교 육 학 석 사 학 위 논 문

# 수학사를 이용한 학습동기 유발에 관한 연구



2011년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

정 은 선

교 육 학 석 사 학 위 논 문

# 수학사를 이용한 학습동기 유발에 관한 연구

지도교수 백 영 길

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함.

2011년 8월

부경대학교 교육대학원

수 학 교 육 전 공

정 은 선

정은선의 교육학석사 학위논문을 인준함.

2011년 8월 26일



주 심 이학박사 신 준 용 (인)

위 원 이학박사 심 효 섭 (인)

위 원 이학박사 백 영 길 (인)

# 목 차

# 그림 목차

A study on materials for learning motive using mathematics history

Eun Seon Jeong

*Graduate School of Education*

*Pukyong National University*

## Abstract

In mathematics education, to take advantage of mathematics history for learning motivation is one of effective methods that can help students to understand mathematical way of thinking, study actively, have correct understanding and attitude toward mathematics and cause an interest and a motive regarding mathematics learning. And the more lesson is difficult, there are more qualitative differences in durability and challenge of academic ability between those students. So teacher has to offer learning context or atmosphere which students can be motivated in enthusiastic, productive way.

This study will motivate students and make them to be interested in learning mathematics with history of mathematics, and mathematical approach. Thus, it has to offer a variety of materials which are used history of mathematics to make students motivate and participate in learning mathematics enthusiastically and productively.

# Ⅰ. 서론

## 1.1 연구의 필요성과 목적

학교 수학 수업 시간에 능력이나 환경 때문이 아니라 동기문제로 인하여 좌절하고 어려움을 겪는 학생들을 볼 수 있다. 그리고 많은 학생들이 “수학공부를 왜 해야 하나요?” 라는 질문을 선생님이나 부모님께 한다. 그러면 거기에 대한 답변은 “시험에 나온다.” 아니면 “대학에 들어가려면 수학을 해야 한다.” 라는 막연한 대답을 하는 것이 보통이다.

그래서 학생들이 수학에 대한 흥미나 관심을 갖기 어렵고 수학 학습 활동에 자발적으로 참여하려고 하지 않을 뿐 아니라 즐거워하지도 않고 오히려 불안 해 한다. 설령 수학을 잘한다고 해도 수학에 대한 학습동기가 부족하다면 지속적인 학습을 기대하기 어려울 것이다.

학교 수학 수업 현장에서 여러 어려움이 있겠지만 특히 교사가 힘들어하는 부분은 바로 학생들을 동기화시키는 것이다. 학생이 매사에 의욕이 없고 학습이나 학교생활에 도통 관심을 보이지 않을 때, 그래서 교사의 관심이나 격려도 귀찮고 부담스럽게만 느끼고 무기력한 모습을 보일 때 교사는 벽에 부딪힌 것과 같은 막막함을 느끼게 된다.

정종진(2003)은 “말을 물가에 끌고 갈 수는 있지만, 물을 마시게 하는 것은 동기유발이다. 다시 말하면 자동차를 멋지게 만들었다 하더라도 엔진에 고장이 생겼거나 연료가 없으면 움직일 수 없듯이, 가장 잘 발달된 습관일지라도 적절한 활성화, 즉 동기유발이 이루어지지 않으면 효과적인 학습을

할 수 없다.” 라고 동기유발의 중요성을 강조했다.

학생들이 학습을 해야 하는 목적과 여러 가지 활동과 내용 등에 흥미를 가지고 있을 때 학습은 가장 효과적이며 용이 하다. 야단맞을 것이 두려워서 공부하는 학생과 모르는 것을 알아가는 과정이 재미있고 신기해서 공부하는 학생의 경우 시간이 지날수록, 또 학습수준이 어려워질수록 그 학업성취능력의 지속성과 도전성에서는 질적 차이가 나타날 것이다. 따라서 학생들을 동기화시켜서 적극적이고 생산적으로 수학 학습 활동에 참여하도록 학습맥락을 제공해주어야 한다([16]).

수학사를 수학교육에 이용하면 다음과 같은 이점이 있다. 첫째는 알고리즘을 강조한 계산수학이 아닌 수학의 개념적 사고를 고취시키며, 둘째는 수학교육과정 구성에서 자연스러운 내용 배열의 준거가 되며 학습‧지도에서 수학적 아이디어의 발달 과정을 따름으로써 자연스럽게 학습내용의 이해를 도울 수 있다. 셋째는 수학의 역사적 발달 과정에 소급해봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습을 접해 보게 하여 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어 놓는다. 넷째는 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할, 특히 인간관과 세계관 형성에 미친 수학의 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생들의 인식을 바꿀 수 있다([14]).

본 연구는 수학 학습 활동에 적극적 참여를 위하여 수학사를 활용하여 수학적 사고의 인간적인 모습을 접하게 함으로써 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 흥미를 줄 것이다. 따라서 학생들을 동기화시켜서 적극적이고 생산적으로 수학 학습 활동에 참여하도록 수학사를 활용한 여러 가지 자료로 학습맥락을 제공해주어야 한다.

## 1.2 연구 내용

본 논문은 수학시간에 학생들에게 학습동기를 높여주기 위하여 수학사를 활용하였다. 따라서 수학사와 학습동기에 관한 서적들을 조사하고 각각의 개념들을 이해하며 학습동기 유발에 수학사를 도입한 자료들을 제시하였다.

## 1.3 연구의 제한점

자료의 개발을 위하여 서적과 논문을 통하여 자료를 수집하여 분석, 정리한 것이므로 개발된 자료를 실제 학습지도 방안으로 작성하여 교실 현장에 적용할 수 있는지 검토하여야 한다.

# Ⅱ. 이론적 배경

## 2.1 학습동기 의미

동기란 인간행동의 에너지로서 행동을 일으키고 행동의 방향을 결정하는 심리적 요인이다. 자동차에 비유한다면 엔진과 핸들의 기능에 해당되는 것이 동기이다. 다시 말해서 동기란 행동을 일으키는 에너지이며 동기는 행동의 방향을 결정한다. 에너지는 행동의 세기를 의미하고 방향은 행동의 목적을 가리킨다. 행동의 세기와 방향을 결정하는 원인에는 욕구(needs), 인지(cognition), 정서(emotions), 외적사건(external events) 등이 있다. 욕구란 생존과 성장 그리고 안녕을 위해 필수적인 개인의 내적 조건을 가리킨다. 인지란 신념, 기대, 자아개념과 같은 사고방식이다. 외적사건이란 돈이나 칭찬과 같이 사람을 끌어당기는 긍정적 인센티브, 처벌이나 야단과 같이 사람이 도망가도록 하는 부정적 인센티브를 가르킨다. 처해 있는 상황이나 분위기 혹은 속해 있는 집단의 규범과 규칙 인습 등과 같은 문화도 외적 사건에 포함된다([8])

동기는 무엇인가를 하고 싶은 마음 상태를 말하고 학습동기는 공부가 하고 싶은 마음을 말한다. 학습 동기는 내재적·외재적·개인적·환경적 요인들이 포함되어 다양하게 작용한다. 특히 학습동기가 높고 낮음은 학생들이 겪어 온 많은 경험과 연관이 있다. 따라서 학습의 동기는 개인마다 다른 요인이 작용되어서 나타나며 그중 흥미가 중요한 영향을 끼친다.

학습동기를 구성하는 요소에는 자아정체감 형성하기, 꿈 세우기, 자기 효

능감 높이기, 긍정적 생각 가지기, 공부목표, 시간관리, 성취감 높이기, 귀인검사, 칭찬과 격려 등이 있다.

학습동기는 내재적 동기와 외재적 동기로 구분되는데 외재적 학습동기는 일시적으로 학습동기를 높이는데 탁월하지만, 꾸준한 학습 습관으로 연결하기 위해서는 내재적 학습동기가 생기도록 해야 한다.

내재적 학습동기는 내적 강화 요인에 의한 것으로서 학생 스스로 공부에 대해서 자발적인 흥미나 관심을 갖고 기쁨과 같은 내적 보상에 따라 유발되는 것을 말한다. 그리고 공부 자체가 보상으로 작용하기 때문에 특별한 보상이나 벌이 필요없다. 내재적 학습동기를 가진 학생에게는 공부할 수 있는 분위기를 조성해 주면서 지속적인 관심을 가지는 것이 좋다. 외재적 학습동기는 행동주의 심리학을 배경으로 출발하였는데, 타인으로부터 받는 칭찬이나 징정, 보상, 사회적 압력, 벌 등의 외적 보상으로 학습동기를 유발하는 것을 말한다. 외적 강화 요인에 의한 것으로서 과제 자체에 대한 관심보다는 활동 과정에서 얻을 수 있는 것에 많은 관심을 둔다. 따라서 외재적 학습동기를 가진 학생은 외적 보상이 없어지면 해 오던 공부를 하지 않을 수 있다. 또 외적 보상에 대하여 내성이 증가하므로 계속적인 동기부여를 위해서는 더 좋고 큰 보상이 주어져야 한다.

