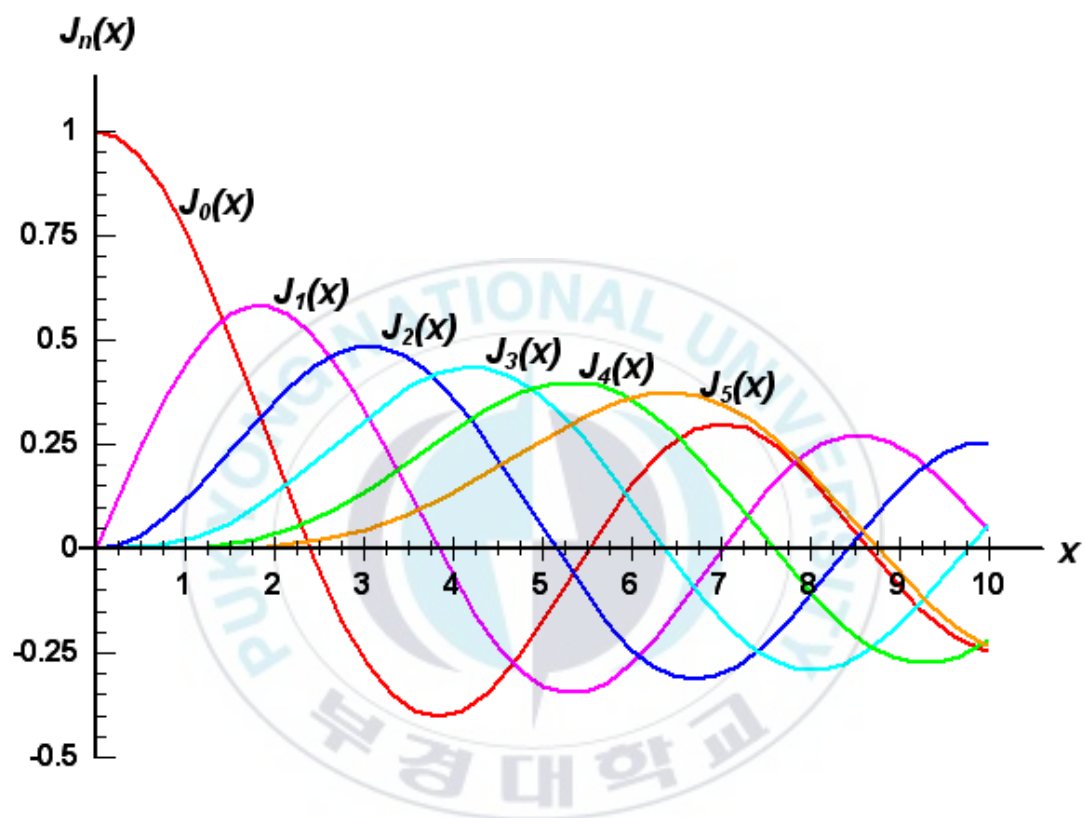


그림 1. 제 1종 Bessel 함수의 그래프

다음 그림은 끝이 고정된 원형 막이나 북 등의 움직이는 진동 모드를 나타낸 것이다.

그림에서 진동 모드들은 (m, n) 의 정수 쌍으로 나타내는데, m 은 반지름 방향의 직선 마디선을 나타내고, n 은 둥근 원형 마디선을 나타낸다.

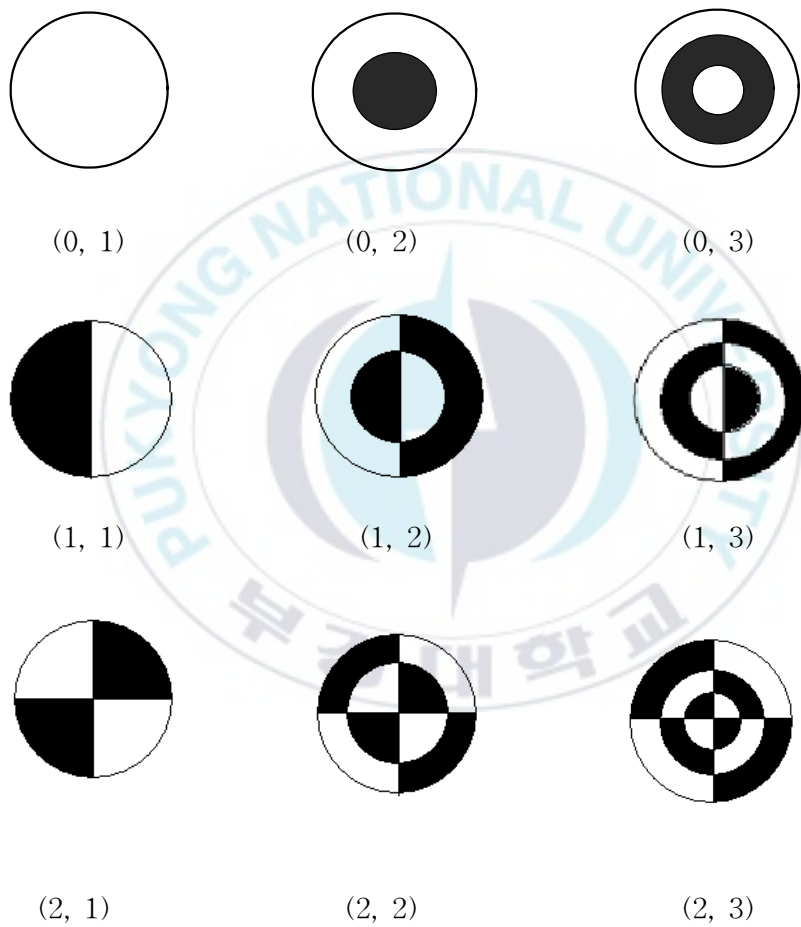


그림 2. 원형 막의 여러 진동 모드

2. 수소 원자에 대한 이론

수소 원자 내 한 점 r, θ, ϕ 에서 전자를 찾을 확률밀도는 그 점에서의 $|\psi|^2$ 에 비례하므로 확률밀도 $|\psi|^2$ 은

$$|\psi|^2 = |R|^2 |\Theta|^2 |\Phi|^2 \quad - (2-1)$$

이다.

여기서 $|\Phi|^2$ 은 상수가 나오므로 어떤 특정한 방위각 ϕ 에서 전자를 찾을 확률은 상수로서 ϕ 와는 무관하다. 즉, 전자는 어떤 각 ϕ 에서나 똑같은 확률로 발견된다.

파동함수의 지름함수 R 은 r 에 따라 변화하며, 앞에서도 얘기했듯이 양자수 n 과 ℓ 의 조합에 따라서도 달라진다. 그림 3은 수소 원자의 1s, 2s, 2p, 3s, 3p.....상태에서의 R 과 r 의 관계를 나타낸 그래프이다. $L=0$ 즉, $\ell=0$ 인 상태인 모든 s상태에 대해 R 은 $r=0$ 에서 최대이다. 각운동량이 존재하는 상태의 R 의 값은 $r=0$ 에서 0이다.

미소 체적 요소 dV 내에서 전자를 찾을 실제 확률은 $|\psi|^2 dV$ 이다.

구면 극좌표에서 $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ 이므로 전자를 발견할 실제 확률은

$$|\psi|^2 dV = |R|^2 |\Theta|^2 |\Phi|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad - (2-2)$$

반경이 r 되는 구면과 $r+dr$ 이 되는 구면 사이의 체적 속에서 전자가 발견될 확률을 $P(r)dr$ 이라고 할 때

$$P_{n,\ell}(r)dr = |\psi|^2 4\pi r^2 dr \quad - (2-3)$$

$P_{n\ell}(r)$ 을 지름 확률 밀도라 하며 지름 함수 $R_{n\ell}(r)$ 과 함께 몇 개의 n 및 ℓ 에 대해 나타내었다.

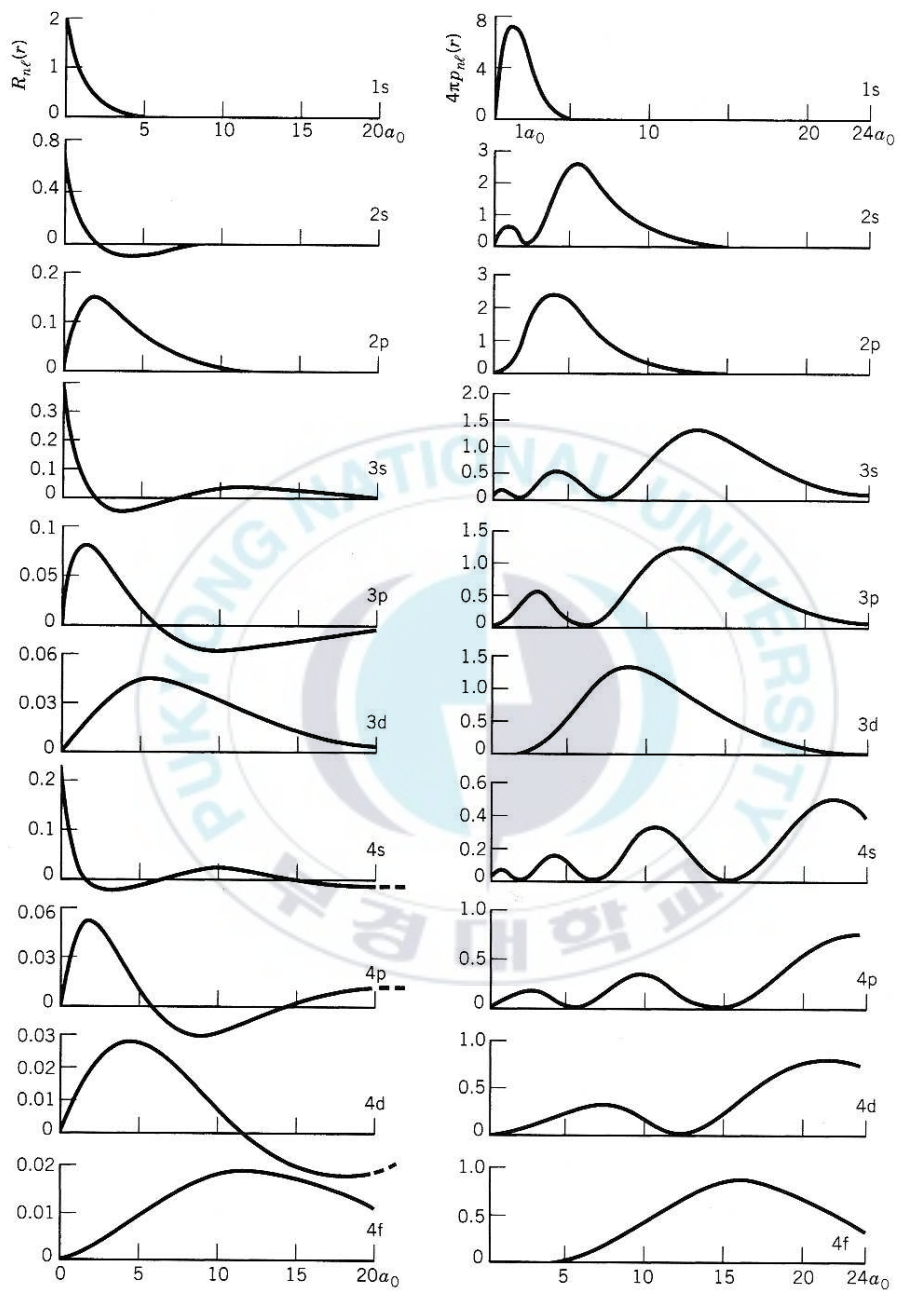


그림 3. 수소 원자에 대한 지름 함수 $R_{n\ell}(r)$ 과 지름확률밀도 $P_{n\ell}(r)$

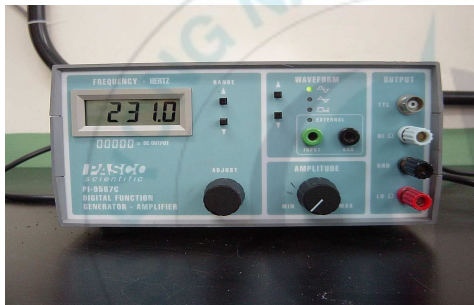
($a_0=0.053\text{nm}$)

Ⅲ. 실험도구 및 장치

1. 각(θ)을 다르게 했을 때의 실험

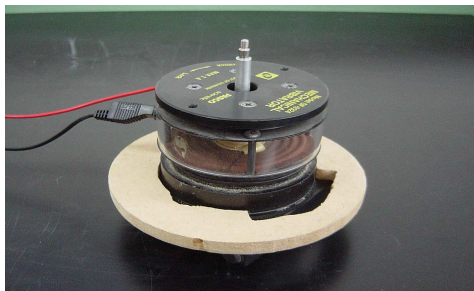
2. 반지름(R)을 다르게 했을 때의 실험

(1) 진동발생기(Digital Function Generator Amplifier)



0~10kHz의 진동수를 발생시킬 수 있으며 진폭을 조절할 수 있다

(2) 역학적 진동기(Mechanical Vibrator)