내재적 학습동기를 높이는 방법은 즐거운 마음으로 학습에 임하도록 하고 학생 스스로 긍정적인 마음으로 학습하고 싶도록 만드는 것이다. 호기심을 가질수록 탐구하려는 마음이 생긴다. 따라서 공부를 왜 해야 하는지에 대한 호기심은 공부를 해야겠다는 마음을 갖게 하는데 도움이 된다. 공부는 자아실현의 기회를 제공하고 인간다운 삶을 사는 데 가장 중요한 요소라는 생각을 갖는다. 공부를 잘하기 위해서는 자신감을 가지는 것이 중요하다. 따라서 공부를 해서 원하는 목표에 도달하면 자신이 하고 싶은 일을 할 수 있다는 생각을 가지게 하여 “나도 할 수 있다.” 라는 자신감을

갖도록 지도한다. 원하는 목표에 도달하면 이전에 자신이 하고 싶었던 일들 즉 휴식을 취하거나, 맛있는 것을 먹거나, 예전부터 가지고 싶었던 물건을 구입함으로써 성취감을 높인다. 성공한 사람 중에 닮고 싶은 사람을 정해서 그 사람의 삶의 방식대로 따라하다 보면 결국은 닮게 되고 성공할 수 있다는 생각을 갖게 한다. 자신의 목표를 지인들에게 알리면 목표에 도달하려는 책임의식을 가지게 된다. 자신이 목표를 달성하지 못했을 때 별로 다른 대가를 치르겠다는 약속을 부모나 친구와 해두면 도움이 된다. 자신에게 긍정적인 영향을 주는 말들을 적어둔다. 긍정적인 말을 많이 해 주는 친구들은 자주 만나는 것도 긍정적인 생각과 동기를 지속하는 데 도움이 된다. 공부하는 과목에 흥미를 갖기 위해서는 많은 사전 지식이 필요하다. 따라서 과목 담당 선생님께 왜 그 분야를 전공하게 되었는지, 그 분야에서 정말로 좋아하는 것은 무엇인지, 그 분야에서 성공하면 무엇을 얻을 수 있는지 등을 물어보아 과목에 대한 이해와 흥미를 가지면 공부에 좀 더 매력을 느낄 수 있다. 한 가지 일을 오래하면 효율성이 떨어지므로 규칙적으로 쉬는 것이 좋다. 그러나 휴식 중에 장시간 텔레비전을 보거나, 컴퓨터를 한다거나, 친구에게 문자메시지를 보내는 일은 하지 않는 것이 좋다. 피곤하면 잠시 수면을 취하는 것도 좋은 방법이다. 학교생활에 열정을 갖고 있거나, 자신의 학습 의욕을 고취시켜 줄 수 있는 친구들과 시간을 많이 갖도록 한다. 그 친구로부터 긍정적인 모습을 배움으로써 자극이 된다. 목표를 세우고 그것에 도달했을 때를 상상해 본다. 그러면 성취 만족을 기대하면서 현재의 고통과 갈등을 극복하려고 지속적으로 노력하게 된다. 외재적 학습동기를 높이는 방법은 목표가 구체적이어야 그 학습 목표에 도달할 수 있음을 알게 하고 목표를 세우도록 한다. 공부 방법이나 학습 과정에 대하여 자세하게 안내함으로써 공부에 흥미를 갖고 적극적으로 참여하도록 한다. 독립심이 약하고 의존성이 강한 학생들에게는 지속적으로 과제를 부여

하여 도달하게 한다. 과제를 달성하면 칭찬과 격려고 성취감과 함께 공부하는 과정을 즐기고 만족감을 느낄 수 있도록 한다. 사람은 어느 정도 도전하는 일에 흥미를 갖는다. 따라서 항상 목표를 세워 도전하도록 격려한다. 그러나 목표가 자기 능력에 비해 너무 어렵거나 지나치게 모험적이면 오히려 포기하게 되므로 학생의 수준에 맞는 목표를 세우도록 한다. 공부습관이 형성되지 않은 학생들은 자신감이 부족하여 학습에 나쁜 영향을 미친다. 따라서 학습에 대한 자신감을 갖도록 장점과 잠재 능력을 찾아 격려와 칭찬을 해준다. 학습 목표와 과제를 주고 결과를 평가한 다음 그 결과에 대하여 학생이 책임을 지도록 한다. 성공과 실패에 대한 책임을 스스로 짐으로써 타인에게 의지하지 않고 자립심을 갖도록 한다. 사람은 자신이 하는 일에 관심을 가져 주면 잘하려는 마음이 생긴다. 따라서 학생의 공부와 관련된 모든 것에 대하여 관심을 가져 주고 지켜봐 주는 것이 중요하다. 공부는 혼자 하는 것보다 집단에 소속되어 소속감이나 경쟁심을 갈질 때 더우 효과가 있다. 학생이 이미 경험한 것들을 학습과 연결시켜 기억에 도움이 되도록 한다. 학습자 개인의 장점을 찾거나 공부를 잘했을 때는 칭찬을 하고 학습의 결과가 좋지 않을 때는 벌을 준다. 공부를 혼자하면 성과를 알기가 어려우므로 공부하는 동안 발문을 통해서 점검해 보고 기억하도록 한다([16]).

## 2.2 수학사

여기에서는 광범위한 수학사 내용을 그 시대의 주요 수학자의 업적을 토대로 정리하여 수학자들의 업적을 통하여 오늘날 우리가 배우는 수학내용

을 관련시켜보도록 하겠다.

### 가. 고대 수학과 그리스 수학

아프리카의 나일 강변(이집트 문명), 서아시아의 티그리스·유프라테스 강 유역(메소포타미아 문명), 남 중앙아시아의 인더스 강 유역(인더스 문명), 동아시아의 황하 유역(중국 문명)에 기원전 2000년까지에는 고대 4대 문명이라고 부르는 고대 국가 사회가 발달되었다.

고대 국가의 주요 경제 활동은 농업과 목축으로 이 강들의 홍수로 부터 농토를 관리하는 일과 거기서 나오는 생산물을 분배하고 조정하는 일은 무엇보다 중요하다. 따라서 초기의 수학은 주로 고대 오리엔트(그리스의 동쪽)의 지역에서 농업, 토목, 건축과 같은 일에 필요한 실용적인 과학으로서 발생하였다. 초기 수학의 특징은 실용적인 산술과 측량에 있었다. 이로부터 대수와 기하학의 시초가 발전하였다.

이와 같은 고대 문명에서 수학은 필수였으며 기록으로 남아 있는 것은 이집트와 바빌로니아(메소포타미아)의 것뿐이다. 고대 수학은 토지측량, 토목공사 등 현실 문제 해결의 수단인 생활수학이었기 때문에 그 이상의 발전을 하지 못했다. 바빌로니아 인들은 구운 점토판을 사용했고 이집트인들은 돌과 나일강변의 갈대로 만든 파피루스를 사용했다.

수학이 학문과 과학으로서 주목되는 것은 약 기원전 6세기경이다. 그리스 인들은 이집트에서 기하학 배우고 바빌로니아에서 대수학을 배운 것으로 알려져 있다. 그리스의 탈레스나 피타고라스, 플라톤은 수학의 불멸의 업적을 남겼다. 그리고 유클리드의 <원론>, 아르키메데스의 연구 업적, 아폴로니우스의 <원추곡선론>, 디오판토스의 <산학>등이 그러한 것이다. 아

리스토텔레스와 플라톤 등으로 대표되는 학자들의 관심사는 철학과 수학이었다. 플라톤은 그의 강당의 입구에 "기하학을 모르는 자는 들어오지 말라"고 써 붙였고 유클리드 <원론>은 역사상 처음으로 수학을 논리적으로 정체계화 한 것으로서 유럽에서는 19세기 말경까지 교과서로 쓰이고 있었다. 공리에서 출발하여 정리를 증명을 체계화하는 오늘날의 수학의 형식에 가까운 것을 이미 기원전 3세기경 보여주었다. 이 체계는 오늘날의 생각으로 바라보면 여러 문제점이 있지만 수학에 끼친 영향은 크다. 하지만 그리스 수학은 이론적으로 뛰어났지만 수나 계산 쪽에서는 진전이 없었다.

## 나. 중세 유럽 수학

디오판토스 이후 10세기경까지의 유럽은 인도나 근동 여러 나라에서 발전한 산술과 대수를 수입하는 상태였다. 인도에서는 7세기에 아리아바타(Aryabhata, 475~553)가 기수법과 천문학적 관측론을 자세히 다루고 있었다. 오늘날 쓰이는 아라비아 숫자가 발명된 시기도 이때의 인도이다. 이탈리아의 피보나치가 이것을 유럽에 전파하였다.

수도원 수학은 로마제국이 몰락하는 476년 서로마 제국 멸망에서 11세기에 이르는 기간을 유럽의 암흑시대라고 한다. 이 시대는 한마디로 인간의 모든 사고와 행동을 기독교의 원리나 이치에 서서 지배하던 시대였다. 따라서 가톨릭 수도원의 수도사들에 의한 연구 외에 수학의 연구라고는 있을 수 없었다.

보이티우스(Boethius, 약 475~524)의 기하학과 산술에 관한 저작은 수세기 동안 수도원 학교의 표준 교과서로 사용되었다. 제르베르(Gerbert, 약 950~1003)는 0이 없는 인도-아라비아 숫자를 기독교 유럽에 전파했다고

알려져 있다. 또한 그는 중세 유럽에서 최초의 학교를 프랑스에 세웠으며 수판, 지구의, 천구의, 시계를 만들었다고 전해진다.

이후 유럽에서의 수학은 중세 말엽과 르네상스 초기에 비로소 뚜렷한 발달을 보이기 시작한다. 이 시대의 수학 지식은 그리스 수학이 아니라 이슬람 세계의 아라비아 수학을 기초로 하였다. 유럽 중세의 봉건사회 아래에서의 생산은 다만 농업 경제에 의지하였으므로 수학이라고 하여도 수도원 깊숙한 곳에서 겨우 숨을 쉬고 있던 무렵, 새로운 활력소로 등장한 아라비아 수학은 그리스(그리고 인도)와 근대 유럽을 이어주는 교량 역할 이상으로 중요한 구실을 하였다.