진동발생기에서 나온 진동수에 맞게 진동한다

(3) 원형북



지름:43cm

(4) 원형북 받침대



원형북을 놓고 그 위에 역학적 진동기를 놓아 북을
진동시키도록 장치되어 진다

(5) 수평계와 색모래



(6) 초시계

(7) 컴퍼스와 각도기

IV. 실험 방법

1. 각(θ)을 다르게 했을 때의 실험

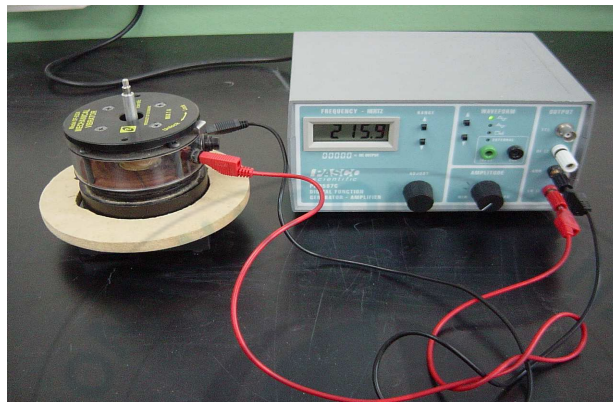


그림 4. 진동발생기와 역학적진동기



그림 5. 역학적진동기를 북에 올려놓고 본 모습



그림 6. (1 1)모드



그림 7. (2 1)모드

원형북 위에 컴퍼스로 normal point(원의 가장자리에서 중심까지 1/4되는 지점)를 반지름으로 하는 원을 그린다. 북을 받침대에 놓고 수평계로 수평을 맞춘다.

진동 발생기와 역학적 진동기를 그림 5와 같이 연결하고 특정 진동수를 맞추어 그려놓은 원 위의 한 점에서 진동 시켜 그림 7과 같은 (1 1)모드를 만들어 보았다.

미리 표시해 둔 원(즉, 처음과 반지름은 같고 각도만 다른)을 따라 시계방향으로 20° 이동하여 다시 같은 진동수로 북을 진동시켜 마디선의 이동을 관찰하였다. 이때 진폭은 항상 일정하게 유지한다. 그리고 마디선에 색모래가 두껍게 모이므로 가운데를 기준으로 각도를 재 보았다.

그 자리에서 다시 반시계방향으로 20° 이동하여 같은 진동수로 진동시켜 마디선의 이동을 관찰해 보았다.

반시계방향으로 반복하여 40° 이동하여 마디선의 이동을 관찰해 보았다.

그림 8과 같은 (2 1)모드도 위와 같이 여러 각도로 달리하여 시계방향 또는 반시계방향으로 회전시켜 진동수와 진폭은 일정하게 유지하면서 마디선의 이동을 관찰하는 실험을 해 보았다.

2. 반지름(R)을 다르게 했을 때의 실험

가. (0 1)모드



그림 8. (0 1)모드

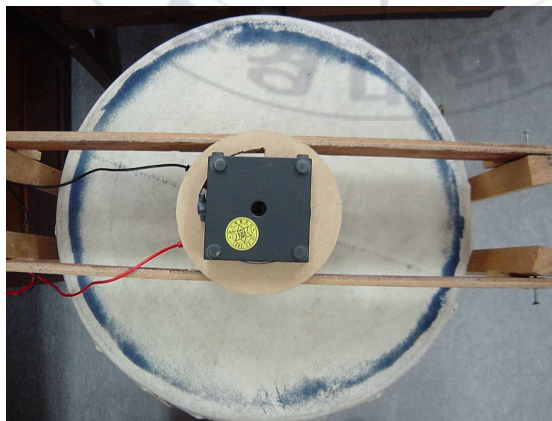


그림 9. 중앙을 진동시킬때 위에서 본 모습

그림 6과 같이 장치하여 북의 중앙을 진동시켜 (0 1)모드에 해당하는 특정 진동수를 먼저 찾는다. 진폭도 적당하게 조절하여 가장 선명한 모드모양이 될 때까지 바꾸어 찾아본다.

찾아진 진동수를 진동발생기에 고정시켜 놓고 색모래를 다시 무작위로 흩어 놓는다.

북의 중앙을 진동시켜 (0 1)모드가 선명하게 만들어지는 데 걸리는 시간을 초시계로 측정하였다. 3번 반복하여 측정해서 평균해 본다. 이때 진폭은 모두 일정하게 유지한다.

북의 중앙에서 미리 재어 놓은 길이에 따라 역학적 진동기를 1cm 밖으로 이동하여 다시 같은 진동수와 진폭으로 진동시켜 (0 1)모드가 만들어 지는 시간을 초시계로 측정하였다.

이와 같이 하여 계속 밖으로 역학적 진동기를 1cm씩 이동시키면서 (0 1)모드가 만들어 지는 시간을 초시계로 측정하고 더 이상 모드가 만들어 지지 않을 때까지 밖으로 이동시키면서 실험을 해 보았다.

북의 중앙 지점을 0으로 하여, 측정된 평균 시간과 거리와의 관계 그래프를 그려 보았다.

북의 반지름은 21.5cm이다.

나. (0 2)모드



그림 10. (0 2)모드



그림 11. 중앙을 진동시킬때 옆에서 본 모습

그림 10과 같이 장치하여 북의 중앙을 진동시켜 그림 11과 같은(0 2)모드에 해당하는 특정 진동수를 찾는다. 진폭도 적당하게 조절하여 가장 선명한 모드가 되도록 조절한다.

(0 1)모드와 마찬가지로 북의 중앙에서 밖으로 1cm씩 이동하면서 (0 2)모드가 만들어 지는 시간을 초시계로 측정해 보았다.

첫 마디 근처에서도 미리 제어 놓은 길이를 기준으로 하여 1cm씩 좌우로 몇 군데 이동시켜 같은 방법으로 모드가 만들어 지는 시간을 3번씩 측정하였다.



다. (1 1)모드

북의 normal point를 진동하여 그림 7과 같은 (1 1)모드에 해당하는 특정 진동수를 찾아본다. 역시 진폭을 조절하여 선명한 모드가 나오도록 한다.

찾은 진동수를 고정시키고 다시 색모레를 무작위로 흘뿌려 normal point를 진동시켜 선명한 (1 1)모드가 만들어 지는 시간을 초시계로 기록하였다.

역시 3번 측정하여 평균값을 취하였다.

다음, 원의 중심으로 1cm씩 이동하여 역시 (1 1)모드가 만들어 지는 시간을 초시계로 측정하였다. 더 이상 모드가 만들어 지지 않을때 까지 실험을 해 보았다. 진폭은 일정하게 유지한다.

그리고 normal point에서 원 중심의 반대방향으로도 1cm씩 이동 시켜 모드가 만들어 지는 시간을 측정하였다.

마찬가지로, 북의 중앙을 중심으로 측정된 평균 시간과 거리와의 관계 그래프를 그려 보았다.

라. (2 1)모드

북의 normal point를 진동시켜 (2 1)모드에 해당하는 특정 진동수를 찾고 진폭을 조절하여 선명한 모드를 찾는다.

(1 1)모드와 마찬가지로 normal point에서부터 원 중심 방향으로 1cm씩 이동시켜 모드가 만들어 지는 시간을 측정한다.

normal point에서 원 밖으로도 1cm씩 이동시켜 같은 방법으로 실험해 보았다.



V. 실험 결과 및 분석

1. 각(θ)을 다르게 했을 때의 실험

가. (1 1)모드



처음의 (1 1)모드



반시계방향으로 이동하여 진동시킨 모습

그림 12. (1 1)모드의 반시계방향으로의 이동 모습

앞의 그림과 같이 (1 1)모드를 시계방향으로 20° 이동시켜 진동시켰을 때, 마디선도 따라서 20° 이동하는 것을 관찰할 수 있었고, 또한 반시계 방향으로 20° 이동시켜 진동시키면, 역시 마디선도 반시계 방향으로 20° 이동하여 움직이는 것을 관찰할 수 있었다.

즉, 대각선의 마디선들은 파동함수 중 방위각 θ 에 의존하는 것으로 각을 이동하여 진동시키면 마디선이 따라서 움직인다.

방위각 θ 에 따른 파동함수는 $\cos m\theta$ 에 의해 나타나므로, (1 1)모드에서 $m=1$ 이므로 $\cos \theta$ 가 되고 $\pi/2, 3\pi/2$ 가 0이 되어 2차원의 원형북에서 마디선은 하나가 나타난다. 진동자의 오른쪽을 x축으로 두었을 때, 진동자의 위치가 항상 $\theta=0, \pi$ 가 되도록 모드가 형성된다.

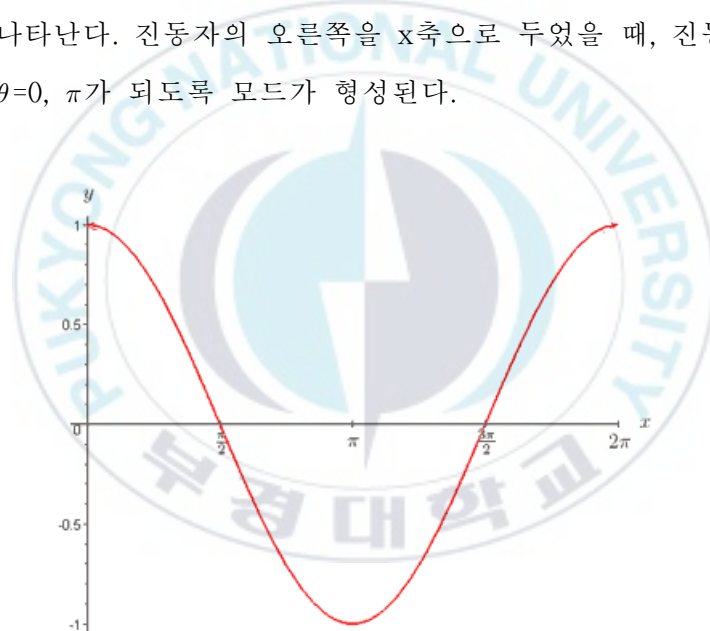


그림 13. (1 1)모드에서 θ 에 따른 파동 함수

이는 수소 원자의 파동함수에서 $\Theta(\theta)$ 에 대응되는 것으로 $n=2, \ell=1, m_\ell=0(2p)$ 인 양자상태에서 $\Theta(\theta)$ 값이 $\sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta$ 인 것과 유사하다.

따라서, r (반지름)을 normal point 길이로 고정시키고 각에 따라 북을 진동시켰을 때, 진동시킨 곳(normal point)이 최대 진폭이 되어, 이를 각도에 따라 이동시키면 마디선도 따라서 이동하게 되며, 수소 원자 모형에서는 이곳이 전자의 발견 확률이 가장 큰 곳이 된다.

당연히 마디선에서는 전자를 발견할 확률이 거의 없게 된다.



나. (2 1)모드



처음 만들어진 (2 1)모드



시계방향으로 이동하여 진동시킨 모습

그림 14. (2 1)모드의 시계방향으로의 이동 모습

(2 1)모드에서도 (1 1)모드와 마찬가지로 진동시키는 곳을 시계 방향이나 반시계 방향으로 각도를 이동시켜 진동시키면 마디선도 따라서 이동하는 것을 관찰 할 수 있었다.

(2 1)모드는 $m=2$ 이므로 방위각 θ 에 따른 파동 함수는 $\Theta(\theta)=\cos 2\theta$ 가 되어 $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ 가 0이 되므로 2차원의 원형 북에서는 마디선이 교차되어 두 개가 나타난다.

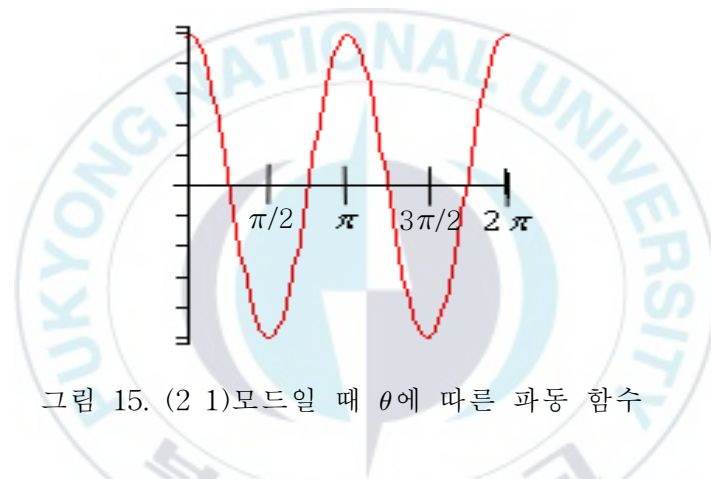


그림 15. (2 1)모드일 때 θ 에 따른 파동 함수

이때는 진동자의 위치가 항상 $\theta=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 가 되도록 모드가 형성된다. 이는 수소 원자의 파동 함수에서 $n=3, \ell=2, m_\ell=\pm 1(3d)$ 인 양자 상태의 $\Theta(\theta)$ 값이 $\frac{\sqrt{15}}{2}\sin\theta\cos\theta$ 인 것과 유사하다.