12세기의 유럽은 한 마디로 번역의 시대였다. 유클리드의 <원론>을 비롯하여, 아르키메데스, 아폴로니우스, 프톨레마이오스, 메넬라오스, 알-화리즈미 등, 최고급의 그리스 및 아라비아 수학자들의 서적이 스페인을 중심지로 하여 아라비아에서 라틴어로 번역되어 홍수처럼 유럽에 쏟아져 나왔다. 중세에서 레오나르도 피보나치가 등장한다. 그는 중세 암흑기에 최초로 수학의 부흥에 나선 인물 이었다. 관세 관리인인 아버지의 직업 때문에 소년 시절부터 일찍이 산술에 흥미를 느끼기 시작했으며 이후 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등으로 여행을 하면서 동부와 아라비아의 수학을 접하였다. 인도-아라비아의 계산술의 실용적 우수성에 완전히 확신을 가지게 된 피보나치는 1202년에 고향으로 돌아와서 마침내 그의 유명한 저서 <산반서, Liber abaci>를 출간하였다. <산반서>는 산술과 초등대수에 관하여 쓴 것으로 비록 독립적인 연구이긴 하지만 화리즈미와 카밀의 대수로 부터 많은 영향을 받았음을 보여주고 있다. 이 책은 인도와 아라비아 숫자를 유럽으로 소개하는 데 큰 역할을 하였는데 많은 문제들이 있어 수세기 동안 많은 저술가들에게 수학 문제의 보고가 많이 되었다.

## 다. 16C 수학

15세기와 16세기에는 르네상스의 부흥기를 겪으면서도 수학 쪽으로는 그리스 시대이나, 현저한 발전은 없었다. 다만, 이탈리아에의 3차 방정식과 4차 방정식의 해법이라든가 프랑스에서의 대수학을 계통적으로 기호화한 점이 주목될 뿐이다. 르네상스 설령 수학의 체계 자체에는 획기적인 변화를 주지 않더라도 갖가지 풍요로운 소재로 이 학문에 활기를 불어 넣었다. 그러나 르네상스 시대의 수학의 가장 큰 의미는 그리스의 수학과 인도와 아라비아의 수학이 통합됨으로써 여기에서 유럽수학의 전통이 확고해지고 이것을 발판으로 하여 근대수학을 발전시켰다는 점이다.

16세기의 수학은 기호대수가 시작되었고 인도와 아라비아 숫자 계산이 표준화 되었으며 소수가 개발되었고 3차방정식과 4차방정식이 풀렸고 방정식이 진보되었으며 음수를 인식하게 되고 삼각법이 완성되어 몇 가지 훌륭한 표가 만들어졌다. 여기에 관한 표는 뒤에서 다시 언급하도록 하겠다.

## 마. 17C 수학

유럽은 17세기에 들어가면서 철학, 천문학, 물리학 등의 발전과 더불어 근대와 현대에 이어지는 이른바 '과학혁명의 시대'에 돌입하게 된다. 케플러, 네이피어, 페르마를 비롯하여 데카르트, 파스칼, 뉴턴, 라이프니츠 등이 새로운 분야를 개척하였다. 이들의 연구나 창의적 발견에는 물리학, 천문학, 철학 특색이 잘 나타나 있다. 철학자 데카르트는 <방법론서설>을 지은 해석기하학의 창시자로서 기하학을 대수학과 결부시켜서 대수학적 방법을 발견하였다. 이것은 라이프니츠의 미적분 발견에 영향을 끼치고 있다.

뉴턴과 라이프니츠는 미적분학을 창시하여 근대 해석학의 발단을 시작하여 기하학과 대수학의 세계에서 해석학으로 비약하여 물리학에도 큰 영향을 끼쳤다. 이후에 라이프니츠와 뉴턴은 미적분학의 창설을 둘러싸고 많은 논쟁이 있었으나, 결국은 각각 독립으로 그 업적을 이루었다는 것이 밝혀졌다. 라이프니츠는 수학의 기호화에도 큰 공적을 남겼으며 오늘날의 미적분학의 기호, 법률학, 철학에도 큰 업적을 남겼다.

## 바. 18C 수학

18세기는 미적분학이 발전된 시기로 도안 삼각법, 해석기하학, 정수론, 방정식론, 확률론, 미분방정식, 해석역학 등의 분야에서 상당히 발전되었으며, 보험통계학, 변분법, 고차함수, 편미분방정식, 화법기하학, 미분기하학 등 수많은 새로운 분야가 연구되었다.

스위스의 오일러의 수많은 독창력이 해석학의 발전시켰고 이탈리아에 살고 있던 프랑스인 라그랑주는 오일러와 더불어 변분학을 만들었다. 달랑베르는 해석학의 기초에 관심을 두고 연구 하였으며 람베르트는 평행공준에 관한 논문을 썼다. 해석학에 크게 공헌한 라플라스와 화법기하학을 창시한 몽주도 이 시대의 사람들이다.

## 사. 19C 수학

19세기는 대체로 모든 과학이 완성의 단계로 향하는 시대이다. 가우스를 비롯하여 바이어슈트라스, 리만, 데데킨트, 칸토르, 클라인, 힐베르트 등이

현대 수학의 건설에 큰 역할을 하였다. 19세기의 주된 연구는 가우스의 정수론을 대표하여 프랑스인 코시의 해석학의 연구, 헝가리의 보야이의 비유클리드 기하학의 연구, 노르웨이인 아벨의 대수학과 해석학에 대한 공헌, 프랑스인 갈로아의 방정식론, 군론에 있어서의 업적, 바이어슈트라스와 리만의 해석학, 리만 기하학의 창시 등이 있다.

그리고 19세기는 비유클리드 기하학의 출현으로 인한 기하학의 해방, 대수학의 추상화, 해석학의 산술화와 같은 수학 각 분야에 있어 훌륭한 발전이 있었던 세기이다. 이때에는 수학의 엄밀성, 추상성, 보편성이 추구되었다.

### 아. 현대수학

20세기 수학은 주제의 논리적 기초와 구조를 검증하는 데 집중되어 왔다는데 이것은 점차 공리론(axiomatics)과 그것들의 성질에 관한 연구를 발전시켰다. 많은 수학의 기본 개념이 일반화되었으며 집합론, 추상대수, 위상수학 같은 기본적인 분야가 광범위하게 발달되었다. 일반집합론은 까다로운 논증을 요구하는 약간 심오하고 혼란스런 역설에 부딪혔다. 그래서 주어진 가정으로부터 결론을 얻어내는 데 수학에서 사용하는 장치인 논리 자체를 면밀히 검토하게 되었으면서 수리논리가 등장하게 되었다. 그리하여 논리와 철학 사이의 관계는 현대의 다양한 수리철학의 주요 학파로 발전하게 되었다. 또한 20세기의 컴퓨터 혁명에도수학 많은 영향을 끼쳤다.

데데킨트는 절단(Schnitt)이라는 개념을 도입하여 수학의 기초를 확립하였고 클라인은 해석학에서 많은 업적을 남겼을 뿐만 아니라 이른바 에를랑겐 목록(Erlangen Pragram)을 발표하여 기하학 전체를 명확하게 분류하고

새로운 기하학의 발전에 도움을 주었다. 그리고 힐베르트의 기하학의 공리계의 연구는 현대의 공리주의 수학의 기초를 이루었다. 그의 기초를 확립하는 작업을 강력히 추진하면서 기존에 있던 성과 위에 새로운 성과를 축적해 나가면서 수학의 많은 분야의 통일화로 진보와 발전을 거듭하였다([21]).

# Ⅲ. 학습동기 유발 자료

## 3.1 중학교 수학

### 가. 수와 연산

(1) 집합

집합론은 근대 수학과 현대수학으로 나눠주는 기준이다. 칸토어(G. Cantor, 1845~1918)는 집합을 “확정적이고 명확히 구별되는 직관이나 사고의 대상의 모임을 하나의 전체로 한 것”이라고 정의하였다. 이 정의는 임의의 초한수(transfinite number)[1]보다 더 큰 초한수는 항상 존재한다는 사실을 증명함으로서 집합 정의 자체의 문제점이 나타났다. 그 후 러셀(B. Russel)은 ‘자기 자신에 속하지 않는 집합 전체를 원소로 하는 집합을 X라 할 때, X가 X에 속하면 X는 X에 속하게 된다.’를 러셀의 패러독스를 제시함으로서 칸토어의 집합에 대한 정의의 모순을 논리적으로 지적하였다.

그 이후에는 집합을 무정의 용어로 생각하고 무한집합의 농도의 개념을 도입함으로서 무한의 개념을 연구하기 시작한다. 칸토어는 두 개의 집합 사이에는 일대일 대응이 존재할 때 이 두 집합은 같은 농도를 가진다고 정의하였다. 실수 전체의 집합은 자연수의 집합과 일대일 대응을 시킬 수 없

---

1 초한수는 모든 유한수보다 큰 수를 의미한다. 초한수가 절대적 무한일 필요성은 없으며, 초한수 사이에도 크기 비교가 가능할 수 있다.

다는 것은 칸토어의 대각선 논법[2]에서 알 수 있다. 칸토어는 임의의 집합 X에 대하여 멱집합 P(X)의 농도는 X의 농도보다 크다는 사실을 밝혀 농도가 얼마든지 큰 집합이 존재함을 밝혔다. 그 결과 자신이 창조한 집합론에 역리(paradox)가 생기는 것을 발견하여 문제를 해결하기 위하여 수학의 기초론[3]이 발달하기 시작하였다.