즉, r (반지름)을 고정시키고, 각을 이동시켜 북을 진동시켰을 때, 진동시킨 곳이 최대 진폭이 되어, 각을 이동시키면 마디선도 따라서 이동하게 된다.

그러므로, 수소 원자 모형에서는, 북에서의 진동지점이 최대 진폭인 것처럼 이곳이 전자의 발견 확률이 가장 큰 지점이 되는 것이다.

2. 반지름(R)을 다르게 했을 때의 실험

가. (0 1)모드

(0 1)모드가 만들어 지는 시간을 측정했을 때, 가장 시간이 작게 걸리는 곳은 중앙 부분과 그 근처 지점이었다. 사실상 중앙 지점 근처는 거의 시간차가 나지 않았고, 밖으로 5cm 지점 이상에서는 모드가 만들어 지는 시간이 중앙과 비교했을 때, 느려졌으며 7, 8cm에서는 시간차이가 많이 났다.

9cm지점에서는 시간이 오래 지나면 원의 가장자리에 마디가 생기긴 하지만, 그 안쪽에도 진동하는 모래가 많이 있었다. 10cm이상이 되면 모드가 잘 생기지 않고 소리만 시끄러웠다.

이 실험의 결과들은 Bessel 함수에서 나타나는 $R(r)$ 에 의존하는 것으로, (0 1)모드는 $m=0$ 이므로 Bessel 함수 그래프에서 $J_0(x)$ 를 의미하며, $n=1$ 이므로 $J_0(x)$ 함수 그래프 중에서 첫 번째 0이 되는 지점까지를 나타낸다.

이 실험을 통해 (0 1)모드는 북의 중앙 부분에서 모드가 가장 빨리 만들어 지는 것을 확인할 수 있었는데, 이것은 수소 원자 모형에서 $R(r)$ 값에 비유 할 수 있겠다.

즉, 북의 (0 1)모드에서 중앙근처가 모드가 가장 빨리 생기는 최대 진폭이며 중앙에서 멀어질수록 시간이 오래 걸리는 것처럼, $n=1$, $\ell=0$, $m_\ell=0(1s)$ 인 양자 상태의 수소 원자에서는 가운데 핵 주위에서 전자를 발견할 확률이 가장 크게 된다. 핵에서 점점 거리가 멀어질수록 전자를 발견할 확률은 떨어진다.

거리(cm)	시간(초)			평균시간
중앙	38.53	38.01	38.98	38.507
~1	38.93	39.12	39.10	39.05
~2	39.53	39.28	38.89	39.233
~3	39.91	39.35	39.73	39.663
~4	43.03	44.01	43.58	43.54
~5	47.68	46.88	47.28	47.28
~6	49.75	49.59	48.89	49.41
~7	52.85	53.67	52.99	53.17
~8	58.78	59.16	59.45	59.13

표 2. (0 1)모드에서 북 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들

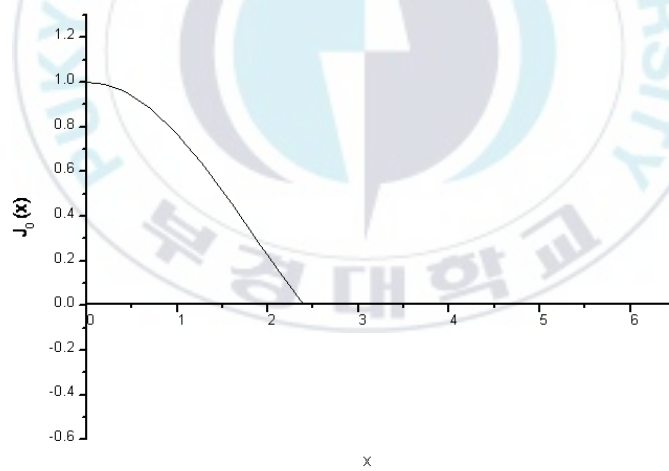
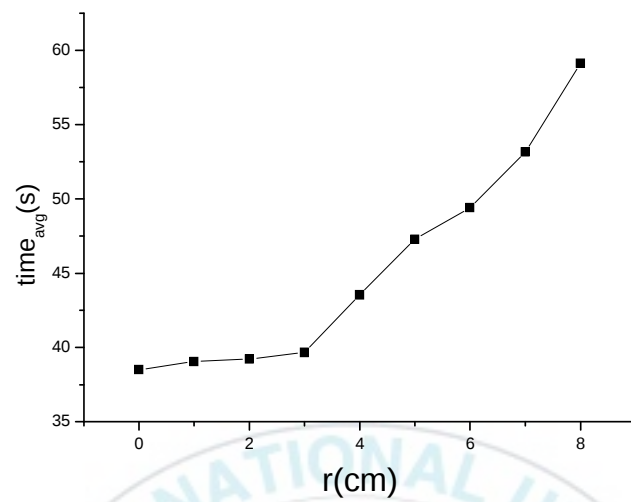


그림 16. (0 1)모드에서 북 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간과
Bessel 함수 $J_0(x)$

나. (0 2)모드

(0 2)모드도 중앙과 그 근처에서 진동시켰을 때, 모드가 생기는 시간이 가장 작게 나타났다. 하지만, 오히려 북 중심에서 밖으로 2cm지점에서 모드가 더 선명하게 나타났고, 그 이후 지점에서는 가운데 둥근 마디가 약간 타원처럼 찌그러졌다. 4cm지점에서 진동시켰을 때는 마디가 진동지점에서 원래 모드보다 오른쪽으로 약간 이동하여 나타났으며, 5cm이상에서는 모드가 아예 생기지 않았다.

가운데 둥근 마디는 원 중심에서 8~9cm사이에 생겼으므로, 다시 12cm지점부터 진동시켜 보았는데, 모드가 잘 나타나지 않았다. 14cm지점에서는 모드가 나타나기 시작했는데, 시간은 차이가 났으며, 16cm지점부터 다시 모드가 잘 나타나지 않았다. 전체적으로 중앙 근처를 진동시켰을 때보다 (0 2)모드가 선명하지는 못했다.

역시 이 결과도 Bessel 함수의 $R(r)$ 에 의존하는 것으로, (0 2)모드는 $m=0$, $n=2$ 를 뜻하므로, Bessel 함수 그래프에서 $J_0(x)$ 그래프의 두 번째 0이 되는 지점까지를 나타낸다. 실험을 통해, 중앙 근처 지점이 모드가 가장 빨리 만들어 지며, 첫 번째 마디 바깥부분에서도 모드가 생기는 것을 관찰 할 수 있었는데, 이는 수소 원자 모형에서 역시 핵에서의 거리 $R(r)$ 과 관련되도록 설명할 수 있겠다.

즉, $n=2$, $\ell=0$, $m_\ell=0(2s)$ 인 양자 상태에서는 핵 근처에서 전자를 발견할 확률이 크며, 핵에서 멀어질수록 확률이 감소했다가 다시 일정 지점에서 전자를 발견할 확률이 작지만 존재하게 된다.

거리(cm)	시간(초)			평균시간
중앙	35.12	34.66	35.69	35.157
~1	36.02	35.89	35.35	35.753
~2	34.54	34.66	35.29	34.83
~3	37.43	37.75	38.82	38
~4	38.00	38.27	39.21	38.493
.....				
~14	43.46	41.10	42.27	42.277
~14.5	40.81	41.05	41.13	40.997
~15	42.12	40.92	42.65	41.897

표 3. (0 2)모드에서 북의 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들

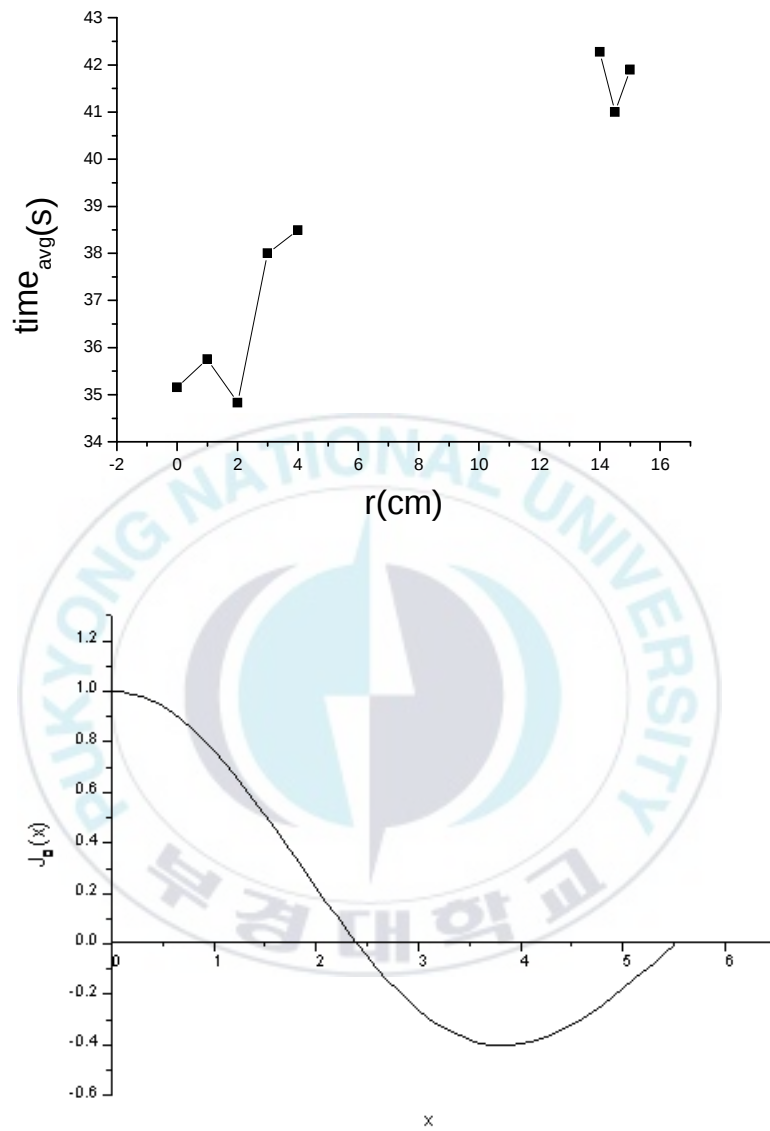


그림 17. (0 2)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간과 Bessel 함수 $J_0(x)$

다. (1 1)모드

normal point를 진동시켰을 때 나타나는 (1 1)모드는 normal point와 그 근처에서는 거의 시간대가 비슷하다가 안쪽으로 5~6cm지점에서 모드가 가장 빨리 생겼다.

그 이후로는 다시 시간이 증가했고, 10cm지점에서는 마디선이 희미하게 생기고 심하게 모래가 진동하였다. normal point에서 밖으로 1cm지점에서는 normal point와 시간차가 거의 없었고 밖으로 2cm지점이상에서는 모드가 잘 생기지 않았다.

Bessel 함수에서 (1 1)모드는 $m=1$, $n=1$ 이므로 $J_1(x)$ 를 의미하며, 첫 번째 0이 되는 지점까지를 나타낸다.

이 실험 결과에서, normal point보다는 조금 안쪽에서 모드가 빨리 형성되었으며, 중앙 지점은 마디가 생기므로($J_1(0)=0$) Bessel 함수 그래프와 일치함을 알 수 있다.

수소 원자 모형에서는 $R(r)$ 에 해당하는 파동함수로 비유할 수 있는데, $n=2$, $\ell=1$, $m_\ell=0$ (2p)인 양자 상태에서 $r=0$ 에서 $R(r)=0$ 이 된다. 즉, 핵 근처에서는 전자를 발견할 확률이 거의 없게 되는 것이다. 실험 결과에서처럼, 핵으로부터 일정한 거리만큼 떨어진 곳에서 전자를 찾을 확률이 가장 커진다.

거리(cm)	중앙으로부터의 거리	시간(초)			평균시간
밖으로 1	17.125	33.50	33.59	32.89	33.327
normal point	16.125	33.22	32.87	33.40	33.163
안으로 1	15.125	33.62	32.99	33.97	33.527
2	14.125	31.62	32.44	32.56	32.207
3	13.125	30.62	31.88	31.65	31.383
4	12.125	29.11	29.88	29.43	29.473
5	11.125	26.38	27.13	26.41	26.64
6	10.125	26.50	26.47	27.98	26.983
7	9.125	28.75	29.47	28.89	29.037
8	8.125	32.28	32.63	33.89	32.933
9	7.125	36.83	37.10	36.27	36.583