(2) 수 개념과 기수법

수 개념은 인류학을 연구하는 학자들에 의하면 인류의 역사와 같이 발전하였다고 한다. 원시인들은 가축과 같이 세고자 하는 물건들의 개수를 신체의 특정부위에 대응시켜서 세었으며 물건의 개수가 많아지면서 기록을 하기 시작하였고 숫자가 나타나기 시작하였다. 수를 구성하는 방법을 기수법이라고 하는데 기수법의 원리에는 가법적 기수법, 승법적 기수법, 위치적 시수법이 있다. 가법적 기수법은 바빌로니아 문자나 이집트 문자처럼 같은 모양의 기호를 여러 가지 사용하여 그 개수만큼의 수를 나타내는 방법으로 한자도 여기에 해당한다. 승법적 기수법은 두 숫자의 곱으로 수의 값을 나타내는 방법으로 500을 한자로는 五百으로 나타내는데 이것은 五와 百의 곱을 나타내는 값이다. 마지막으로 위치적 기수법으로 세 개 중에 대표적인 것으로 234에서 2는 200을, 3은 30을, 4는 그대로 4를 나타냄으로서 무한히 큰 수도 나타낼 수 있게 되었다

---

2 칸토어의 대각선 논법은 실수가 셀 수 있는 무한이 아니라는 것을 보여주기 위해 게오르크 칸토어가 고안한 수학적 증명이다.

3 수학기초론(Foundations of mathematics)은 수학의 분야들 중 수리논리학과 공리적 집합론, 모델 이론 및 반복 이론 등을 가리키는 말이다. 수학의 기초를 찾는 것은 근본적인 의미에서 수학적 명제가 옳다고 말할 수 있는 근거가 무엇인지를 연구하는 것이다.

(3) 자연수의 공리

페아노(G. Peano, 1858~1932)는 자연수를 형식적 논리로 다룰 수 있도록 아래와 같이 조건 없이 전제했다. 집합 N이 아래와 같은 조건을 만족할 때 N의 원소를 자연수라고 하자.

(1) $1 \in N$

(2) $x \in N$에 대하여 x에 대응하는 $x^+ \in N$인 $x^+$이 오직 한 개 있다.
이 때, $x^+$을 x의 후임자(successor)라 한다.

(3) $x^+=y^+$ 이면 $x=y$이다.

(4) $x \in N$이면 $x^+ \neq 1$이다.

(5) M이 N의 부분집합으로서 $1 \in M$이고 $x \in M$일 때 $x^+ \in M$ 을 만족하면 $M=N$ 이다.

(4) 유리수와 음수

기원전 2000년 경 바빌로니아인들은 육십진법의 위치적 기수법을 사용하였고 1에서 59까지의 숫자를 썼다. 이들은 1보다 작은 값을 사용하였는데 1보다 작은 값을 구분하는 곳에는 소수점과 같은 특별한 기호를 사용한 것이 아니라 비워 둠으로서 수를 읽는데 혼란을 발생 시킬 수 있었다. 이집트인들이 수를 사용한 3400년경의 왕의 철퇴 위에 상형문자로 기록되어 있다. [그림 1]에서 고대 이집트의 파피루스에 적힌 기록을 보면 분수도 사용했는데 분모를 나타내는 수 위에 꽃잎모양 기호 또는 점을 찍어서 표시하였다.

[그림 1] 고대 이집트 파피루스

그리고 고대 그리스에서는 1, 5, 10, 100, 1000, 10000을 각각 나타내는 기호 I, Γ, Δ, H, X, M을 합성하여 나타내었고 분수는 수를 나타내는 기호 위에 악센트를 붙여서 단위분수를 나타내고 뒤에 분자에 해당하는 수를 나타내었다. 후기에는 위에 분모 아래에 분자를 나타내는 형식을 사용했지만 그 사이에 경계를 이루는 선분은 사용하지 않았다.

오늘날 사용하고 있는 아라비아 숫자의 모양과 비슷한 기록은 기원전 250년경 인도의 불교신자였던 아소카왕조 시대에 만들어진 사원의 돌기둥에서 만들어졌다. 하지만 0에 해당하는 기호는 없었다. 인도는 수가 완전히 발전한 것은 4세기에서 7세기 사이가 일반적이며 비어있는 자리를 sifr로 불렀는데 라틴어 zephrium으로 음역되고 바뀌어 오늘날 zero로 발전 하였다고 한다.

음수 개념은 인도나 중국에서 먼저 사용되었다. 인도에서는 이익에 대한 부채를 나타내기 위하여 사용했으며 음수를 나타내는 방법은 량을 나타내는 수위에 점을 찍어 사용하였다고 한다. 중국, 한국, 일본에서는 수의 연산을 위하여 수막대(number rods)를 사용하였는데 중국 송나라의 수학자 이야(李冶)의 저서에서 수막대로 나타낸 수의 맨 오른쪽 자릿수를 대각선으로 획을 그어 음수로 나타내었다. [그림 2]는 중국의 1136년에 돌에 새겨

만든 ‘우적도’로 바둑판 모양처럼 일종의 구면 좌표에 기초한 방안도법으로 이미 오래전부터 거리 측량 기구인 기리고차를 비롯하여, 지남차, 나침반, 천체를 겨눌 수 있는 규형, 토지를 측정하는 토규, 수평, 경표, 줄을 바르게 치기 위한 도구인 묵승, 곡자 등의 기구들을 사용해 정교한 지도를 그렸다. 이러한 기구들은 수학기구이다.

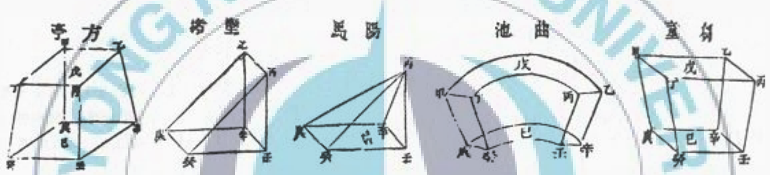
[그림 2] 우적도 탁본

(5) 무리수

고대 바빌로니아 시대부터 $\sqrt{2}$의 근삿값을 사용한 기록이 있다. $\sqrt{2}$가 유리수가 아님을 증명한 것은 피타고라스학파인 아리스토텔레스(Aristotle, B.C. 384~322)는 정사각형 대각선의 길이는 한 변의 길이의 $\sqrt{2}$이며 $\sqrt{2}$

는 유리수가 아님을 증명하였다. 그 시대에는 모든 수를 정수로 생각했기 때문에 무리수의 발견에 큰 충격을 받았고 이 사실을 비밀로 했지만 히파수스(Hippasus)가 발설하였다.

고대 중국 수학책인 「구장산술」(九章算術)은 기원전 1세기경에 쓰여졌다. 여기서 현의 길이가 b이고 호의 높이가 s인 원호의 넓이가 경험공식인 $\frac{s(b+s)}{2}$로 되어있다. 이 때 π를 3으로 생각한 것으로 보인다. [그림 3]에서는 구장산술 <상공>편에 나오는 다양한 입체도형 일부이다.



[그림 3] 구장산술 <상공>편

## 나. 규칙성과 함수

(1) 함수개념의 발달

함수(function)란 용어를 처음 사용한 사람은 데카르트이다. 데카르트는 x의 거듭제곱을 x의 함수하고 정의하였고 라이프니츠(G.W. Leibniz, 1646~1716)는 곡선 위의 한 점의 좌표, 곡선에 대한 접선의 길이 등을 함수라고 했다. 오일러(L. Euler, 1707~1783)는 일변수 함수란 변수와 몇 개의

상수로 만들어진 해석적인 식이라고 곡선과 함수를 분리하였다. 라이프니츠는 변량과 상수로 유한 번의 사칙연산을 시행하여 얻어지는 함수를 대수함수라고 하였고 그렇지 않은 것은 초월 함수라 하였다. 코시(A.L. Cauchy, 1789～1857)는 여러 변수 중 하나에 어떤 값을 주면 다른 변수의 값이 정해지는 관계가 있을 때 처음 변수를 독립변수라 하고 그 외는 종속변수라고 했다. 변수 사이의 관계를 함수라고 정의 하였다.

디리클레(P. Dirichlet, 1805～1859)에 의해서 현대적 의미의 함수의 기초가 세워졌다. 집합론의 창시자 칸토어와 다른 학자들의 점집합[4] 에 관한 연구 결과 함수는 원소들의 순서쌍으로 정의되게 되었다.

## 다. 확률과 통계

### (1) 확률 개념의 발달

16세기 수학자 카르다노는 도박을 무척 좋아하여 이것을 연구하기 시작하였고 17세기 프랑스의 드 메레(C. de Mere)는 본격적으로 도박을 연구하기 시작하였다. 갑자기 드 메레는 친구인 수학자 파스칼(B. Pascal, 1623～1662)에게 편지를 보냈다. 편지의 내용은 다음과 같다.

「 실력이 비슷한 A, B 두 사람이 돈을 걸고 내기를 하는데 먼저 3승을 이기 사람이 이기기로 하고 게임을 하다가 한쪽이 2승 1패한 다음 게임을 그만두게 되었다. 이때 돈을 어떻게 분배해야 하는가?」

---

4 집합 S에 속하는 원소가 모두 일정한 공간에 속하는 점일 때, S를 점집합이라고 한다. 이를테면 직선 위의 구간(區間), 평면 위의 1개의 삼각형의 내부, 공간 내의 구(球)의 내부 등은 모두 점집합이다.