표 4. (1 1)모드에서 북의 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들

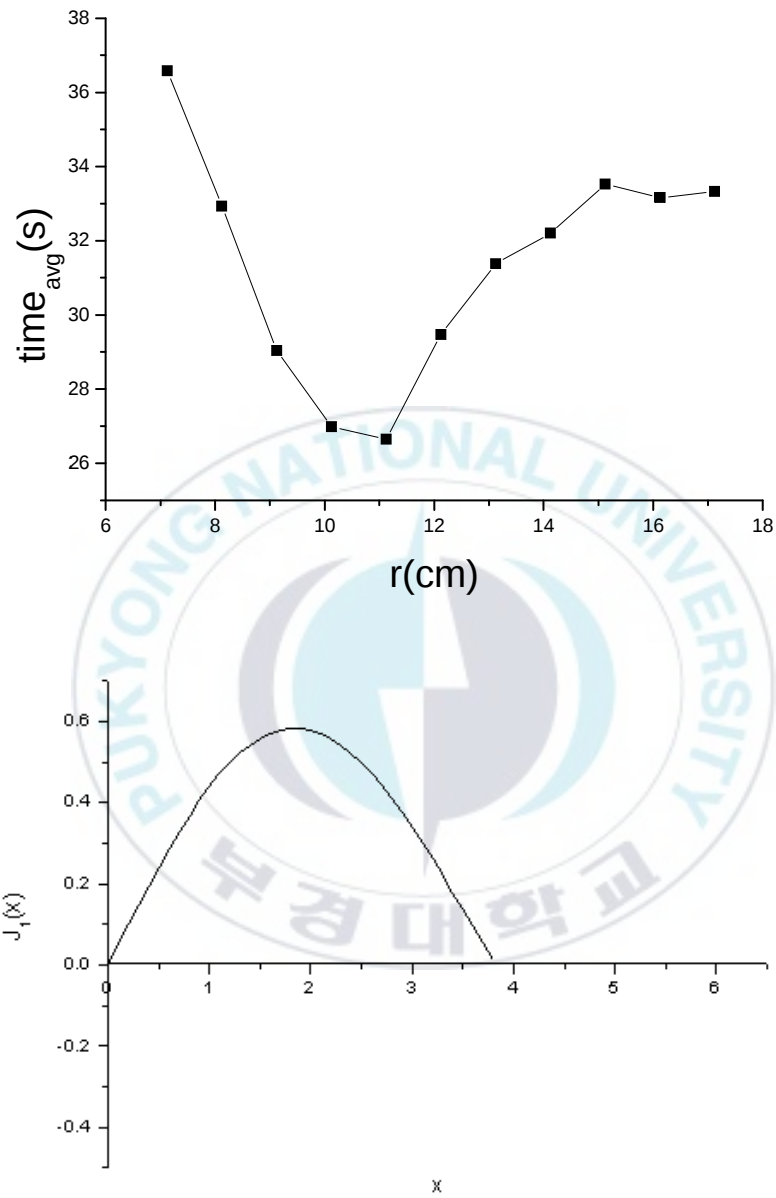


그림 18. (1 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간과
Bessel 함수 $J_1(x)$

라. (2 1)모드

(2 1)모드도 (1 1)모드와 유사하게 normal point보다는 조금 안쪽에서 모드가 가장 빨리 만들어 졌고, 5cm 이후로는 마디의 만나는 부분이 처음보다 정확하지는 않고 약간씩 어긋나기 시작했다. 8cm에서는 모드가 거의 생기지 않았고, normal point에서 밖으로 2cm 지점에서도 모드가 희미하게 생겼다. 하지만, 5~6cm까지 (1 1)모드와 비교해 보면 그렇게 시간 차이가 많이 나지는 않았다.

Bessel 함수에서 (2 1)모드는 $m=2$, $n=1$ 이므로 $J_2(x)$ 그래프에서 첫 번째 0이 되는 지점까지를 나타낸다. (1 1)모드와 마찬가지로 북의 중앙 지점은 마디가 생기므로, $J_2(0)=0$ 이다.

이는 수소 원자 모형의 $n=3$, $\ell=2$, $m_\ell=\pm 1$ (3d)인 양자 상태에서, 역시 $r=0$ 에서 $R(r)=0$ 이 됨을 알 수 있다. 또한, 북의 (1 1)모드보다는 (2 1)모드가 북의 중심으로부터 더 먼 거리에서 모드가 빨리 생성되었는데, 수소 원자 모형에서도 마찬가지이다. 즉, 핵 근처에서는 전자를 발견할 확률이 거의 없고 $2p(m_\ell=0)$ 인 상태보다는 좀 더 먼 거리에서 전자를 발견할 확률이 커지게 된다.

거리(cm)	중앙으로부터의거리	시간(초)			평균시간
밖으로 1	17.125	36.94	36.53	35.29	36.253
normal point	16.125	36.59	35.89	36.24	36.24
안으로 1	15.125	35.89	35.90	36.09	35.96
2	14.125	33.44	32.94	33.01	33.13
3	13.125	32.66	33.19	31.87	32.573
4	12.125	33.28	33.40	32.89	33.19
5	11.125	40.09	40.97	41.02	40.693
6	10.125	44.09	44.38	46.02	44.83
7	9.125	56.47	56.60	57.13	56.733

표 5. (2 1)모드에서 북의 중심에서 거리 r에 따른 모드 형성 시간들

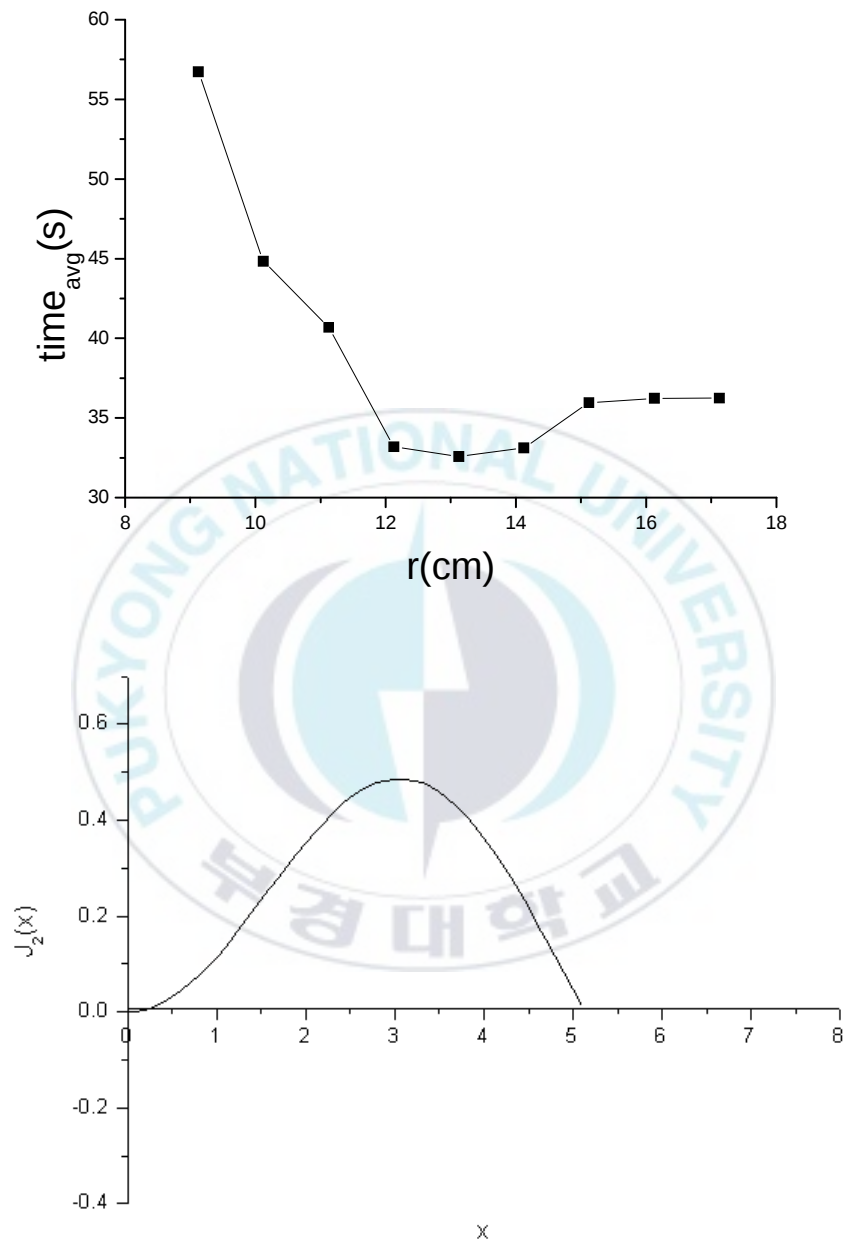


그림 19. (2 1)모드에서 북 중심에서 거리 r 에 따른 모드 형성 시간과 Bessel 함수 $J_2(x)$

VI. 결론

이번 실험을 통해 북의 진동 모드를 수소 원자 모형에 비유시킬 때, 실제로 전자를 찾을 확률 밀도가 가장 큰 곳을 시각화할 수 있었다.

요컨대, 각 θ 값의 변화에 대하여 진동자의 각도를 변화시키면 진동자의 위치가 최대 진폭이 되도록 모드가 형성되어 진다. 그리고 반지름 r 값을 변화시켰을 때는 파동 함수(Bessel함수)의 진폭이 최대인 지점에서 최단 시간 내에 모드가 형성되어 진다.

하지만, 수소 원자는 3차원이며, 구면 극좌표계의 한 점 r, θ, ϕ 에서 전자의 확률 밀도는 그 점에서의 $|\psi|^2$ 에 비례한다. 따라서 미소 체적 요소 dV 내에서 전자를 찾을 실제 확률은 $|\psi|^2 dV$ 이며, 수소 원자에서 핵으로부터의 거리가 $r+dr$ 사이인 곳에서 전자를 발견할 실제 확률 $P(r)dr$ 은 $r^2|R|^2dr$ 이 된다.

그러므로, 학생들에게 이 점을 다시 숙지시키면서 실제 확률 $P(r)dr$ 과 앞의 실험에서 비유해서 보여준 각각의 파동함수 $R(r), \Theta(\theta)$ 을 함께 설명해 주어야 한다. 여러 대학교 물리 교재에서도 이런 것들을 그래프와 표로써 보여 주고 있으므로, 고등학교 학생들에게는 나중을 위해서도 상당히 도움이 될 것이며, 왜 그런지에 대한 흥미를 불러일으킬 수도 있을 것이다.

실험을 수행함에 있어, 몇 가지 고려해야 할 사항이 있었다. 예를 들면, 날씨에 따른 습도와 온도 차 때문에 북의 진동음이 다르게 나타나므로 최대한 같은 온도와 습도를 유지하려면 당일 하나의 실험을 완료하는 것이 좋다는 것이다. 이는 습도와 온도는 막의 장력에 영향을 주어 이 장력을 통한 매질의 속도가 진동수에 영향을 끼치기 때문이다. 또한 북의 반지름

이나 길이를 정확하게 측정하기는 어려워 최대한 근사값으로 길이들을 처리했으며, 각각의 모드가 만들어 지는 시간을 측정할 때에도 색모래로 확인하는 것이었으므로 그 모드가 가장 선명하게 만들어지는 기준을 정해서 실험을 수행하였다.

아쉬운 점이 있다면, 북의 크기나 여러 실험상의 한계로 인해 좀 더 다양하고 복잡한 모드에서도 전자를 찾을 확률이 높은 곳을 제시하여, 많이 보여 주지 못하는 것이 조금 아쉽다.

학생들에게는 동영상 자료로 제시하는 것도 흥미로울 것이라 생각된다.



참고 문헌

- 1) 현대 물리학(6rd Ed) - Arthur Beiser (학술정보)
- 2) 현대물리 - Frank J. Blatt (에드텍)
- 3) 대학 물리학 II - 대학물리학교재 편찬위원회 ((주)북스힐)
- 4) Fundamentals of Acoustics(4rd Ed)
- Lawrence E. Kinsler /Austin R. Frey 외 (Wiley)
- 5) 물리화학(Physical Chemistry) - Silbey Alberty 외 (사이텍미디어)
- 6) 타악기의 원형 진동면에 대한 음향학적 고찰(2005)
- 부경대학교 석사학위 논문
- 7) 현대 물리학 - John R. Taylor 외 (교보문고)
- 8) 고등학교 교육과정 해설(과학) - 교육 인적 자원부 (대한교과서)

감사의 글

먼저 이 논문이 완성되기까지 많은 사랑으로 저를 이끌어 주시고 지도해 주신 김 성부 교수님께 깊이 감사드립니다.

또한, 여러모로 부족한 제가 논문을 끝낼 수 있도록 심사해 주시고 지도해 주신 이 종규 교수님, 홍 지상 교수님께도 깊이 감사드립니다.

같은 실험실에서 저의 논문에 많은 도움을 준 지향, 지용, 재윤 학우에게도 고마움을 표합니다.

그리고 우리 대학원 입학 동기들과, 항상 옆에서 힘을 준 나의 오랜 친구들에게도 고맙다는 말을 전합니다.

2년 반 동안 한결같이 저를 지지해 주신 어머니와 우리 가족들과 함께, 작지만 이 결실의 기쁨을 함께 하고자 합니다.

2007년 8월

정 금 화