이 문제는 페르마(P. Fermat, 1601~1665)가 해결하였다. 19세기 초 라플라스(P. Laplace, 1749~1827)는 고전적 확률 이론 체계를 세웠다.

(2) 통계 개념의 발달

통계 개념은 17세기 독일, 프랑스, 영국에서 발달하기 시작하였다. 영국의 그랜트(J. Graunt, 1620~1674)는 통계자료로 사회 현상 속의 규칙성을 찾고자 하였고 핼리(E. Halley, 1656~1742)가 만든 사망표는 생명보험의 보험료를 산출하는데 기여하였다. 19세기에 들어서면서 금융재정, 선거 등 사회적 요구에 의하여 국세조사를 통한 통계적 자료는 중시되었다.

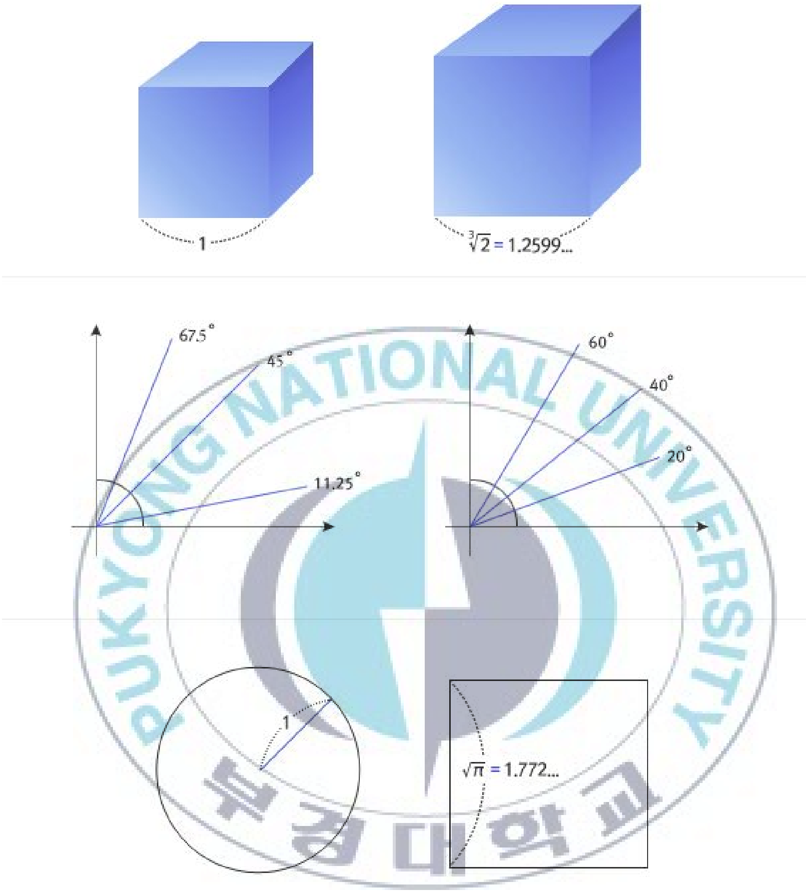
피어슨(K. Pearson, 1857~1936)은 여러 가지 분포를 연구하고 모집단의 개념을 확립해서 자료의 특성을 나타내는 기술통계를 완성하였고 피셔(R. Fischer, 1890~1962)는 표본 집단에 의하여 모집단을 추측하는 추측통계를 확립하였다.

### 라. 도형

(1) 유클리드 기하학

탈레스(Thales, B.C. 640?~546)는 이집트의 실용수학을 그리스로 가져온 사람인데 실용기하에서부터 이론기하, 논증기하의 시초가 되었다. 탈레스의 뒤를 이어 논증기하를 발전시킨 사람은 피타고라스(Pythagoras, B.C. 572?~492?)이다. 피타고라스학파는 기하와 수론과의 연관성을 연구하였다. 이후 그리스 수학은 [그림 4]의 3대 작도 불능 문제-(1) 주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체의 작도는 불가능하다 (2) 주어진 각의 삼등분 각을 작도하는 일은 불가능하다 (3) 주어진 원과 넓이가 같은 정사각형

의 작도는 불가능하다-를 제시하였다.




[그림 4] 3대 작도 불능 문제

플라톤(Platon, B.C. 427?~347)이나 아리스토텔레스에 의해 추론의 형식, 정의, 공리에 대한 연구가 추진되었고 연역적 전개 방법이 확립되었다. 이 이론과 같은 배경으로 유명한 유클리드(Euclid, B.C. 약 300년경)는 [그림 5]에서 유클리드의 「원론」(Elements) 13권을 저술하였다. 유클리드 기하는 제1권의 서두에서 23개의 정의, 5개의 공준, 5개의 공리를 제시한 다음

[그림 5] 유클리드 「원론」 일부

이것을 바탕으로 정수론, 평면기하, 공간기하, 기하학적 대수 등에 관한 465개의 명제를 논리적으로 다루는 기하학이다.

(2) 비유클리드 기하학

유클리드 후 2천년이 지난 19세기에 로바체프스키(Robachevsky), 볼리아이(Bolyai, 헝가리), 가우스(Gauss, 독일)에 의해 비유클리드 기하학이 발생하였다. 이들은 직선 밖의 한 점을 지나 그 직선에 평행한 직선의 수를 두 개 이상 있다고 가정한 경우 모순을 발견할 수 없었기 때문에 이들의 연구는 리만(Riemann)이 1866년에 어느 두 직선도 평행하지 않으며 삼각형의 내각의 합은 2직각 보다 크다고 발표하면서 주목받기 시작했다. 클라인은(Klein)은 1871년에 볼리아이와 로바체프스키, 유클리드, 리만의 기하학을 각각 쌍곡기하학(hyperbolic geometry), 포물기하학(parabolic geometry), 타원기하학(elliptic geometry)이라 불렀다.

(3) 피타고라스의 정리

피타고라스 정리는 유클리드의 「원론」에 증명되어 있는데 이 정리를 증명한 방법은 200가지가 넘는 것으로 알려져 있다. 고대 중국의 수학 책인 「구장산술」에는 직각삼각형의 세 변의 길이 중 두 변의 길이를 알고 다른 한 변의 길이를 구하는 문제가 있으며, 「주비산경」(周髀算經)에도 구(勾)를 3, (股)를 4라 할 때, 현(弦)은 5가 된다는 기록과 그림이 그려져 있다. 피타고라스 정리를 중국에서는 구고현의 정리 또는 진자의 정리라고 하고 일본에서는 직각삼각형의 정리라고 부른다.

## 3.2 고등학교 수학

### 가. 대수영역

(1) 부울 대수

명제의 참, 거짓을 판정하는 논리학의 시초는 아리스토텔레스에 의해 시작되었고 19세기에는 부울(G. Boole, 1815~1864)과 드모르간(A. De Morgan, 1806~1871)은 명제의 참, 거짓을 체계적으로 다루기 위하여 기호논리학을 다루면서 현대의 수학적 논리학 또는 수리논리학을 발전시켰다. 부울의 논리학적 체계는 명제가 참인 것을 1, 거짓인 것을 0으로 하는 이적 논리대수인데 이것을 부울 대수(Boolean algebra)라고 한다.

1847년 부울은 <논리의 수학적 해석, The Mathmatical Analysis of Logic>이라는 책에서 수학의 본질적인 특성은 형식에 존재하며 수학은 단

지 “측정과 수의 과학”이 아니고 보다 폭넓게 그 기호에 대한 정확한 연산 법칙에 따르는 기호와 내적인 무모순성만 요구하는 법칙으로 이루어진 것이라고 말하였다. 그 후 1854년에 부울은 <사고법칙에 대한 고찰, Investigation of the Laws of Thought>이라는 책에서 형식논리와 오늘날 우리가 부울 대수라고 부르는 집합의 대수인 새로운 대수학을 확립하였다. 최근에는 부울 대수는 전기 스위치 회로이론 등과 같은 많은 분야에서 응용되고 있다.

(2) 실수와 허수

이집트에서 발견된 기원전 1650년경에 만들어진 아메스(Ahmes)의 파피루스에는 85개의 문제가 실려 있는데 여기에는 십진법의 수와 분수가 적혀 있다. 그 후 피타고라스는 무리수가 있음을 발견하였고 유클리드는 「원론」에서 $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ 모양의 무리수도 나와 있다.

인도에서는 3세기에서 12세기 사이 0과 음수의 실재를 알고 있는 반면 유럽에서는 1545년 카르다노가 음수를 생각하였지만 실재하지 않는 수로 간주하였다. 음수가 수로 인정된 것은 데카르트 이후이다. 봄 벨리(R. Bombelli, 1526~1572)는 1572년 삼차방정식을 풀고 있는 중에 허수를 인식하였다. 하지만 실수와 허수란 용어를 처음 사용한 건 데카르트이고 오일러는 $\sqrt{-1}$을 I로 나타내었고 코시는 a-bi를 a+bi의 공액복소수라고 하였다. 가우스는 $a+b\sqrt{-1}$의 꼴을 복소수라고 했다.

연산기호 +, - 는 1489년 위트만(J. Widmann)에 의해, 소수점은 스테빈(S. Stevin)에 의해, 근호 $\sqrt{\ }$는 1525년 루돌프(C. Rudolff)에 의해, 등호 = 는 1557년 레코드(R. Recorde)에 의해 처음 사용되었다.

(3) 방정식

대수적 기호의 발달은 3단계로 언어적 형식(verbal rhetorical), 축약어 형식(syncopated), 기호 형식(symbolic)이다.

고대에서부터 식이나 방정식은 언어적 형식으로 사용되어 오다가, 디오판토스는 방정식을 축약어를 사용하기 시작하였다. 자신의 묘비에 자기의 일생을 기록하고 이를 이용하여 자기의 나이를 알아보게 하였다. 이 방법은 언어적 형식보다 축약어 형식이 더 간편함을 알 수 있다.

17세기경부터 상징적 대수 기호를 시작한 사람은 비에트이며 오늘날과 비슷한 기호를 사용한 사람은 데카르트와 윌리스 등이 있다. 고대 이집트의 문헌인 아메스 파피루스[린드 파피루스]에도 미지수를 설정하여 방정식을 만들고 풀어 미지수를 구하는 방법이 나와 있다.

방정식 연구를 시작한 사람은 디오판토스이고 일반적 2차 방정식을 연구한 사람은 인도의 아리아바타(Aryabhata, 476~500?)이다. 오늘날의 이차방정식의 일반적인 해법은 실베스터(Sylvester, 1814~1897)에서 의해서다. 1535년 타르탈리아는 3차 방정식 풀이를 구했으나 발표하지 못했고 카르다노에 의하여 <위대한 술법, Arsmagna>이라는 라틴어 논문에 정리되었다. 카르다노의 <위대한 술법>에서 3차 방정식 $x^3+mx=n$ 의 해법은 다음과 같다.

항등식 $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$ 에서

$a, b$를 다음과 같이 놓으면, $3ab=m, a^3-b^3=n$ 이다.

이 때, $x=a-b$로 주어져 이 두 방정식을 $a, b$에 관하여 연립하여 풀면

$a=\sqrt[3]{(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}, b=\sqrt[3]{-(n/2)+\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}}$ 이고

따라서 $x$가 구해진다.

4차 방정식은 페라리가 해결했으며 아벨(Abel, 1802~1829)이 5차 이상의 방정식의 일반적인 해법은 존재하지 않는다고 증명하였다. 이 후 가우스는 n차 방정식은 복소수 범위에서 n개의 근을 갖는다고 증명 하였다.

(4) 로그와 지수

16세기에 네이피어(J. Napier, 1550~1617)가 로그(logarithm)를 창안하여 큰 수를 간단하게 계산하였다. 같은 시대에 네이피어의 유일한 경쟁자인 뷔르기(J. Burgi, 1552~1632)가 로그를 발견하여 천문학자들에게 계산능력을 크게 향상시켰다. 그리고 네이피어의 접근 방법은 기하학적인 반면에 뷔르기의 접근 방법은 대수적이었다.

그 후 브리그스(H. Briggs, 1556?~1631)가 브리그스의 로그(Briggsian logarithm) 또는 상용로그(common logarithm)를, 스파이델(J. Speidell, 1619경)이 자연로그를 계산함으로서 로그의 사용이 확산되고 아주 완벽한 로그표들이 만들어졌다. 네이피어는 지수를 사용하지 않고 로그를 사용했었고 18세기 들어와서 오일러가 로그를 지수함수의 역함수로 정의하기 시작했다.

정수 지수와 간단한 분수 지수에 관한 지수법칙은 슈티펠(Stifel, 1487~1567)에 의해서 처음으로 나타났고 데카르트는 지금의 지수 기호를 사용했으나 음의 정수, 분수 지수는 월리스(Wallis, 1616~1703)에 의하여 처음으로 사용되었다.

(5) 행렬식과 행렬

행력(matrix)보다 먼저 사용된 행렬식(determinant)은 라이프니츠의 삼원 일차방정식의 풀이에 사용한 것에서 시작한다. 이후 크래머는 라이프니츠와는 다르게 행렬식을 재 발명 하였고, 1841년에 케일리(Cayley, 1821~1895)는 지금 사용하는 행렬식의 용어와 기호를 발명하였다.

해밀턴(W. Hamilton, 1805~1865)의 사원수 연구와 그라스만(H. Grassmann, 1809~1877)의 확장 차원의 연구에서 행렬의 구조가 시작 되었지만, 케일리에 의해서 행력이 창안되었다고 인정하고 있다. 이 후 실베

스터, 프로베니우스(Frobenius, 1849~1917) 등에 의하여 행렬의 대수 구조는 발전하였고, 실베스터는 행렬을 'matrix'라고 불렀다.

(6) 피보나치 수열

이탈리아의 수학자인 피보나치(Fibonacci, 1180~1250)는 「산반서」(Liber Abaci)에 현재 우리가 사용하고 있는 피보나치의 수열을 다음과 같다.

( i ) $a_1 = 1, a_2 = 1$

( ii ) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (단, $n = 3, 4, 5, \cdots$)

를 만족할 때, 이 수열을 피보나치의 수열이라고 한다.

피보나치의 수열은 우리 주변에서 쉽게 찾을 수 있다. 예를 들면, 식물의 잎의 배열이라든지 해바라기 꽃과 솔방울의 씨의 배열과 토끼의 번식 수 등이 있다.

(7) 수열과 급수

고대 그리스 시대의 수학자들에 의해서 연구 된 등차수열과 등비수열이 역사적으로 먼저 나타난 수열이다. 인도의 브라마굽타(Brahmagupta, 588~660?), 마하비라(Mahavira, 800?~870?), 바스카라(Bhaskara, 1114~1185)는 제곱수의 합과 세제곱수의 합을 연구하였다.

급수(series)의 용어는 그리스 시대의 피타고라스학파에 의해서 처음으로 사용되기 시작했고, 그레고리(Gregory, 1638~1675)는 1671년에 무한급수(infinite series)의 용어를 처음으로 사용하였다. 아르키메데스는 무한등비급수의 합을 처음으로 구한 사람이다. 오늘날 우리가 사용하는 무한등비수열 $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, \cdots$(단, $0 < r < 1$ )의 합을 구하는 공식을 처음으로 구한사람은 비에트이다.

## 나. 해석영역

(1) 삼각함수표

앞서 말한 이집트에서 기록된 것으로 알려진 아메스 파피루스에서 피라미드의 측량에 관한 5개 문제를 해결하는데 삼각법이 사용된 것으로 추정된다. 그리고 「주비산경」에서는 거리, 높이, 깊이 등을 측정하는 문제에 직각삼각형이 나오는 것을 보아 직각삼각형의 변의 길이 사이의 비가 사용되었을 가능성이 있다.

그리스의 히파르코스(B. hipparchos, 190?~125?)는 구면삼각형을 이용하여 위도 상에서 별의 출몰 시각을 구하는 문제를 풀었다고 한다. 히파르코스는 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 잴 필요성을 가져 삼각법을 연구하였고, 삼각법을 응용하여 하늘을 가로지르는 거리를 구하였다고 한다.

프톨레마이오스(K. Ptolemaeos, 85?~165?)는 구면삼각형의 해법, 덧셈정리, 반각정리, 사인정리와 동치인 것들을 증명하여 삼각법에 관한 『수학집성』을 저술하였다. 그리고 아리아바타는 그 당시에 3°45′마다 작성된 사인 표를 보고 평면 또는 구면에서의 직각삼각형을 풀었고, 코사인 정리와 그리스의 삼각법을 응용하였다. 9세기경의 아랍의 알 바타니(al-Battani, 858?~929?)는 1°마다 탄젠트와 코탄젠트의 값을 구하였고 둔각삼각형에 대한 코사인정리를 발견하였다. 10세기에는 아불와파(Abul-Wafa, 940~998)는 탄젠트, 코탄젠트, 시컨트, 코시컨트의 개념을 확립하여 여섯 가지 삼각함수를 모두 사용하였고 반각공식과 사인의 역함수를 사용하였다.

오늘날 우리가 사용하고 있는 사인법칙과 코사인법칙에 관한 설명이 15세기의 레기오몬타누스(Regiomontanus, 1436~1476)는 그의 저술에 삼각형의 법의 모든 것과 평면뿐만 아니라 천체에 관한 삼각법의 내용이 담겨져

있다.

(2) 함수의 극한

고대 그리스 시대부터 아르키메데스가 극한 개념을 이용하여 원주율과 도형의 넓이, 부피를 계산하였다. 현대적 의미로 함수의 극한은 코시의 저서「해석학 과정」에서 극한을 "변수가 취해 가는 값이 차츰 일정한 값에 접근해서, 그 차가 임의로 주어진 양보다도 적어질 때, 그 일정한 값을 처음 변수의 극한이라고 한다."라고 정의하고 있다. 코시는 「미적분학 요강」에서 $\epsilon, \delta$ 등의 기호를 사용하여 지금의 $\epsilon - \delta$ 논법을 함수의 극한에 대한 정의를 하고 대학 수준에서 사용하고 있다.

(3) 미분법과 적분법

17세기 데카르트와 페르마가 곡선에 접선을 긋는 문제에 대하여 연구한 것이 미분법의 생겨나기 시작했다. 데카르트는 「기하학」에서 곡선의 방정식이 주어져 있을 때 곡선의 접선을 긋는 방법을 논의하였고 이것을 방정식의 중근을 구하는데 사용하였다.

독일의 라이프니츠는 접선을 구하는 문제와 곡선을 구하는 문제는 서로 역연산관계가 있음을 착안하여 미분법과 적분법의 관계를 알아내고 미분방정식의 이론의 기초를 마련하였다. 라이프니츠는 미분법과 적분법의 기호를 고안하였고, 영국의 뉴턴은 물체의 운동속도와 가속도를 연구하면서 미적분학을 발견하였다.

기원전 5세기 그리스의 아르키메데스는 실진법(method of exhaustion)이란 방법을 사용하여 원의 넓이, 포물선의 넓이 등과 같은 도형의 넓이와 부피를 구하였다. 여기서 실진법이란 어떤 도형의 넓이나 부피를 유한개의 부분의 넓이나 부피의 합과의 부등식 관계로 나타내고, 이 결과에 연역적

인 방법을 적용하여 그 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법이다. 그리고 그는 원에 내접하는 정다각형의 넓이와 외접하는 정다각형의 넓이를 각각 구하여 그 원의 넓이의 근삿값을 구하였다. 또 구의 겉넓이는 대원의 넓이의 4배임을 알아내어 이 결과를 이용하여 원기둥과 그에 내접하는 구의 부피 사이의 관계를 알아냈다.

케플러(J. Kepler, 1571~1630)는 무한급수의 개념으로 구적법을 생각한 사람으로서 그의 저서「포도주 통의 모양과 용적 측정」에서 93가지 회전체의 부피와 최소의 재료로 최대 용량의 포도주 통을 만드는 극한값을 계산하는 문제를 다루었다. 이 후 코시에 의해 극한과 연속, 급수의 수렴과 발산에 대한 개념을 알아내고 미분가능, 적분가능에 대한 개념이 도입되어 오늘날의 미적분학의 형태가 되었다.

### 다. 해석 영역

(1) 기하학의 발전

그리스의 탈레스에 의해 합리적인 추론의 기하학이 시작되었다. 기원전 400년경 유클리드는 증명에서 피타고라스학파의 논증 체제를 바탕으로 직관적인 요소를 없애고 순수한 사유의 영영에서 다루었다. 유클리드의 연역적 접근 방법은 그 내용의 논리적 엄밀성과 고도의 조직적인 체계 때문에 지금의 현대 수학 체계의 기초적인 구조를 갖춰질 수 있었다.

이 후 19세기와 20세기 초까지 가우스, 로바체브스키, 볼리아이, 리만, 클라인, 카르탕 등은 기하학을 추상적인 차원으로 발전시켜 타원기하학, 쌍곡기하학, 사영기하학, 아핀기하학 등 오늘날의 기하학 형태도 발전시켰다.

(2) 이차곡선

에우독소스의 제자인 메나에크무스(Menaechmus, B.C. 350)는 원추를 평면으로 잘라 생긴 3개의 원추곡선을 처음으로 발견한 사람인데 이 곡선들을 3인방(triads)이라 불렀다. 메나에크무스가 만든 원추곡선은 원추에서 자르는 평면이 처음으로 만나는 모선에 수직인 평면으로 자른 단면을 그 원추의 꼭지각이 예각, 직각, 둔각임에 따라서 그 곡선을 차례대로 타원, 포물선, 쌍곡선이라고 하였다. 아폴로니우스(Apollonius, B.C. 225년경)는 한 개의 직각 복수 원뿔에서 기준선을 자르는 평면의 각도를 변화시킴으로서 모든 종류의 원추 곡선을 얻었다.

지금의 사영기하학이나 비유클리드 기하학과 같은 수학의 많은 부분에서 쌍곡적(hyperbolic), 포물적(parabolic), 타원적(elliptic)이란 용어를 사용하고 있다.

(3) 벡터대수

벡터 대수(vector algebra)의 근원은 공간에서의 유향선분의 기하적 개념에서 시작되었는데 평행사변형의 법칙에 의한 힘의 합성은 벡터의 덧셈 개념을 생각할 수 있었다. 벡터를 실수의 순서쌍으로 표현한 것은 복소수를 초월하는 수 체계의 확장 후에 일어났다.

벡터의 개념이 본격적으로 연구된 건 19세기 중반부터이다. 그라스만(H. Grassmann, 1844), 해밀턴(W.R. Hamilton, 1853), 깁스(J.W. Gibbs), 윌슨(E.B. Wilson), 리치(C.G. Ricci, 1888) 등이 업적을 남겼으며, 아인슈타인(Einstein)은 그의 상대성 이론에 벡터 개념을 사용함으로서 오늘날 보편적으로 인식되었다.

## 라. 확률과 통계 영역

(1) 순열과 조합

인도와 아랍에서는 $(a+b)^2$과 $(a+b)^3$의 전개식을 알고 이차방정식과 삼차방정식의 근을 구하는 데 사용하였지만, 고차이상 전개식의 계수를 알고 사용한 것은 14세기 중국이 먼저 알고 있었다.

20세기에 들어와서 조합이론이 발달하면서 존재의 문제, 점화식, 근사식, 합동관계 등의 수학의 모든 분야에서 적용되고 있다.

(2) 확률 체계

18세기에 확률론이 수학의 한 분야로 자리 잡게 되었는데, 베르누이는 통계적 확률이 수학적 확률과 같아진다는 큰 수의 법칙을 제시하였다. 19세기 초에는 라플라스의 저서「확률의 해석적 이론」에서는 고전적 확률의 체계를 수학적 체계로 조직하였다. 20세기에는 콜모그로프(A. Kolmogrov)는 확률론을 구성하고 순수 수학적 이론으로 정비하였다.

(3) 추측통계학

1660년 독일의 콘링(H. Conring, 1606~1681)에 의해 세계 각국의 국제현상에 관한 강의가 독일에서의 통계학의 시작이며 영국에서 통계의 시작은 정치 산술이다. 1662년 런던의 그랜트에 의해 쓰여진「사망표에 관한 자연적 또는 정치적 관찰」에서 통계의 발단이 되었다.

19세기 후반에 피어슨은 표본이론을 도입하여 모집단의 특성을 추정하는 추측통계학을 확립하였고, 피셔에 의하여 많이 발전되었다. 피셔는 모수추정론, 가설검정론 및 실험계획법 등의 업적을 통하여 추측통계학의 기초를

세우고 집단유전학의 발전에도 크게 공헌하였다([1]).

## 3.3 지도 자료 제시

여기에서는 수학사를 활용한 2 가지 학습지도 도입 자료의 예시를 제시한다.

---

### 가. 학습 자료 1

단원명: 명제

학습목표: 명제를 배워 올바른 판단력을 기른다.

<유명한 요하나 반 헬몬트 이야기>

| |
|---|
| 17세기 유명한 과학자 중에 요한 반 헬몬트가 있었는데 그는 다음과 같은 실험을 하였다. 커다란 질그릇에 200파운드의 흙을 담고 나서 물로 흙을 적신 다음 5파운드의 무게의 버드나무를 심었다, 그날 이후로 나무에는 계속 물만 뿌려 주었는데 5년이 지나면서 나무가 크게 자랐다. 요한 반 헬몬트는 질그릇 속의 흙을 쏟아내어 그 무게를 달아 보았다. 그랬더니 흙의 무게는 5년 전에 비해 단지 2온스가 부족할 뿐인 200파운드 그대로였다. 그러나 버드나무의 무게는 169파운드 3온스나 되었다. '그렇다면 164파운드의 나무는 오직 물로 만들어진 것이다'라고 요한 반 |

헬몬트는 판단했다. 다시 요한 반 헬몬트는 나무를 불에 태웠더니, 나무는 재와 가스로 변했다. 그래서 다음과 같은 판단을 내렸다.
'불, 나무, 재와 가스는 한 종류의 같은 원소구나!'
우리는 위의 '물, 나무, 재와 가스는 한 종류의 같은 원소다'라는 판단이 성립할 때까지의 실험과 사고 작용을 '판단의 내용'이라 하고 사고 작용의 결과인 판단을 문장으로 표현할 때 이런 문장 형식을 '명제'라고 한다. 문장에는 일반적으로 언어로 나타낸 것과 수학적인 언어로 나타낸 것이 있다. 이러한 문장의 내용은 참인 것, 거짓인 것, 참이라고도 거짓이라고도 말할 수 없는 것 중 어느 하나가 된다. 이때, 그 내용이 참인지 거짓인지를 판별할 수 있는 문장을 '명제'라 하며, 참, 거짓을 '명제의 진리 값'이라 한다. 즉, 명제의 진리 값에는 참과 거짓 둘 뿐이며, 참이라도 거짓이라고도 말할 수 없는 문장은 명제가 아니다.

<명제문제 예시>

어떤 마을에서 그 마을에 대대로 내려오는 중요한 물건을 도둑맞았다. 평화롭던 이 마을은 이 도난 사건 이후로 서로를 의심하게 되면서 갑자기 인심이 사납게 바뀌었다. 마을 촌장은 이것을 보고 하루 빨리 도둑을 잡아야겠다고 생각하고, 어느 날 밤에 먹물이 들어 있는 항아리 앞으로 마을 사람들을 모았다.
"여기 앞에 놓은 항아리 속에는 도둑을 잡는 두꺼비가 들어 있소. 횃불을 끈 다음에 한 사람씩 나와 이 항아리 속에 손을 넣으시오. 만일 도둑이 손을 집어넣으면 두꺼비가 손을 잘라 먹을 것이고, 도둑이 아닌 사람이 손을 넣으면 아무 일도 없을 것이오.
촌장이 어떤 생각을 하고 이런 일을 벌인 것인지 생각해보자. 다음은 촌장이 어떻게 범인을 잡을까 생각하는 과정이다.

범인은 자신이 범인인지 알고 있다.
다른 사람들은 범인이 누구인지 모른다.
범인이 위기를 느껴 범인임을 감추려는 행동을 하게 만들어야겠다.
그런 행동을 하게 할 때, 범인이 아닌 사람은 전혀 영향을 받지 않는 상황이어야 한다.
따라서 촌장의 생각을 명제로 나타내면 다음과 같다.
'만일 이 마당에 있는 어떤 사람의 손이 깨끗하면, 그 사람이 범인이다'
횃불을 다시 켜 보자. 촌장의 생각대로 되었을까? 그렇다. 다른 사람들은 두꺼비가 두렵지 않으므로 손을 푹 담궈 먹물에 손이 젖어 있고 범인만 하얀 손으로 서 있었던 것이다. 이렇게 어떤 문제를 합리적으로 해결하려면 이치에 닿는 생각이 필요하다.
위에서 '마일 이 마당에 있는 사람의 손이 깨끗하면, 그 사람이 범인이다'와 같이 촌장이 생각했던 문장을 명제라고 한다. 이때, '마일 이 마당에 있는 어떤 사람의 손기 깨끗하면'은 가정, '그 사람이 범인이다'는 결론이라 한다.
그런데 이때, 마당에 서 있지 않았던 사람의 손이 깨끗하다고 해서 범인이라고 말할 수 있을까? 다른 마을에 있는 손이 깨끗한 누구도 범인이 아니다. 그러므로 명제에서는 가정과 결론의 관계가 중요하다. 곧, 참인 명제에서는 '가정'이라는 조건 아래에서 '결론'이 성립하는 것이다.

<문제>
어느 선원이 항해 중 폭풍을 만나 표류하다가 식인종이 사는 섬에 도착했다. 이 마을에는 외부인이 나타나는 경우 한 마디 말만 하게 한 뒤, 이 말이 참이면 불에 태워죽이고 거짓이면 물에 빠뜨려 죽인다고 한다. 그렇다면 참말을 해도 죽고, 거짓말을 해도 죽으니 꼼짝없이 죽을 수밖에 없을

것인가? 여기에는 약간의 논리적인 생각을 할 줄 안다면 살 수 있는 방법이 있다. 과연 이 서원이 살 수 있으려면 어떻게 말하면 되는가?

---

## 나. 학습 자료 2

단원명: 도형의 방정식

학습목표: 도형을 좌표평면 위에 올려놓고 이를 새롭게 해석하여 그 범위를 선형계획법까지 확대한다.

<피타고라스>

| |
|---|
| 탈레스의 고향인 밀레투스와 그렇게 멀지 않은 에게해 제도의 한 섬인 사모스의 귀족으로 태어난 피타고라스는 이집트를 비롯하여 그 당시 갈 수 있는 여러 나라로 유학을 갔고 거기서 많은 지식을 얻은 후에 귀국해 '만물은 수이다'라는 확고한 신념을 바탕으로 그의 사상을 펼쳤다. 그는 무엇보다 수론을 중요시하여 원래 단순한 계산술에 지나지 않았던 것을 실용적인 지식 이상으로 그 차원을 높였으며 기하학의 원리를 고차원적인 입장에서 생각하며 연구하였다. 즉, 이집트의 세금, 실량분배의 산술을 논리적인 수론으로, 토목공사에 사용된 측량 기술을 기하학으로 승화시킨 것이다. 수학을 생활의 필요에 구속 받지 않는 순수한 학문으로 만들어 수학적 지식을 일일이 논리적 증명으로 시초를 확실히 한다는 그리스 수학의 전통이 여기에서부터 시작된 셈이다. 이집트, 바빌로니아 등지의 고대 동방민족의 수학은 단순히 현실적인 문제를 해결하는 데 쓰인 지식의 모임에 지나지 않았다. 그리고 이런 지식은 경험 |

| |
|---|
| 으로 얻어진 것이며 이것을 증명하는 일에는 관심을 갖지 않았다. |

<문제>

한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE에 대각선을 그려 그 대각선의 길이를 $x$라 하자. 이때, $x$의 값을 구하고, 그 값과 연결하여 말할 수 있는 수학적 사실 또는 자연 현상에서 볼 수 있는 사실들은 무엇일까?

# Ⅳ. 결론 및 제언

대부분의 학생들은 수학을 열심히 공부하다가, 그 다음에는 포기하고, 그 다음에는 수학을 미워한다는 것이다. 이러한 이유에는 크게 여러 가지가 있다. 첫째는 많은 학생들이 수학은 해답을 얻기 위한 방법이 유일하고 모든 문제는 단계적인 방법을 사용해야 해결할 수 있다고 생각한다. 둘째는 대부분의 학생들은 수학을 배우기에는 너무 어렵고 만일 수학문제를 해결하는 데 5분 또는 10분 이상이 걸리면 해결은 불가능하다고 단정 짓는다. 셋째는 수학은 거의 암기하지 않으면 안 되며 대부분의 학생들은 기본적인 개념이나 절차를 소홀히 하는 경우가 많다.

Ⅱ장은 수학에 대한 학생들의 학습의욕을 높이기 위하여 학습 동기에 대한 의미와 학습 동기를 자극할 수 있는 자료로 수학사를 조사함으로써 각 시대에 대표하는 수학자들의 업적을 살펴보았다. 여기서 말하는 학습 동기란 학습 행동의 근원이 되는 의욕을 자극하는 것으로 학습자가 학습하고자 하는 태도와 경향을 생기도록 하고 목적 지향적이고 적극적인 학습 행동을 하게 하는 것을 의미한다. 그리고 수학사는 오늘날과 연관성을 가지고 학습 동기를 부여하여 수학이 우리의 삶이라는 것을 알게 되어 사람들이 행하는 어떤 것이라면 그것을 행한 수학자들의 이야기들은 같은 것을 행하려는 다른 사람들을 고무시킬 수 있는 힘이 있다. 그리고 수학적 개념과 유래를 문제해결을 위해 다양한 방법적 접근을 하게 해주고 수학적 기원의 탐구를 통한 수학 자체의 상호연관성을 찾게 해준다.

Ⅲ장은 2007년 개정 교육과정의 중학교 1-3학년과 고등학교 1학년, 선택과목 중에서 수1, 수2 수업의 학습동기 자료를 수학사를 도입하여 학생들

에게 동기와 흥미를 부여할 수 있도록 제시하였다.

따라서 수학교육과정에 수학사를 도입함으로써 수학에 대한 올바른 인식을 하게 해주고, 수학에 대한 흥미를 유발시키기도 하며, 수학수업을 활기있게 만들어 주는 역할과 더불어, 수학적 내용 자체의 이해, 수학이 일상생활의 삶과 밀접하게 연계되어 있으며 또한 자연과학과 갖는 연관성의 이해, 역사 발생적 수학교육 원리에 의한 재발명의 경험을 제공할 수 있기에 수학사 도입의 필요성이 강조되고 있다.

본 연구에서 수학사 도입을 위한 자료를 다양하게 제시를 하였고 교육현장에서 활용될 수 있는 여러 가지 그림이나 사진 자료를 활용하여 수학이야기로 구성하여 다양한 자료를 개발하는데 힘써야 할 것이다.

# 참고문헌

[1] 강옥기, 수학과 교재 연구론, 경문사, 2003.

[2] 김민경, 초등수학 교육과정에서 수학사 관련 내용 분석 및 그 적용, 한국수학사학회지 18 No. 2, 43-54, 2005.

[3] 김하영, 수학사를 활용한 학습동기 유발 자료의 효과 분석, 부산교육대학교, 석사학위 논문, 2006.

[4] 박철호, 중학교 수학 지도에서 수학사를 이용한 수업 모형 탐색, 성균관대학교 석사학위 논문, 2008.

[5] 백석윤, 수학사와 수학 교육과정, 과학교육연구 16, 21-35. 1990.

[6] 신미정, 수학사를 활용한 학습동기 유발 자료 개발 및 적용, 광주교육대학교, 석사학위 논문, 2005.

[7] 신항균, 초등 수학교육에 수학사를 이용하는 방안연구, 과학과 수학교육논문집 24, 139-151, 1998.

[8] 신희경 외 3명, 학습자의 동기유발을 위한 교육심리학, 신정, 2010.

[9] 심소현, 중학교에서 수학과의 교육 목표 중 정의적 능력 향상을 위한 지도 방안 연구, 성균관대학교 석사학위 논문, 2004.

[10] 안재찬, Spider Mathematics, 고등수학(상), 2008.

[11] 안재찬, Spider Mathematics, 고등수학(하), 2008.

[12] 우정호, 학교 수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부, 1998.

[13] 우정호, 민세영, 정연준, 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(2)-수학사의 교육적 이용과 수학 교사교육, 학교수학5 No. 4, 555-572, 2005.

[14] 이계송, 수학사를 도입한 고교 수업 방안 제시, 한양대학교 석사학위 논문, 2000.

[15] 이은정, 수학교육에서의 수학사 도입에 관한 연구, 부산외국어대학교,

석사학위 논문, 2007.

[16] 전도근, 학습동기 유발 전략, 학지사, 2011.

[18] 정종진, 동기의 귀인이론과 학교학습, 학지사, 2003.

[19] 한국수학교육학회, 제1회 수학교육 공개강좌 강의록, 2008.

[20] Deborah Stipek, Motivation to Learn : From Theory to Practice(3rded), 전성연, 최병연 옮김, 학지사, 2009.

[21] Howard Eves, An Introduction To The History Of Mathematics, 이우영, 신항균 옮김, 경문사, 2002.